Klassifikation von Signalen und Systemen

Signal

Ein Signal ist eine **Funktion** $x(t)$. Sie liefert für jedes Funktionsargument t einen Funktionswert $x(t)$.

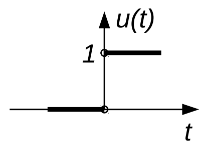
Klassifikation von Signalen

gerade/ungerade	$x(t) = x_g(t) + x_u(t)$ Es gilt: $x_g(-t) = x_g(t)$ und $x_u(-t) = -x_u(t)$, $x_u(0) = 0$ Damit: $x_g(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) + x(-t))$ und $x_u(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) - x(-t))$
reell/imaginär/komplex	$x(t) = x_r(t) + jx_i(t)$ und $x^*(t) = x_r(t) - jx_i(t)$ Es gilt: $x_r(t)$ und $x_i(t) \in \mathbb{R}$ Damit: $x_r(t) = \frac{1}{2}\,(x(t) + x^*(t))$ und $x_i(t) = \frac{1}{2j}(x(t) - x^*(t))$
periodisch	Es existiert T, sodass $x(t+T) = x(t)$ für alle t, kleinstes T heißt Periode
zeitkontinuierlich	Zeitkontinuierliches Funktionsargument, $x(t)$ mit $t \in \mathbb{R}$
zeitdiskret	Zeitdiskretes Funktionsargument, $x(n)$ mit $n \in \mathbb{Z}$
wertkontinuierlich	Kontinuierlicher Funktionswert
wertdiskret	Diskreter Funktionswert
analog	Zeitkontinuierliche und wertkontinuierlich
digital	Zeitdiskret und wertdiskret
eindimensional	Eindimensionales Funktionsargument, z.B. $x(t)$
mehrdimensional	Mehrdimensionales Funktionsargumente, z.B. $x(t, x, y)$
einkanalig	Eindimensionaler Funktionswert, z.B. $x(t)$
mehrkanalig	Mehrdimensionaler Funktionswert, z.B. $\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$

Zeitkontinuierliche Signale

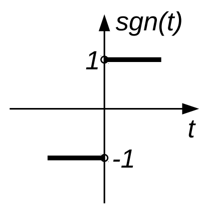
Sprungfunktion

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$



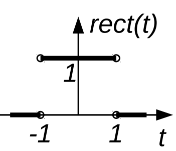
Vorzeichenfunktion

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t > 0 \\ -1 & \text{für } t < 0 \end{cases}$$
$$= 2\,u(t) - 1$$



Rechteckfunktion

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$
$$= u(t-1) - u(t+1)$$

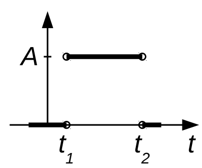


o-Funktion

$$o(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = 0 \\ 1 & \text{für } t \neq 0 \end{cases}$$

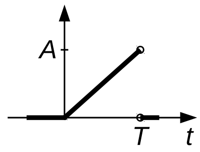
verschob. Rechteck

$$A\ \mathrm{rect}\left(\frac{t - \frac{t_1+t_2}{2}}{\frac{t_2-t_1}{2}}\right)$$



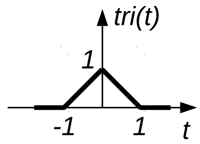
Dreiecksflanke

$$A\,\frac{t}{T}\;\mathrm{rect}\left(\frac{t-\frac{T}{2}}{\frac{T}{2}}\right)$$



Dreieckfunktion

$$\mathrm{tri}(t) = \begin{cases} 1-|t| & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



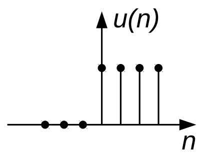
Impulsantwort $h(t) = T(\delta(t))$

Sprungantwort $a(t) = T(a(t))$

Zeitdiskrete Signale

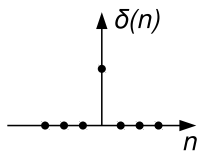
Sprungfunktion

$$u(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n \geq 0 \\ 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$



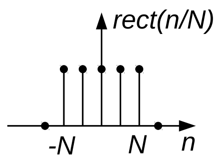
Impulsfunktion

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n \neq 0 \end{cases}$$
$$= u(n) - u(n-1)$$



