Seminarvortrag Isoperimetrische Ungleichung in der Ebene

Robert Hemstedt
r@twopi.eu

19. Mai 2013

1 Motivation

Sei Γ eine **geschlossene Kurve** in der Ebene, ohne Selbstüberschneidung. Es bezeichne l die **Länge** von Γ und $\mathcal{A}$ die **Fläche** der beschränkten Umgebung in $\mathbb{R}^2$, die von Γ umschlossen wird.
Frage: Falls existent, welche Kurve Γ für ein festes l maximiert $\mathcal{A}$?

Man kann sich schnell selbst davon überzeugen, dass der Kreis dieses Problem löst. Wir wollen dies formal beweisen.

2 Kurven, Längen und Flächen

Bei der ersten Beschreibung des Problems haben wir die uns alltäglichen Begriffe **geschlossene Kurve**, **Länge** und **Fläche** verwendet, ohne sie vorher klar definiert zu haben. Das holen wir jetzt nach.

Definition 2.1: *Eine* **parametrisierte Kurve** *ist eine Abbildung*

$$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2.$$

$\mathrm{Im}(\gamma)$ *ist eine Menge von Punkten in der Ebene, die wir als* **Kurve** Γ *bezeichnen.*
Eine Kurve heißt **einfach***, wenn sie sich nicht selbst schneidet und sie heißt* **geschlossen***, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt identisch sind. Also:*

$$\Gamma \text{ einfach und geschlossen} :\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(s_1) = \gamma(s_2) & s_1 = a, s_2 = b \\ \forall s_1 \neq s_2 \in [a, b] : \gamma(s_1) \neq \gamma(s_2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung 2.2: Wir können γ als eine periodische Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Periodenlänge $b - a$ fortsetzen und sie als Funktion auf dem Kreis betrachten.
Für unsere weiteren Betrachtungen fordern wir eine gewisse Glattheit von γ voraus, sodass wir sie als $\mathcal{C}^1$ Funktion betrachten mit $\gamma'(s) \neq 0 \ \forall s$, also γ nie konstant ist.
Insgesamt garantieren uns diese Forderungen an γ, dass Γ an jedem Punkt eine wohldefinierte Tangente hat, die sich stetig ändert, wenn der Stützpunkt auf der Kurve (stetig) wandert.

Bemerkung 2.3: Die Parametrisierung von γ induziert eine **Orientierung** auf Γ, wenn s von a nach b geht. Weiterhin ergibt sich für jede bijektive Abbildung $s : [c, d] \to [a, b]$, $s \in \mathcal{C}^1$ eine neue Parametrisierung $\eta : [c, d] \to \mathbb{R}^2$ von Γ mit

$$\eta(t) = \gamma(s(t)).$$

Es sollte klar sein, dass Γ geschlossen und einfach unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Definition 2.4: *Mit den Bezeichnungen von oben sind die zwei Parametrisierungen η und γ* **äquivalent**, *wenn $s'(t) > 0$ für alle t, d.h. η und γ induzieren die gleiche Orientierung auf Γ. Gilt jedoch $s'(t) < 0$ für alle t, so kehrt η die Orientierung um.*

Definition 2.5: *Wird die Kurve Γ durch eine Funktion $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ parametrisiert, dann ist ihre* **Länge** *l definiert durch*

$$l := \int_a^b |\gamma'(s)| ds = \int_a^b \left((x'(s)^2 + y'(s)^2) \right)^{1/2} ds.$$

Satz 2.6: *Die Länge einer Kurve Γ ist unabhängig von deren Parametrisierung.*

Beweis. Seien γ und η zwei Parametrisierung mit $\gamma(s(t)) = \eta(t)$ wie oben. Dann

$$\int_a^b |\gamma'(s)| ds = \int_c^d |\gamma'(s(t))||s'(t)| dt = \int_c^d |\eta'(t)| dt,$$

wobei wir die Kettenregel auf γ angewandt und die Variable im Integral substituiert haben. □

Für den anvisierten Beweis wählen wir eine besondere Parametrisierung von Γ.

Definition 2.7: *Wir bezeichen γ als eine* **Parametrisierung nach der Bogenlänge**, *wenn $|\gamma'(s)| = 1$ für alle s.*

Das bedeutet, dass $\gamma(s)$ sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt und daher die Länge von Γ genau $b - a$ ist. Nach einer eventuellen Translation lässt sich die Parametrisierung auf $[0; l]$ definieren.

