МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Уральский федеральный университет имени
первого Президента России Б. Н. Ельцина»

ПРИМЕНЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДЕКОМПОЗИЦИИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Методические указания к выполнению
лабораторной работы № 5

Екатеринбург
2019

Содержание

Введение

Метод сингулярного спектрального анализа SSA относится к адаптивным методам, и, потому, весьма эффективен для анализа и декомпозиции множества различных временных рядов, в том числе и нестационарных. Одним из важных замечаний, которое нужно сделать на начальном этапе данной лабораторной работы, состоит в том, что алгоритм SSA требует очень большой объем ОЗУ для больших значений окна L.

1. Задание на лабораторную работу

Результатом выполнения лабораторной работы является оформленный отчет в виде *Jupyter*-тетради, в котором должны быть представлены и отражены все нижеперечисленные пункты:

1) Сначала импортируйте в свой код нужные библиотеки, функции и т.д.

```
import numpy as np
import numpy.random as rand
import matplotlib.pyplot as plt
import h5py
%matplotlib inline
```

2) Метод сингулярного спектрального анализа SSA реализуется в 2 этапа – **разложение** и **группировка**. Соответственно, нам потребуется написать несколько функций – для сингулярного разложения ряда и затем для его обратной группировки.
3) Начнем с этапа разложения. Это будет функция

```
def SSA_modes(F, L):
```

которая принимает два параметра: сам временной ряд F и длину окна разложения L.

4) Внутри функции нам понадобится определить размерность траекторной $\boldsymbol{X}$ матрицы L x K.

N = len(F)

K = N - L + 1

X = np.empty((L, K))

5) Самостоятельно заполните элементы данной матрицы $\boldsymbol{X}$ точками массива ряда $F = f(t) = \{f(t_0),..., f(t_{N-1})\}$ через их «вложение» по столбцам $X_i = (f_{i-1},..., f_{i+L-2})^T, 1 \le i \le K$:

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \cdots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \cdots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \cdots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

6) Прежде чем переходить дальше, проверьте полученную матрицу на правильность построения для малых значений длины окна L.

7) Теперь в этой функции можно реализовать второй шаг метода SSA – это шаг сингулярного разложения. Сначала нужно создать полную матрицу $S = XX^T$.

S = np.dot(X, X.T)

8) Для разложения мы используем функцию ниже, через которую сразу же получим нужное **сингулярное разложение** SVD = *Singular Value Decomposition*.

U, A, _ = np.linalg.svd(S)

Здесь $\boldsymbol{U}$ – матрица собственных векторов, $\boldsymbol{A}$ – массив собственных чисел $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge ... \ge \lambda_L \ge 0)$. Третий выходной результат функции нам не понадобится.

9) Еще нужна матрица траекторных векторов $V = X^T U$. Рассчитайте данную матрицы самостоятельно.

10) В результате выполнения своей работы функция **SSA_modes(F, L)** должна вернуть **три** значения: массив собственных чисел ***A***, матрицу собственных векторов ***U*** и матрицу траекторных векторов ***V***.

11) Проверьте правильность и работоспособность данной функции на следующем простом примере:

```
ts = np.array([3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3]) # мини временной ряд
A, U, V = SSA_modes(ts, 3) # его разложение с длиной окна = 3
print(A) # собственные числа
print(U) # собственные вектора
print(V) # траекторные вектора
```

12) При правильной реализации функции должны получиться следующие результаты:

Для ***A***:
```
[129.66842566  12.           3.33157434]
```

Для ***U***:
```
[[-5.78869570e-01  7.07106781e-01  4.06091149e-01]
 [-5.74299610e-01  4.14039445e-16 -8.18645196e-01]
 [-5.78869570e-01 -7.07106781e-01  4.06091149e-01]]
```

Для ***V***:
```
[[-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-4.03837711e+00  8.88178420e-16 -8.31570994e-01]
 [-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-4.03837711e+00  8.88178420e-16 -8.31570994e-01]
 [-3.46407750e+00  1.41421356e+00 -1.29257973e-02]
 [-2.88977789e+00  0.00000000e+00  8.05719399e-01]
 [-3.46407750e+00 -1.41421356e+00 -1.29257973e-02]]
```

