

# Fast Multipole Method für Potentiale in 2D

Robert Hemstedt

Rheinische Friedrich Wilhelms-Universität Bonn – Bonn

betreut durch die Herren Prof. Dr. Schweitzer und Prof. Dr. Klein

27. April 2015



This work is licensed under a Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported License.

- 1 Motivation
- 2 Klassischer Ansatz
- 3 Fast Multipole Method für Potentiale
- 4 FMM-Algorithmus

## Beispiel

In der Ebene seien  $m$  paarweise verschiedene Punkte  $\{x_1, \dots, x_m\}$  gegeben, die jeweils die Ladungen  $\{q_1, \dots, q_m\}$  tragen. Zusätzlich seien  $n$  paarweise verschiedene Punkte  $\{y_1, \dots, y_n\}$  in der Ebene gegeben, an denen die Potentiale  $\Phi(y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) berechnet werden sollen. Der Einfachheit halber gelte  $x_i \neq y_j$  für alle  $i = 1 \dots m, j = 1, \dots, n$ .

## Frage

In welcher Zeit können alle Potentiale an den ausgewählten Punkten berechnet werden?

## Fakt

*Potential:*  $\Phi_{x_i}(y_j) = -q_i \log(\|y_j - x_i\|)[1]$

Also ergeben sich für alle Potentiale an den Punkten  $y_j, j = 1, \dots, n$ :

$$\sum_{i=1}^m \Phi_{x_i}(y_j) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, n$$

Also insgesamt  $O(mn)$  Summationen für alle Potentiale. Insbesondere  $O(m^2)$ , wenn  $m = n$ .

Bezeichne:

$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) := -\log(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|)$  und  $q(\mathbf{x}_i) := q_i$ , also  $\Phi_{\mathbf{x}_i}(\mathbf{y}_j) = G(\mathbf{y}_j, \mathbf{x}_i)q(\mathbf{x}_i)$

Ein Trick der FMM ist es, das Problem in die Komplexe Ebene zu legen. Identifiziere:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \Rightarrow z = \mathbf{x}_1 + i\mathbf{x}_2,$$

$$\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2) \Rightarrow z_0 = \mathbf{y}_1 + i\mathbf{y}_2,$$

$$G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \Re(G(z_0, z)), \text{ mit } G(z_0, z) = -\log(z_0 - z),$$

wobei wir hier den komplexen (Hauptzweig des) Logarithmus verwenden.

# Expansion des $G$ -Kernels

In dieser Notation berechnet man:

$$\sum_{i=1}^m G(y_j, x_i) q(x_i) \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n,$$

und nimmt den *Realanteil*. Dabei sind die Punkte  $(x_i)_{i=1,\dots,m}$ ,  $(y_j)_{j=1,\dots,n}$  entsprechend in die Komplexe Ebene eingebettet.

Die Idee der Multipolexpansion ist es nun für einen Expansionspunkt  $y_c$  den Kernel zu schreiben als

$$G(y, x) = \sum_i G_i^y(y_c, y) G_i^x(y_c, x)$$

$G_i^x(y_c, x)$  ist *unabhängig* von  $y$ , kann also wiederverwendet werden!

# Expansion des $G$ -Kernels

## Konvention

Ab sofort arbeiten wir nur noch in  $\mathbb{C}$ .

## Lemma

*Es seien der Quellpunkt  $z_0$ , der Feldpunkt  $z$  und ein Expansionspunkt  $z_c$  nahe  $z$  gegeben, d.h.  $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$ . Dann gilt:*

$$G(z_0, z) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z - z_c). \quad (1)$$

Wobei

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, k \geq 0 \text{ sowie}$$
$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, k \geq 1; \text{ und } O_0(z) = -\log(z).$$

# Expansion des $G$ -Kernels

## Beweis.

$$G(z_0, z) = -\log(z_0 - z) = -\left[\log(z_0 - z_c) + \log\left(1 - \frac{z - z_c}{z_0 - z_c}\right)\right]$$

Taylor-Expansion von

$$\log(1 - \xi) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k}, |\xi| < 1$$

liefert das gewünschte Ergebnis mit  $\xi = \frac{z - z_c}{z_0 - z_c}$ . □

Es ist einer der Schlüsselpunkte der FMM, dass durch Gleichung (1) im  $G$ -Kernel  $z_0$  und  $z$  durch  $z_c$  separiert werden.



