Zusammenfassung*Lineare Algebra I

gehalten von Prof. Dr. Stefan Schwede, Universität Bonn
im Wintersemester 2012/2013

Robert Hemstedt
r@twopi.eu

10. Februar 2013

Hinweise zur Verwendung

Die stets aktuelle Version dieser Zusammenfassung lässt sich finden unter
`http://github.com/euklid/Zusf-LinAI` .
Dort sind auch die `.tex`-Dateien zu finden, wenn man selbst Veränderungen vornehmen möchte. Bitte beachtet die **Lizenzhinweise**.

Werter Kommilitone, diese Zusammenfassung basiert zum größten Teil auf meinen Mitschriften unserer LA-Vorlesungen bei Prof. Dr. Schwede sowie teilweise auf dem Fischer[1].

Was die Nummerierung der Sätze und Kapitelabschnitte angeht, so ist sie nicht mit der aus dem Fischer identisch.

Gedacht ist diese Zusammenfassung explizit als Prüfungsvorbereitung und wird daher auch noch bis zur letzten Vorlesung weiterhin ergänzt. Wenn du Anmerkungen, Ergänzungen, Lob oder Kritik haben solltest, dann sprich mich einfach an, schick mir eine E-Mail oder, was das beste wohl ist, benutze `github.com`, um mir eine *pull*-Request zu schicken.

Ich hafte weder für „fehlende“ Inhalte noch für inhaltliche oder sprachliche Fehler.

Ich hoffe, dass diese Zusammenfassung und der damit verbundene Aufwand sich nicht nur für mich als Verfasser, sondern auch noch für dich als Kommilitone lohnen wird und der Aufwand auch in Form einer möglichst guten Klausurnote entlohnt wird.
Viel Spaß beim Lernen!

Lizenz

Ich veröffentliche dieses Dokument unter der Beerware-Lizenz:

*nach meinen persönlichen Aufzeichnungen

[1] Gerd Fischer, Lineare Algebra, 17.Auflage, Vieweg+Teubner Verlag

Weitere Hinweise lassen sich finden unter: `http://de.wikipedia.org/wiki/Beerware`

1 Erste Anfänge

$\mathbb{R}$ = Körper der reellen Zahlen; $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_{i\in\{1,\ldots,n\}} \in \mathbb{R}\}$, entspricht der Menge der n-Tupel reeller Zahlen; $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$x = (x_1, \ldots, x_n)$ hat x_i als i-te Koordinate/Komponente
Addition in $\mathbb{R}^n : (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$
Skalarmultiplikation: $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2, \ldots, \lambda \cdot x_n)$
Nullvektor: $0 = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ Nullen}}); 0 + x = x = x + 0$
Negative: $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$

1.1 Gerade in der Ebene

$v, v' \in R, v \neq v', w = v' - v$, $L = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{es gibt } \lambda \in R \text{ mit } x = v + \lambda w\} = v + \mathbb{R} \cdot w$
Parametrisierung: $\Phi : \mathbb{R} \to L \subseteq \mathbb{R}^2$, $\lambda \mapsto v + \lambda w = \Phi(\lambda)$
Alternativ: Beschreibung durch Gleichungssystem: Seien $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$. Betrachte die Menge $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$, Koeffizienten: a_1, a_2, b; Unbestimmte: x_1, x_2
Spezialfall: $a_1 = a_2 = 0$, also $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 = b\} = \begin{cases} \mathbb{R}^2, & \text{falls } b = 0 \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$
Spezialfall: $a_2 = 0, a_1 \neq 0 : L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 = b\}, x_1 = \frac{b}{a_1} \to$ Parametrisierung $\Phi : \mathbb{R} \to L, \Phi(\lambda) = \left(\frac{b}{a_1}, \lambda\right)$
Spezialfall: $a_1 = 0, a_2 \neq 0$ analog
„Allgemeiner Fall“: $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$
Schnittpunkte von L mit den Achsen sind: $x_1 = 0 : x_2 = \frac{b}{a_2} \Rightarrow \left(0; \frac{b}{a_2}\right) \in L, x_2 = 0 : x_1 = \frac{b}{a_1} \Rightarrow \left(\frac{b}{a_1}; 0\right) \in L \Rightarrow$ Parametrisierung für $b \neq 0 : \Phi : \mathbb{R} \to L \subset \mathbb{R}^2, \Phi(\lambda) = \left(0, \frac{b}{a_2}\right) + \lambda \left(\frac{b}{a_1}, -\frac{b}{a_2}\right) = \left(\lambda \frac{b}{a_1}, \frac{b}{a_2} - \lambda \frac{b}{a_2}\right)$
Zwei Geraden in einer Ebene schneiden sich „typischerweise“ in einem Punkt.

Definition 1.1: *Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt Gerade, falls es $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$, so dass $L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$.*

Satz 1.2: *Eine Teilmenge $L \subseteq \mathbb{R}^2$ ist genau dann Gerade, wenn es $v, w \in \mathbb{R}^2$ gibt, mit $w \neq 0$, sodass $L = v + \mathbb{R}w$*

1.2 Ebenen und Geraden im Raum ($\mathbb{R}^3$)

Durch zwei gegebene verschiedene Punkte $v, v' \in \mathbb{R}^3$ geht genau eine Gerade $L = \{v + \lambda w : \lambda \in \mathbb{R}\}$, wobei $w = v' - v$.
Betrachte lineare Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ mit ($E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$), Parameter $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$
1. Fall: $a_1 = a_2 = a_3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} E = \emptyset, & \text{falls } b \neq 0 \\ E = \mathbb{R}^3, & \text{falls } b = 0 \end{cases}$
2. Fall: $a_1 = a_2 = 0, a_3 \neq 0$ $E = \left\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = \frac{b}{a_3}\right\}$
3. Fall: $a_3 = 0, (a_1, a_2) \neq 0$ $E = \{(x_1, x_2, x_3) : a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$

Definition 1.3: *Eine Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt Ebene, wenn es $a_1, a_2, a_3, b \in \mathbb{R}$ mit $(a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0)$ gibt, sodass $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b\}$.*
Parametrisierung? $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit Bild die Menge E. Sei z.B. $a_3 \neq 0 :\Rightarrow x_3 = \frac{b-a_1x_1-a_2x_2}{a_3}$, x_1 und x_2 frei wählbar, x_3 festgelegt.
Wir können nun bezeichnen $\Phi(\lambda_1, \lambda_2) = \left(\lambda_1, \lambda 2, \frac{b-a_1\lambda_1-a_2\lambda_2}{a_3}\right) \in E$. Φ ist eine Bijektion auf E.
Andere Schreibweise: $E = u + \mathbb{R}v + \mathbb{R}w = \{(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{R}^3 :$ es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $x = u + \lambda_1 v + \lambda_2 w\}$. Man nehme z.B. $u = \Phi(0;0), v = \Phi(1;0), w = \Phi(0;1)$.

1.3 Kompakte Schreibweisen für lineare Gleichungssysteme

Gleichungssystem mit n Unbestimmten und m Gleichungen: $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ (i-te Zeile und j-te Spalte)

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Man kodiert die Koeffizienten in einer sogenannten Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$-Matrix
m - Anzahl Zeilen
n - Anzahl der Spalten

Wir schreiben die Unbestimmten in einen Spaltenvektor: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Wir definieren ein Produkt aus einer $m \times n$- Matrix und einem n-Spaltenvektor:

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}\right\} m\text{-Spaltenvektor}$$

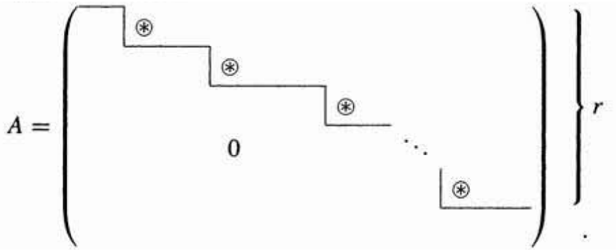
die i-te Gleichung des Systems lautet dann $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$. Das gesamte Gleichungssystem ist also äquivalent zu $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$.
Lösungsmenge des Gleichungssystems: $\text{Lös}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$.

1.4 Gauß'sches Eliminierungsverfahren

1. Umformung der Matrix auf Zeilenstufenform
2. explizites Lösen „von unten nach oben“

1.4.1 Explizites Lösen

Definition 1.4: *Eine $m \times n$-Matrix hat Zeilenstufenform, wenn sie von folgender Form ist*

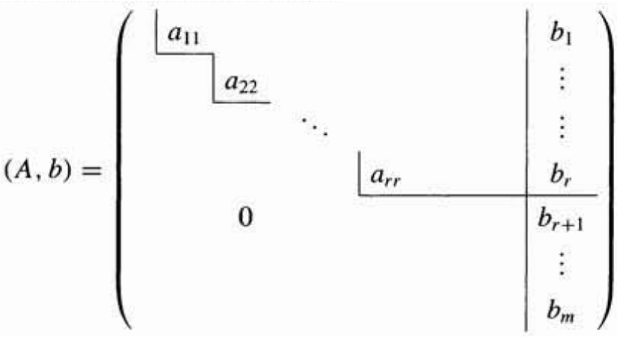


Dabei müssen die mit ⊛ markierten Einträge ungleich Null sein und unter der „Zeilenstufentreppe“ stehen lauter Nullen (Bild aus Fischer (siehe oben), Seite 22).

Definition 1.5 (formaler):

- *Es gibt eine Zahl r mit $0 \leq r \leq m$, sodass die ersten r Zeilen nicht 0 sind und die Zeilen $r+1, \dots, m$ 0 sind.*
- *Für alle $1 \leq i \leq r$ sei j_i der Index derjenigen Spalte, die zuerst $\neq 0$ ist. $j_i = \min\{j : a_{ij} \neq 0\}$. Dann gilt $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.*

Spezialfall: $j_1 = 1, j_2 = 2, \dots, j_r = r$; kann immer durch Umnummerierung der Variablen erreicht werden. Die erweiterte Koeffizientenmatrix hat folgende Form:



$a_{ii} \neq 0$ für $i = 1, \dots, r$. (Bild aus Fischer(siehe oben), Seite 24)

1. Fall: es gibt ein $i = r+1, \dots, m$ mit $b_i \neq 0$. Dann ist eine der Gleichungen $0 = b_i \neq 0$. Dann ist $\text{Lös}(A, b) = \emptyset$.
2. Fall: $b_{r+1} = b_{r+2} = \ldots = b_m = 0$ (Beachte: $r = m$ zugelassen, dann sind wir immer im zweiten Fall.) Dann sind $x_{r+1}, \dots, x_m$ freie Variablen, deren Werte frei gewählt werden können und man erhält $x_r, x_{r-1}, \dots, x_2, x_1$ durch sukzessives Auflösen nach der Variable und einsetzen. Wir wählen Parameter $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ($k = n - r$, Anzahl der freien Variablen) und setzen $x_{r+1} := \lambda_1, \dots, x_m := \lambda_k$. x_r erhält man durch Auflösen von $a_{rr}x_r + a_{r,r+1}\lambda_1 + \ldots + a_{rn}\lambda_k = b_r$. Auflösen gibt dann: $x_r := \frac{1}{a_{rr}}(b_r - a_{r,r+1}\lambda_1 - \ldots - a_{rn}\lambda_k)$. Am Ende erhalten wir (alle) Lösungen des Gleichungssystems als $x_n = \lambda_k, \dots, x_{r+1} = \lambda_1$ frei wählbar, $x_r = \frac{1}{a_{rr}}(b_r - a_{r,r+1}\lambda_1 - \ldots - a_{rn}\lambda_k)$, usw. $x_{r-1} = \dots, \dots, x_1 = \dots$ als explizite Ausdrücke in den $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
Man erhält auf diese Weise eine Parametrisierung des Lösungsraumes $\Phi : \mathbb{R}^k \to \text{Lös}(A, b) \subseteq \mathbb{R}^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \mapsto (x_1, \dots, x_r, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Φ ist injektiv, später zeigen wir, dass Φ auch surjektiv ist.

1.4.2 Umformung zur Zeilenstufenform

Definition 1.6: *Eine elementare Zeilenumformung eines Gleichungssystems ist eine von folgenden Operationen:*

1. *Vertauschen von zwei Zeilen*
2. *Addieren des λ-fachen der i-ten Zeile zu k-ten Zeile, wobei $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0, i \neq k$.*

Satz 1.7: *Sei (A, b) die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems und $(\tilde{A}, \tilde{b})$ entstehe aus (A, b) durch endliche viele Umformungen von Typ 1 und 2. Dann haben die Gleichungssysteme $A \cdot x = b$ und $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ dieselben Lösungen, d.h.* $\text{Lös}(A, b) = \text{Lös}(\tilde{A}, \tilde{b})$.
<u>Vorsicht:</u> *Der Lösungsraum ändert sich bei elementaren Spaltenumformungen.*

Satz 1.8: *Jede Matrix A kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht werden. (Einfach Gauß-Algorithmus mit Umformungen des Typs 1 und 2 anwenden. . .)*

1.4.3 Zusammenfassung des Gauß-Verfahrens

1. Man stelle die erweiterte Koeffizientenmatrix auf.
2. Man bringt die Matrix A auf Zeilenstufenform und führt gleichartig die Umformungen mit b durch.
3. Man liest an b und r ab, ob es überhaupt Lösungen gibt. Falls es Lösungen gibt, wählt man die freien Variablen als Parameter und löst von unten nach oben auf.