13) Далее нам нужна функция, которая будет реализовывать этап восстановления ряда. Пусть это будет функция **SSA_group**, у которой входными параметрами являются массив собственных значений ***A***, массив собственных векторов ***U***, массив траекторных векторов ***V***, длина ряда ***N*** и массив группировки компонент ***I***. Выходной параметр всего один – это массив, который содержит отсчеты восстановленного ряда.

14) При вызове этой функции мы, очевидно, передаем ей уже найденные величины ***A, U, V, N=len(F)***. Новым параметром будет только ***I***. Длину окна ***L*** можно найти из длины массива собственных чисел: **L = len(A)**. Еще нам понадобится $K = N - L + 1$.

15) Пусть группировку ***I*** мы будем задавать в виде **массива номеров компонент**, которые мы хотим группировать вместе. Тогда шаг группировки выглядит всего двумя строками:

```
V = V.transpose()
Z = np.dot(U[:, I], V[I, :])
```

что соответствует выражению $Z = X_{I_1} + ... + X_{I_m}$

16) Далее идет этап **диагонального усреднения**. Нам потребуется восстановить временной ряд $G = g_0, ..., g_{N-1}$ той же длины, что и исходный ряд: **G = np.zeros(N)**. При этом еще понадобится $L^* = \min(L, K)$, $K^* = \max(L, K)$.

17) Далее Вы должны самостоятельно по формулам ниже построить процедуру **диагонального усреднения**.

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k+1}\sum_{m=0}^{k} Z^*_{m,k-m} & 0 \le k < L^* - 1, \\ \dfrac{1}{L^*}\sum_{m=0}^{L^*-1} Z^*_{m,k-m} & L^* - 1 \le k < K^*, \\ \dfrac{1}{N-k}\sum_{m=k-K^*+1}^{N-K^*} Z^*_{m,k-m} & K^* \le k < N+1. \end{cases}$$

18) Проверка работоспособности функции **SSA_group** очень проста – нужно всего лишь сгруппировать полученное разложение из пункта 12 по всем 3 компонентам **[0, 1, 2]** и получить исходный массив:

```
ts1 = SSA_group(A, U, V, len(ts), [0, 1, 2])
print(ts1)
```

```
[3. 2. 1. 2. 3. 2. 1. 2. 3. 2. 1. 2. 3.]
```

19) Если все правильно реализовано, для тестового ряда постройте каждую компоненту отдельно (массив группировки [0], затем [1], затем [2]), и их попарные комбинации ([0, 1], [0, 2], [1, 2]). Изобразите их на рисунках относительно исходного временного ряда.

20) Отметьте для себя характерные особенности полученных компонент. Во-первых, 0-компонента содержит некоторое среднее плавающее значение ряда (тренд), а уже 1-компонента и 2-компонента имеют среднее значение близкое к нулю. Во-вторых, 1-компонента и 2-компонента имеют одинаковый период, так как любая периодическая составляющая методом SSA всегда разлагается на парные компоненты. В-третьих, амплитуда 1-компоненты выше амплитуды 2-компоненты, так как массив собственных чисел упорядочен по убыванию, то есть с ростом номера компоненты ее «вклад» в исходный ряд уменьшается.

21) Важно отметить, что с ростом длины окна $\boldsymbol{L}$ разложения, все составляющие ряда будут «расплываться» по нескольким компонентам. То есть тренд не всегда есть 0-компонента, а скорее комбинация компонент с номерами близкими к нулю, а периодика не равна одной паре компонент, а есть комбинация нескольких пар с близкими номерами. Тем не менее, общий характер особенностей из пункта 20 сохраняется.

22) Теперь применим готовый метод SSA к некоторым периодическим временным рядам.

