Abstastung und Quantisierung

Abtasttheorem

$$f_s \geq 2\ f_{\max} = f_{s,N}$$

Nyquist-Frequenz

$$f_N = \frac{1}{2}\ f_s$$

Nyquist-Rate

$$f_{s,N} = 2\ f_{\max}$$

Abtastung im Frequenzbereich Für $x_k = x(t + k/f_s)$

$$X_{\text{sampled}}(f) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s)$$

Grenzfrequenz Rekonstruktions-Tiefpass-Filter (RLP)

$$f_{\max} < f_{\text{RLP}} < f_s - f_{\max}$$

Signal to Quantization Noise Ratio bei N_Q Bits

$$\text{SQNR}|_{\text{dB}} \approx N_Q\ 6\text{dB} - \text{const.}$$

Erstes Nyquist-Kriterium

Bei der Schrittgeschwindigkeit $R_s = \frac{1}{T_s}$ erfüllt ein Impuls $g(t)$ das erste Nyquist-Kriterium, wenn

$$g(t) \overset{!}{=} \begin{cases} 1 & t = 0 \\ 0 & t = k\ T_s,\ k \neq 0,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad \text{(Zeitbereich)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\omega_s}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega - k\omega_s) \overset{!}{=} 1 \quad \text{mit } \omega_s = \frac{2\pi}{T_s} \qquad \text{(Frequenzbereich)}$$

Frequenzbereich intuitiv: Um $\ldots,\ -\omega_s,\ 0,\ \omega_s,\ 2\omega_s,\ \ldots$ verschobene Spektra addieren sich zu 1 auf! Wenn das erste Nyquist-Kriterium erfüllt ist, dann gibt es keine Intersymbol-Interferenz (ISI).

Hinweis: Das zweite Nyquist-Kriterium ist heute kaum noch praxisrelevant.

Raised-Cosine-Impulsformung

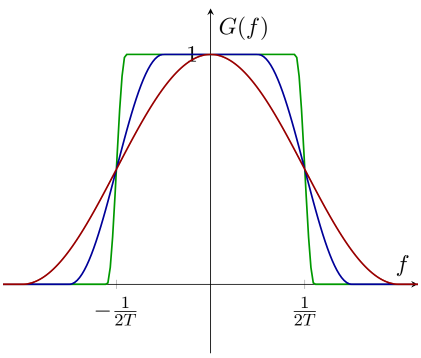
α … "roll-off"-Faktor, $T = \frac{1}{R_s}$ mit R_s … Symbolrate. Für $\alpha = 0$ ist der Raised-Cosine-Impuls ein sinc-Impuls, d.h. ein idealer Tiefpass.

Spektrum $G(f)$

$$G(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T} \\ \frac{1}{2}\ \left(1 + \cos\left(\frac{\pi T}{\alpha}\ \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T}\right)\right)\right) & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Impulsantwort $g(t)$

$$g(t)\ T = \begin{cases} 1 & t = 0 \\ \frac{\sin(\pi/(2\alpha))}{\pi/(2\alpha)}\ \frac{\pi}{4} & |t| = \frac{T}{2\alpha} \\ \frac{\sin(\pi t/T)}{\pi t/T}\ \frac{\cos(\alpha\pi t/T)}{1-(2\alpha t/T)^2} & \text{sonst} \end{cases}$$