2 Gruppen

Eine **binäre Verknüpfung (Komposition)** ist eine Abbildung $* : G \times G \to G, (a, b) \mapsto *(a, b) = a * b$.
Sei X eine Menge. Dann ist $\text{Abb}(X, X)$ die Menge aller Abbildungen von X zu sich. Auf $\text{Abb}(X, X)$ gibt es die Komposition $\circ : \text{Abb}(X, X) \times \text{Abb}(X, X) \to \text{Abb}(X, X)$, $(f, g) \mapsto f \circ g$, wobei $f \circ g : X \to X$ definiert ist durch $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ für $x \in X$. Diese Verknüpfung ist assoziativ.

Definition 2.1: *Eine* **Gruppe** *ist eine Menge $G \neq \emptyset$ zusammen mit einer Verknüpfung $* : G \times G \to G$, die folgende Eigenschaften hat:*

<u>G1</u> *Assoziativität: es gilt $a * (b * c) = (a * b) * c$ für alle $a, b, c \in G$.*

<u>G2</u> *(a) Es existiert ein $e \in G$ mit* **linksneutraler Eigenschaft***: $e * a = a$ für alle $a \in G$.*
(b) Existenz von **Linksinverse***: zu jedem $a \in G$ gibt es ein $a' \in G$, sodass $a' * a = e$.*

Eine Gruppe heißt **kommutativ***, falls zusätzlich gilt $a * b = b * a$ $\forall a, b \in G$. Typische Symbole für Verknüpfungen von Gruppen: $*, +, \cdot, \circ, \ldots$ Konvention: das Symbol „+“ wird nur für kommutative Verknüpfungen verwendet.*
Wenn eine Verknüpfung assoziativ ist, kann man Klammern weglassen: $(a * b) * c = a * (b * c) = a * b * c$. Man lässt unter Umständen das Verknüpfungssymbol weg und schreibt abc für $a * b * c$.

$\text{Abb}(X, X)$ ist wegen fehlender Inverse keine Gruppe. Betrachtet man jedoch nur die bijektiven Abbildungen, so ist $(S(X), \circ)$ eine Gruppe (die **symmetrische Gruppe von X**) mit der Komposition $\circ$ von Funktionen als Verknüpfung, wobei $S(X)$ die Menge aller bijektiven Abbildungen von X nach X ist, für X nichtleere Menge. Beispiele für kommutative Gruppen sind $(\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

Satz 2.2: *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, dann gilt:*

(a) *Das neutrale Element e ist eindeutig. Außerdem ist es auch rechtsneutral: $a \cdot e = a$ für alle $a \in G$.*

(b) *Das linksinverse Element a' zu a bzgl. e ist eindeutig und auch rechtsinverse, d.h. $a \cdot a' = e$.* <u>Notation:</u> *Wir bezeichnen in einer Gruppe mit a^{-1} das zu a inverse Element.*

(c) *Für alle $a, b \in G$ gilt: $\left(a^{-1}\right)^{-1}$ und $(a \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a^{-1}$.*

(d) *Kürzungsregel: Seien $a, \tilde{x}, x, \tilde{y}, y \in G$. Wenn gilt $a \cdot \tilde{x} = a \cdot x$, dann auch $\tilde{x} = x$. Wenn $y \cdot a = \tilde{y} \cdot a$, dann auch $y = \tilde{y}$.*

Sei $(G, \cdot)$ ein Paar aus einer Menge $G \neq \emptyset$ und einer Verknüpfung $\cdot$. Für $a \in G$ definieren wir die **Translationabbildung** $\tau_a : G \to G, x \mapsto \tau_a(x) = x \cdot a$, ${}_a\tau : G \to G, x \mapsto {}_a\tau(x) = a \cdot x$.

Lemma 2.3: *Ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe, so sind für jedes $a \in G$ die Abbildungen τ_a und ${}_a\tau$ bijektiv. Sei $(G, \cdot)$ mit $\cdot$ assoziativ. Falls für alle $a \in G$ die Abbildungen τ_a und ${}_a\tau$ surjektiv sind, so ist $(G, \cdot)$ eine Gruppe.*

Verknüpfungstafeln: Für eine n-elementige Menge $G = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kann man im Prinzip die Verknüpfung durch Angabe aller Werte in einer quadratischen Tafel angeben. In der i-ten Zeile (Spalte) der Tafel stehen die Bilder der Translationsabbildungen ${}_{a_i}\tau$ (bzw. τ_{a_i}). Da ${}_{a_i}\tau$ und τ_{a_i} in einer Gruppe bijektiv sind, muss in jeder Zeile und Spalte jedes Element genau einmal vorkommen.

Definition 2.4: *Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Eine nichtleere Teilmenge $G' \subseteq G$ heißt* **Untergruppe***, falls gilt:*

- *für alle $a, b \in G'$ liegt auch $a \cdot b$ in G',*
- *für alle $a \in G'$ liegt auch a^{-1} in G'.*

Bemerkung 2.5: G' ist selbst eine Gruppe bezüglich der eingeschränkten Verknüpfung $\cdot : G' \times G' \to G'$.

- Assoziativität: gilt in G, daher auch in G'.
- neutrales Element: wegen $a \in G' \Rightarrow a^{-1} \in G' \Rightarrow e = a^{-1} \cdot a \in G'$. e linksneutral in G, also auch in G'. Weiterhin ist a^{-1} das linksinverse von a, sodass G' alle Gruppeneigenschaften erfüllt.

Sei X eine Menge, $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist $\{f : X \to X : f \text{ ist bijektiv}, f(y) = y \ \forall y \in Y\}$ eine Untergruppe von $(S(X), \circ)$.

Definition 2.6: *Seien $(G, \cdot)$ und $(H, *)$ zwei Gruppen. Eine Abbildung $\varphi : G \to H$ heißt* **Gruppenhomomorphismus***, falls $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ für alle $a, b \in G$.*

Bemerkung 2.7: Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann:

(a) Es gilt $\varphi(e) = \bar{e}$, wenn $e \in G$ bzw. $\bar{e} \in H$ die neutralen Elemente bezeichnen.

(b) Es gilt $\varphi(a)^{-1} = \varphi(a^{-1})$ für alle $a \in G$.

(c) Falls φ bijektiv ist, so ist die Umkehrabbildung $\varphi^{-1} : H \to G$ auch ein Gruppenhomomorphismus.

Bemerkung 2.8:

(a) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Dann ist das Bild $\mathrm{Im}(\varphi) = \{h \in H :$ es gibt ein $g \in G$ mit $\varphi(g) = h\}$ eine Untergruppe von $(H, *)$.

(b) Sei $\psi : H \to K$ ein weiterer Gruppenhomomorphismus. Dann ist auch $\psi \circ \varphi : G \to K$ ein Gruppenhomomorphismus.

Definition 2.9: *Für alle $m \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung $m \cdot - : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ein Endomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$. Also ist $m\mathbb{Z} = \mathrm{Im}(m\cdot-) = \{m\cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ die durch m teilbaren Zahlen eine Untergruppe von $(\mathbb{Z}, +)$. Zu $r, m \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Menge $r + m\mathbb{Z} := \{r + m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ als um r verschobene Untergruppe $m\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}$.*

Weiter ist $0 + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}, m + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$.
Sei nun $m \geq 1$ und $0 \leq r \leq m - 1$ „die möglichen Reste bei Teilen durch m“. $\mathbb{Z} = \bigcup_{r=0}^{m-1} (r + m\mathbb{Z})$. Der Rest beim Teilen durch m entscheidet, in welcher der Mengen in der Vereinigung eine ganze Zahl liegt. Die Mengen $0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, 2 + m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1) + m\mathbb{Z}$ sind disjunkt.

Bemerkung 2.10: a und $a' \in \mathbb{Z}$ liegen genau dann in derselben Restklasse modulo m, wenn gilt, dass $a - a'$ durch m teilbar ist.

Wenn ein $m \geq 1$ fixiert ist, schreiben wir kürzer $\bar{a} = a + m\mathbb{Z}$ für die Restklasse von a modulo m. Dann gilt also $\bar{a} = \bar{a}' \Leftrightarrow a - a'$ ist durch m teilbar.

Definition 2.11: *Für $m \geq 1$ ganze Zahl ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Menge aller Restklassen modulo m. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{r + m\mathbb{Z} : r \in \mathbb{Z}\} = \{0 + m\mathbb{Z}, 1 + m\mathbb{Z}, \ldots, (m-1) + m\mathbb{Z}\}$. $+ : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist definiert durch $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$.*

Satz 2.12: *Sei $m \geq 1$ eine ganze Zahl. Dann bildet die Menge $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \{r + m\mathbb{Z} : r \in \mathbb{Z}\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}\}$ eine kommutative Gruppe bezüglich $+ : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $(\bar{a}, \bar{b}) \mapsto \bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$. Außerdem ist die Restklassenabbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $a \mapsto a + m\mathbb{Z} = \bar{a}$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus.*

$m = 0 : 0\mathbb{Z} = \{0\}, r + 0\mathbb{Z} = \{r\}, Z/0\mathbb{Z} = \{\{r\} : r \in \mathbb{Z}\}$”=”$\mathbb{Z}$ unendliche zyklische Gruppe.
zyklisch: Die Translationsabbildung $\tau_{\bar{1}} : \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ „rotiert“ die Elemente zyklisch.

3 Ringe, Körper

Definition 3.1: *Ein* **Ring** *ist eine Menge R mit zwei binären Verknüpfungen $+ : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a + b$ und $\cdot : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a \cdot b$ mit folgenden Eigenschaften:*

R1 *$(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe. Notation: 0 bezeichnet das bezüglich $+$ neutrale Element, $-a$ das bezüglich a inverse Element.*

R2 *$\cdot$ ist assoziativ.*

R3 *Distributivgesetze: für alle $a, b, c \in R$ gilt:*

- *$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und*
- *$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.*

„Punkt- vor Strichrechnung“.
Ein Ring heißt **kommutativ**, *wenn die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ ist. Ein Element $1 \in R$ heißt* **Einselement**, *wenn gilt $1 \cdot a = a = a \cdot 1\ \forall a \in R$ (d.h., 1 ist beidseitig neutral bezüglich $\cdot$).*
Vorsicht: Viele Quellen verlangen, dass ein Ring ein Einselement enthalten muss.

Bemerkung 3.2: Wenn 0 das neutrale Element bezüglich $+$ bezeichnet, so gilt $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$ für alle $a \in R$.

Definition 3.3: *Ein Ring heißt* **nullteilerfrei**, *falls für alle $a, b \in R$ mit $a \cdot b = 0$ schon folgt $a = 0$ oder $b = 0$. $\Leftrightarrow$ die Menge $R \setminus \{0\}$ ist abgeschlossen unter $\cdot$.*

Lemma 3.4: *Sei $m \geq 2$ eine ganze Zahl. Der Ring $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist genau dann nullteilerfrei, wenn m eine Primzahl ist.*

Definition 3.5: *Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring. Eine Teilmenge $R' \subseteq R$ heißt* **Unterring**, *wenn R' bezüglich $+$ eine Untergruppe ist und R' ist bezüglich $\cdot$ abgeschlossen, d.h. für alle $a, b \in R'$ ist $a \cdot b \in R'$.*

Wenn R' ein Unterring von $(R, +, \cdot)$ ist, dann ist $(R', +, \cdot)$ ein Ring.

Definition 3.6: *Seien $(R, +, \cdot)$ und $(S, +, \cdot)$ Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ ist ein* **Ringhomomorphismus**, *falls für alle $a, b \in R$ gilt, dass $\varphi(a+b) = \varphi(a)+\varphi(b)$ und $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.*

Definition 3.7: *Ein* **Körper** *ist ein kommutativer Ring mit 1 mit der Eigenschaft, dass $(R \setminus \{0\}, \cdot)$ eine Gruppe bildet.*

Da $R \setminus \{0\}$ unter $\cdot$ abgeschlossen sein muss, muss ein Körper insbesondere nullteilerfrei sein.

Definition 3.8 (äquivalent zu oben): *Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit zwei binären Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, sodass gilt:*

(K1) *$(K, +)$ ist eine abelsche (=kommutativ) Gruppe.*

(K2) *Für alle $a, b \in K \setminus \{0\}$ ist $a \cdot b \neq 0$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ bildet eine kommutative Gruppe.*

(K3) *Für alle $a, b, c \in K$ gilt $a(b + c) = ab + ac$*

Schreibweise: für $a \neq 0$ ist $a^{-1} = \frac{1}{a}$ das multiplikativ Inverse zu a. $a^{-1} \cdot b = b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}$.

Bemerkung 3.9: Sei K ein Körper und $a, b, x, \tilde{x} \in K$. Dann gilt:

(a) $0 \neq 1$, ein Körper hat mindestens zwei Elemente.

(b) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

(c) $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

(d) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = (-a) \cdot b$

(e) Wenn $a \neq 0$ und $x \cdot a = \tilde{x} \cdot a$, dann gilt $x = \tilde{x}$

Satz 3.10: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *(mit komplexer Multiplikation) bildet einen Körper.*

Wir fassen $\mathbb{R}$ als Untergruppe von $\mathbb{C}$ auf. Vermöge der injektiven Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}, a \mapsto (a, 0)$, $(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0) \Rightarrow$ Abbildung ist Ringhomomorphismus.

Definition 3.11: $i = (0,1)$, $i^2 = -1$.

