

Seminarvortrag Verzweigte Überlagerungen Riemannscher Flächen

Robert Hemstedt

r@twopi.eu

4. November 2014

1 Motivation und weitere Grundlagen

Wir interessieren uns weiter für holomorphe Abbildungen zwischen Riemannschen Flächen und zeigen mittels der Theorie verzweigter Überlagerungen auf, wie Überlagerungen mit gegebener Decktransformationsgruppe erzeugt werden können. Ebenso knüpfen wir an die unverzweigten Überlagerungen an und setzen sie zu verzweigten Überlagerungen fort und untersuche sie auf einige Eigenschaften.

Überlagerungen Riemannscher Flächen werden etwas anders definiert als topologische Überlagerungen.

Definition 1.1: Eine Abbildung $\eta : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen heißt eine **Überlagerung**, wenn für alle $b \in Y \exists$ Umgebung V , sodass sie **elementar überlagert** wird, d.h. das Urbild $\eta^{-1}(V)$ ist eine Vereinigung von Scheiben (U, a) , für welche $\eta|(U, a) : (U, a) \rightarrow (V, b)$ Windungsabbildungen $z \mapsto z^n$ sind.

Bemerkung 1.2: Die topologische, unverzweigte Überlagerung zwischen Riemannschen Flächen erweist sich als Spezialfall, falls die Windungsabbildungen allesamt der Form $z \mapsto z^1$ sind, also damit biholomorph sind. Damit besitzt sie keine Verzweigungspunkte.

Wir erinnern an die

Definition 1.3 Deckgruppe: Die **Deckgruppe** $\mathcal{D}(\eta)$ einer Überlagerung (eigentlich sogar jeder holomorphen Abbildung) $\eta : X \rightarrow Y$ zwischen Riemannschen Flächen ist definiert als $\mathcal{D}(\eta) = \{\varphi : X \rightarrow X \text{ biholomorph} \mid \eta \circ \varphi = \eta\}$.

Bemerkung 1.4: Falls X und Y in der obigen Definition zusammenhängend sind, ist die Standgruppe $\mathcal{D}(\eta)_a$ endlich (sogar zyklisch) für $a \in X$.

Definition 1.5: Eine surjektive, offene, holomorphe Abbildung $\eta : X \rightarrow Y$ zwischen zusammenhängenden Flächen heißt **normal**, wenn jede Faser ein Orbit (eine Bahn) der Deckgruppe $\mathcal{D}(\eta)$ ist. Normale Abbildungen mit zyklischer Deckgruppe heißen **zyklisch**.

Beispiele zyklischer Überlagerungen sind $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto z^n$ oder $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times, z \mapsto e^{iz}$. Normal, aber nicht zyklisch ist die Torusprojektion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Omega$ mit dem Gitter Ω .

Bemerkung 1.6: Eine normale Abbildung ist genau dann eine unverzweigte Überlagerung, wenn $\mathcal{D}(\eta)$ frei auf jeder Faser operiert, die Standgruppen der Elemente von η^{-1} also trivial sind.

2 Endliche Automorphismengruppen der Zahlenkugel $\hat{\mathbb{C}}$

Zunächst klassifizieren wir alle endlichen Automorphismengruppen (bis auf Konjugation) von $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$. Später werden wir diese nutzen, um Riemannsche Räume zu konstruieren, die von $\hat{\mathbb{C}}$ und einer entsprechend konstruierten Abbildung mit gewählter Automorphismengruppe überlagert werden.

Satz 2.1: Die Automorphismen auf $\hat{\mathbb{C}}$ sind von der Form

$$z \mapsto A(z) := \frac{az + b}{cz + d}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{C}).$$

Man nennt sie Möbius-Transformationen. Eine Möbiustransformation $\neq \text{id}$ hat entweder 2 oder 3 Fixpunkte. Möbiustransformationen g mit drei Fixpunkten sind unendlicher Ordnung, d.h. $g^n = \underbrace{g \circ \dots \circ g}_{n\text{-mal}} \neq \text{id}$ für $n \geq 1$.