23) Постройте следующий модельный ряд из 2 периодик с шумом:

```
t = np.linspace(0, 1, 1024)
f1 = 10
f2 = 50
F=np.sin(2*np.pi*f1*t)+np.sin(2*np.pi*f2*t)+0.2*rand.randn(len(t))
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(t, F, 'k')
plt.plot(t, np.sin(2*np.pi*f1*t), 'b')
plt.plot(t, np.sin(2*np.pi*f2*t), 'r')
plt.show()
```

здесь черным изобразится модельный ряд с шумом, синим – первая периодика, красным – вторая периодика.

24) Самостоятельно подберите такую длину окна и метод группировки компонент, чтобы с помощью метода SSA выделить компоненты, наиболее близкие к исходным периодикам в модельном ряде. Постройте их на рисунке совмещенно с исходным зашумленным рядом $\boldsymbol{F}$.

25) Теперь аналогичной методикой попытаемся построить тренд для сильно зашумленного ВР. Пусть задан ВР:

```
t = np.linspace(0,4,4096)
F = np.exp(-0.4*np.pi*t) + 0.5*rand.randn(len(t))
```

26) Используя метод SSA выделите этот экспоненциальный тренд **np.exp(-0.4*np.pi*t)**. Длину окна и метод группировки определите сами. Постройте на графиках исходный тренд и тот, что был получен Вами с помощью метода SSA.

27) Самостоятельно смоделируйте ВР из **4 гармоник с шумом**, и разделите его на компоненты с помощью метода SSA:

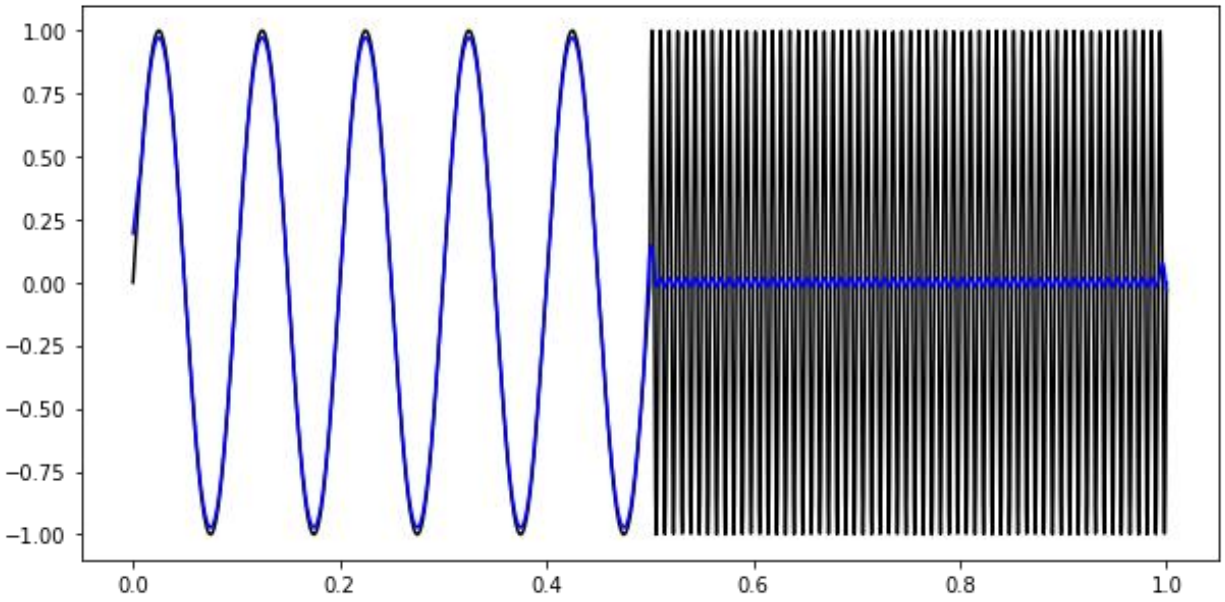
$$u(t) = \sin\left[2\pi t(f_1)\right] + \sin\left[2\pi t(f_2)\right] + \sin\left[2\pi t(f_3)\right] + \sin\left[2\pi t(f_4)\right] + \xi(t)$$