# Multipolexpansion

## Satz (Multipolexpansion)

Es seien die Punkte  $z_1, \dots, z_m$  mit Ladungen  $q(z_1), \dots, q(z_m)$  gegeben. Weiterhin seien  $z_0$  und  $z_c$  derart, dass  $|z_i - z_c| \ll |z_0 - z_c|$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{i=1}^m \left[ \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) I_k(z_i - z_c) \right] q(z_i);$$

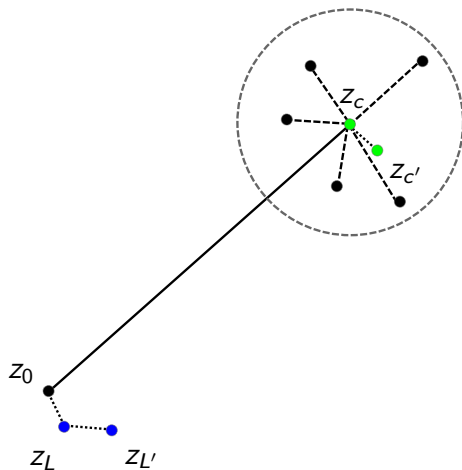
also die Multipolexpansion:

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c), \quad (2)$$

mit den Momenten:

$$M_k(z_c) = \sum_{i=1}^m I_k(z_i - z_c) q(z_i). \quad (3)$$

# Multipoleexpansion



**Abbildung 1 :** Lagesituation für Multipolexpansion

## Der Überlegung wert

Die Momente

$$M_k(z_c) = \sum_{i=1}^m l_k(z_i - z_c) q(z_i)$$

sind nur von den gegebenen Ladungspunkten  $z_1, \dots, z_m$  und dem Expansionspunkt  $z_c$  abhängig und brauchen nicht nochmal berechnet werden, wenn  $z_0$  seine Lage ändert! Später werden die  $z_c$  Zentren von Zellen eines Gitters sein, sodass die Momente  $M_k(z_c)$  häufig wiederverwendet werden können. Dies ist ein *Schlüsselfaktor*, warum die FMM so schnell ist!

# Fehler der Multipolexpansion

In (2) tritt eine *unendliche* Summe auf. Fehler in der Fast Multipole Method können durch die Anzahl der ausgewerteten Terme in (2) kontrolliert werden.

## Satz (Fehler der Multipolexpansion)

Für den Fehler  $E_M^p$  der Multipolexpansion gilt:

$$\begin{aligned} E_M^p &:= \left| \sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) - \sum_{k=0}^p O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \right| \\ &\leq \frac{A}{1 - \frac{R}{|z_0 - z_c|}} \frac{R^{p+1}}{|z_0 - z_c|^{p+1}}, \end{aligned}$$

wobei  $R$  der Radius eines Kreises um  $z_c$  mit  $|z_i - z_c| < R < |z_0 - z_c|$  für alle  $i = 1, \dots, m$  und  $A = \sum_{i=1}^m |q_i|$ .

# Fehler der Multipolexpansion

Beweis.

$$\begin{aligned} E_M^p &:= \left| \sum_{k=p+1}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |O_k(z_0 - z_c)| |M_k(z_c)| \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |O_k(z_0 - z_c)| \left| \sum_{i=1}^m l_k(z_i - z_c) q(z_i) \right| \\ &\leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |O_k(z_0 - z_c)| \sum_{i=1}^m |l_k(z_i - z_c)| |q(z_i)| \\ &\leq A \sum_{k=p+1}^{\infty} |O_k(z_0 - z_c)| \frac{R^k}{k!} \leq A \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{|z_0 - z_c|^k} \frac{R^k}{k!} \\ &\leq A \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{R^k}{|z_0 - z_c|^k} = \frac{A}{1 - \frac{R}{|z_0 - z_c|}} \frac{R^{p+1}}{|z_0 - z_c|^{p+1}} \end{aligned}$$



# Fehler der Multipolexpansion

Sei  $\rho = \frac{|z_0 - z_c|}{R}$ . Dann lässt sich  $E_M^p$  abschätzen als

$$E_M^p \leq \frac{A}{\rho - 1} \left( \frac{1}{\rho} \right)^p$$

## Bemerkung

Je größer  $\rho$ , desto kleiner ist die Fehlerschranke. Beobachte, dass für den Fall  $\rho \geq 2 \Leftrightarrow |z_0 - z_c| \geq 2R$ :

$$E_M^p \leq A \left( \frac{1}{2} \right)^p.$$

Damit kann man für eine vorher festgelegte Genauigkeit  $\varepsilon$  die Anzahl  $p$  der zu evaluierenden Momente bestimmen.

