Consistency check Sandwich Variance Estimator of DR ATE

--- 9월 30일 Version

--- Meeting comment 정리

전제) Estimating equation $\psi_T(\theta)$ 에 대해,

$\hat{\theta}$은 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta)=0$ 의 해 / θ^*은 $E[\psi(\theta)]=0$ 의 해 (← 이 부분은 가정)

true value of θ 의미

Fact 1) Estimating equation $\psi_T(\theta)$에 특정 θ value 대입하면, $\psi_T(\theta)$은 Y, X, Z의 함수 형태

이때, Y, Z, X가 확률변수이므로 $\psi_T(\theta)$도 확률변수이다.

Fact 2) By weak 대수의 법칙, $\hat{\theta} \xrightarrow{as\ n\to\infty} \theta^*$ (consistency)

θ^*이 $E[\psi_T(\theta)]=0$의 해이므로 $E[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta^*)]=0$ 이다.

$\Rightarrow$ By CLT, $\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta^*) - 0\right) \xrightarrow{n\to\infty} N(0,\ E[\psi(\theta^*)\psi(\theta^*)^T])$

각 Sample이 iid copy라 전제

그러면, 1st order talyor expansion (이때, $\hat{\theta}$을 기준점으로 잡음) 와 평균값 정리 이용하면,

"$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta^*) \approx \cancel{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\hat{\theta})}^{0} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial}{\partial\theta'}\psi_T(\bar{\theta})\right)\cdot(\theta^*-\hat{\theta})$" 로 쓸수 있고,

$\bar{\theta}$는 θ^*와 $\hat{\theta}$ 사이 어떤 값

$\hat{\theta}$은 $\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta)$의 해이므로, $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\hat{\theta})=0$ 이다.

이를 통해 식을 다시 쓰면, "$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta^*) = -\sqrt{N}\underbrace{\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial}{\partial\theta'}\psi_T(\bar{\theta})\right)}_{A라\ 하자.}(\hat{\theta}-\theta^*)$" 로 쓸수 있다.

$\Rightarrow \sqrt{N}(\hat{\theta}-\theta^*) = -A^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}\psi_T(\theta^*)\right)$ / 이때, $N\to\infty$ 이면 "A" $\longrightarrow \underbrace{E\left[\frac{\partial}{\partial\theta'}\psi_T(\theta)\right]}_{=B라\ 하자.}$ 이므로

$\sqrt{N}(\hat{\theta}-\theta^*) \overset{\cdot}{\sim} N(0,\ B^{-1}\ E[\psi(\theta^*)\psi(\theta^*)^T]\ (B^{-1})^T\ )$

내가 R함수 상에서 설계해놓은 부분!

$= Var(\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{T=1}^{N}\psi_T(\theta^*))$ 의미

$(\because E[\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{T=1}^{N}\psi_T(\theta^*)]=0)$

[To Do List]

1) $\frac{1}{N}\sum_{T=1}^{N}\psi_T(\theta) = \Xi(\theta)$ 라 할 때, 각 Dataset 마다 (1000개 Set) $\hat{\theta}$과 θ^*(true value) 에 대해 $(\Xi(\hat{\theta}),\ \Xi(\theta^*))$ 계산 ; 총 1000개 존재할 것이다. 그러면 Sample Variance of $\Xi(\hat{\theta})$, Sample Variance of $\Xi(\theta^*)$ 비교 ⇒ 동일한지 확인!

2) "$\frac{1}{N}\sum_{T=1}^{N}\psi_T(\theta)\psi_T(\theta)^T$" $= u(\theta)$ 라 하면, 각 Dataset 마다 (1000개의 Set에 대해) $\hat{\theta}$, θ^* 에 대해 $u(\hat{\theta})$, $u(\theta^*)$ 계산 ⇒ 총 1000개의 pair 생성 / 그 후, Sample Variance of $u(\hat{\theta})$ 와 Sample Variance of $u(\theta^*)$ 비교 ⇒ 비슷한지 확인

⇒ 1)에 대해 근사 여부 먼저 확인해보기!