Rechteckfunktion

$$\mathrm{rect}\left(\frac{n}{N}\right) = \begin{cases} 1 & \text{für } |n| \leq N \\ 0 & \text{für } |n| > N \end{cases}$$
$$= u(n+N) - u(n-N-1)$$



Impulsantwort $h(n) = T(\delta(n))$

Sprungantwort $a(n) = T(a(n))$

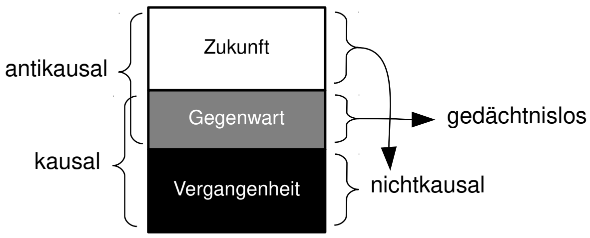
System

Das System hat einen **Operator**, der eine Funktion auf eine andere Funktion abbildet. Ein System heißt **zeitkontinuierlich, zeitdiskret, analog, digital**, wenn alle beteiligten Signale so heißen.

Klassifikation von Systemen

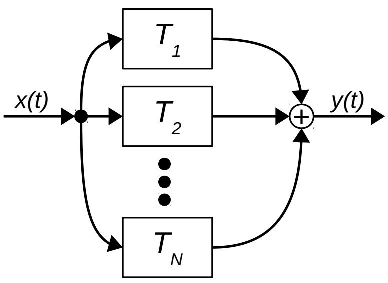
Sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Gedächtnis	**gedächtnislos**	$y(t)$ hängt **nur** vom momentanem $x(t)$ ab
	mit Gedächtnis	$y(t)$ hängt auch von zukünftigen $x(t+a)$ oder vergangenen $x(t-a)$ ab
Kausalität	**kausal**	$y(t)$ hängt von vergangenen $x(t-a)$ und momentanem $x(t)$ ab
	antikausal	$y(t)$ hängt von zukünftigen $x(t+a)$ und momentanem $x(t)$ ab
	nichtkausal	$y(t)$ hängt von zukünftigen $x(t+a)$ ab
Zeitinvarianz	**zeitinvariant**	$y(t) = T(x(t)) \implies y(t-\tau) = T(x(t-\tau))$, d.h. Systemverhalten unabhängig von Alter des Systems
	zeitvariant	Systemverhalten abhängig von Alter des Systems
Linearität	**linear**	Superpositionsprinzip gilt, d.h. **Homogenität** $T(ax(t)) = a\ T(x(t))$ und **Additivität** $T\left(\sum x_i(t)\right) = \sum T(x_i(t)$ sind erfüllt. Dies impliziert $T(0) = 0$.
	nichtlinear	Bedingungen treffen nicht zu
Stabilität	**BIBO-stabil**	$\lvert x(t)\rvert \leq M_x < \infty \implies \lvert y(t)\rvert \leq M_y < \infty\ \forall t, x(t)$, "Beschränktes Eingangssignal $\implies$ beschränktes Ausgangssignal."
	instabil	für beschränktes Eingangssignal ist unbeschränktes Ausgangssignal möglich

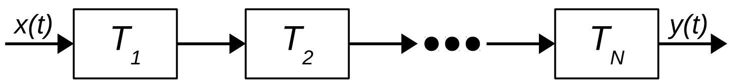


Parallel- und Kettenschaltung von Systemen

Parallelschaltung $y(t) = T_1(x(t)) + T_2(x(t)) + \ldots + T_N(x(t))$



Kettenschaltung $y(t) = T_N(\ldots T_2(T_1(x(t)))\ldots)$



Dualität Fourieranalyse / -synthese

Zeitbereich	**Frequenzbereich**
$x(t)$ kontinuierlich und nichtperiodisch	$X(j\Omega)$ kontinuierlich und nichtperiodisch
$x(t)$ kontinuierlich und periodisch	c_k diskret und nichtperiodisch
$x(n)$ diskret und nichtperiodisch	$X\left(e^{j\omega}\right)$ kontinuierlich und periodisch
$x(n)$ diskret und periodisch	c_k diskret und periodisch