Die so definierte Abbildung $\text{GL}_2(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ ist ein Epimorphismus mit Kern $\{\lambda \cdot \mathbb{1}, \lambda \in \mathbb{C}^\times\}$.

Satz 2.2: Jede zyklische Gruppe $G < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ der Ordnung $n < \infty$ ist zu $C_n := \{z \rightarrow \omega z : \omega \in \mu_n\}$ konjugiert. Diese Gruppe hat zwei Ausnahmebahnen $\{0\}$ und $\{\infty\}$.

Beweis. Durch Konjugieren erreicht man, dass G durch ein Element g mit den beiden Fixpunkten 0 und ∞ erzeugt wird. Es folgt $g(z) = \omega z$, wobei ω die Gruppe μ_n der n -ten Einheitswurzel erzeugt. \square

Satz 2.3: Jede nicht-zyklische, endliche Gruppe $G < \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ der Ordnung N hat genau drei Ausnahmeorbits $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$. Für deren Mächtigkeiten $s_j := \sharp \Sigma_j \geq 1$ und für die Ordnungen $n_j := N/s_j$ der Standgruppen G_a von $a \in \Sigma_j$ gibt es höchstens folgende Möglichkeiten:

Typ	N	s_1	s_2	s_3	n_1	n_2	n_3
q -Dieder, $q \geq 2$	$2q$	q	q	2	2	2	q
Tetraeder	12	6	4	4	2	3	3
Oktaeder	24	12	8	6	2	3	4
Ikosaeder	60	30	20	12	2	3	5

Sei g_j ein erzeugendes Element der Standgruppe von $a_j \in \Sigma_j$. Dann wird G von $\{g_1, g_2, g_3\}$ erzeugt.

Wir konstruieren uns einen Weg, wie wir uns für jede der Gruppentypen eine Gruppe visuell darstellen können. Dazu bemerken wir

Bemerkung 2.4: Durch die stereographische Projektion $\pi : S^2 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ wird die Gruppe $\text{SO}_3(\mathbb{R})$ zu einer Untergruppe von $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ gemacht. Dabei sei \mathbb{R}^3 als euklidischer Vektorraum mit dem Standardskalarprodukt und seiner induzierten Metrik versehen. Diese Metrik induzieren wir auf die Einheitssphäre und übertragen sie durch π nach $\hat{\mathbb{C}}$. Dies ist dann die *chordale Metrik*.

Bemerkung 2.5: Es lässt sich zeigen, dass jede Isometrie auf $\hat{\mathbb{C}}$ bezüglich der chordalen Metrik von der Form $z \mapsto A(z)$ oder $z \mapsto A(\bar{z})$ mit $A \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$, $A(z)$ also eine sogenannte *unitäre* Möbiustransformation ist.

Schließlich lässt sich folgender Satz folgern:

Satz 2.6: Für jedes $T \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ist $\varphi := \pi \circ T \circ \pi^{-1}$ eine unitäre Möbiustransformation. Die Zuordnung $\text{SO}_3(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}), T \mapsto \varphi$, ist ein Monomorphismus.

Beweis. Da φ eine Isometrie ist, gibt es nach der obigen Bemerkung ein $A \in \text{SU}_2(\mathbb{C})$ mit $\varphi(z) = A(z)$ oder $\varphi(z) = A(\bar{z})$. Jedenfalls ist $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$ dann eine Möbiustransformation. Da es zu jedem $T \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ ein $U \in \text{SO}_3(\mathbb{R})$ mit $U^2 = T$ gibt, ist φ eine Möbiustransformation. \square

Wir haben nun also eine Möglichkeit gefunden, Drehungen der S^2 als Möbiustransformationen von $\hat{\mathbb{C}}$ zu verstehen. Durch Parkettierungen der S^2 lassen sich nun Visualisierungen für die gefunden Automorphismengruppen anschicken.