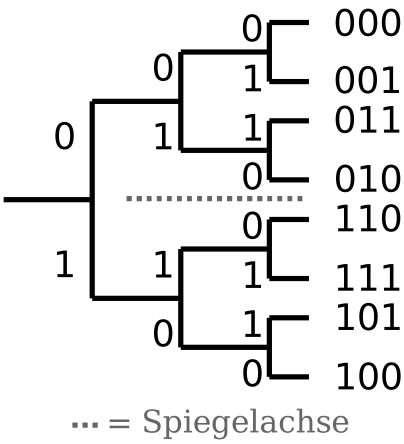
Basisband-Bandbreite

$$B_{\text{BB}} = \frac{1}{2}\ (1 + \alpha)\ R_s$$

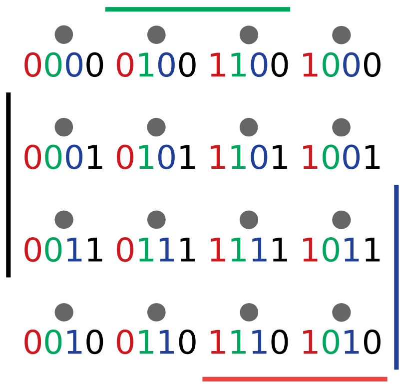
Bandpassbereich-Bandbreite

$$B_{\text{BP}} = (1 + \alpha)\ R_s$$

Gray-Labelling



Konstruktion eines Gray-Codes mit Baum. Damit sich nur je ein Bit verändert, muss die Beschriftung symmetrisch sein.



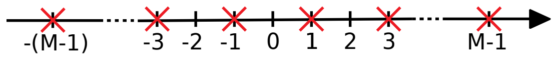
Gray-Labelling einer 16-QAM. Beschriftung mit Variablen wie bei Karnaugh-Diagramm und Wert n-ter Variable der n-ten Stelle zuordnen.

Puls-Amplituden Modulation (PAM)

$$a_k \in \{-(M-1) + 2l \mid l = 0, \dots, M-1\}$$

Für Normierung $P_S = E\left[|\tilde{a_k}|^2\right] \stackrel{!}{=} 1$ wähle

$$\tilde{a}_k = \text{norm} \cdot a_k \quad \text{mit} \quad \text{norm} = \frac{1}{\sqrt{\frac{M^2-1}{3}}}$$



Konstellation der (unnormierten) Symbole a_k

Rauschen und Symbolfehlerwahrscheinlichkeit

SNR, Signalleistung und Varianz

Sei σ^2 ... Varianz der Gaußverteilung und E_s ... Signalleistung.
Für **reelles Basisband (AM)** gilt:

$$\text{SNR}_s = \frac{P_\text{signal}}{P_\text{noise}} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{E_s}{\sigma^2} \quad \stackrel{E_s=1}{\Longrightarrow} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\text{SNR}_s}}$$

Für **komplexes Basisband (QAM)** teilt sich die Rauschleistung auf beide Dimensionen auf:

$$\text{SNR}_s = \frac{P_\text{signal}}{P_\text{noise}} = \frac{E_s}{N_0} = \frac{E_s}{2\ \sigma^2} \quad \stackrel{E_s=1}{\Longrightarrow} \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{2\ \text{SNR}_s}}$$

Die mittlere **Signalleistung** $P_\text{signal} = E_s$ ist durch den Erwartungswert der Symbolleistung ($x_k \in \mathbb{C}$ sind die Symbole) gegeben:

$$E_s = E[|x_k|^2] = \sum_k P_k |x_k|^2$$

Allgemein

$$p_n(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\ e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\ |\xi|^2} \quad \text{mit } \xi \in \mathbb{C} \text{ oder } \xi \in \mathbb{R}$$

$$P[n \le c] = \int_{-\infty}^{c} p_n(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \mathrm{CDF}\left(\frac{c}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{c}{\sigma}\right)$$

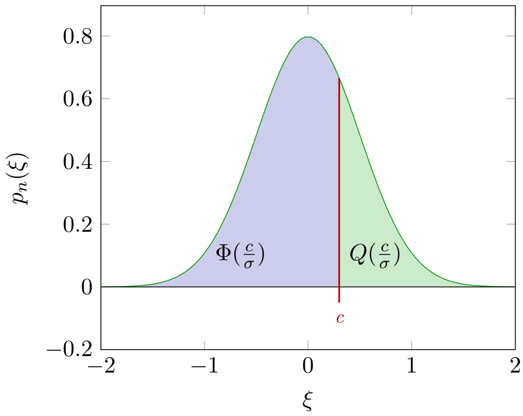
$$P[n > c] = \int_{c}^{\infty} p_n(\xi)\ \mathrm{d}\xi = \mathrm{CCDF}\left(\frac{c}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{c}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x) = Q(-x)$$

$$Q(x) = 1 - \Phi(x)$$

$$\Longrightarrow \Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad Q(x) = 1 - Q(-x)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte für $n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$



Für verschiedene Modulationsarten

Mit Basisbandrauschleistung $N_0 = 2\sigma_n^2$ ergibt sich Basisband-SNR zu $\mathrm{SNR}_s = \frac{E_s}{N_0}$.