Mit dieser Notation gilt folgendes: $(a,b) = a + b \cdot i$.

Definition 3.12 Komplexe Konjugation: $^{-} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *ist definiert durch* $\overline{(a,b)} = (a,-b)$. *Äquivalent:* $\overline{a+bi} = a - bi; a,b \in \mathbb{R}$.

$\lambda \mapsto \bar{\lambda}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ ist Ringhomomorphismus.

Definition 3.13 Betrag Komplexer Zahlen: $|\cdot| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *ist definiert durch* $|(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2}$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda\bar{\lambda}}$. *Eigenschaften:* $|\lambda\mu| = |\lambda| \cdot |\mu|$, $|\lambda + \mu| \leq |\lambda| + |\mu|$.

Lemma 3.14: *Sei R endlicher nullteilerfreier, kommutativer Ring mit 1 und $1 \neq 0$. Dann ist R ein Körper. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ für jede Primzahl p ein Körper.*

Für einen Ring R mit 1 und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $n \cdot a := \underbrace{a + a + \ldots + a}_{n-mal}, a \in R$.

Definition 3.15: *Sei R ein Ring mit 1. Die* **Charakteristik** *von R ist*

$$\operatorname{char}(R) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \cdot 1 \neq 0 \textit{ in } R \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}, \\ \min\{n \in \mathbb{N} : n \cdot 1 = 0\}, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 3.16: *Für jeden Körper K ist die Charakteristik 0 oder eine Primzahl.*

4 Polynome

Definition 4.1: *Sei R ein Ring mit 1. Der* ***Polynomring*** *$R[t]$ ist die Menge aller Funktionen $R[t] := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} :$ fast alle $f(i) = 0\} = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} :$ die Menge $\{j : f(j) \neq 0\}$ ist endlich$\}$. „fast alle"=„alle bis auf endlich viele".*

Definition 4.2: *Wir definieren eine Addition auf $R[t]$ elementweise: $f, g \in \mathbb{R}[t]$, dann $(f+g)(i) := f(i) + g(i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$.*

Sei $s(f) = \{j \in \mathbb{N} | f(j) \neq 0\}$, $s(g) = \{j \in \mathbb{N} | g(j) \neq 0\}$ (endlich für $f, g \in R[t]$). Dann $s(f+g) \subseteq s(f) \cup s(g)$ ist wieder eine endliche Menge.
$(R[t], +)$ ist abelsche Gruppe, sogar eine Untergruppe von $(\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}, +)$. Neutrales Element bezüglich $+$ ist die Nullfunktion 0, mit $0(j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

Definition 4.3: *Wir definieren eine Multiplikation auf $R[t]$ wie folgt: $f, g \in R[t] : (f \cdot g)(j) = \sum_{i=0}^{j} f(i) \cdot g(j-i)$ für ein $j \in \mathbb{N}$.*

Wenn f und g fast überall 0 sind, dann auch $f \cdot g$. Weiterhin ist $R[t]$ bezüglich $\cdot$ assoziativ.
Wenn R ein Ring mit 1 ist, dann ist auch $(R[t], +, \cdot)$ ein Ring mit 1; falls R kommutativ ist, dann auch $R[t]$.
Einselement: Sei $1 \in R[t]$ die Funktion mit $1(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$ Es gilt $(1 \cdot g)(j) = g(j)$.

Definition 4.4: *Die „Unbestimmte" ist wie folgt definiert: wir setzen $t \in R[t]$: also*

$$t(j) = \begin{cases} 1, & \textit{falls } j = 1 \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Für alle $f \in R[t]$ gilt $f = \sum_{n\geq 0} f(n)t^n$ in $R[t]$. $t^n := \underbrace{t \cdot t \cdot \ldots \cdot t}_{n-mal}, t^0 = 1$. Für $a \in R, f \in R[t]$ ist $(a \cdot f)(j) = a \cdot f(j); a \cdot f \in R[t]$. Weiterhin ist $(t^n)(j) = \begin{cases} 1, & \text{für } j = n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Sei R ein Ring mit 1, dann Polynomring $R[t] = \{f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots + f_n t^n | n \geq 0, f_0, f_1, \ldots, f_n \in R\}$. $f + g = \sum_{i=0}^n f_i t^i + \sum_{i=0}^n g_i t^i = \sum_{i=0}^n (f_i + g_i) t^i$. $(\sum_{i=0}^n f_i t^i) \cdot (\sum_{i=0}^n g_i t^i) = f_0 g_0 + (f_1 g_0 + f_0 g_1)t + \ldots + \left(\sum_{i=0}^j f_i g_{j-i}\right) t^i + \ldots$.

Definition 4.5: *Sei $f \in R[t]$ ein Polynom mit Koeffizienten in einem Ring R mit 1. Dann definiert f eine Polynomfunktion $\tilde{f} : R \to R$ definiert durch: $f = f_0 + f_1 t^1 + \ldots + f_n t^n$, dann ist $\tilde{f}(\lambda) := f_0 + f_1 \lambda + \ldots + f_n \lambda^n = \sum_{j\geq 0}^n f(j)\lambda^j$ für $\lambda \in R$.*

Man kann dies auffassen als eine Abbildung. $R[t] \to \text{Abb}(R, R), f \mapsto \tilde{f}$. Typischerweise ist nicht jede Funktion von R nach R von der Form $\tilde{f}$ für ein Polynom f.

Definition 4.6: *Sei $f \in R[t]$ ein Polynom. Der* **Grad** *von f ist*
$\deg(f) = \begin{cases} -\infty, & \textit{falls } f = 0, \\ \max\{j : f(j) \neq 0\}, & \textit{sonst.} \end{cases}$ $\deg(f_0 + f_1 t + \ldots + f_n t^n) = n$ *falls* $f_n \neq 0$.

Falls R nullteilerfrei ist (z.B. ein Körper), dann gilt: $\deg(f \cdot g) = deg(f) + deg(g)$.

Satz 4.7: *Sei K ein Körper und $f, g \in K[t]$ mit $g \neq 0$. Dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $q, r \in K[t]$ mit $f = q \cdot g + r$ und $\deg(r) < \deg(q)$.*

Sei K ein endlicher Körper $K = \{a_0, \ldots, a_n\}$ und $f = (t - a_0)(t - a_1) \cdot \ldots \cdot (t - a_n) + 1$ hat Grad $n + 1$ und keine Nullstelle, es gilt $f(\lambda) = 1$ für alle $\lambda \in K$.

Lemma 4.8: *Sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle des Polynoms $f \in K[t]$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $g \in K[t]$ mit $f = (t - \lambda) \cdot g$ und $\deg(g) = \deg(f) - 1$.*

Korollar 4.9: *Sei $f \in K[t]$ ein Polynom mit $f \neq 0$ vom Grad n. Dann hat f höchstens n verschiedene Nullstellen.*

Korollar 4.10: *Für jeden unendlichen Körper K ist die Abbildung $K[t] \to \text{Abb}(K, K), f \mapsto \tilde{f}$ injektiv.*

Definition 4.11: *Sei K ein Körper, $0 \neq f \in K[t]$ und $\lambda \in K$. Die* **Vielfachheit (Multiplizität)** *von λ in f ist $\mu(f; \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N} : f = (t - \lambda)^r \cdot g$ für ein $g \in K[t]\}$.*

Bemerkung 4.12: Also $f(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \mu(f, \lambda) \geq 1$. Wenn $f = (t - \lambda)^r \cdot g$ und $r = \mu(f; \lambda)$, dann ist $g(\lambda) \neq 0$. $\mu(f; \lambda)$ gibt an „wie oft“ $(t - \lambda)$ in f enthalten ist. Für $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (also für $\text{char}(K) = 0$) ist $\mu(f; \lambda) = \max\{r \in \mathbb{N} : f(\lambda) = f'(\lambda) = \ldots = f^{(r-1)}(\lambda) = 0\}$. Für $f = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$ definiere $f' = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \ldots + n a_n t^{n-1}$.

Bemerkung 4.13: Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ die paarweise verschiedene Nullstellen eines Polynoms $f \in K[t]$ mit Vielfachheiten $r_i = \mu(f; \lambda_i)$, dann gilt $f = (t - \lambda_1)^{r_1}(t - \lambda_2)^{r_2} \cdot \ldots \cdot (t - \lambda_k)^{r_k} \cdot g$ für ein Polynom g ohne Nullstelle.

Ein Körper, über den jedes Polynom vom Grad mindestens 1 eine Nullstelle hat, heißt **algebraisch abgeschlossen**. Endliche Körper sind nicht algebraisch abgeschlossen. $\mathbb{R}$ ist nicht algebraisch abgeschlossen ($f = t^2 - 1$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$).

Satz 4.14 Fundamentalsatz der Algebra: *$\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen, d.h. sei $f \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(f) \geq 1$, dann hat f mindestens eine Nullstelle.*

Korollar 4.15: *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper (z.B. $K = \mathbb{C}$) und $f \in K[t]$ ein Polynom mit $\deg(f) \geq 1$. Dann zerfällt f vollständig in Linearfaktoren, d.h. es gibt $a, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ mit $f = a(t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n), n = \deg(f)$.*

Lemma 4.16: *Sei $f \in \mathbb{R}[t]$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine komplexe Nullstelle von f. Dann ist auch die komplexe konjugierte Zahl $\bar{\lambda}$ eine Nullstelle von f und es gilt sogar $\mu(f;\lambda) = \mu(f;\bar{\lambda})$. Mit anderen Worten: die komplexen Nullstellen eines reellen Polynoms liegen symmetrisch zur reellen Achse.*

Satz 4.17: *Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ hat eine Darstellung $f = a \cdot (t-\lambda_1) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_k) \cdot g_{k+1} \cdot g_{k+3} \cdot \ldots \cdot g_{n-1}$, wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ und $g_{k+1}, \ldots, g_{n-1} \in \mathbb{R}[t]$ quadratisch und haben keine reellen Nullstellen.*

Korollar 4.18: *Jedes Polynom $f \in \mathbb{R}[t]$ von ungeradem Grad hat eine reelle Nullstelle.*

Für Polynome ersten bis vierten Grades lassen sich Formeln ihrer Nullstellen angeben, für Polynome höheren Grades ist das im Allgemeinen nicht mehr möglich.
Wenn der Koeffizient höchsten Grades eines Polynoms 1 ist, so lässt es sich aus seinen Nullstellen eindeutig konstruieren.

Satz 4.19 Vieta: *Für $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2) \cdot \ldots \cdot (t-\lambda_n)$ gilt $a_k = (-1)^{n-k} S_{n-k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, wobei $S_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq n} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k}$.*

Satz 4.20: *Angenommen $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0$, erfülle $a_0 \neq 0$ und habe n reelle Nullstellen. Dann*

(a) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n < 0 \Leftrightarrow a_0, \ldots, a_{n-1} > 0$,

(b) $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 \Leftrightarrow (-1)^{n-j} a_j > 0$ *für* $j = 0, \ldots, n-1$.

$f_- = t^n - a_{n-1}t^{n-1} + a_{n-2}t^{n-2} + \ldots + (-1)^n a_0$.
Notation: Sei $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[t]$. Dann sei $N_+(f)$ = Anzahl der positiven Nullstellen, $N_-(f)$ = Anzahl der negativen Nullstellen und $Z(f)$ = Anzahl der Vorzeichenwechsel der Koeffizienten in f.

Satz 4.21 Vorzeichenregel von Descartes: *Sei $f = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{R}[t]$ mit $a_o \neq 0$. Dann $N_+ \leq Z(f)$ und $N_-(f) \leq Z(f_-)$.*

5 Vektorräume

Definition 5.1: *Sei K ein Körper. Ein* **K-Vektorraum** *ist ein Tripel $(V, +, \cdot)$ bestehend aus einer Menge V, einer Verknüpfung $+ : V \times V \to V$ und einer Verknüpfung $\cdot : K \times V \to V$, sodass gilt:*

<u>V1</u> *$(V, +)$ bildet eine abelsche Gruppe.*

<u>V2</u> *Für alle $\lambda, \mu \in K$, $v, w \in V$ gelten*
$(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$, $\lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$, $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$, $1 \cdot v = v$.

Beispiel 5.2:

a) „Standardvektorraum“ K^n für $n = 1, 2, 3, \ldots$ mit komponentenweiser Addition sowie gewohnter Multiplikation mit einem Skalar.

b) Die Menge $M(m \times n, K)$ aller $m \times n$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n}$ mit $a_{ij} \in K$ bildet Vektorraum mit Matrixaddition und Multiplikation mit einem Skalar.

c) $\mathbb{C}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum vermöge $\lambda \in \mathbb{R}, (a, b) = a + bi \in \mathbb{C}$, $\lambda(a + bi) = \lambda a + (\lambda b)i$
Allgemeiner: Sei L ein Ring mit 1 und $K \subseteq L$ ein Teilring (mit 1), der ein Körper ist. Dann wird L ein K-Vektorraum vermöge der eingeschränkten Addition und Multiplikation in L.

d) Der Polynomring $K[t]$ ist ein K-Vektorraum vermöge der Addition in $K[t]$ und der Skalarmultiplikation definiert als $\lambda(a_0+a_1t^1+\ldots+a_nt^n) = (\lambda a_0)t_0+(\lambda a_1)t^1+\ldots+(\lambda a_n)t^n; \lambda_i, a_i \in K$

e) Sei M eine Menge. Die Menge $\mathrm{Abb}(M, K)$ aller Abbildungen $f : M \to K$ bildet einen K-Vektorraum vermöge: $f, g \in \mathrm{Abb}(M, K), \lambda \in K$ $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ für alle $m \in M$ und $(\lambda \cdot f)(m) = \lambda \cdot f(m)$.