Impulsantwort und Faltung

Impulsantwort und Sprungantwort

Impulsantwort Antwort $h(t)$ eines Systems auf die Anregung mit einer Dirac-Funktion $\delta(t)$

Sprungantwort Antwort $a(t)$ eines Systems auf die Anregung mit einer Sprungfunktion $u(t)$

Zusammenhang

$$a(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\ \mathrm{d}\tau, \qquad h(t) = \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}$$

Überprüfung von Systemeigenschaften mit $h(t)$

E1) System gedächtnislos $\Longleftrightarrow y(t) = c\ x(t)$
$\rightarrow$ keine Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$ dürfen auftreten

$$h(t) = c\ \delta(t)$$

E2) System kausal $\Longleftrightarrow h(t) = 0 \quad \forall t < 0$ bzw.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\ x(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

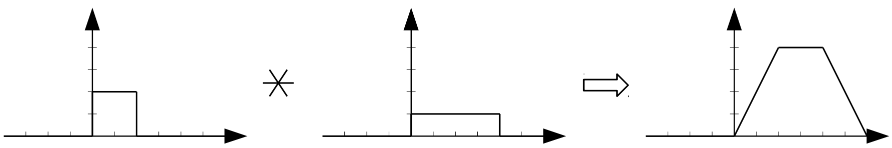
$\rightarrow$ nur in Vergangenheit, weil τ positiv.

$$= \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

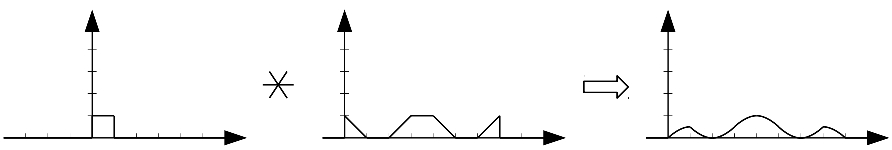
E3) System BIBO-Stabil $\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\ \mathrm{d}t < \infty \quad \not\rightleftarrows \quad h(t) \stackrel{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Faltung

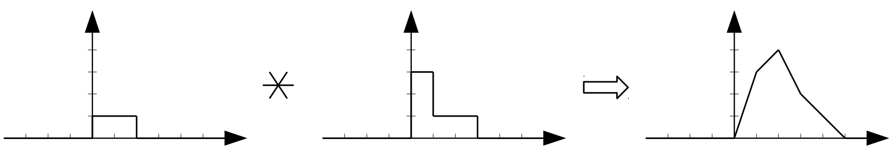
Grafische Faltung



Faltung zweier Rechtecksignale



Faltung eines Rechtecks mit einem Signal mit zwei linearen Flanken



Faltung verschieden hoher Rechtecksignale

Analytische Faltung

Definition

$$(f * g)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)\ g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Das Ausgangssignal $y(t)$ eines Systems ist das Eingangssignal $x(t)$ mit der Impulsantwort $h(t)$ gefaltet.

$$y(t) = (x * h)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)\ h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau$$

Eigenschaften

E1)	**Kommutativ**	$(x * h)(t) = (h * x)(t)$
E2)	**Assoziativ** (Kettenschaltung)	$((x * h_1) * h_2)(t) = (x * (h_1 * h_2))(t)$
E3)	**Distributiv** (Parallelschaltung)	$((x * h_1)(t) + (x * h_2)(t) = (x * (h_1 + h_2))(t)$

	E4)	**E5)**	**E6)**
Wenn $x(t)$	$= 0, \quad \forall t < 0$	Dauer D_x	verschoben um τ_x
und $h(t)$	$= 0, \quad \forall t < 0$	Dauer D_h	verschoben um τ_h
dann $y(t)$	$= 0, \quad \forall t < 0$	Dauer $D_x + D_h$	verschoben um $\tau_x + \tau_h$

Zeitdiskrete Impulsantwort und Sprungantwort

Zeitdiskrete Faltung

Definition

$$y(n) = (x * h)(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i)\ h(n-i)$$

Eigenschaften

E1)	**Kommutativ**	$(x * h)(n) = (h * x)(n)$
E2)	**Assoziativ** (Kettenschaltung)	$((x * h_1) * h_2)(n) = (x * (h_1 * h_2))(n)$
E3)	**Distributiv** (Parallelschaltung)	$((x * h_1)(n) + (x * h_2)(n) = (x * (h_1 + h_2))(n)$