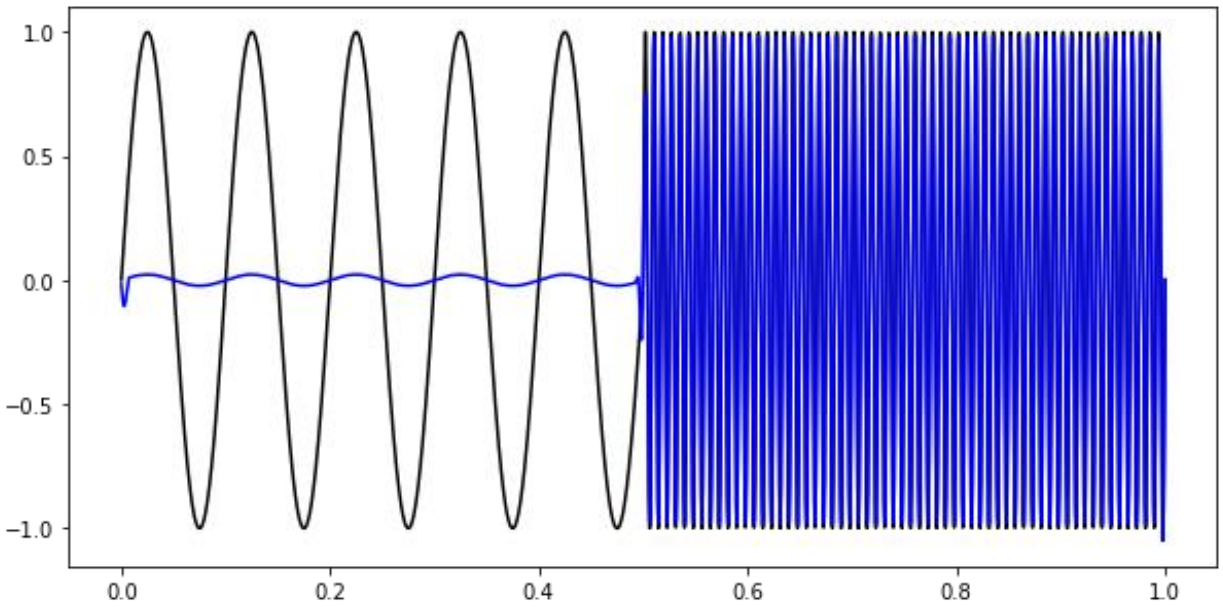
28) Создайте периодический сигнал с **изломом частоты**:

```
t = np.linspace(0, 1, 4096)
x2 = np.zeros(4096)
for i in range(0, len(t)//2):
   x2[i] = np.sin(2*np.pi*10*t[i])
for i in range(len(t)//2, len(t)):
   x2[i] = np.sin(2*np.pi*120*t[i])
plt.figure(figsize = (10, 5))
plt.plot(t, x2)
plt.show()
```

29) Самостоятельно подберите такую длину окна и метод группировки компонент, чтобы с помощью метода SSA выделить компоненты, наиболее близкие к исходным периодикам на двух половинках временного интервала в модельном ряде. Постройте их вместе с исходным рядом на одном рисунке.

30) Например, должен получиться результат как на рисунках:





31) Загрузите временной ряд из файла lab5.mat:

```
file = h5py.File('lab5.mat','r')
data = file.get('EEG')
eeg = np.array(data).T
```

32) Самостоятельно подберите такую длину окна и метод группировки компонент, чтобы с помощью метода SSA выделить компоненту, наиболее близко подходящую под понятие «периодической» компоненты. Постройте ее вместе с исходным рядом на одном рисунке.

2. Требования к оформлению отчета

Отчет в Jupyter-тетради должен обязательно содержать: номер лабораторной работы, ФИО студента, номер варианта (либо студенческий номер), номер группы, результаты выполнения работы с комментариями студента (комментарии пишутся после #) и изображениями.