Bemerkung 5.3: In jedem K-Vektorraum V gelten folgende Regeln für alle $\lambda \in K, v \in V$:

a) $0 \cdot v = 0$

b) $\lambda \cdot 0 = 0$

c) $\lambda \cdot v = 0$, dann gilt $v = 0$ oder $\lambda = 0$

d) $(-1) \cdot v = -v$

Definition 5.4: *Sei V ein K-Vektorraum und $W \subseteq V$ eine Teilmenge. W heißt* **Untervektorraum**, *falls gilt:*

<u>UV1</u> *W ist nicht leer.*

<u>UV2</u> *abgeschlossen bezüglich Addition: für alle $v, w \in W$ ist $v + w \in W$.*

<u>UV3</u> *abgeschlossen bezüglich Skalarmultiplikation: für alle $\lambda \in K, w \in W$ ist $\lambda \cdot W \in W$.*

Satz 5.5: *Sei $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist W selbst ein Vektorraum (mit den eingeschränkten Verknüpfungen $+$ und $\cdot$).*

Lemma 5.6: *Sei V ein Vektorraum, I eine Menge und $(W_i)_{i \in I}$ eine Familie von Untervektorräumen von V. Dann ist der Durchschnitt $W = \bigcap_{i \in I} W_i = \{w \in V :$ für alle $i \in I$ gilt $w \in W_i\}$ wieder ein Untervektorraum von V.*

Lemma 5.7: *Seien W, W' Untervektorräume eines K-Vektorraums V. Falls $W \cup W'$ auch ein Untervektorraum ist, dann gilt $W \subseteq W'$ oder $W' \subseteq W$.*

5.1 Erzeugendensystem, Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

Definition 5.8: *Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V. Ein $v \in V$ heißt Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$, falls es endlich viele $i_1, \ldots, i_r \in I$ und Skalare $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ gibt, mit $v = \lambda_1 v_{i_1} + \lambda_2 v_{i_2} + \ldots + \lambda_r v_{i_r}$. Der* **Span** *der Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist die Menge aller* **Linearkombinationen***, die man so erhält.*
$\mathrm{span}(v_i)_{i\in I} = \mathrm{span}_K(v_i)_{i\in I} = \{v \in V : v \text{ ist Linearkombination von } (v_i)_{i\in I}\}$.

Für den Spezialfall $I = \{1, \ldots, n\}$ ist $\mathrm{span}(v_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}} = \mathrm{span}(v_1, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\} = Kv_1 + Kv_2 + \ldots + Kv_n$

Lemma 5.9: *Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Elementen aus V. Dann gilt:*

a) $\mathrm{span}(v_i)_{i\in I}$ *ist ein Untervektorraum von V.*

b) *Sei W ein Untervektorraum von V mit $v_i \in W$ für alle $i \in I$. Dann gilt* $\mathrm{span}(v_i)_{i\in I} \subseteq W$.

Sei $M \subseteq V$ eine Teilmenge. Wir fassen M als eine M-indizierte Familie auf. Und setzen $\mathrm{span}(M) = \mathrm{span}(m)_{m\in M} = \{v \in V : \text{es gibt } m_1, \ldots, m_r \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K \text{ mit } v = \lambda_1 m_1 + \ldots + \lambda_r m_r\}$. $M \subseteq \mathrm{span}(M) \subseteq V$ und $\mathrm{span}(M)$ ist der kleinste Untervektorraum von V, der die Menge M enthält.

Definition 5.10: *Sei $V = K^n$ K-Vektorraum. Für $1 \leq i \leq n$ definieren wir $e_i \in K^n$ als $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (1 an der i-ten Stelle, sonst Null).*

Für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ gilt $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, 0, \lambda_n) = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$. Also gilt $\mathrm{span}(e_i)_{i=1,\ldots,n} = K^n$. $K[t] = \mathrm{span}(t^n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$
Sei $\bar{V} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$ mit elementweiser K-Vektorraumstruktur. Dann ist $K[t]$ ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{N}, K)$.
Es ist immer $0 \in \mathrm{span}(v_i)_{i\in I}$: Für jede endliche Teilmenge $i_1, \ldots, i_r$ gibt es immer die **triviale Linearkombination** $0 = 0 \cdot v_{i_1} + 0 \cdot v_{i_2} + \ldots + 0 \cdot v_{i_r}$.

Definition 5.11: *Sei V ein K-Vektorraum und $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Familie von Vektoren aus V. $(v_1, \ldots, v_r)$ heißt* **linear unabhängig***, wenn für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit $0 = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ gilt $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0$. Eine beliebige Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren aus V heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilfamilie linear unabhängig ist, d.h. für jede endliche Teilmenge $J = \{i_1, \ldots, i_r : i_j \neq i_{j'} \text{ für } j \neq j'\} \subseteq I$.*

Lemma 5.12: *Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren eines K-Vektorraums V. Dann sind äquivalent:*

(i) *$(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.*

(ii) *Jeder Vektor $v \in \mathrm{span}(v_i)_{i_I}$ lässt sich auf genau eine Weise als Linearkombination der v_i schreiben.*

Bemerkung 5.13:

- Ein einzelner Vektor $v \in V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $v \neq 0$.
- Ist $v_i = 0$ für ein $i \in I$, dann ist $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig.
- Ist $v_i = v_j$ für ein $i \neq j \in I$, so ist $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängig.

- Sei $r \geq 2, (v_1, \ldots, v_r)$ ist genau dann linear abhängig, wenn einer der Vektoren eine Linearkombination der anderen ist.

Definition 5.14: *Eine Familie $\mathcal{B} = (v_i)_{i \in I}$ von Vektoren aus einem K-Vektorraum V heißt* **Basis von V**, *falls $\mathcal{B}$* **Erzeugendensystem** *von V ist, d.h. $V = \operatorname{span}(v_i)$ und $\mathcal{B}$ linear unabhängig ist. V heißt* **endlich erzeugt**, *falls V ein endliches Erzeugendensystem hat.*

Satz 5.15: *Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ eine Familie von Vektoren aus V. $V \neq \{0\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis, d.h. linear unabhängiges Erzeugendensystem.*

(ii) *$\mathcal{B}$ ist ein* **unverkürzbares Erzeugendensystem**, *d.h. für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$ ist $(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_r)$ kein Erzeugendensystem.*

(iii) *Zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$.*

(iv) *$\mathcal{B}$ ist* **unverlängerbar linear unabhängig**, *d.h. für alle $v \in V$ ist $(v_1, \ldots, v_r, v)$ linear abhängig.*

Bemerkung 5.16: Sei V ein K-Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist. Dann gibt es in V eine unendlich linear unabhängige Familie.

Korollar 5.17: *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine Basis.*

Satz 5.18: *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Lemma 5.19 Austauschlemma: *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ und $w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r$ mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$. Wenn für ein $j \in \{1, \ldots, r\}$ gilt, dass $\lambda_j \neq 0$, dann ist $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_{j-1}, w, v_{j+1}, \ldots, v_r)$ auch eine Basis.*

Satz 5.20 Austauschsatz: *Sei $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis des K-Vektorraums V und $(w_1, \ldots, w_n)$ eine linear unabhängige Familie. Dann gilt $n \leq r$ und es gibt paarweise verschiedene Indizes $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, r\}$, sodass nach Ersetzen von v_{i_j} durch w_j eine neue Basis von V entsteht. Nach Umordnung können wir also annehmen, dass $i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_n = n$ und die neue Basis damit $(w_1, \ldots, w_n, v_{n-1}, \ldots, v_r)$ ist.*

Korollar 5.21: *Hat ein K-Vektorraum eine endliche Basis, dann ist jede Basis endlich.*

Korollar 5.22: *Je zwei endliche Basen eines Vektorraums haben gleich viele Elemente.*

Definition 5.23: *Sei V ein K-Vektorraum. Die* **Dimension** *von V ist definiert als* $\dim_K(V) = \dim(V) = \begin{cases} r, & \text{falls } V \text{ eine endliche Basis mit } r \text{ Elementen hat,} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist.} \end{cases}$

Sei M eine Menge. Dann gilt $\dim_K(\operatorname{Abb}(M, K)) = \begin{cases} |M|, & \text{falls } M \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{falls } M \text{ unendlich ist.} \end{cases}$

Korollar 5.24: *Ist $W \subseteq V$ ein Untervektorraum eines endlich erzeugten K-Vektorraums V, dann ist auch W endlich erzeugt. Außerdem gilt $\dim(W) \leq \dim(V)$. Falls $\dim(W) = \dim(V)$, dann gilt schon $W = V$.*

Satz 5.25 Basisergänzungssatz: *Sei $(w_1, \dots, w_n)$ eine linear unabhängige Familie in einem endlich erzeugten K-Vektorraum V. Dann gibt es Vektoren $w_{n+1}, \dots, w_r$, sodass $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n, w_{n+1}, \dots, w_r)$ eine Basis von V ist.*

Bemerkung 5.26: Da $\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n)$ ein Untervektorraum von K^n ist, ist dieser span endlichdimensional und $\dim(\operatorname{span}(a_1, \dots, a_n)) \leq \dim(K^n) = n$.

Betrachte die Vektoren $a_1, \dots, a_m$ und die $m \times n$-Matrix

$$A = (a_{ij}) = (a_i)_j = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow a_1 \\ \vdots \\ \leftarrow a_i \\ \vdots \\ \leftarrow a_m \end{array} \end{array}$$

Elementare Zeilenumformungen für $m \times n$-Matrizen über

I Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in K \setminus \{0\}$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ \lambda a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

II Addition der j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

III Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile ($\lambda \in K \setminus \{0\}, i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Kombination von I und II

IV Vertauschen der i-ten und j-ten Ziele ($i \neq j$)

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Kombination von I und II

Definition 5.27: *Der Zeilenraum* $\operatorname{ZR}(A)$ *von* $A \in M(m \times n, K)$ *ist der Untervektorraum* $\operatorname{span}(a_1 \dots, a_m) \subseteq K^n$*, der von den Zeilen* $a_1, \dots, a_m$ *der Matrix erzeugt wird.*

Lemma 5.28: *Die Matrix B entstehe aus A durch endlich viele elementare Zeilenumformungen. Dann gilt* $\operatorname{ZR}(B) = \operatorname{ZR}(A)$.

Satz 5.29: *Jede Matrix in $M(m \times n, K)$ kann durch endlich viele elementare Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform gebracht werden.*

Sei B eine Matrix in Zeilenstufenform. Dann sind $b_1, \dots, b_r$ linear unabhängig. $\operatorname{ZR}(B) = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_m) = \operatorname{span}(b_1, \dots, b_r)$. $(b_1, \dots, b_r)$ ist eine Basis von $\operatorname{ZR}(B)$.

Transposition

Sei $A \in M(m \times n, K)$. Die **transponierte Matrix** ${}^tA \in M(n \times m, K)$ erhält man durch Spiegeln an der Diagonalen / Vertauschen von Zeilen und Spalten. Formal: Wenn $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m; j=1,\dots,n}$, dann ist ${}^tA = (a'_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$ mit $a'_{ij} = a_{ji}$.
Eigenschaften: $A, B \in M(m \times n, K), \lambda \in K$ ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$, ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$, ${}^t({}^t(A)) = A$.

Also ist Transposition $^t : M(m \times n, K) \to M(n \times m, K)$ bijektiv.
Der **Spaltenraum** einer Matrix $A \in M(m \times n, K)$ ist der Raum $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{span}(n$ Spalten von $A) = \mathrm{span}(a^1, \ldots, a^n) \subseteq K^m$. $A = (a^1, \ldots, a^m)$.
$\mathrm{ZR}(A) \subseteq K^n$, $\mathrm{SR}(A) \subseteq K^m$, $\mathrm{SR}(A) = \mathrm{ZR}({}^tA)$, $\mathrm{ZR}(A) = \mathrm{SR}({}^tA)$.

Satz 5.30: *Für alle $A \in M(m \times n, K)$ gilt* **Zeilenrang** $= \dim(\mathrm{ZR}(A)) = \dim(\mathrm{SR}(A)) =$ **Spaltenrang**.

5.2 Summen von Unterverktorräumen

Definition 5.31: *Sei V ein K-Vektorraum mit Unterverktorräumen $W_1, \ldots, W_r$ $(r \geq 2)$. Die Summe ist definiert als: $W_1 + \ldots + W_r = \{v \in V :$ es gibt $w_1 \in W_1, \ldots, w_r \in W_r$ mit $v = w_1 + \ldots + w_r\}$*

Bemerkung 5.32: Es gilt:

a) $W_1 + \ldots + W_r$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $W_1 + \ldots + W_r = \mathrm{span}(W_1 \cup W_2 \cup \ldots \cup W_r)$.

c) $\dim(W_1 + \ldots + W_r) \leq \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_r)$.

Satz 5.33 Dimensionsformel für Summen: *Seien W_1 und W_2 Untervektorräume eines Vektorraums V, W_1 und W_2 endlichdimensional. Dann gilt* $\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2) - \dim(W_1 \cap W_2)$.