	E4)	**E5)**	**E6)**
Wenn $x(n)$	$= 0, \quad \forall n < 0$	Länge l_x	verschoben um n_x
und $h(n)$	$= 0, \quad \forall n < 0$	Länge l_h	verschoben um n_h
dann $y(n)$	$= 0, \quad \forall n < 0$	Länge $l_x + l_h - 1$	verschoben um $n_x + n_h$

Beispiel zur Berechnung

$$x(n) = 1, 2, 3, 4 \qquad h(n) = 1, 2, 1$$

$h(0)\ x(n)$	1	2	3	4		
$h(1)\ x(n-1)$		2	4	6	8	
$h(2)\ x(n-2)$			1	2	3	4
$y(n) =$	1	4	8	12	11	4

DGLn

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten

DGL $\alpha(D)\ y(n) = \beta(D)\ x(n)$, wobei $D^k(y) = y(n-k)$ und α, β Polynome vom Grad N bzw. M

Eingangssignal $x(n) = u(n)\ A\ q^n$

Anfangswerte $y(-1), \ldots, y(-N)$ und (wenn nicht aus $x(n)$ ersichtlich) $x(-1), \ldots, x(-M)$

Lösung Funktion $y(n)$ für $n \geq 0$, die DGL für Eingangssignal erfüllt. $y(n)$ muss nicht die Anfangsbedingungen erfüllen, da $n \geq 0$

Homogene Lösung y_h

Bestimme $y_h(n)$, sodass $\alpha(D)\ y_h(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$. Bestimme alle $\tilde{N}$ verschiedene Nullstellen $z_1, \ldots, z_{\tilde{N}}$ der Gleichung $\alpha(z^{-1}) = 0$ nach durchmultiplizieren mit z^N.

Nullstellen verschieden: Jede Nullstelle ist einfach $\Leftrightarrow \tilde{N} = N$

$$y_h(n) = c_1\ z_1^n + \ldots + c_N\ z_N^n$$

Mehrfache Nullstellen: z_1 ist k-fache Nullstelle $\implies \tilde{N} = N - k < N$

$$y_h(n) = \left(c_{1,1} + c_{1,2}\ n + \ldots + c_{1,k}\ n^{k-1}\right)\ z_1^n + c_2\ z_2^n + \ldots + c_{\tilde{N}}\ z_{\tilde{N}}^n$$

Partikuläre Lösung y_p

Bestimme ein $y_p(n)$ so, dass $\alpha(D)\ y_p(n) = \beta(D)\ x(n)\ \forall n \geq 0$ für ein spezifisches $x(n) = u(n)\ A\ q^n, n \geq 0$.

q keine Nullstelle von $\alpha \Leftrightarrow q \neq z_i\ \forall i$

$$y_p(n) = A\ \frac{\beta(q^{-1})}{\alpha(q^{-1})}\ q^n$$

q ist k-fache Nullstelle von $\alpha \Leftrightarrow \exists i:\ q = z_i$ Mit $\alpha^{(k)}(D)$ ist k-te Ableitung von $\alpha(D)$:

$$y_p(n) = A\ \frac{\beta(q^{-1})}{\alpha^{(k)}(q^{-1})}(-q\ n)^k\ q^n$$

Allgemeine Lösung y und Lösung mit Anfangswerten

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n)$$

Um die Anfangswerte zu berücksichtigen, müssen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_N$ bzw. $c_{1,0}, \ldots, c_{1,k}, \ldots, c_{\tilde{N}}$ bestimmt werden. Setze dazu Werte von $x(n)$ und $y(n)$ in Abhängigkeit der Koeffizienten in die DGL für $n = 0, \ldots, N-1$ ein und Löse LGS.

Warnung: *Nicht* die Koeffizienten durch Lösen von $y(-1) = y(n)$ für $n = -1$ etc. bestimmen - das wird falsch, denn $y(n)$ ist für $n < 0$ keine Lösung, da y_p dann keine Lösung!

Impulsantwort h

Für Anfangsbedingungen gilt $y(-1) = \ldots = y(-N) = 0$.