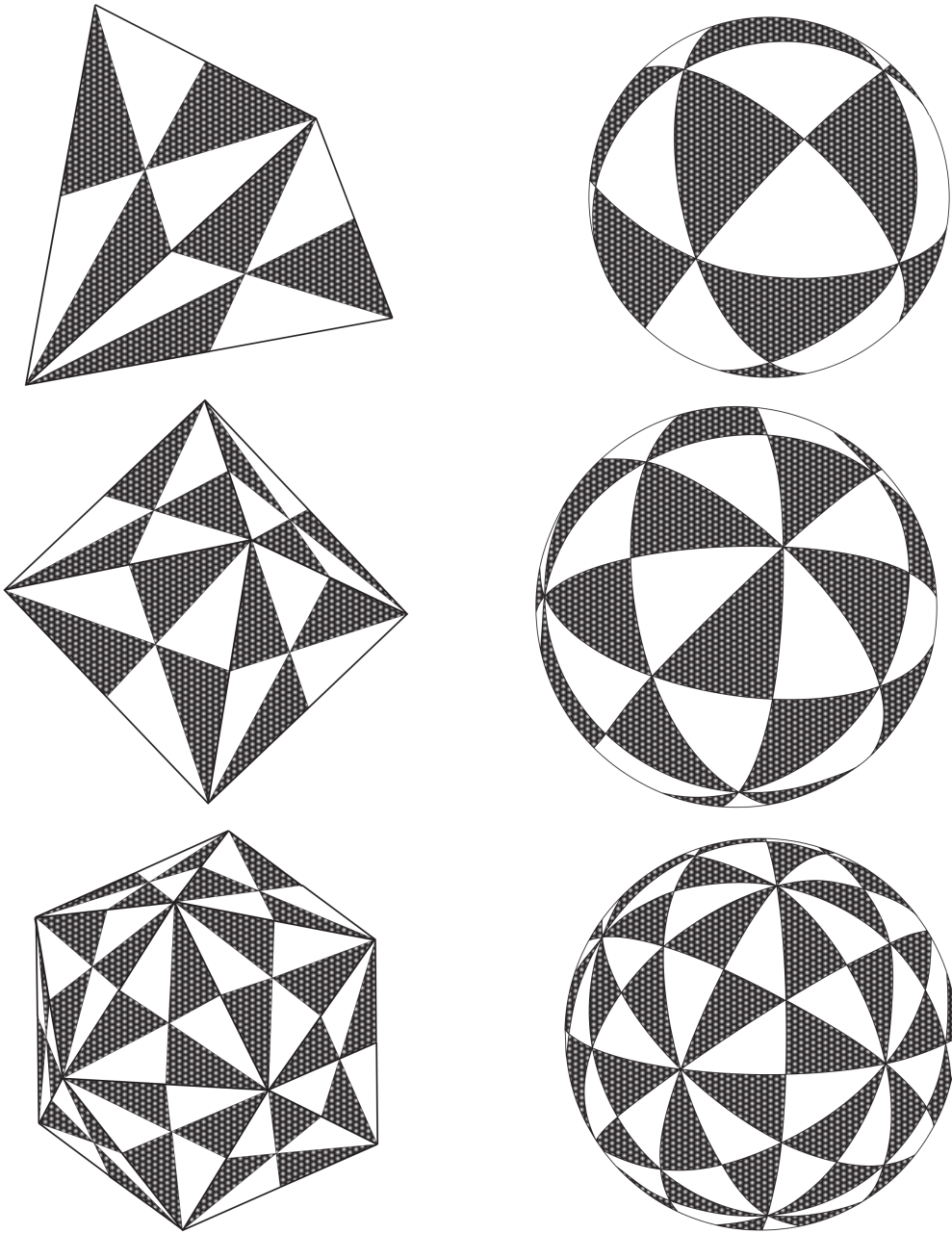


Abbildung 1: Linksseitig Parkettierungen des Tetra-, Okta- und Ikosaeders mit Baryzentren jeder Seite. Rechtsseitig die Parkettierungen auf die S^2 mittels Radialprojektion übertragen.