Lemma 5.34: *Sei $V = W_1 + W_2$ endlich erzeugter K-Vektorraum. Dann sind äquivalent:*

(i) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

(ii) *Für jedes $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$ mit $v = w_1 + w_2$.*

(iii) *Sei $w_1 \in W_1 \setminus \{0\}$ und $w_2 \in W \setminus \{0\}$, dann ist (w_1, w_2) linear unabhängig.*

(iv) $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

Definition 5.35: *Seien W_1, W_2 Untervektorräume des K-Vektorraums V. V heißt* **direkte Summe** *von W_1 und W_2, falls gilt $V = W_1 + W_2$ und $W_1 \cap W_2 = \{0\}$. Notation $V = W_1 \oplus W_2$.*

Satz 5.36: *Seien W_1, W_2 Untervektorräume von V (V endlichdimensional). Dann sind äquivalent:*

(i) $V = W_1 \oplus W_2$

(ii) *Es gibt Basen $(w_1, \ldots, w_k)$ von W_1 und $(w_1', \ldots, w_l')$ von W_2, sodass $(w_1, \ldots, w_k, w_1', \ldots, w_l')$ eine Basis von V ist.*

(iii) $V = W_1 + W_2$ *und* $\dim(V) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$

Korollar 5.37: *Sei V endlichdimensionaler Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann gibt es einen Untervektorraum W' von V mit $V = W \oplus W'$.*

Definition 5.38: *Seien $W_1, \ldots, W_r$ Untervektorräume von V. V heißt die* **direkte Summe** *der W_i; $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r = \bigoplus_{i=1}^r W_i$, falls*

DS1 $V = W_1 + \ldots + W_r$

DS2 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2, \ldots, w_r \in W_r$ *von 0 verschiedene Vektoren. Dann ist* $(w_1, \ldots, w_r)$ *linear unabhängig.*

Satz 5.39: *Seien* $W_1, \ldots, W_k$ *Untervektorräume eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Dann sind äquivalent:*

(i) $V = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$

(ii) *Sei für jedes* $i = 1, \ldots, k$ *eine Basis* $\mathcal{B}^{(i)} = (v_1^{(i)}, \ldots, v_{r_i}^{(i)})$ *von* W_i *gegeben, so ist* $\mathcal{B} := (v_1^{(1)}, \ldots, v_{r_1}^{(1)}, \ldots, v_1^{(k)}, \ldots, v_{r_k}^{(k)})$ *eine Basis von V.*

(iii) $V = W_1 + \ldots + W_k$ *und* $\dim(V) = \dim(W_1) + \ldots + \dim(W_k)$.

6 Lineare Abbildungen

Definition 6.1: *Eine Abbildung* $F : V \to W$ *zwischen K-Vektorräumen heißt* **linear** *(oder* **Vektorraumhomomorphismus***), wenn gilt:*

(a) *für alle* $v, v' \in V$ *gilt* $F(v + v') = F(v) + F(v')$

(b) *für alle* $\lambda \in K$ *und* $v \in V$ *gilt* $F(\lambda v) = \lambda F(v)$

Äquivalent: für alle $v, v' \in V$ *und* $\mu, \lambda \in K$ *gilt* $F(\lambda v + \mu v') = \lambda F(v) + \mu F(v')$.
a) *alleine besagt, dass* $F : (V, +) \to (W, +)$ *ein Gruppenhomomorphismus ist.*

Bemerkung 6.2: Für jede lineare Abbildung $F : V \to W$ gilt:

- $F(0) = 0$
- $F(v - w) = F(v) - F(w)$
- $F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 F(v_1) + \ldots + \lambda_r F(v_r)$ für alle $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$ und $v_1, \ldots, v_r \in V$

Drehmatrix A für Drehung (im mathematisch positiven Sinne) eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ um Winkel ϑ im $\mathbb{R}^2$ um den Ursprung: $x \mapsto A \cdot x$, $A = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$
Sei K ein beliebiger Körper und $A \in M(m \times n, K)$. Multiplikation von Matrix mit Vektor ist eine lineare Abbildung $A \cdot - : K^n \to K^m$ definiert durch $A = (a_{ij})_{i=1,\ldots,m; j=1,\ldots,n}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$,

dann ist $A \cdot x = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$. Es gilt $A \cdot (x + y) = Ax + Ay$, $A(\lambda x) = \lambda(Ax)$ für $x, y \in K^n, \lambda \in K$.
Umgekehrt ist jede Abbildung, die linear ist, $F : K^n \to K^m$ gegeben durch Multiplikation mit einer eindeutig bestimmten Matrix A. $A \cdot e_j = j$-te Spalte von A. Die Spalten von A sind die Bilder der Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ unter der linearen Abbildung $A \cdot - : K^n \to K^m$. Zu jeder linearen

Abbildung $F : K^n \to K^m$ kann es also höchstens eine Matrix A geben mit $F(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$. Zu F bilden wir also die Matrix $A := (F(e_1), F(e_2), \ldots, F(e_n)) \in M(m \times n, K)$.
Abbildung $M(m \times n, K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^m)$, $A \mapsto A \cdot -$ ist bijektiv.
Transposition ist lineare Abbildung.
Ist $(v_i)_{i \in I}$ eine linear abhängige Familie von V, so ist $(F(v_i))_{i \in I}$ linear abhängig in W.
Sind $V' \subseteq V$ und $W' \subseteq W$ Untervektorräume, dann sind auch $F(V') = \{F(v) : v \in V'\}$ und $F^{-1}(W') = \{v \in V : F(v) \in W'\}$ wieder Untervektorräume.
$\dim(F(V)) \leq \dim(V)$
Falls F bijektiv ist, dann ist auch $F^{-1} : W \to V$ linear.

Bemerkung 6.3: Seien U, V und W K-Vektorräume und $G : U \to V$ und $F : V \to W$ linear, dann ist auch $F \circ G : U \to W$ linear.

Für einen Vektorraum V sei $\mathrm{Hom}_K(V, W) \subseteq \mathrm{Abb}(V, W)$ die Menge aller K-Vektorraumhomomorphismen.

Bemerkung 6.4: $\mathrm{Hom}_K(V, W)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V, W)$.
Spezialfall: $V = W \to \mathrm{End}_K(V) = \mathrm{Hom}_K(V, V)$ ist die Menge der Endomorphismen von V. Dies ist eine Abelsche Gruppe unter $+$, und hat die binäre Abbildung
$\circ : \mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$.

Proposition 6.5: *Für jeden K-Vektorraum V ist die Menge $\mathrm{End}_K(V)$ ein Ring mit 1 bzgl. $+$ und $\circ$. Falls $\dim_K(V) > 1$, dann ist $\mathrm{End}_K(V)$ <u>nicht</u> kommutativ.*

Bemerkung 6.6: Die Menge $M(n \times n, K)$ aller quadratischen $n \times n$-Matrizen ist ein Ring mit 1 bzgl. $+$ und $\cdot$. Einselement: Einheitsmatrix E_n.

Satz 6.7: *Für jeden Körper K und alle $n \geq 1$ ist die Abbildung $M(n \times n, K) \to \mathrm{End}_K(K^n, K^n)$ $A \mapsto (A \cdot -, K^n \to K^n$ mit $x \mapsto A \cdot x)$ ein Isomorphismus von Ringen.*

Definition 6.8: *Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. Sei $w \in W$. Dann heißt $\mathrm{Im}(F) = F(V) = \{F(v) : v \in V\}$ das **Bild** von F. $F^{-1}(w) = \{v \in V : F(v) = w\}$ die **Faser** über w. $\mathrm{Ker}(F) = F^{-1}(0) = \{v \in V : F(v) = 0\}$ der **Kern** von F.*

Bemerkung 6.9:

a) $\mathrm{Im}(F)$ und $\mathrm{Ker}(F)$ sind Untervektorräume von W bzw. V

b) F ist surjektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(F) = W$

c) F ist injektiv $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(F) = \{0\}$

d) Ist F injektiv und $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig in V, dann ist $(F(v_1), \ldots, F(v_n))$ linear unabhängig in W.

Definition 6.10: *Sei $A \in M(m \times n, K)$ eine $m \times n$-Matrix und $F = A \cdot - : K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung mit $F(x) = Ax$. Der **Rang** von A ist definiert als $\mathrm{Rang}(A) = \dim(\mathrm{Im}(F)) = \dim(\mathrm{Im}(A \cdot -))$.*

„Fasern $F^{-1}(w)$ sind parallel verschobene Kopien von $\mathrm{Ker}(F)$“

Bemerkung 6.11: Sei $F : V \to W$ linear und $w \in \mathrm{Im}(F)$. Dann ist für alle $u \in V$ mit $F(u) = w$ $F^{-1}(w) = u + \mathrm{Ker}(F) = \{u + v : v \in \mathrm{Ker}(F)\}$.

Definition 6.12: *Eine Teilmenge X eines K-Vektorraums V heißt* **affiner Untervektorraum**, *falls es ein $v \in V$ und einen Untervektorraum W von V gibt mit $X = v + W = \{v + w : w \in W\}$.*

Bemerkung 6.13: Sei X ein affiner Untervektorraum von V. Dann ist $X - X = \{v - w : v, w \in X\}$ ein Untervektorraum und für alle $u \in X$ gilt $X = u + (X - X)$.

Definition 6.14: *Sei X ein affiner Untervektorraum von V, etwa $X = v + W$. Dann ist* $\dim(X) = \dim(W)$ *die* **Dimension** *von X.*

Satz 6.15: *Sei $F : V \to W$ linear und V endlichdimensional. Seien $(v_1, \ldots, v_k)$ eine Basis von $\mathrm{Ker}(F)$ und $(w_1, \ldots, w_r)$ eine Basis von $\mathrm{Im}(F)$. Seien $u_1 \in F^{-1}(w_1), \ldots, u_r \in F^{-1}(w_r)$ beliebige Vektorurbilder. Dann ist $(v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_r)$ eine Basis von V. Also ist* $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(F)) + \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Korollar 6.16: *Sei V endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to W$ linear. Dann gilt für alle nicht leeren Fasern von F:* $\dim(F^{-1}(w)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}(F))$.

Korollar 6.17: *Zwischen zwei endlichdimensionalen Vektorräumen V und W gibt es genau dann einen Isomorphismus, wenn* $\dim(V) = \dim(W)$.

Korollar 6.18: *Seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume und $F : V \to W$ linear und* $\dim(V) = \dim(W)$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *F ist bijektiv, also ein Isomorphismus.*

(ii) *F ist injektiv.*

(iii) *F ist surjektiv.*

Satz 6.19 Faktorisierungssatz: *Sei $F : V \to W$ linear und $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_k)$ Basis von V. Sei* $\mathrm{span}(v_1, \ldots, v_k) = \mathrm{Ker}(F)$. *Wir definieren* $U = \mathrm{span}(u_1, \ldots, u_r)$. *Dann gilt:*

(a) $V = \mathrm{Ker}(F) \oplus U$.

(b) *Die Einschränkung von F auf U ist ein Isomorphismus* $F_{|U} : U \to \mathrm{Im}(F)$.

(c) *Sei $P : V = U \oplus \mathrm{Ker}(F) \to U$ die Projektion auf den ersten Summanden, d.h. für $v = u + v', u \in U, v' \in \mathrm{Ker}(F)$ ist $P(v) = u$. Dann gilt $F = (F_{|U}) \circ P$ Insgesamt kann F also geschrieben werden als folgende Komposition:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, two heads, "P"] \arrow[rrr, bend right, "F"'] & U \arrow[r, "\cong", "F_{|U}"'] & \mathrm{Im}(F) \arrow[r, hook] & W \end{tikzcd}$$

(d) *Jede nicht-leere Faser von F schneidet U in genau einem Element. Es gilt* $F^{-1}(F(v)) \cap U = \{P(v)\}$ *für alle $v \in V$.*

6.1 Quotientenvektorraum

Gegeben: Vektorraum V und Untervektorraum U. Kanonische Konstruktion einer linearen Abbildung $\varrho : V \to V/U$ mit Kern U. Das Bild der Abbildung V/U heißt **Quotientenvektorraum**. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_U$ auf V, „Äquivalenz modulo U“.

Definition 6.20: *Für $v, w \in W$ ist $v \sim_U w \Leftrightarrow v - w \in U$. Dies ist eine Äquivalenzrelation. Wir schreiben V/U für die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_U$. Für jedes $v \in V$ schreiben wir $v + U = \{v + u : u \in U\}$ für die Äquivalenz von v.*

Bemerkung 6.21: Die Äquivalenzklassen sind die affinen Untervektorräume von V zu U.

Wir bezeichnen $\varrho : V \to V/U$ die kanonische Abbildung, die $v \in V$ auf seine Äquivalenzklasse abbildet, also $\varrho(v) = v + U$. Diese Abbildung ist surjektiv. (aber in der Regel nicht injektiv).
Extremfälle:

- $U = \{0\}$, dann ist v nur zu sich selbst äquivalent und $v + U = v + \{0\} = \{v\}$. Dann ist die Abbildung $\varrho : V \to V/U = V/\{0\}$ bijektiv.
- $U = V$, dann sind je zwei Vektoren äquivalent, also gibt es nur eine Äquivalenzklasse, nämlich V, und V/U ist ein Nullvektorraum.