Für $N > M$**:** Es ist klar, dass $\alpha(D)\ y_h(n) = 0\ \forall n \in \mathbb{Z}$ für beliebige Koeffizienten c. Nun wird das System mit der Impulsfunktion

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

angeregt. Für $n > M$ ist die Differenzengleichung also homogen, da auf der rechten Seite $x(n) = \delta(n)$ höchstens in der M-ten Verzögerung $D^M\ x(n) = \delta(n-M) = 0$ steht.

Ansatz: Impulsantwort $h(n) = y(n) = u(n)\ y_h(n)$ stimmt schon für $n > M$, bestimmte Koeffizienten so, dass $h(n)$ auch für $n = 0, \dots, M$ passt. Berechne LGS durch Einsetzen von $y(n)$, $x(n) = \delta(n)$ in DGL für $n = 0, \dots, N-1$ mit N Gleichungen und den N unbekannten Koeffizienten c.

$$h(n) = u(n)\ y_h(n) \quad \dots \text{mit den durch LGS bestimmten Koeffizienten } c$$

Sonst: Setze Eingangssignal $x(n) = u(n)\ A\ q^n$ zu $A = q = 1$, sodass $x(n) = u(n)$. Bestimme allgemeine Lösung der DGL mit diesem Eingangssignal, Lösung ist Sprungantwort $a(n) = y(n)$.

Da gilt $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$ folgt aus Linearität mit Systemoperator T und $T(\delta(n)) = T(u(n) - u(n-1))$:

$$h(n) = a(n) - a(n-1)$$

FS

Fourierreihe zeitkontinuierlicher Signale

Definition

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\ e^{jk\Omega t} = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\ \cos(k\Omega t) + b_k\ \sin(k\Omega t))$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T x(t)\ e^{-jk\Omega t}\ \mathrm{d}t$$

oder

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t)\ \mathrm{d}t$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T x(t)\ \cos(k\Omega t)\ \mathrm{d}t,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T x(t)\ \sin(k\Omega t)\ \mathrm{d}t,\ k \in \mathbb{Z}$$

Eigenschaften

Spiegelung

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_{-k}$$

Konjugiert komplex

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c^*_{-k}$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} x(t) \text{ gerade reell} &\iff c_k \text{ gerade reell} \\ x(t) \text{ gerade imaginär} &\iff c_k \text{ gerade imaginär} \\ x(t) \text{ ungerade reell} &\iff c_k \text{ ungerade imaginär} \\ x(t) \text{ ungerade imaginär} &\iff c_k \text{ ungerade reell} \end{aligned}$$

Linearität

$$\sum_i \alpha_i\ x_i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_i \alpha_i\ c_{i,k}$$

Verschiebung

$$x(t - t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-jk\Omega t_0}\ c_k$$

$$e^{jk_0\Omega t}\ x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_{k-k_0},\ k_0 \in \mathbb{Z}$$

Dehnung

$$a > 0 : x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} c_k \text{ mit Grundfrequenz } a\Omega$$

Differentiation

$$x^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (jk\Omega)^n\ c_k$$

Integration

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ \mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{jk\Omega}\ c_k \text{ wenn } c_0 = 0$$

Moment

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} k^n\ c_k = \frac{1}{(j\Omega)^n}\ x^{(n)}(t)\Big|_{t=0}$$

Faltung

$$\frac{1}{T} \int_T x_1(\tau)\ x_2(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} c_{1,k}\ c_{2,k}$$

$$x_1(t)\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_{1,l}\ c_{2,k-l}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

Anfangswert

$$x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k$$

Fouriertransformation zeitkontinuierlicher Signale

FT

Definition

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j\Omega t}\ \mathrm{d}t \qquad\qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\ e^{j\Omega t}\ \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}$$

Existenzbedingungen

D1 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\ \mathrm{d}t\ <\ \infty$

D2 $x(t)$ hat in jedem endlichen Zeitintervall eine endliche Anzahl von (strengen) Extrema

D3 $x(t)$ hat in jedem endlichen Zeitintervall eine endliche Anzahl von Sprungstellen mit endlicher Sprunghöhe