# Translationsoperatoren

Während des Algorithmus werden mehrere Expansionspunkte benötigt. Anstatt alle Momente für einen neuen Expansionspunkt  $z_{c'}$  wieder neu zu berechnen, kann man die alten Momente von  $z_c$  „verschieben“.

## Satz (Moment-to-Moment-Translation, M2M)

*Es seien die Punkte  $z_1, \dots, z_m$  mit Ladungen  $q(z_1), \dots, q(z_m)$  gegeben. Weiterhin seien  $z_0, z_c$  und  $z_{c'}$  derart, dass  $|z_i - z_c| \ll |z_0 - z_c|$  und  $|z_i - z_{c'}| \ll |z_0 - z_{c'}|$  für alle  $i = 1, \dots, m$ . Dann gilt*

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_c - z_{c'}) M_l(z_c). \quad (4)$$

# Moment-to-Moment-Translation

## Beweis.

$$\begin{aligned}M_k(z_{c'}) &= \sum_{i=0}^m l_k(z - z_{c'}) q(z_i) \\&= \sum_{i=0}^m l_k[(z - z_c) + (z_c - z_{c'})] q(z_i) \\&= \sum_{i=0}^m \sum_{l=0}^k l_l(z - z_c) l_{k-l}(z_c - z_{c'}) q(z_i) \\&= \sum_{l=0}^k l_{k-l}(z_c - z_{c'}) M_l(z_c)\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Binomische Formel in der dritten Gleichung verwendet. □

## Bemerkung

Durch die endliche Zahl der Summanden wird keine weitere Fehlerquelle eingeführt.



# Lokale Expansion

Statt des Expansionspunktes  $z_c$  verschieben wir jetzt den Quellpunkt  $z_0$ :

## Satz (Lokale Expansion und Moment-to-Local-Translation)

*Mit den Bedingungen der Multipolexpansion sei ein weiterer Punkt  $z_L$  nahe  $z_0$ , d.h.  $|z_0 - z_L| \ll |z_L - z_c|$  gegeben. Dann gilt die folgende lokale Expansion*

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L), \quad (5)$$

wobei die lokalen Expansionskoeffizienten  $L_l(z_L)$  durch die folgende Moment-to-Local-Expansion (M2L) gegeben sind:

$$L_l(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c). \quad (6)$$

## Vorschau

Sind die lokalen Expansionskoeffizienten  $L_l(z_L)$  einmal berechnet worden, ist die Gleichung (5)

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) l_l(z_0 - z_L)$$

unabhängig von  $z_c$ . Wie bei der Moment-to-Moment-Translation lässt sich auch eine Local-to-Local-Translation ausdrücken. Ein weiterer Fall, wo bereits berechnete Terme wiederverwendet werden können. Die  $z_L$  werden auch wie die  $z_c$  später im Algorithmus Gitterpunkte darstellen.

# Fehler der Moment-to-Local-Translation

Auch in (6) tritt eine endliche Summe auf. Es gilt:

## Satz (Fehler der M2L Translation)

Für den Fehler  $E_L^p$  der Moment-to-Local-Expansion gilt:

$$\begin{aligned} E_L^p &:= \left| \sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) - \sum_{l=0}^p L_l(z_L) l_l(z_0 - z_L) \right| \\ &= \left| \sum_{l=p+1}^{\infty} L_l(z_L) l_l(z_0 - z_L) \right| \leq \frac{A [4e(p + \rho)(\rho + 1) + \rho^2]}{\rho(\rho - 1)} \left( \frac{1}{\rho} \right)^{p+1}, \end{aligned}$$

für alle  $p \geq \max\{2, \frac{2\rho}{\rho-1}\}$ , wobei  $e$  die Eulersche Zahl ist und  $A$  und  $\rho$  wie bisher definiert sind.