Satz 6.22: *Sei V ein K-Vektorraum und U ein Untervektorraum von V. Dann kann V/U auf genau eine Weise so zu einem K-Vektorraum gemacht werden, dass die Abbildung $\varrho : V \to V/U$ linear ist. (Addition auf V/U auf Repräsentanten) Weiter gilt:*

a) *ϱ ist surjektiv.*

b) $\mathrm{Ker}(\varrho) = U$.

c) *Falls V endlich dimensional ist, dann sind auch U und V/U endlichdimensional und es gilt* $\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U)$.

d) **Universelle Eigenschaft***: Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung mit $U \subseteq \mathrm{Ker}(F)$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $\bar{F} : V/U \to W$ mit $\bar{F} \circ \varrho = F$. ($\bar{F}(v + U) = F(v)$) Außerdem ist* $\mathrm{Ker}(\bar{F}) = \mathrm{Ker}(F)/U$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\varrho"'] & W \\ V/U \arrow[ur, dotted, "\exists!\bar{F}"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 6.23: *Seien U, V Untervektorräume eines K-Vektorraums V mit $V = U \oplus W$. Dann ist die Komposition* $\begin{tikzcd} W \arrow[r, "Inkl."] \arrow[rr, bend right, "\varrho'=\varrho_{|W}"'] & V \arrow[r, "\varrho"] & V/U \end{tikzcd}$ *ein Isomorphismus.*

Bemerkung 6.24: Ein Komplement W zu U spielt eine ähnliche Rolle wie V/U, aber: Komplement ist eine Wahl, V/U ist eine konkrete Konstruktion.

6.2 Lineare Gleichungssysteme

Sei $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ eine $m \times n$-Matrix über einen Körper K. Sei $b \in K^m$ ein Spaltenvektor. Dies liefert ein **inhomogenes Gleichungssystem** $A \cdot x = b$ oder $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ für alle $i = 1, \ldots, m$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n$. Das dazugehörige **homogene Gleichungssystem** ist $A \cdot x = 0$, oder $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$. Die Matrix A liefert eine lineare Abbildung $F = A \cdot - : K^n \to K^m$ definiert durch $F(x) = A \cdot x$. Die **Lösungsmenge** des homogenen Gleichungssystem ist $\text{Lös}(A, 0) = \{x \in K^n : A \cdot x = 0\} = \text{Ker}(F) = \text{Ker}(A \cdot -)$. $\text{Lös}(A, b) = \{x \in K^n : A \cdot x = b\} = F^{-1}(b)$ Faser von F über b. Wir setzen $r = \text{rang}(A) = \text{Spaltenrang}(A) = \dim(\text{Im}(A \cdot -)) = \dim(\text{Im}(F))$.

Korollar 6.25: *Sei $A \in M(m \times n, K), b \in K^m, r = \text{rang}(A)$. Dann gilt:*

a) $\text{Lös}(A, 0)$ *ist ein Untervektorraum von K^n der Dimension $n - r$.*

b) $\text{Lös}(A, b)$ *ist entweder leer oder ein affiner Untervektorraum von K^n der Dimension $n-r$. Ist $v \in \text{Lös}(A, b)$, dann ist $\text{Lös}(A, b) = v + \text{Lös}(A, 0)$. „Die Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems erhält man aus einer speziellen Lösung durch Addition des homogenen Gleichungssystems“.*

Satz 6.26: *Sei $A \in M(m \times n, K), b \in K^n$. Das inhomogene Gleichungssystem $A \cdot x = b$. hat genau dann eine Lösung, wenn gilt* $\text{rang}(A) = \text{rang}(A, B)$ *(A um Spalte b ergänzt).*

Bemerkung 6.27: Sei $A \in M(m \times n, K), b \in (K^m)$. Dann sind äquivalent:

(i) Das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ ist eindeutig lösbar.

(ii) $\text{rang}(A) = \text{rang}(A, b) = n$.

6.3 Beschreibung linearer Abbildungen durch Matrizen

Verallgemeinerung von Isomorphismen $\text{Hom}(K^n, K^m) \cong M(m \times n, K)$ $A \cdot - \mapsto A$.

Satz 6.28: *Seien V, W endlichdimensionale K-Vektorräume und $v_1, \ldots, v_r \in V$ und $w_1, \ldots, w_r \in W$. Dann gilt:*

(i) *Falls $(v_1, \ldots, v_r)$ linear unabhängig ist, dann gibt es stets eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$.*

(ii) *Falls $(v_1, \ldots, v_r)$ eine Basis von V ist, dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F : V \to W$ mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \ldots, r$. ($F(v) = F(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r) = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_r w_r$) Für dieses F gilt weiter:*

- $\text{Im}(F) = \text{span}(w_1, \ldots, w_r)$
- *F injektiv $\Leftrightarrow$ $(w_1, \ldots, w_r)$ ist linear unabhängig.*

Korollar 6.29: *Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\Phi_\mathcal{B} : K^n \to V$ mit $\Phi_\mathcal{B}(e_i) = v_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (wobei $(e_1, \ldots, e_n)$ die kanonische Basis von K^n ist). $\Phi_\mathcal{B}$ heißt* **Koordinatentransformation** *von V bzgl. $\mathcal{B}$.*

Korollar 6.30: *Zu jeder linearen Abbildung $F : K^n \to K^m$ gibt es genau eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit $F(x) = A \cdot x$ für alle $x \in K^n$. Die Spalten von A sind die Bilder $F(e_i)$ der kanonischen Basisvektoren.*

Satz 6.31: *Seien V und W K-Vektorräume mit Basen $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ von V bzw. $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_m)$ von W. Dann gibt es zu jeder linearen Abbildung $F : V \to W$ genau eine Matrix $A \in M(m \times n, K)$ mit $F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ für $j = 1, \dots, n$, $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m}$. Die so erhaltene Abbildung $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}} : \mathrm{Hom}_K(V, W) \to M(m \times n, K), F \mapsto A$ ist ein Vektorraumisomorphismus. Insbesondere gilt: $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F+G) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) + M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(G)$ und $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\lambda \cdot F) = \lambda \cdot M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ für alle $F, G \in \mathrm{Hom}_K(V, W), \lambda \in K$. $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F)$ heißt die* **darstellende Matrix** *von F bzgl. der Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$.*

Bemerkung 6.32: Für $V = K^n, W = K^m, \mathcal{A} = (e_1, \dots, e_n), \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_m)$ gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A \cdot -) = A$ für alle $A \in M(m \times n, K)$ Anders gesagt: für die lineare Abbildung $F : K^n \to K^m$, definiert durch $F(x) = A \cdot x$, gilt $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = A$.
Vorsicht! Für $V = K^n, W = K^m$ über $\mathcal{A}$ und/oder $\mathcal{B}$ nicht die kanonische Basis, gilt normalerweise nicht $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(A \cdot -) = A$.

Korollar 6.33: *Sei $F : V \to W$ linear, $n = \dim(V)$, $m = dim(W)$, $r = \dim(\mathrm{Im}(F))$. Dann gibt es Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W, sodass die darstellende Matrix die Form $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(F) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix}$ hat.*

Matrizenmultiplikation

Seien $A = (a_{ij}) \in M(m \times n, K)$ und $B = (b_{jk}) \in M(n \times r, K)$. Wir erhalten komponierbare lineare Abbildungen: $\begin{matrix} K^r & \xrightarrow{B \cdot -} & K^n & \xrightarrow{A \cdot -} & K^m \\ x & \longmapsto & y & \longmapsto & z \end{matrix}$. Dies ist eine lineare Abbildung, sie ist also gegeben durch Multiplikation mit einer Matrix $C \in M(m \times r, K)$. Es gilt $A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x = C \cdot x$.

Definition 6.34: *Das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times r, K)$ ist definiert als $(A \cdot B)_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$. Mit der Definition gilt $A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x$. Falls A und B in beiden Reihenfolgen multiplizierbar sind, gilt im Allgemeinen, dass $A \cdot B \neq B \cdot A$. Der Matrizenring $M(n \times n, K)$ ist für $n \geq 2$ nicht kommutativ und hat Nullteiler.*

Rechenregeln: $A, A' \in M(m \times n, K), B, B' \in M(n \times r, K), C \in M(r \times s, K), \lambda \in K$

1. $A \cdot (B + B') = A \cdot B + A \cdot B'$ und $(A + A') \cdot B = A \cdot B + A' \cdot B$
2. $A \cdot (\lambda \cdot B) = (\lambda \cdot A) \cdot B = \lambda \cdot (A \cdot B)$
3. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. ${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$
5. $E_m \cdot A = A = A \cdot E_n$

Eigenschaft 3) folgt aus Assoziativität der Komposition von Abbildungen für $x \in K^s$.

Lemma 6.35: *Für $A \in M(m \times n, K)$ und $B \in M(n \times r, K)$ gilt* $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) - n \leq \mathrm{rang}(A \cdot B) \leq \min(\mathrm{rang}(A), \mathrm{rang}(B))$.

Definition 6.36: *Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt* **invertierbar**, *wenn es $A' \in M(n \times n, K)$ gibt, mit $A \cdot A' = A' \cdot A = E_n$. Unter dem Isomorphismus $M(n \times n, K) \to \mathrm{Hom}_K(K^n, K^n), A \mapsto (x \mapsto A \cdot x)$ entsprechen die invertierbaren Matrizen den Vektorraum-Isomorphismen.*

Lemma 6.37: *Die Menge* $\mathrm{GL}(n, K) = \{A \in M(n \times n, K) : A$ *ist invertierbar*$\}$ *ist mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe mit neutralem Element* E_n.

Lemma 6.38: *Für* $A \in M(n \times n, K)$ *sind äquivalent:*

(i) A *ist invertierbar.*

(ii) ${}^tA$ *ist invertierbar.*

(iii) *Spaltenrang* $A = n$.

(iv) *Zeilenrang* $A = n$.

6.4 Koordinatentransformation

Sei V ein K-Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$. Diese Daten bestimmen einen eindeutigen Isomorphismus $\Phi_\mathcal{B} : K^n \to V$ mit $\Phi_\mathcal{B}(e_j) = v_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Linearität gibt $\Phi_\mathcal{B}(x_1, \ldots, x_n) = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n$. Zu $v \in V$ sind $(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_\mathcal{B}^{-1}(v) \in K^n$ die Koordinaten von V bzgl. $\mathcal{B}$ und $\Phi_\mathcal{B}$ ist das durch $\mathcal{B}$ bestimmte Koordinatensystem. Seien $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \ldots, w_n)$ Basen von V. Es sei $T_\mathcal{B}^\mathcal{A} \in \mathrm{GL}(n, K)$ die zum Isomorphismus
$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\Phi_\mathcal{A}"] \arrow[rr, bend right, "T_\mathcal{B}^\mathcal{A}"'] & V \arrow[r, "\Phi_\mathcal{B}^{-1}"] & K^n \end{tikzcd}$$
gehörige Matrix. „Transformationsmatrix des Basiswechsels.“ Für $v = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n = y_1w_1 + \ldots + y_nw_n$ gilt: $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = T_\mathcal{B}^\mathcal{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Mit $T_\mathcal{B}^\mathcal{A}$ kann man, die Koordinaten von v bezüglich $\mathcal{B}$ aus den Koordinaten bezüglich $\mathcal{A}$ berechnen.
Allgemeiner Fall: V mit Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$. Schreibe $w_j = s_{1j}v_1 + \ldots + s_{nj}v_n$ und $S = (s_{ij})$. Dann gilt $(\Phi_\mathcal{A}S)(e_j) = \Phi_\mathcal{B}(s_{1j}, \ldots, s_{nj}) = s_{1j}v_1 + \ldots + s_{nj}v_n = w_j = \Phi_\mathcal{B}(e_j)$. $\Phi_\mathcal{B} = \Phi_\mathcal{A} \circ S$. $S = \Phi_\mathcal{A}^{-1}\Phi_\mathcal{B} = (T_\mathcal{B}^\mathcal{A})^{-1}$ und $T_\mathcal{B}^\mathcal{A} = S^{-1}$.

Lemma 6.39: *Sei* $F : V \to W$ *eine lineare Abbildung,* $\mathcal{A}$ *eine Basis von* V *und* $\mathcal{B}$ *eine Basis von W. Dann gilt* $\Phi_\mathcal{B} \circ M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F) = F \circ \Phi_A$*:*
$$\begin{tikzcd} K^n \arrow[r, "\Phi_\mathcal{A}"] \arrow[d, "M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(F)"'] & V \arrow[d, "F"] \\ K^m \arrow[r, "\Phi_\mathcal{B}"] & W \end{tikzcd}$$

Satz 6.40: *Seien* U, V, W *K-Vektorräume, endlichdimensional, mit Basen* $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *bzw.* $\mathcal{C}$. *Seien* $G : U \to V$ *und* $F : V \to W$ *lineare Abbildungen. Dann gilt* $M_\mathcal{C}^\mathcal{A}(F \circ G) = M_\mathcal{C}^\mathcal{B}(F) \circ M_\mathcal{B}^\mathcal{A}(G)$.

Spezialfall: $U = V = W$ und $F, G : V \to V$ Endomorphismen, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{C}$. $M_\mathcal{B}^\mathcal{B} =: M_\mathcal{B}(F)$. Dann gilt $M_\mathcal{B}(F \circ G) = M_\mathcal{B}(F) \circ M_\mathcal{B}(G)$. Insbesondere ist $M_\mathcal{B} : \mathrm{End}_K(V) \to M(n \times n, K)$ ein Ringisomorphismus.