Eigenschaften

Spiegelung

$$x(-t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(-j\Omega)$$

Konjugiert komplex

$$x^*(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*(-j\Omega)$$

Symmetrie

$$\begin{aligned}
x(t) \text{ gerade reell} &\Longleftrightarrow X(j\Omega) \text{ gerade reell}\\
x(t) \text{ gerade imaginär} &\Longleftrightarrow X(j\Omega) \text{ gerade imaginär}\\
x(t) \text{ ungerade reell} &\Longleftrightarrow X(j\Omega) \text{ ungerade imaginär}\\
x(t) \text{ ungerade imaginär} &\Longleftrightarrow X(j\Omega) \text{ ungerade reell}
\end{aligned}$$

Dualität / Vertauschbarkeit

$$X(jt) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi x(-\Omega)$$

Linearität

$$\sum_i a_i x_i(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_i a_i X_i(j\Omega)$$

Verschiebung

$$x(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0} X(j\Omega)$$

$$e^{j\Omega_0 t} x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega - j\Omega_0)$$

Dehnung

$$x(at) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a}\, X\left(j\frac{\Omega}{a}\right),\ a > 0$$

$$\frac{1}{a}\, x\left(\frac{t}{a}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(ja\Omega),\ a > 0$$

Differentiation

$$x^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} (j\Omega)^n X(j\Omega)$$

$$(-jt)^n x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{d}^n X(j\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^n}$$

Integration

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\ \mathrm{d}\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{j\Omega}\ X(j\Omega)\ o(\Omega) + \pi\ X(0)\ \delta(\Omega)$$

$$\frac{j}{t}\ x(t)\ o(t) + \pi\ x(0)\ \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{-\infty}^{\Omega} X(j\sigma)\ \mathrm{d}\sigma$$

Moment

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n x(t)\ \mathrm{d}t = j^n \left.\frac{\mathrm{d}^n X(j\Omega)}{\mathrm{d}\Omega^n}\right|_{\Omega=0}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Omega^n X(j\Omega)\ \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} = (-j)^n \left. x^{(n)}(t)\right|_{t=0}$$

Faltung

$$(x_1 * x_2)(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_1(j\Omega)\ X_2(j\Omega)$$

$$x_1(t)\ x_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2\pi}\ (X_1 * X_2)(j\Omega)$$

Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\ x_2^*(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\Omega)\ X_2^*(j\Omega)\ \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}$$

Anfangswert

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \mathrm{d}t \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega)\ \frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}$$

Wichtige Fouriertransformationen

Seien $T > 0$, $\Omega_g > 0$.

$$\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 1$$
$$\frac{1}{2\pi} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\Omega)$$
$$\delta(t-t_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\Omega t_0}$$
$$\frac{1}{2\pi}\, e^{j\Omega_0 t} \xrightarrow{\mathcal{F}} \delta(\Omega-\Omega_0)$$
$$\cos(\Omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left(\delta(\Omega-\Omega_0)+\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$
$$\sin(\Omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\Omega-\Omega_0)-\delta(\Omega+\Omega_0)\right)$$
$$\mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2}{j\Omega}\, o(\Omega)$$
$$\frac{j}{\pi t}\, o(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{sgn}(t)$$
$$u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\delta(\Omega)+\frac{1}{j\Omega}\, o(\Omega)$$
$$\frac{1}{2}\,\delta(t)+\frac{j}{2\pi t}\, o(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} u(\Omega)$$
$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2T\ \mathrm{sinc}(\Omega T)$$

$$\frac{\Omega_g}{\pi}\ \mathrm{sinc}(\Omega_g t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{\Omega_g}\right)$$
$$\left(1-\frac{|t|}{T}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} T\ \mathrm{sinc}^2\left(\frac{\Omega T}{2}\right)$$
$$e^{-at}\ u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a+j\Omega},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$
$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\ e^{-at}u(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(a+j\Omega)^n},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$
$$e^{-a|t|} \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2a}{a^2+\Omega^2},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$
$$e^{-a|t|}\ \mathrm{sgn}(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} -j\frac{2\Omega}{a^2+\Omega^2},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$
$$e^{-at^2} \xrightarrow{\mathcal{F}} \sqrt{\frac{\pi}{a}}\ e^{-\Omega^2/(4a)},\quad \mathrm{Re}(a)>0$$
$$\cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin(\Omega T)}{\Omega\ (1-(\Omega T/\pi)^2)}$$
$$\mathrm{sinc}^2\left(\frac{T\ t}{2}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{2\pi}{T}\left(1-\frac{|\Omega|}{T}\right)\ \mathrm{rect}\left(\frac{\Omega}{T}\right)$$
$$\mathrm{tri}\left(\frac{t}{t_0}\right) \xrightarrow{\mathcal{F}} t_0\left[\mathrm{sinc}\left(\Omega\frac{t_0}{2}\right)\right]^2$$