	SER, $P_{s,\mathrm{err}}$	BER, $P_{b,\mathrm{err}}$, *
BPSK	$Q\left(\sqrt{2\ \mathrm{SNR}_s}\right)$	$Q\left(\sqrt{2\ \mathrm{SNR}_b}\right)$
QPSK	$\sim 2\ Q\left(\sqrt{\mathrm{SNR}_s}\right)$	$Q\left(\sqrt{2\ \mathrm{SNR}_b}\right)$
M-PSK	$\sim 2\ Q\left(\sqrt{2\ \mathrm{SNR}_s}\ \sin(\pi/M)\right)$	$\sim \frac{2}{\mathrm{ld}(M)}\ Q\left(\sqrt{2\ \mathrm{SNR}_b\ \mathrm{ld}(M)}\ \sin(\pi/M)\right)$
M-PAM	$2\ \left(1 - \frac{1}{M}\right)\ Q\left(\sqrt{\frac{6}{M^2-1}\ \mathrm{SNR}_s}\right)$	$\sim \frac{2}{\mathrm{ld}(M)}\ \left(1 - \frac{1}{M}\right)\ Q\left(\sqrt{\frac{6\ \mathrm{ld}(M)}{M^2-1}\ \mathrm{SNR}_b}\right)$
M-QAM	$\sim 4\ Q\left(\sqrt{\frac{3\ \mathrm{SNR}_s}{M-1}}\right)$	$\sim \frac{4}{\mathrm{ld}(M)}\ Q\left(\sqrt{\frac{3\ \mathrm{SNR}_b\ \mathrm{ld}(M)}{M-1}}\right)$

* Für Coderate $R_c = 1$ (keine Redundanzcodierung) folgt $\mathrm{SNR}_b = \frac{\mathrm{SNR}_s}{M_b} = \frac{\mathrm{SNR}_s}{\mathrm{ld}(M)}$.
Näherung für hohes SNR und Gray-Labeling:

$$P_{s,\mathrm{err}} = M_b\ P_{b,\mathrm{err}}$$

QAM

Möchte Basisbandsignal $z(t) \in \mathbb{C}$ zu Bandpasssignal $u(t)$ mit Trägerfrequenz f_0, $\omega_0 = 2\pi f_0$ modulieren.
Komplexe Darstellung (Fouriertransformation mit $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*)$):

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{x(t)\ e^{j\omega_0 t}\right\} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(f) = \frac{1}{2}\ (X(f - f_0) + X(f + f_0))$$

Reelle Darstellung:

$$u(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\}\ \cos(\omega_0 t) - \mathrm{Im}\{x(t)\}\ \sin(\omega_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad U(f) = \frac{1}{2}\ (X(f - f_0) + X(f + f_0))$$

Einseitenband-AM und Hilbertfilter

Idee: Ein analytisches Signal enthält keine negativen Frequenzen. Aus einem reellen Signal $x(t) \in \mathbb{R}$ kann ein analytisches Signal $z(t) \in \mathbb{C}$ ohne Informationsverlust erzeugt werden durch Filterung mit $F(f) = 1 + \operatorname{sgn}(f)$:

$$Z(f) = X(f)\ F(f) = X(f)\ (1 + \operatorname{sgn}(f)) = X(f) + X(f)\ \operatorname{sgn}(f)$$

Mit $\operatorname{sgn}(f) \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{j}{\pi t}$ folgt Basisbandsignal für **upper sideband (USB)**-Modulation:

$$z_{\mathrm{USB}}(t) = x(t) + j\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)$$

Analog folgt durch Filterung mit $F(f) = 1 - \operatorname{sgn}(f)$ für **lower sideband (LSB)**-Modulation:

$$z_{\mathrm{LSB}}(t) = x(t) - j\left(x(t) * \frac{1}{\pi t}\right)$$

$\Longrightarrow$ $z_{\mathrm{USB}}(t)$ bzw. $z_{\mathrm{LSB}}(t)$ dann einer QAM zuführen!
Das Filter

$$g(t) = \frac{1}{\pi t}$$

wird **Hilbertfilter** genannt.