Satz 2.8: *Jede Kurve lässt sich nach der Bogenlänge parametrisieren.*

Beweis. O.b.d.A sei $\alpha(t) : [0, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung der Kurve Γ. Dann definiere $L(s) := \int_0^s |\alpha'(t)| dt$. Da $|\alpha'(t)| > 0$ für alle t und α' stetig, ist L streng monoton und damit eine Bijektion $L : [0, b] \to [0, l]$. Dann ist $\gamma(s) = \alpha(L^{-1}(s))$ eine Parametrisierung von Γ nach der Bogenlänge. In der Tat:

$$\gamma'(s) = \frac{d}{ds}\alpha(L^{-1}(s)) = \alpha'(L^{-1}(s)) \cdot (L^{-1})'(s) = \alpha'(L^{-1}(s)) \cdot \frac{1}{L'(L^{-1}(s))} = \frac{\alpha'(L^{-1}(s))}{|\alpha'(L^{-1}(s))|}$$

und somit ist $|\gamma'(s)| = 1$ für alle s. □

Wir wollen nun die Fläche der von der einfach geschlossenen Kurve Γ umschlossenen definieren. Für unsere Betrachtungen genügt sie der folgenden Formel:

Definition 2.9: *Der Flächeninhalt $\mathcal{A}$ der von der Kurve Γ umschlossenen Region lässt lässt sich wie folgt berechnen:*

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \left| \int_\Gamma (x dy - y dx) \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \int_a^b x(s) y'(s) - y(s) x'(s) ds \right|. \end{aligned}$$

3 Formulierung und Beweis der Isoperimetrischen Ungleichung

An dieser Stelle sind wir mit genügend Rüstzeug bewappnet, um unser Problem exakt zu formulieren und zu beweisen.

Theorem 3.1 Isoperimetrische Ungleichung: *Sei Γ eine einfache geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^2$ der Länge l und sei $\mathcal{A}$ der Flächeninhalt der ihr umschlossenen Region. Dann gilt*

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi},$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn Γ ein Kreis ist.

Beweis. Wir können unser Problem neu skalieren, indem wir die Maßeinheiten um einen Faktor $\delta > 0$ verändern. Dies definiert die Abbildung $(x, y) \mapsto (\delta x, \delta y)$. Unter dieser Abbildung hat die Kurve Γ die Länge δl und die Fläche $\delta^2 \mathcal{A}$. Wir können somit alle Fälle auf den Fall $l = 2\pi$ zurückführen und es genügt zu zeigen, dass $\mathcal{A} \leq \pi$ mit Gleichheit genau dann, wenn Γ ein Kreis ist.

Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ eine Parametrisierung nach der Bogenlänge der Kurve Γ, also $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ für alle $s \in [0, 2\pi]$. Dann

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(x'(s)^2 + y'(s)^2\right) ds = 1. \tag{3.1}$$

Da die Kurve geschlossen und die Funktionen $x(s)$ und $y(s)$ 2π-periodisch ist, betrachten wir ihre Fourierreihen

$$x(s) \sim \sum a_n e^{ins} \text{ und } y(s) \sim \sum b_n e^{ins}.$$

Weiter mit $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ haben wir

$$x'(s) \sim \sum a_n ine^{ins} \text{ und } y'(s) \sim \sum b_n ine^{ins}.$$

Die Parsevalsche Identität angewandt auf (3.1) gibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) = 1. \tag{3.2}$$

Mit der Bilinearform der Parsevalschen Identität angewandt auf das Integral für den Flächeninhalt erhalten wir mit $a_n = \overline{a_{-n}}$ und $b_n = \overline{b_{-n}}$, da $x(s)$ und $y(s)$ reellwertig sind:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} x(s)y'(s) - y(s)x'(s)ds\right| = \pi \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} n\left(a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}\right)\right|.$$

Ferner ist

$$|a_n\overline{b_n} - b_n\overline{a_n}| \leq |a_n\overline{b_n}| + |\overline{a_n}b_n| = 2|a_n||b_n| \leq |a_n|^2 + |b_n|^2 \tag{3.3}$$

Mit $|n| \leq |n|^2$ und (3.2) zusammen ergeben

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|^2(|a_n|^2 + |b_n|^2) \\ &\leq \pi \end{aligned}$$

Wenn $\mathcal{A} = \pi$, dann muss $x(s) = a_{-1}e^{-is} + a_0 + a_1 e^{is}$ und $y(s) = b_{-1}e^{-is} + b_0 + b_1 e^{is}$, da $|n| < |n|^2$, sobald $|n| \geq 2$. Da $x(s)$ und $y(s)$ reellwertig sind, muss $a_{-1} = \overline{a_1}$ und $b_{-1} = \overline{b_1}$. Aus (3.2) ist $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$ und wegen Gleichheit in (3.3) ist $|a_1| = |b_1| = 1/2$. Demnach $a_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha}$ und $b_1 = \frac{1}{2}e^{i\beta}$. Weiter ist $1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1| = 2|\frac{e^{i(\alpha-\beta)}}{4} - \frac{e^{i(\beta-\alpha)}}{4}| = |\sin(\alpha - \beta)$ und somit $\alpha - \beta = (2k+1)\pi/2, k \in \mathbb{Z}$. Damit finden wir

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s) \text{ und } y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s),$$

wobei das Vorzeichen in $y(s)$ von der Parität von k abhängt. Auf jeden Fall sehen, wir dass Γ ein Kreis ist, für den die Gleichheit offensichtlich gilt und damit ist die Aussage bewiesen. $\square$