DFS

Fourierreihe zeitdiskreter Signale

Definition

$$x(n)=\sum_{k=0}^{N-1} c_k\ e^{j\frac{2\pi n}{N}k} \quad \text{mit} \quad c_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\ e^{-j\frac{2\pi n}{N}k}$$

Existenzbedingung

$x(n)$ muss periodisch sein, was nur für rationale ($\in \mathbb{Q}$) normierte Frequenzen f der Fall ist, zur Probe Vorfaktor von n so ersetzen, dass Periodizität für rationales f vorliegen würde. Sei beispielsweise

$$x(n)=\sin(a\ x) \stackrel{!}{=} \sin(2\pi f\ x) \implies f=\frac{a}{2\pi}$$

Somit ist $x(n)$ periodisch $\iff a=\pi\ q,\ q\in\mathbb{Q}$. Da Summe endlich existiert DFS für periodische $x(n)$ immer.

Eigenschaften

Periodizität

$$c_{k+N}=c_k\ \forall k\in\mathbb{N}$$

Parseval'sche Gleichung, *mittlere Leistung von* $x(n)$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{k=0}^{N-1}|c_k|^2$$

Fouriertransformation zeitdiskreter Signale

Definition

$$x(n) = \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\ e^{j\omega n}\ \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \quad \text{mit} \quad X\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\ e^{-j\omega n}$$

Eigenschaften

Spiegelung

$$x(-n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{-j\omega}\right)$$

Konjugiert komplex

$$x^*(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X^*\left(e^{-j\omega}\right)$$

Symmetrie

$$\begin{aligned} x(n) \text{ gerade reell} &\Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \text{ gerade reell} \\ x(n) \text{ gerade imaginär} &\Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \text{ gerade imaginär} \\ x(n) \text{ ungerade reell} &\Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \text{ ungerade imaginär} \\ x(n) \text{ ungerade imaginär} &\Longleftrightarrow X(e^{j\omega}) \text{ ungerade reell} \end{aligned}$$

Periodizität *Neu!*

$$X\left(e^{j(\omega+2\pi)}\right) = X(e^{j\omega})$$

Linearität

$$\sum_i a_i x_i(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_i a_i X_i\left(e^{j\omega}\right)$$

Verschiebung

$$\begin{aligned} x(n-n_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0}\ X\left(e^{j\omega}\right) \\ e^{j\omega_0 n}\ x(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right) \end{aligned}$$

Differentiation

$$(-jn)^m\ x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\mathrm{d}^m X(e^{j\omega})}{\mathrm{d}\omega^m}$$

Moment

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^m\ x(n) = j^m \frac{\mathrm{d}^m X\left(e^{j\omega}\right)}{\mathrm{d}\omega^m}\bigg|_{\omega=0}$$

$$x(0) = \int_{2\pi} X\left(e^{j\omega}\right)\ \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Faltung

$$\begin{aligned} (x_1 * x_2)(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} X_1\left(e^{j\omega}\right)\ X_2\left(e^{j\omega}\right) \\ x_1(n)\ x_2(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \int_{2\pi} X_1\left(e^{j\lambda}\right)\ X_2\left(e^{j(\omega-\lambda)}\right)\ \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi} \end{aligned}$$

Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)\ x_2^*(n) = \int_{2\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right)\ X_2^*\left(e^{j\omega}\right)\ \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