Digitale QAM

Der ***constellation mapper*** ordnet den Symbolen M verschiedene I/Q-Werte (Konstellationen) zu. Pro Symbol werden also

$$M_b = \operatorname{ld} M \quad \left[\frac{\text{bit}}{\text{symbol}}\right]$$

Bits übertragen. Mit einer **Symbolrate** (= Schrittgeschwindigkeit) R_s $\left[\frac{\text{symbol}}{s} = \text{Baud}\right]$ ergibt sich die **Bitrate** R_b zu

$$R_b = M_b\ R_s \quad \left[\frac{\text{bit}}{s}\right]$$

Sender- / Empfängerunzulänglichkeiten

Rauschen im Sender

TX-Rauschen wird durch den EVM-Wert (Error Vector Magnitude) angegeben. Am Senderausgang gilt:

$$\mathrm{EVM} = \frac{1}{\mathrm{SNR}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{EVM}|_{\mathrm{dB}} = -\mathrm{SNR}|_{\mathrm{dB}}$$

Phasenoffset

Ein geschätztes Phasenoffset von $\hat{\varphi}$ kann durch Multiplikation der Empfangssymbole mit $e^{-j\varphi}$ korrigiert werden.

Frequenzoffset

Für jedes Symbol steigt der Phasenoffset um

$$\varphi_{\mathrm{inc}} = 2\pi f_{\mathrm{off}}\ T_s$$

IQ-Imbalance

DC-Offset des Q-Kanals um d_{imb}, Phasenoffset des Q-Kanals um φ_{imb}, Amplitudenoffset des Q-Kanals um a_{imb}. Aus idealem Symbol $s \to \mathbf{s} = (\text{Re}(s) \quad \text{Im}(s))^T$ wird $s_{\text{imb}} \to \mathbf{s}_{\text{imb}} = (\text{Re}(s_{\text{imb}}) \quad \text{Im}(s_{\text{imb}}))^T$:

$$\mathbf{s}_{\text{imb}} = \begin{pmatrix} 1 & -a_{\text{imb}} \ \sin(\varphi_{\text{imb}}) \\ 0 & a_{\text{imb}} \ \cos(\varphi_{\text{imb}}) \end{pmatrix} \ \mathbf{s} + \begin{pmatrix} 0 \\ d_{\text{imb}} \end{pmatrix}$$

Schätzung der IQ-Imbalance durch Pilotsymbole, Kompensation durch Inversion der obigen Gleichung.

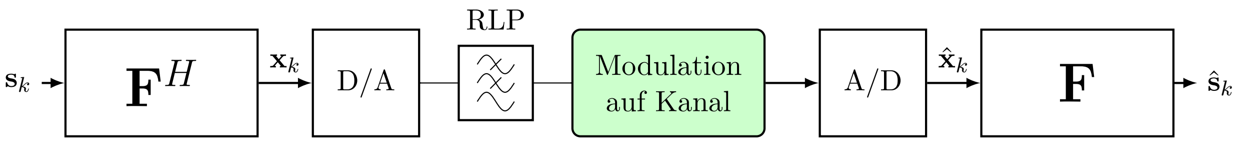
OFDM und FFT / iFFT

- Ein **OFDM-Symbol** besteht üblicherweise aus N_{sub} **QAM-Symbolen** auf den jeweiligen Unterträgern
- OFDM-Symbol-**Schrittgeschwindigkeit** $R_s = \frac{1}{T_s}$
- **Abtastrate** $R_{\text{samp}} = \frac{1}{T_{\text{samp}}} = N_{\text{sub}} \ R_s = \frac{N_{\text{sub}}}{T_s}$
- OFDM-Symbol-Index k mit $t = k \ T_s$
- Abtastwertindex m (“schnelle Zeit”) mit $t = m \ T_{\text{samp}}$, d.h. N_{sub} Abtastwerte pro OFDM-Symbol
- Moduliere unterträger mit $M_b = \text{ld}(M)$ bits pro Symbol