# Local-to-Local-Translation

Ähnlich der Moment-to-Moment-Translation führen wir die Local-to-Local-Translation ein:

## Satz (Local-to-Local-Translation, L2L)

*Es sei  $z_{L'}$  ein Punkt nahe  $z_L$ . Dann gilt für eine lokale Expansion mit  $p$  Termen:*

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) \approx \sum_{l=0}^p L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L) = \sum_{l=0}^p L_l(z_{L'}) I_l(z_0 - z_{L'}),$$
$$\text{wobei } L_l(z_{L'}) = \sum_{s=0}^{p-l} I_s(z_{L'} - z_L) L_{l+s}(z_L) \quad (7)$$

## Bemerkung

Wie bereits bei der M2M-Translation (4) werden bei der L2L-Translation (7) nur endliche viele Terme addiert, also keine weiteren Fehler eingeführt.

# Local-to-Local-Translation

## Beweis.

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^p L_l(z_L) l_l(z_0 - z_L) &= \sum_{l=0}^p L_l(z_L) l_l[(z_0 - z_{L'}) + (z_{L'} - z_L)] \\&= \sum_{0 \leq s \leq l \leq p} l_s(z_0 - z_{L'}) L_l(z_L) l_{l-s}(z_{L'} - z_L) \\&= \sum_{l=0}^p \sum_{s=l}^p l_l(z_0 - z_{L'}) L_s(z_L) l_{s-l}(z_{L'} - z_L) \\&= \sum_{l=0}^p l_l(z_0 - z_{L'}) \underbrace{\sum_{s=0}^{p-l} L_{l+s}(z_L) l_s(z_{L'} - z_L)}_{=L_l(z_{L'})}\end{aligned}$$



# Zwischenzusammenfassung

Uns stehen nun folgende Werkzeuge zur Verfügung:

$$\text{Momente: } M_k(z_c) = \sum_{i=1}^m l_k(z_i - z_c) q(z_i)$$

$$\text{Multipolexpansion: } \sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) \approx \sum_{k=0}^p O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c)$$

$$\text{M2M-Translation: } M_k(z'_c) = \sum_{l=0}^k l_{k-l}(z_c - z'_c) M_l(z_c)$$

$$\text{M2L-Translation: } L_l(z_L) \approx (-1)^l \sum_{k=0}^p O_{l+k}(z_L - z_c) M_k(z_c)$$

$$\text{Lokale Expansion: } \sum_{i=1}^m G(z_0, z_i) q(z_i) \approx \sum_{l=0}^p L_l(z_L) l_l(z_0 - z_L)$$

$$\text{L2L-Translation: } L_l(z_{L'}) = \sum_{s=0}^{p-l} l_s(z_{L'} - z_L) L_{l+s}(z_L)$$

Der Fast Multipole-Algorithmus gliedert sich in mehrere Schritte:

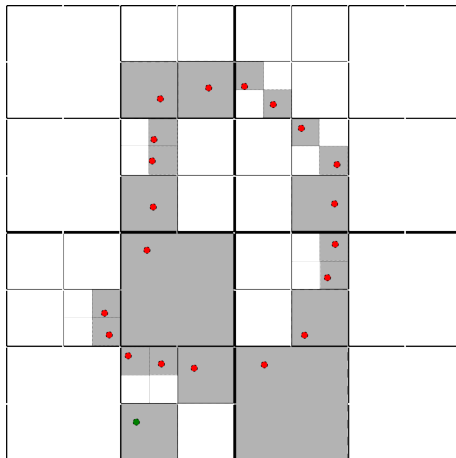
- ① Erstellen einer Quad-Tree-Struktur.
- ② *Upward pass.*
- ③ *Downward pass.*
- ④ Berechnung der Potentiale.

# Erstellen der Quad-Tree-Struktur

- 1 Lege alle Punkte in ein Quadrat. Dies bildet eine *Level 0 Zelle*.
- 2 Zerlege das Quadrat in Level 0 in vier Zellen (Quadrate) von Level 1.
- 3 Lege eine Zahl  $maxl$ , wie viele Punkte sich maximal innerhalb einer Zelle des Quad-Trees befinden dürfen, fest.
- 4 Für eine Zelle von Level  $l$  mache folgendes:  
Wenn sie mehr als  $maxl$  Punkte enthält, zerlege sie in vier *Tochterzellen* von Level  $l + 1$ . Sie ist jetzt eine *Vaterzelle*.  
Sonst bildet sie ein *Blatt* des Quad-Trees und wird nicht weiter zerlegt.
- 5 Fahre mit obigem Schritt fort, bis keine Zelle mehr in Quadrate zerlegt wird.