DTFT

Wichtige zeitdiskrete Fouriertransformationen

$$\text{Mit} \quad \eta(\omega) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega + 2k\pi)$$

$$\begin{aligned} \delta(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} 1 \\ \frac{1}{2\pi} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \eta(\omega) \\ \delta(n-n_0) &\xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega n_0} \\ \frac{1}{2\pi}\ e^{j\omega_0 n} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \eta(\omega-\omega_0) \\ \cos(\omega_0 n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \pi\left(\eta(\omega-\omega_0) + \eta(\omega+\omega_0)\right) \\ \sin(\omega_0 n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\pi}{j}\left(\eta(\omega-\omega_0) - \eta(\omega+\omega_0)\right) \\ \mathrm{rect}\left(\frac{n}{N}\right) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sin\left(\omega(2N+1)/2\right)}{\sin(\omega/2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\omega_g}{\pi}\ \mathrm{sinc}(\omega_g n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega+2k\pi}{\omega_g}\right) \\ a^n u(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-a\ e^{-j\omega}}, \quad |a|<1 \\ a^{|n|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1-a^2}{1-2a\ \cos(\omega)+a^2}, \quad |a|<1 \\ e^{-an}\ u(n) &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1-e^{-(a+j\omega)}}, \quad \mathrm{Re}(a)>0 \\ e^{-a|n|} &\xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sinh(a)}{\cosh(a)-\cos(\omega)}, \quad \mathrm{Re}(a)>0 \end{aligned}$$

Abtasten zeitkontinuierlicher Signale

Das Signal $x_a(t)$ wird mit Abtastintervall T_s und zugehöriger Abtastfrequenz $F_s = \frac{1}{T_S}$ zu $x(n)$ abgetastet:

$$x(n) := x_a(n\ T_s)$$

Abtasttheorem für $x_a(t), x(n) \in \mathbb{C}$

Für $F_s > B$, d.h. Abtastfrequenz ist größer als Bandbreite des Signals, lässt sich bei bekanntem Frequenzbereich das Signal $x_a(t) \in \mathbb{C}$ eindeutig aus $x(n) \in \mathbb{C}$ rekonstruieren.

Normierte Frequenz für periodische Signale

Für $x_a(t)$ periodisch mit Periode T und Frequenz F wird die dimensionslose normierte Frequenz f definiert zu

$$f = F\ T_S = \frac{F}{F_s} = \frac{T_S}{T}$$

Abtasttheorem für $x_a(t), x(n) \in \mathbb{R}$

Für $x_a(t) \in \mathbb{R}$, d.h. $x(n) \in \mathbb{R}$ ist $X(j\Omega)$ und damit $X(e^{j\omega})$ gerade. Daraus folgt das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem für relle Signale. Die Abtastung eines zeitkontinuierlichen reellen Signals $x(t)$ ist genau dann eindeutig, wenn die Abtastkreisfrequenz Ω_s mehr als doppelt so groß ist, wie die maximale Frequenz Ω_{max} in $x(t)$:

$$\Omega_s > 2\ \Omega_{max}$$

Abtastung

Interpolation von $x_a(t)$ aus $x(n)$

Mit $x_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\Omega)$ und $x_n(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X\left(e^{j\omega}\right)$ gilt $X(j\Omega) = H(j\Omega)\ X(e^{j\omega})$, wobei $H(j\Omega)$ das ideale Tiefpassfilter $H(j\Omega) = T_S\ \operatorname{rect}\left(\frac{\Omega}{\Omega_s/2}\right)$ mit Grenzfrequenz $\Omega_s/2$ darstellt. Alle anderen Interpolationen erfüllen die Bedingung der Frequenzbeschränktheit nicht.

Aliasing

Für die Fouriertransformierte $X(e^{j\omega})$ des abgetasteten Signals $x(n)$ (d.h. $x(n) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$) gilt mit $x_a(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X_a(j\Omega)$:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(j(\Omega + k\Omega_s)\right) \quad \text{mit } \Omega_s = 2\pi F_s$$

Das heißt $X\left(e^{j\omega}\right)$ ist die Ω_s-periodische Fortsetzung von $X_a(j\Omega)$, wobei Frequenzanteile mit $\Omega > \frac{\Omega_s}{2}$ im Grundfrequenzintervall aufaddiert werden. Somit kann $\Omega_a = k\ \Omega_s + \Omega_0,\ k \in \mathbb{Z}$ nicht von Ω_0 unterschieden werden.

Mathe

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = -\cos(2\alpha)$$
$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$$
$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \qquad \sin(x)^2 = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

Hyperbolische Funktionen

$$\cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$$

Eulersche Formel

$$e^{ix} = cos(x) + i\sin(x)$$
$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen

$$\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\sin(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \qquad -\cos(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Summenformeln

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\ q \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q},\ |q| < 1$$
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n^2+n}{2}$$