Dann gilt für Bitrate R_b, Unterträgerabstand Δf und gesamte Bandbreite B:

$$R_b = M_b \ N_{\text{sub}} \ R_s$$

$$B = R_{\text{samp}} = N_{\text{sub}} \ R_s$$
$$\Delta f = R_s$$



OFDM-Sender und -Empfänger unter der Annahme, dass D/A bzw. A/D-Wandler direkt N_{sub} Symbole serialisieren / parallelisieren

Habe für $k = \left\lfloor \frac{m}{N_{\text{sub}}} \right\rfloor$-ten Zeitschritt

$m = k \ N_{\text{sub}}, \dots, (k+1) \ N_{\text{sub}} - 1$	Schnelle Zeit mit N_{sub} Zeitindizes pro k
$s_m \in \mathbb{C}$	N_{sub} zu sendende Symbole
$\mathbf{s}_k = (s_{kN_{\text{sub}}}, \dots, s_{(k+1)N_{\text{sub}}-1}) \in \mathbb{C}^{N_{\text{sub}} \times 1}$	Frequenzbereichsvektor mit N_{sub} zu sendenden Symbolen (parallelisiert aus s_m)
$\mathbf{x}_k \in \mathbb{C}^{N_{\text{sub}} \times 1}$	Zeitbereichsvektor mit N_{sub} zu sendenden Abtastwerden
$x_m = \mathbf{x}_k[m \mod N_{\text{sub}}] \in \mathbb{C}$	Zu sendende Abtastwerte (serialisiert aus $\mathbf{x}_k$)

Es gilt (da $\mathbf{F}$ unitär):

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}^H\ \mathbf{s}_k \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{s}_k = \mathbf{F}\ \mathbf{x}_k, \qquad \text{wobei } \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H = \mathbf{F}^*$$

Mit $W := e^{j\frac{2\pi}{N_{\text{sub}}}}$:

$$\mathbf{F}^H = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{sub}}}} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & \dots & W^{N_{\text{sub}}-1} \\ W^0 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N_{\text{sub}}-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{N_{\text{sub}}-1} & W^{2(N_{\text{sub}}-1)} & \dots & W^{(N_{\text{sub}}-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{\text{sub}} \times N_{\text{sub}}}$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N_{\text{sub}}}} \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & \dots & W^0 \\ W^0 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(N_{\text{sub}}-1)} \\ W^0 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(N_{\text{sub}}-1)} \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ W^0 & W^{-(N_{\text{sub}}-1)} & W^{-2(N_{\text{sub}}-1)} & \dots & W^{-(N_{\text{sub}}-1)^2} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_{\text{sub}} \times N_{\text{sub}}}$$

Mathe-Formelsammlung

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha)\ \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$
$$\cos(\alpha)\ \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$
$$\sin(\alpha)\ \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta) + \cos(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\ \cos(\beta) - \cos(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \sin(\alpha)\ \sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\ \cos(\beta) + \sin(\alpha)\ \sin(\beta)$$

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$
$$\sin^2(\alpha) - \cos^2(\alpha) = -\cos(2\alpha)$$
$$\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = \cos(2\alpha)$$
$$\cos(x)^2 = \frac{1}{2}\,(1+\cos(2x)) \qquad \sin(x)^2 = \frac{1}{2}\,(1-\cos(2x))$$

Wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation

Spiegelung

$$x(-t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(-\omega)$$

Verschiebung

$$x(t-t_0) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; e^{-j\omega t_0}\ X(\omega)$$
$$e^{j\omega_0 t}\ x(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X(\omega-\omega_0)$$

Konjugiert komplex

$$x^*(t) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; X^*(-\omega)$$

Anfangswert

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ \mathrm{d}t \qquad x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\ \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