6.4.1 Transformationsformel

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen endlichdimensionalen K-Vektorräumen. Seien $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ Basen von V und $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ Basen von W. Dann gilt für die darstellbaren Matrizen $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{A}'}(F) =$

$T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot \left(T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}\right)^{-1} = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F) \cdot T^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{A}}$. Äquivalent: Folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(F)"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{A}}"] \arrow[dd, "T^{\mathcal{A}}_{\mathcal{A}'}"'] & & & K^m \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dd, "T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}"] \\
& V \arrow[r, "F"] & W & \\
K^n \arrow[rrr, "M^{\mathcal{A}'}_{\mathcal{B}'}(F)"'] \arrow[ur, "\Phi_{\mathcal{A}'}"'] & & & K^m \arrow[ul, "\Phi_{\mathcal{B}'}"]
\end{tikzcd}$$

Spezialfall: $V = W, F : V \to V$ Endormorphismus. $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}' = \mathcal{B}'$. Dann gilt $M_{\mathcal{B}'}(F) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{B}}(F) \cdot \left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

Satz 6.41: *Für jede Matrix $A \in M(m \times n; K)$ gilt Spaltenrang(A)=Zeilenrang(A).*

Lemma 6.42: *Sei $A \in M(m \times n, K)$, $S \in \mathrm{GL}(m, K), T \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dann gilt*

a) *Spaltenrang(SAT) = Spaltenrang(A),*

b) *Zeilenrang(SAT) = Zeilenrang(A).*

Definition 6.43: *Seien $A, B \in M(m \times n, K)$, A heißt* **äquivalent** *zu B, falls es invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ gibt, so dass $B = S \cdot A \cdot T^{-1}$. Für $A, B \in M(m \times m, K)$ heißt A* **ähnlich** *zu B, falls es $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ gibt mit $B = S \cdot A \cdot S^{-1}$.*

Bemerkung 6.44: Für $m = n$ gilt ähnlich $\Rightarrow$ äquivalent, aber i. A. nicht umgekehrt.
„Äquivalenz“ bzw. „Ähnlichkeit“ sind Äquivalenzrelationen auf $M(m \times n, K)$ bzw. $M(m \times m, K)$.
Zwei Matrizen aus $M(m \times m, K)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe lineare Abbildung bezüglich verschiedener Basenpaare beschreiben. Spezialfall: Endomorphismen $F : V \to V$
$M_{\mathcal{B}'}(F) = T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} \cdot M_{\mathcal{B}}(F) \cdot \left(T^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}\right)^{-1}$.

Bemerkung 6.45: Zwei Matrizen aus $M(m \times m, K)$ sind genau dann ähnlich, wenn sie den gleichen Endomorphismus bezüglich verschiedener Basen beschreiben.

Lemma 6.46: *Zwei Matrizen aus $M(m \times m, K)$ sind genau dann äquivalent, wenn sie denselben Rang haben. Jede Matrix vom Rang r ist äquivalent zur Matrix $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.*

7 Elementarmatrizen und Matrixumformungen

4 Typen von elementaren Zeilenumformungen: $A \in M(m \times n, K)$.

I $S_i(\lambda) \cdot A$ entsteht aus A durch Multiplikation der i-ten Zeile mit $\lambda \in K$

II $Q_i^j \cdot A$ entsteht aus A durch Addition der j-ten Zeile mit $\lambda \in K$ $(i \neq j)$

III $Q_i^j(\lambda) \cdot A$ entsteht aus A durch Addition des λ-fachen der j-ten Zeile zur i-ten Zeile. $(i \neq j)$

IV $P_i^j \cdot A$ entsteht aus A durch Vertauschten der i-ten und j-ten Zeile. $P_j^i = P_i^j$.

i-te Spalte ↓ $\quad$ j-te Spalte ↓

$$S_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & \lambda & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$Q_i^j := \begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$Q_i^j(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 1 & & & & \lambda \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$P_i^j := \begin{pmatrix} 1 \\ & \ddots \\ & & 1 \\ & & & 0 & & & & 1 \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \\ & & & 1 & & & & 0 \\ & & & & & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \leftarrow j\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Die Matrizen $S_i(\lambda), Q_i^j, Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j heißen Elementarmatrizen. Analog mit Spaltenumformungen $(i \neq j)$:

- $A \cdot S_i(\lambda)$ entsteht aus A durch Multiplikation der i-ten Spalte mit λ.
- $A \cdot Q_i^j(\lambda)$ entsteht aus A durch Addition des λ-fachen der i-ten Spalte zur j-ten Spalte.
- $A \cdot P_i^j$ entsteht aus A durch Vertauschen der i-ten und j-ten Spalte.

Bemerkung 7.1: Die Elementarmatrizen $(\lambda \neq 0)$ $Q_i^j(\lambda)$ und P_i^j sind Produkte von Elementarmatrizen des Typs I und II, genauer : $Q_i^j(\lambda) = S_j(\frac{1}{\lambda}) \cdot Q_i^j \cdot S_j(\lambda)$ bzw. $P_i^j = Q_j^i \cdot Q_i^j(-1) \cdot Q_j^i \cdot S_j(-1)$.

Lemma 7.2: *Die Elementarmatrizen sind invertierbar und ihre Inverse sind auch Elementarmatrizen:* $(S_i(\lambda))^{-1} = S_i(\frac{1}{\lambda})$, $(Q_i^j)^{-1} = Q_i^j(-1)$, $(Q_i^j(\lambda))^{-1} = Q_i^j(-\lambda)$,$(P_i^j)^{-1} = P_i^j$.

Satz 7.3: *Jede invertierbare Matrix $A \in \mathrm{GL}(m, K)$ ist ein endliches Produkt von Elementarmatrizen. „$\mathrm{GL}(m, K)$ wird von den Elementarmatrizen erzeugt.“*

7.1 Rechenverfahren zur Bestimmung inverser Matrizen

$A \in M(n \times n, K)$ quadratische Matrix.

- Schreibe E_n in eine Spalte neben A.
- bringe A durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform; führe alle Zeilenumformungen parallel mit E_n durch
- Wenn Zeilenstufenform erreicht ist, lese ab, ob A maximalen Rang hat. Falls $\mathrm{rang}(A) < n$, dann ist A nicht invertierbar und breche ab.
- mache A durch weitere Zeilenumformungen zur Einheitsmatrix E_n; wieder werden alle Umformungen parallel mit der zweiten Spalte gemacht.
- am Ende steht rechts die inverse Matrix A^{-1}.

Bemerkung 7.4: Das Verfahren funktioniert auch, wenn man ausschließlich Spaltenumformungen vornimmt. Warnung: nicht Zeilen- und Spaltenumformungen mischen.

Sei $A \in M(m \times n, K)$. Es gibt immer invertierbare Matrizen $S \in \mathrm{GL}(m, K)$ und $T \in \mathrm{GL}(n, K)$ mit $S \cdot A \cdot T^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, wobei $r = \mathrm{rang}(A)$.

7.2 Gauß-Verfahren mit Elementarmatrizen

Gegeben $A \in M(m \times n, K)$ und $b \in K^m$, gerade ist $\mathrm{Lös}(A, b) = \{x \in K^n : Ax = b\}$. Es gibt $S \in \mathrm{GL}(m, K)$, Produkt von Elementarmatrizen, sodass $S \cdot A$ Zeilenstufenform hat. Setze $\tilde{A} = S \cdot A, \tilde{b} = S \cdot b$, dann gilt $\mathrm{Lös}(A, b) = \mathrm{Lös}(S \cdot A, S \cdot b) = \mathrm{Lös}(\tilde{A}, \tilde{B})$. An $(\tilde{A}, \tilde{B})$ kann man ablesen, ob es Lösungen gibt: Falls $\tilde{b_i} \neq 0$ für $i > \mathrm{rang}(A) \Rightarrow \mathrm{Lös}(A, b) = \emptyset$.

8 Determinanten

8.1 Beispiele und Definitionen

Definition 8.1: *Ist A quadratische Matrix mit n Zeilen, so beizeichnen wir mit $a_1, ..., a_n$ die Zeilenvektoren von A. Dann schreiben wir*

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Definition 8.2: *Sei K Körper und n natürliche Zahl ungleich Null. Eine Abbildung* $\det\colon M(n \times n, K) \to K, A \mapsto \det(A)$ *heißt* **Determinante***, falls folgendes gilt:*

D1 $\det$ *ist* **linear** *in jeder Zeile, d.h. für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:*

(a) *Ist $a_i = a_i' + a_i''$, so ist*

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i'' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

(b) Ist $a_i = \lambda a_i'$, so ist

$$\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i \\ \vdots \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_i' \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

<u>D2</u> det *ist* **alternierend**, *d.h. hat A zwei gleiche Zeilen, so ist* $\det(A) = 0$.

<u>D3</u> det *ist* **normiert**, *d.h.* $\det(E_n) = 1$.

Man schreibt die Determinante auch folgendermaßen: Sei $A = (a_{ij})$ quadratische Matrix mit n Zeilen. Dann ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{23} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} := |A| := \det(A).$$

Alles, was im folgenden nur für Zeilen gemacht wird, kann auch genauso mit Spalten gemacht werden. Das ist eine unmittelbare Konsequenz aus $\det(A) = \det({}^tA)$.

Satz 8.3: *Sei* $\det\colon M(n \times n; K) \to K$ *eine Determinante, $A \in M(n \times n; K)$. Dann gelten:*

<u>D4</u> $\forall \lambda \in K\colon \det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

<u>D5</u> *Ist eine Zeile von A gleich Null, so ist* $\det(A) = 0$.

<u>D6</u> *Die Determinante ändert bei Zeilenumformungen vom Typ IV (Vertauschen zweier Zeilen) ihr Vorzeichen.*

<u>D7</u> *Die Determinante bleibt bei Zeilenumformungen vom Typ III (Addition des Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile) unverändert.*

<u>D8</u> *Ist A obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so ist* $\det(A) = \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_n$.

<u>D9</u> *Ist A von der Form*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & C \\ 0 & A_2 \end{pmatrix},$$

wobei A_1, A_2 quadratisch sind und mindestens eine Zeile haben, dann gilt $\det(A) = \det(A_1) \cdot \det(A_2)$.

<u>D10</u> $\det(A) = 0$ *gdw.* $\operatorname{rang} A < n \Leftrightarrow (\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ *A invertierbar*).

<u>D11</u> *Sei $B \in M(n \times n; K)$. Dann gilt* $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. *Daraus folgt sofort* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$. *(Hinweis: Im Allgemeinen gilt nicht* $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.*)*

Bei der Berechnung von Determinanten bringt man die Matrix mit elementaren Zeilenumformungen (D7) auf Dreiecksgestalt und merkt sich dabei, wie oft man Zeilen mit Skalaren multipliziert hat (D1(b)) und wie oft man Zeilen vertauscht hat (D6). Dann wendet man D8 an.

8.2 Existenz und Eindeutigkeit

Definition 8.4: *Sei $n \in \mathbb{N}$. S_n ist die symmetrische Gruppe, d.h. die Gruppe aller Bijektionen $\sigma\colon \{1, ..., n\} \to \{1, .., n\}$ mit der Komposition als Multiplikation. Diese Bijektionen heißen Permutationen. Das neutrale Element der S_n ist id, die Identität.*

Bemerkung 8.5:

$$|S_n| = n!$$

Ferner ist S_n für $n \geq 3$ nicht kommutativ.

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(Diese Formel ist vermutlich nicht klausurrelevant.)

Definition 8.6: *$\tau \in S_n$ heißt* **Transposition**, *wenn τ genau zwei Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$ vertauscht und alle anderen fest lässt. Formal: Sei $\tau \in S_n$. Dann τ ist Transposition gdw. $\exists k, l \in \{1, ..., n\}\colon k \neq l, \tau(k) = l, \tau(l) = k, \tau(i) = i \forall i \in \{1, ..., n\} \setminus \{k, l\}$*

Bemerkung 8.7: Für jede Transposition τ gilt $\tau = \tau^{-1}$.

Lemma 8.8: *Für $n \geq 2$ lässt sich jede Permutation als Komposition von endlich vielen Transpositionen schreiben.*

Bemerkung 8.9: Sei $\tau_0 = (12)$. Für alle Transpositionen $\tau \in S_n$ existiert dann ein $\sigma \in S_n$ mit

$$\tau = \sigma \circ \tau_0 \circ \sigma^{-1}$$

Definition 8.10: *Ist $\sigma \in S_n$, so heißt jedes Paar $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit*

$$i < j, \sigma(i) > \sigma(j)$$

Fehlstand *von σ. Das* **Signum** *von σ ist definiert durch*

$$\operatorname{sign}\sigma := \begin{cases} +1, & \text{falls } \sigma \text{ eine gerade Anzahl von Fehlständen hat,} \\ -1, & \text{falls } \sigma \text{ eine ungerade Anzahl von Fehlständen hat.} \end{cases}$$

Man nennt σ gerade, falls $\operatorname{sign}\sigma = +1$, und sonst ungerade.