Die Automorphismen der Gruppen G sind hierbei für die einzelnen platonischen Körper:

- **Tetraeder:** 4 Achsen durch Ecke/Seitenzentrum mit je 2, 3 Achsen durch die Kantenmitten mit je 1 aus $G \setminus \{\text{id}\}$. Also $4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 = 12$ Elemente.
- **Oktaeder:** 3 Achsen durch die Ecken mit je 3, 4 Achsen durch die Flächenmitten mit je 2 und 6 Achsen durch die Kantenmitten mit je 1 Element aus $G \setminus \{\text{id}\}$. Also $3 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1 = 24$ Elementen.
- **Ikosaeder:** 12 Ecken, 30 Kanten und 20 Flächen, das macht analog $6 \cdot 4 + 15 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 1 = 60$.

Für die q -Dieder-Parkettierung haben wir eine q -zählige Achse durch den Nord- und Südpol, mit Drehungen um ganzzahlige Vielfache des Winkels $2\pi/q$, sowie 2 q -zählige Achsen durch die Punkte A_1, \dots, A_{2q} am Äquator, die die Parkettierung in sich überführen. Diese Drehungen bilden die *orthogonale q -Diedergruppe* D_q mit $q - 1 + q \cdot 1 + 1 = 2q$ Elementen. Die Ausnahmeorbits sind $\{\text{Nordpol}, \text{Südpol}\}, \{A_1, A_3, \dots, A_{2q-1}\}$ und $\{A_2, A_4, \dots, A_{2q}\}$.

3 Orbitprojektion und Garben

Wir widmen uns jetzt wieder dem allgemeineren Fall zu, dass wir eine Riemannsche Fläche X und eine Untergruppe $G < \text{Aut}(X)$ gegeben haben. Wir wollen eine Riemannsche Fläche Y und eine Überlagerung $\eta : X \rightarrow Y$ konstruieren mit $\mathcal{D}(\eta) = G$. Dazu definieren wir die

Definition 3.1 Orbitprojektion: Eine surjektive, stetige offene Abbildung $\eta : X \rightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen, deren Fasern die G -Bahnen für $G < \text{Aut}(X)$ sind, heißt G -Orbitprojektion. Man nennt Y **Orbitraum**.

Satz 3.2 Existenz der Orbitprojektion: Zu jeder Transformationsgruppe G von X existiert eine G -Orbitprojektion $\eta : X \rightarrow Y$.

Beweis. Sei Y die Menge der G -Bahnen. Dann ist $\eta : X \rightarrow Y, x \mapsto G(x)$ surjektiv und wohldefiniert. Definiere auf Y die Quotiententopologie. Wir zeigen noch, dass η offen ist: Sei $U \subset X$ offen, dann ist $g(U) \subset G$ offen für alle $g \in G$. Daher ist $\bigcup_{g \in G} g(U) = \eta^{-1}(\eta(U)) \subset X$ offen und damit auch $\eta(U) \subset Y$. \square

Man bezeichnet den Raum Y auch mit X/G . Beachte, dass aus i.A. aus X hausdorffsch X/G hausdorffsch nicht folgt.