# Erstellen der Quad-Tree-Struktur

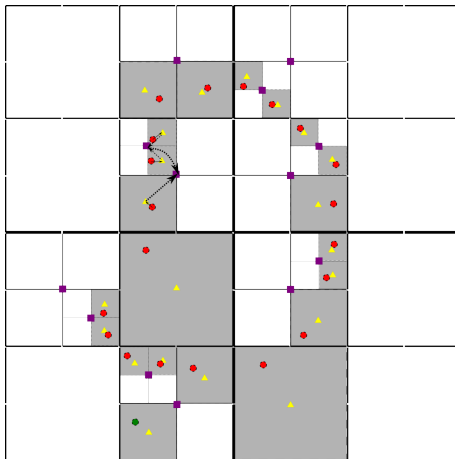


**Abbildung 2 :** Quad-Tree der geladenen Punkte (rot), eines Quellpunktes (grün) und Blätter (grau)

Berechnung aller Momente aller Zellenzentren von Level  $\geq 2$  mit  $p$  Termen, beginnend bei den Blättern:

- Handelt es sich bei der Zelle um ein Blatt, berechne das Moment der Zelle mittels der Gleichung (3) für alle geladenen Punkte innerhalb des Blattes, dabei ist  $z_c$  das Zentrum der Zelle.
- Handelt es sich um eine Vaterzelle, berechne ihr Moment mittels der Summation der M2M-Translationen (4) der Zentren ihrer Tochterzellen, dabei ist  $z_{c'}$  das Zentrum der Vaterzelle und  $z_c$  das Zentrum einer Tochterzelle.

# Upward pass

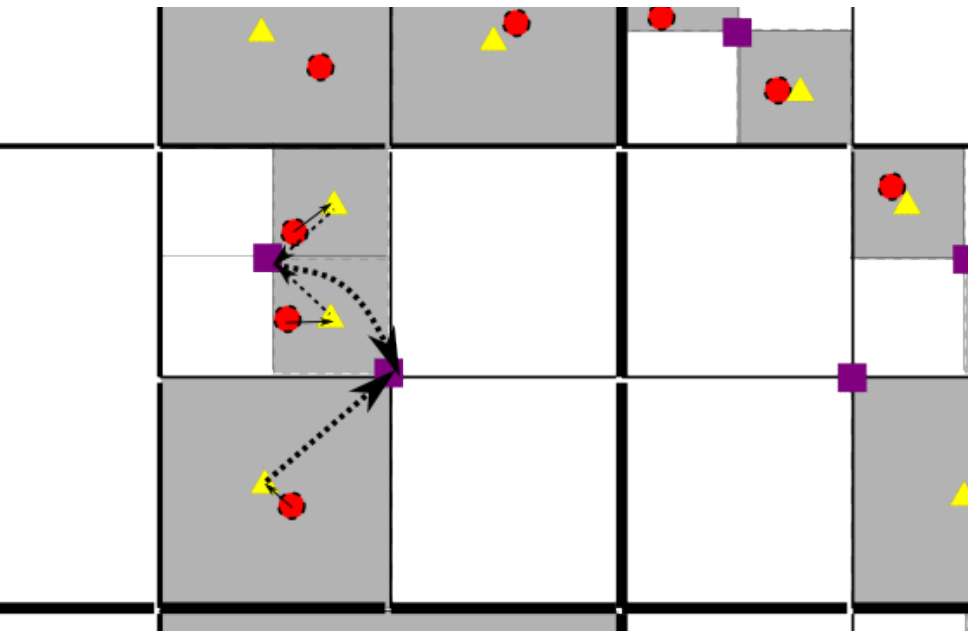


**Abbildung 3 :** Beispielhafter Upward pass von einer Blattzelle.

violett: Zentren von Vaterzellen, gelb: Zentren von Blättern,

→: Moment direkt berechnet, --→: M2M-Translation

# Upward pass

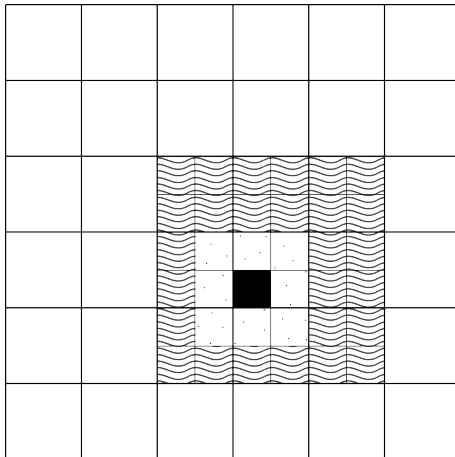


Hierfür benötigen wir noch etwas mehr Vokabular:

## Definition

- Zwei Zellen heißen *benachbart in Level  $l$* , wenn sie mindestens eine gemeinsame Ecke haben. Zwei Blattzellen verschiedener Level sind dann benachbart, falls die Vaterzelle einer Zelle mit der anderen Zelle mindestens eine Ecke gemeinsam hat.
- Zwei Zellen heißen *gut separiert in Level  $l$* , wenn sie auf Level  $l$  *nicht benachbart sind*, aber ihre Vaterzellen in Level  $l - 1$  *benachbart* sind.
- Bezeichne die Menge aller gut separierten Zellen einer Zelle  $C$  in Level  $l$  als *Interaktionsliste* von  $C$ .
- Eine Zelle ist eine *Fernzelle* von  $C$ , wenn ihre jeweiligen Vaterzellen nicht benachbart sind.

# Downward pass



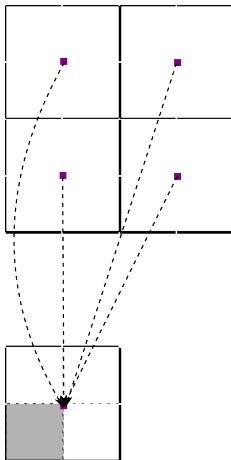
**Abbildung 4 :** schwarz: Zelle C, gepunktet: ihre benachbarten Zellen, gewellt: ihre Interaktionsliste, weiß: Fernzellen von C

# Downward pass

Berechnung aller lokalen Expansionskoeffizienten aller Zellen startend bei Level 2 und die Baumstruktur nach unten zu allen Blättern folgend.

- ❶ Der lokale Expansionskoeffizient einer Zelle  $C$  ist die Summe
  - ❶ der Beiträge der Zellen von der Interaktionsliste von  $C$  und
  - ❷ von allen Fernzellen.
- ❷ 1.1 benutzt M2L-Translation (6), wobei die Momente die der Zellen der Interaktionsliste sind.
- ❸ 1.2 benutzt L2L-Translation (7) um den lokalen Expansionspunkt vom Zentrum der Vaterzelle von  $C$  zum Zentrum von  $C$  zu verschieben.
- ❹ Auf Level 2 wird für den lokalen Expansionskoeffizienten M2L-Translation verwendet. Dabei werden die Beiträge der in Level 2 nicht benachbarten Zellen aufsummiert.