Lemma 8.11: *Für jedes $\sigma \in S_n$ gilt $\operatorname{sign}\sigma = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$*

Satz 8.12: *Für alle Permutationen σ, τ gilt $\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$.*

Korollar 8.13: *Sei $n \geq 2$.*

1) *Für jede Transposition τ gilt $\operatorname{sign}(\tau) = -1$.*

2) *Ist $\sigma \in S_n$ und $\sigma = \tau_1 \circ ... \circ \tau_k$ mit Transpositionen $\tau_1, ..., \tau_k \in S_n$, so ist $\operatorname{sign}\sigma = (-1)^k$*

Korollar 8.14: *Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist*

$$\det\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}\sigma$$

Definition 8.15: *Man kann eine Äquivalenzrelation auf der symmetrischen Gruppe S_n definieren, in denen zwei Permutationen genau dann äquivalent sind, wenn sie dasselbe Signum besitzen. Die Äquivalenzklassen sind dann die geraden und die ungeraden Permutationen. Die geraden Permutationen bilden eine Untergruppe von der symmetrischen Gruppe und wird auch die* **alternierende Gruppe** *A_n genannt. Ist τ eine ungerade Permutation, so kann die Menge der ungeraden Permutationen als $A_n\tau := \{\sigma \circ \tau \colon \sigma \in A_n\}$ geschrieben werden.*

Bemerkung 8.16: Sei $\tau \in S_n$ eine ungerade Permutation. Dann ist $S_n = A_n \cup A_n\tau$ *und* $A_n \cap A_n\tau = \emptyset$. Insbesondere hat A_n genau $\frac{n!}{2}$ Elemente für alle $n \geq 2$.

Theorem 8.17: *Sei K ein Körper, $n \geq 1$, so gibt es genau eine Determinante* $\det\colon M(n \times n; K) \to K$, *und zwar ist für $A = (a_{ij}) \in M(n \times n; K)$*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Diese Formel wird auch Leibniz-Formel genannt.

Bemerkung 8.18: Für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ ist die Determinantenfunktion differenzierbar und insbesondere stetig.

Satz 8.19: *Sei A eine quadratische $n \times n$-Matrix über dem Körper K. Dann gilt* $\det({}^tA) = \det(A)$.

Bemerkung 8.20: Die Formel $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$ definiert eine Funktion für $n \times n$-Matrizen über jeden kommutativen Ring R mit 1 $\det : M(n \times n, R) \to R$. Die Eigenschaften D1, D2 und D3 gelten. Außerdem alle weiteren, in deren Beweis nicht dividiert wurde.

Beispiel 8.21: Die **Vandermonde-Determinate** ist

$$K[x_1, \ldots, x_n] \ni \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).$$

(lässt sich über Induktion zeigen)

Korollar 8.22: *Seien $x_1, \ldots, x_n \in K$. Dann ist die Vandermonde-Matrix genau dann invertierbar, wenn $x_1, \ldots, x_n$ paarweise verschieden sind.*

8.3 Minoren

Definition 8.23: *Sei $A \in M(n \times n, K)$. Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ entstehe $A_{ij} \in M(n \times n, K)$ aus A, indem a_ij durch 1 ersetzt wird und alle anderen Einträge der i-ten Zeile und j-ten Spalte zu 0 gesetzt werden. Die* **komplementäre Matrix** *$A^\# = (a_{ij}^\#) \in M(n \times n, K)$ ist definiert durch $a_{ij}^\# = \det(A_{ji})$.*

Satz 8.24: *Es gilt $A \cdot A^\# = A^\# \cdot A = \det(A) \cdot E_n$.*

Definition 8.25: *Es entstehe $A'_{ij} \in M((n-1) \times (n-1); K)$ aus A durch Streichen der i-ten Zeile und j-ten Spalte.*

Bemerkung 8.26: $\det(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A'_{ij})$

Bemerkung 8.27: Es gilt $\det(A_{ij}) = \det(a^1, a^2, \ldots, a^{j-1}, e^i, a^{j+1}, \ldots, a^n)$, wobei a^k die k-te Spalte von A ist und $e^i = {}^t(e_i)$

Korollar 8.28: *Eine Matrix $A \in M(n \times n, R)$ ist genau dann invertierbar, falls* $\det(A)$ *eine Einheit in R ist, also ein inverses Element bezüglich $\cdot$ hat. (R ist Ring).*

Satz 8.29 Entwicklungssatz nach Laplace: *Für alle $A \in M(n \times n, K)$ gilt:*

- *für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt* $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$ *„Entwicklung nach der i-ten Zeile."*
- *für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt* $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot \det(A'_{ij})$ *„Entwicklung nach der j-ten Zeile."*

Satz 8.30: *Sei $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ und definiere $C \in \mathrm{GL}(n, K)$ durch $c_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A'_{ij}) = \det(A_{ij}) = a^{\#}_{ji}$. Dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot {}^tC$.*

Für $n = 2$ gilt dies: $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Bemerkung 8.31: Für $A \in \mathrm{GL}(n, K)$ hat jedes inhomogene Gleichungssystem $A \cdot x = b, x, b \in K^n$ eine eindeutige Lösung gegeben durch $x = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i = \frac{\det(a^1,\ldots,a^{i-1},b,a^{i+1},\ldots,a^n)}{\det(A)} \in K$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Definition 8.32: *Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $k \leq min\{m, n\}$. Eine Matrix $A' \in M(k \times k, K)$ heißt* **k-reihige Teilematrix** *von A, falls sich A durch Zeilen- und Spaltenvertauschungen auf die Form $\begin{pmatrix} A' & * \\ * & * \end{pmatrix}$ bringen lässt. (Streichen von Zeilen und Spalten zählt auch dazu). Der Skalar* $\det(A')$ *heißt ein* **k-reihiger Minor** *von A.*

Satz 8.33: *Sei $A \in M(m \times n, K)$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $r \leq \min\{m, n\}$. Dann sind äquivalent:*

(i) $\mathrm{rang}(A) = r$

(ii) *Es gibt einen r-reihigen Minor, der von 0 verschieden ist, und für alle $k > r$ ist jeder k-reihige Minor gleich 0.*

Definition 8.34: *Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Die Determinante von F ist definiert als* $\det(F) = \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F))$ *für eine Basis $\mathcal{B}$ von V. Dies ist unabhängig von der Wahl der Basis $\mathcal{B}$.*

Bemerkung 8.35: Für $F \in \mathrm{End}_K(V), \dim(V) < \infty$ sind äquivalent:

(i) F ist injektiv.

(ii) F ist surjektiv.

(iii) F ist bijektiv.

(iv) $\det(F) \neq 0$.

Ab hier ist $\mathbf{K} = \mathbb{R}$

Definition 8.36: *Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. Ein Automorphismus $F : V \to V$ heißt*

- **orientierungstreu**, *falls* $\det(F) > 0$
- **orientierungsuntreu**, *falls* $\det(F) < 0$

Seien $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} = (w_1, \dots, w_n)$ zwei Basen eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Sei $F : V \to V$ derjenige Automorphismus mit $F(v_i) = w_i$ für alle $i = 1, \dots, n$. $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen **gleichorientiert**, *$A \sim B$, falls* $\det(F) > 0$.

Bemerkung 8.37: „gleichorientiert " ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Basen von V mit genau 2 Äquivalenzklassen. Eine ***Orientierung*** von V ist eine solche Äquivalenzklasse.

Für $V = \mathbb{R}^n$ kann man eine Orientierung auszeichnen, nämlich die, die die kanonische Basis $K = (e_1, \dots, e_n)$ enthält: $\{A : A \sim K\} = \{A = (v^1, \dots, v^n) : \det(v^1, \dots, v^n) > 0\}$ bzw. $\{A : A \not\sim K\} = \{A = (v^1, \dots, v^n) : \det(v^1, \dots, v^n) < 0\}$.
Sei $G_+ := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(A) > 0\}$, dies ist Untergruppe von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
$G_- := \{A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) : \det(A) < 0\}$. Es gilt $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = G_+ \cup G_-$.

Bemerkung 8.38: Sei $T \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ und $\det(T) < 0$. Dann sind $- \cdot T : G_+ \to G_-$ und $- \cdot T^{-1} : G_- \to G_+$ zueinander inverse Bijektionen. Insbesondere $G_- = G_+ \cdot T$. Also $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = G_+ \cup (G_+ \cdot T), G_+ \cap (G_+ \cdot T) = \emptyset$.

Definition 8.39: *Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ heißen verbindbar, falls es eine stetige Abbildung $\varphi : [0; 1] \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ gibt, mit $\varphi(0) = A, \varphi(1) = B$. ($\varphi$ heißt stetig, wenn jede der n^2 Koordinatenfunktionen stetig ist.)*

Satz 8.40: *Für $A, B \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ sind äquivalent:*

- *Es gilt* $\det(A \cdot B) > 0$ *(oder äquivalent: A und B liegen in derselben Klasse von $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = G_+ \dot\cup G_-$).*
- *A und B sind in $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ verbindbar.*

Lemma 8.41: *Sei $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ mit $\det(A) > 0$. Dann ist A mit E_n verbindbar.*

9 Verschiedenes aus den Übungszetteln

Link zu den Übungszetteln und der Vorlesungshomepage:
`http://www.math.uni-bonn.de/ag/topo/Lineare_Algebra_WS12/`

Satz 9.1 Übung 4.1: *Sei $f : K \to R$ ein Homomorphismus von Ringen. Falls K ein Körper ist, ist f automatisch injektiv oder gleich 0 (das nennt man auch den* trivialen Ringhomomorphismus*). Es gibt keinen nicht-trivialen Ringhomomorphismus von einem Körper nach $\mathbb{Z}$.*

Definition 9.2 Übung 5.1: *Sei R ein beliebiger Ring mit 1. Nenne einen Ringhomomorphismus* **unital**, *wenn er das 1-Element auf das 1-Element schickt.*

Satz 9.3 Übung 5.1: *Für jeden Ring R gibt es genau einen unitalen Ringhomomorphismus $\mathbb{Z} \to R$.*

Satz 9.4 Übung 7.3: *Sei L ein Körper und $K \subset L$ ein Teilkörper. L wird mit seiner Addition und der Abbildung $K \times L \to L$ gegeben durch die Körpermultiplikation zu einem K-Vektorraum.*

Satz 9.5 Übung 7.5: *Sei K ein endlicher Körper. Dann existieren eine Primzahl p und eine natürliche Zahl n, so dass K genau p^n Elemente hat.*

Definition 9.6 Übung 8.5: *Sei K ein Körper. Eine Matrix $A \in M(n \times n, K)$ heißt* **symmetrisch***, wenn sie gleich ihrer eigenen Transponierten ist: $A = {}^tA$. Sie heißt* **schiefsymmetrisch** *(oder* **alternierend***), falls $A = -{}^tA$.*

Satz 9.7 Übung 8.5:

(a) *Die symmetrischen Matrizen bilden einen Untervektorraum $\mathrm{Sym}(n, K)$ von $M(n \times n, K)$.*

(b) *Die schiefsymmetrischen Matrizen bilden einen Untervektorraum $\mathrm{Alt}(n, K)$ von $M(n \times n; K)$.*

(c) *Sei nun char(K) $\neq 2$. Dann $M(n \times n, K) = \mathrm{Sym}(n, K) \oplus \mathrm{Alt}(n, K)$.*

Definition 9.8 Übung 9.5: *Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für K-lineare Abbildungen $f, g : V \to V$ definiert man den* **Kommutator** *$[f, g] : V \to V$ durch $[f, g](v) = f(g(v)) - g(f(v))$.*

Satz 9.9 Übung 9.5: *Der Kommutator zweier linearer Abbildungen ist stets eine lineare Abbildung.*

Satz 9.10 Übung 10.5: *Sei R ein nullteilerfreier kommutativer Ring mit 1 und $K \subset R$ ein Unterring. Wenn K ein Körper ist, bekommt R analog zu Satz 9.4 die Struktur eines K-Vektorraums. Falls R endlichdimensional als K-Vektorraum ist, ist R schon ein Körper.*

Definition 9.11 Übung 11.3: *Sei K ein Körper. Eine Teilmenge $L \subset K^n$ heißt* **Gerade***, wenn $v, w \in K^n, w \neq 0$, existieren mit $L = v + Kw$.*

Satz 9.12 Übung 11.3: *Eine Teilmenge L des K^n ist genau dann eine Gerade, wenn es eine Matrix $A \in M((n-1) \times n, K)$ mit $\mathrm{rang}(A) = n - 1$ und ein $b \in K^{n-1}$ gibt, so dass $L = \{x \in K^n : Ax = b\}$.*

Definition 9.13 Übung 12.4: *Sei K ein Körper. Die Spurabbildung $\mathrm{Spur} : M(n \times n, K) \to K$ ist definiert durch $(a_{ij}) \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.*

Satz 9.14 Übung 12.4: *Die Spurabbildung ist K-linear ist und für alle $A, B \in M(n \times n, K)$ gilt $\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA)$.*

Definition 9.15 Übung 13.3: *Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in M(n \times n, K)$ ist eine* **Diagonalmatrix***, falls $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$. Man schreibt dann $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$.*

Satz 9.16 Übung 13.3:

(a) *Für $i \neq j$ ist die Elementarmatrix $Q_i^j(1) \in M(n \times n, K)$ nicht zu einer Diagonalmatrix ähnlich.*

(b) *Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n \in K$.Dann sind die zwei Diagonalmatrizen $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ und $\mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ genau dann ähnlich, wenn es eine Bijektion $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\lambda_i = \mu_{\sigma(i)}$ für alle $1 \leq i \leq n$.*

Satz 9.17 Übung 13.5: *Sei $F : M(m \times n, K) \to K$ eine K-lineare Abbildung. Dann existiert ein eindeutig bestimmte Matrix $B \in M(n \times m, K)$, so dass $F(A) = \mathrm{Spur}(BA)$ für alle Matrizen $A \in M(m \times n, K)$ gilt.*