Begleitmaterial Seminarvortrag Fast Multipole Methode für Potentiale in 2D

Robert Hemstedt
r@twopi.eu

27. April 2015

Die Folien des Vortrags sowie dieses Begleitmaterial lassen sich in meinem `GitHub`-Repository `https://github.com/euklid/BachelorThesis/tree/master/FirstPresentation` finden.

1 Bezeichnungen

$x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_m$	gegebene geladene Punkte,
$y_1, \ldots, y_n$	gegebene Punkte, an denen das Potential $\Phi(y_i)$ berechnet werden soll,
$q_1, \ldots, q_m$	Ladungen der Punkte $x_1, \ldots, x_m$,
$q(z_i)$	Ladung des Punktes z_i,
z_0	Quellpunkt,
$z_c, z_{c'}$	(Multipol-)Expansionspunkte,
$z_L, z_{L'}$	Lokale Expansionspunkte,
p	Anzahl Summanden in der Multipolexpansion

2 Fast Multipole Method – Formeln

- Potential an y_j durch Ladung q_i an x_i:

$$\Phi_{x_i}(y_j) = -q_i \log(||y_j - x_i||)$$

- Kernel:

$$\text{reeller Kernel: } G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := -\log(||\mathbf{x} - \mathbf{y}||), \qquad \text{komplexer Kernel: } G(z_0, z) = -\log(z_0 - z)$$

- (1) Kernelexpansion:

$$G(z_0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c),$$

Wobei

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, k \geq 0 \qquad \text{sowie} \qquad O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, k \geq 1; \text{ und } O_0(z) = -\log(z).$$

- (2) Multipolexpansion:

$$\sum_{i=1}^{m} G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \approx \sum_{k=0}^{p} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c)$$

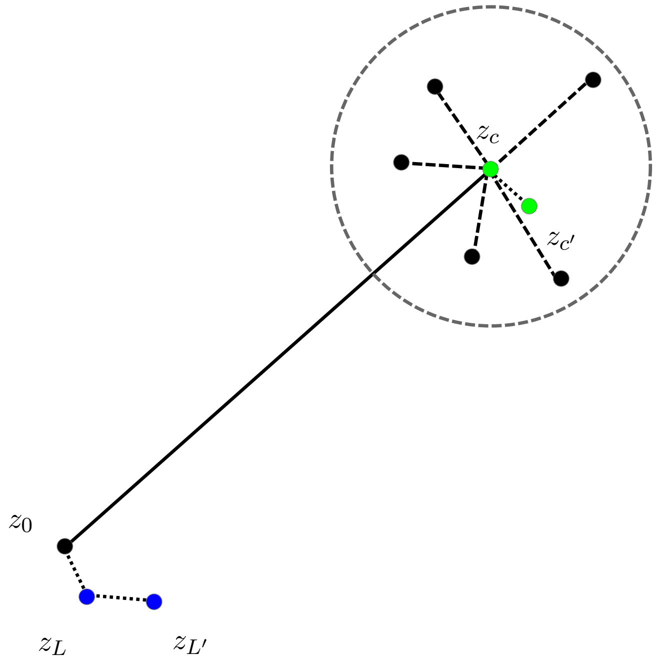

Abbildung 1: Lagesituation für Multipolexpansion

- (3) Momente:

$$M_k(z_c) = \sum_{i=1}^{m} I_k(z_i - z_c) q(z_i)$$

- (4) M2M-Translation:

$$M_k(z_c') = \sum_{l=0}^{k} I_{k-l}(z_c - z_c') M_l(z_c)$$

- (5) Lokale Expansion:

$$\sum_{i=1}^{m} G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L) \approx \sum_{l=0}^{p} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L)$$

- (6) M2L-Translation:

$$L_l(z_L) = \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c) \approx (-1)^l \sum_{k=0}^{p} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c)$$

- (7) L2L-Translation:

$$L_l(z_{L'}) = \sum_{s=0}^{p-l} I_s(z_{L'} - z_L) L_{l+s}(z_L)$$

A Quellen

Literatur

[1] V. Rohklin L. Greengard. A fast algorithm for particle simulations. *Journal of Computational Physics*, 73:325–348, 1987.

[2] Yijun Liu. *Fast Multipole Boundary Element Method*. Cambridge University Press, 2014.