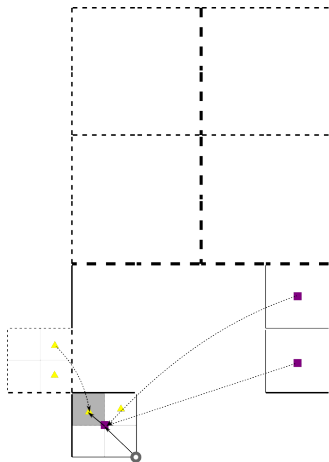
# Downward pass



**Abbildung 5 :** Downward Pass bei Level 2.  $--\rightarrow$ : M2L-Translation

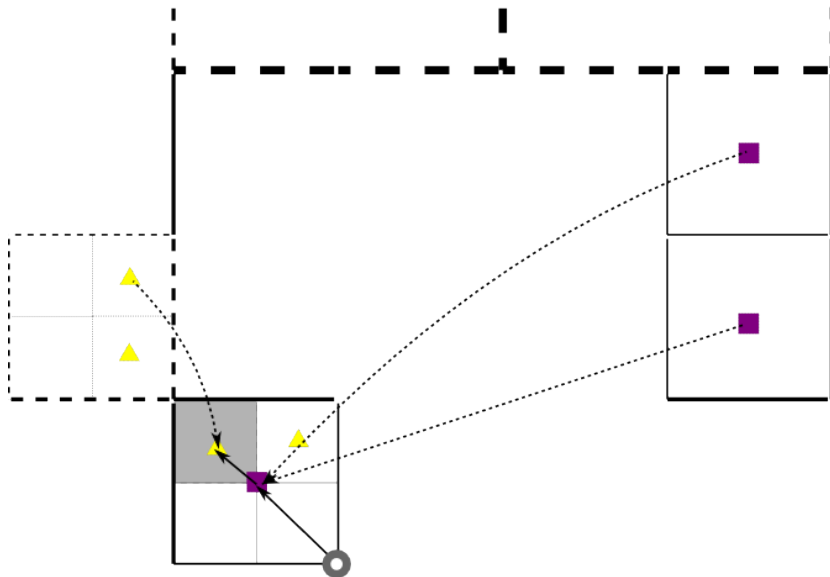


# Downward pass



**Abbildung 6 :** Downward Pass bei Leveln 3 und 4.  $--\rightarrow$ : M2L-Translation,  $\rightarrow$ : L2L-Translation, Kreis: Zellzentrum Level 2, Quadrat: Zellzentrum Level 3, Dreieck: Zellzentrum Level 4

# Downward pass



# Berechnung der Potentiale

Für die Punkte an denen das Potential berechnet werden soll, erfolgt nun die Berechnung dessen.

Sei  $z_0$  in Blatt  $C$ . Dann berechnen wir

$$\Phi(z_0) = \Phi_{\text{nah}}(z_0) + \Phi_{\text{fern}}(z_0)$$

$$\sum_{i=1}^m G(z_0, z_i)q(z_i) = \underbrace{\sum_{z_i \text{ nahe } z_0} G(z_0, z_i)q(z_i)}_{\text{Nahwirkung}} + \underbrace{\sum_{z_i \text{ fern } z_0} G(z_0, z_i)q(z_i)}_{\text{Fernwirkung}},$$

wobei wir für die  $z_i$ , die sich in  $C$  oder einen seiner acht Nachbarzellen befinden, die *Nahwirkung* mit *direkter* Summation auswerten.

Hingegen verwenden wir für die Fernwirkung, also Beiträge aus der Interaktionsliste von  $C$  und fernen Zellen, die Lokalexpansion der Zelle  $C$ , also (5), wobei  $z_L$  das Zentrum von  $C$  ist.

Zurück zur am Anfang gestellten Frage. Sind wir mit dem FMM-Algorithmus wirklich schneller?

## Satz (Laufzeit des FMM-Algorithmus)

*Sei  $N$  die Anzahl der geladenen Teilchen und  $N$  die Anzahl der Punkte deren Potentiale, verursacht durch die geladenen Teilchen, berechnet werden sollen. Sei  $p$  die Anzahl der Terme die für die Multipol- und Lokalexpansionen verwendet werden und  $maxl$  die maximale Anzahl von geladenen Teilchen in einem Blatt des Quad-Trees. Dann ist die Berechnung aller Potentiale mit dem hier vorgestellten Fast-Multipole-Method-Algorithmus in Laufzeit  $\mathcal{O}(N)$  möglich.*

## Beweis.

- $N_B$  = Anzahl der Blätter im Quad-Tree  $\approx N/\max l = \mathcal{O}(N)$
- $N_Z$  = Anzahl der Zellen im Quad-Tree  $\approx N_B \cdot (1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots) \leq N_B \cdot \frac{4}{3} = \mathcal{O}(N)$
- Anzahl benachbarter Zellen = 9; Anzahl der Zellen in der Interaktionsliste = 27 (2D)
- Anzahl Operationen, um Multipolmomente zu berechnen  $= p \cdot \max l \cdot N_B = \mathcal{O}(N)$
- Anzahl Operationen im Upward pass  $= N_Z \cdot 4 \cdot p^2 = \mathcal{O}(N)$
- Anzahl Operationen im Downward pass  $= N_Z \cdot [p^2(L2L) + 27 \cdot p^2(M2L)] = \mathcal{O}(N)$
- Anzahl Operationen der Lokalexpansionen  $= N \cdot p = \mathcal{O}(N)$
- Anzahl Operationen der direkten Berechnungen der Potentiale der Nahwirkung  $= N \cdot 9 \cdot \max l = \mathcal{O}(N)$

Alle Abschätzungen haben höchstens Laufzeit  $\mathcal{O}(N)$ , damit ist die Gesamtlaufzeit  $\mathcal{O}(N)$ . □

- [1] V. Rohklin L. Greengard.

A fast algorithm for particle simulations.

*Journal of Computational Physics*, 73:325–348, 1987.

- [2] Yijun Liu.

*Fast Multipole Boundary Element Method*.

Cambridge University Press, 2014.