Vergleichen wir nochmal mit der Definition einer normalen Abbildung erhalten wir:

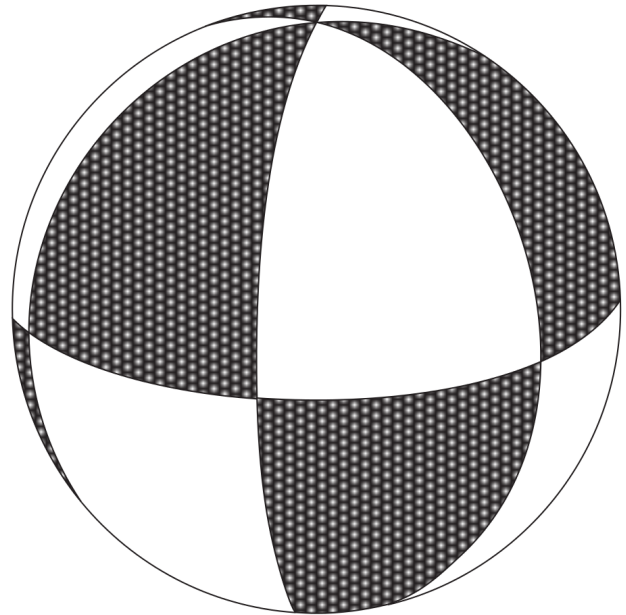


Abbildung 2: 3-Dieder-Parkettierung

Satz 3.3: Eine holomorphe Abbildung η zwischen zusammenhängenden Riemannschen Flächen ist genau dann eine normale Überlagerung, wenn sie eine $\mathcal{D}(\eta)$ -Orbitprojektion ist.

Wir wollen nun die topologische Orbitprojektion $X \rightarrow X/G$ zu einer holomorphen Abbildung und X/G zu einer Riemannschen Fläche machen, wenn $G < \text{Aut}(X)$. Ab sofort ist X ein *lokal kompakter Hausdorffraum*.

Definition 3.4 Diskontinuität: Eine Transformationsgruppe $G < \text{Aut}(X)$ heißt **diskontinuierlich**, wenn $\#\{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\} < \infty$ für alle $K \subset X$ kompakt.

Es folgt, dass jede Standgruppe G_x endlich und jede G -Bahn lokal endlich ist. – Endliche Transformationsgruppen sind diskontinuierlich und bei kompakten Räumen X ist umgekehrt jede diskontinuierliche Transformationsgruppe endlich.

Satz 3.5: Der Orbitraum X/G jeder diskontinuierlichen Transformationsgruppe G ist hausdorffsch.

Beweis. Sei $\eta : X \rightarrow Y$ eine G -Orbitprojektion. Wähle ein Kompaktum K mit $x, y \in K, x \neq y$ und $\eta(x) \neq \eta(y)$. $M := \{g \in G : g(K) \cap K \neq \emptyset\} < \infty$, da G diskontinuierlich. Da X hausdorffsch und $g \in M$ Automorphismen, gibt es Umgebungen U, V mit $g(U) \cap V = \emptyset \forall g \in M$. Man kann $U \cup V \subset K$ annehmen (notfalls U und V verkleinern). Dann ist $g(U) \cap V = \emptyset$ für alle $g \in G$, weil $g(K) \cap K = \emptyset$ für alle $g \in G \setminus M$. Da G eine Automorphismengruppe ist, folgt insbesondere, dass $g(U) \cap h(V) = \emptyset \forall g, h \in G$ und somit $\eta(U) \cap \eta(V) = \emptyset$. \square

Später brauchen wir die Eigenschaft einer diskontinuierlichen Gruppe G , dass jeder Punkt $a \in X$ eine *privilegierte Umgebung* besitzt:

Definition 3.6: Sei G eine Transformationsgruppe von X . Eine Umgebung U von $a \in X$ heißt **privilegiert**, wenn $g(U) = U \forall g \in G_a$ und $U \cap g(U) = \emptyset \forall g \in G \setminus G_a$. Durch Beschränkung entsteht aus der G -Orbitprojektion $\eta : X \rightarrow Y$ die G_a -Orbitprojektion $\eta|_U : U \rightarrow \eta(U)$.

Da X als Riemannsche Fläche hausdorffsch ist, ist X/G hausdorffsch. Bleibt die Frage nach einer holomorphen Struktur auf X/G zu ergründen, die die Orbitprojektion holomorph macht. Dazu führen wir das Konzept der *Garben* ein.