Wichtige Fouriertransformationen

Sei Definition der Rechteckfunktion:

$$\operatorname{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$$

Seien $t_0 > 0$, $\omega_0 > 0$:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{t_0}\right) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad 2t_0 \ \operatorname{sinc}(t_0\ \omega)$$

$$\frac{\omega_0}{\pi}\ \operatorname{sinc}(\omega_0 t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \pi\left[\delta(\omega-\omega_0)\ e^{-j\varphi} + \delta(\omega+\omega_0)\ e^{j\varphi}\right]$$

$$\sin(\omega_0 t - \varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{\pi}{j}\left[\delta(\omega-\omega_0)\ e^{-j\varphi} - \delta(\omega+\omega_0)\ e^{j\varphi}\right]$$

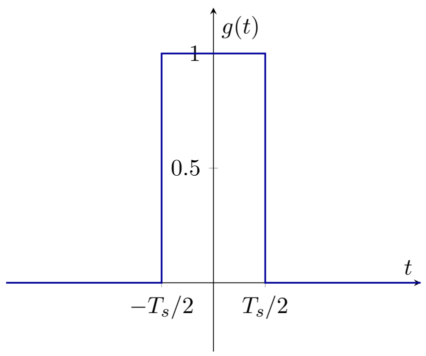
$$x(t)\ \cos(\omega_0 t - \varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left[X(\omega-\omega_0)\ e^{-j\varphi} + X(\omega+\omega_0)\ e^{j\varphi}\right]$$

$$x(t)\ \sin(\omega_0 t - \varphi) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2j}\left[X(\omega-\omega_0)\ e^{-j\varphi} - X(\omega+\omega_0)\ e^{j\varphi}\right]$$

$$\frac{1}{\pi t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad -j\operatorname{sgn}(\omega)$$

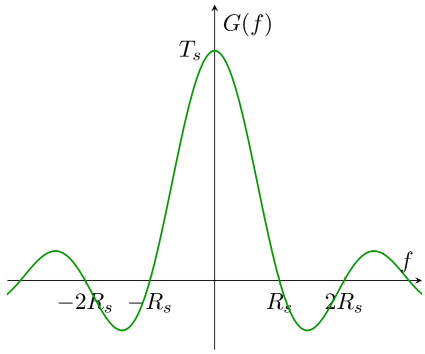
Rechteckimpulsformer

Rechteckimpuls $g(t)$ im Zeitbereich



$\circ\!\!-\!\!\bullet$

sinc-Frequenzspektrum G(f)

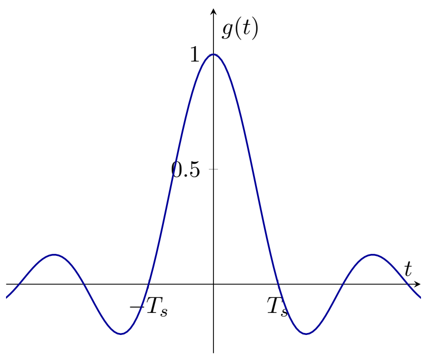


$$g(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_s/2}\right)$$

$$G(f) = T_s\ \operatorname{sinc}(\pi T_s f) = \frac{1}{R_s}\ \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi f}{R_s}\right)$$

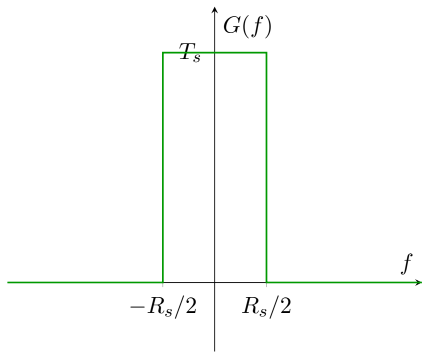
$\sin(x)/x$-Impulsformung

$\sin(x)/x$ im Zeitbereich



$\circ\!\!-\!\!\bullet$

rect-Frequenzspektrum G(f)



$$g(t) = \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi t}{T_S}\right)$$

$$G(f) = T_s\ \operatorname{rect}(2T_s\ f) = \frac{1}{R_s}\ \operatorname{rect}\left(\frac{f}{R_s/2}\right)$$