공학수치해석 중간고사 2012.11.1

문제1 다음 Figure 1은 전투기가 착륙할 때 펼쳐지는 drag parachute 를 보여준다. 이 때 전투기는 속도함수의 가속도 ($a = -0.004v^2 m/sec^2$)의 지배를 받게 된다. 다음 문항에 답하여라.

Figure 1: Drag chute

(a) 감속하는 전투기의 속도에 대한 수학적모델을 세우고, 독립변수와 종속변수를 나타내시오. [5점]

(b) 감속하는 전투기의 속도 $80m/s$에서 $10m/s$에 도달하기 까지 걸리는 시간의 해석해(exact solution)를 구하시오. [10점]

(c) (b)에서 동일하게 감속하는 시간동안 이동한 거리의 해석해(exact solution) 혹은 Euler법을 사용한 수치해 (numerical solution)을 구하시오. (단, 수치해를 구할때 독립변수의 간격은 2로 하고, 각 단계에서의 절단오차 소숫점 4째자리까지 나타내시오) [10점]

문제2 다음 Figure2는 등분포하중을 받는 캔틸레버보를 나타낸다. 탄성곡선의 방정식은 식(1)와 같다. 다음 문항에 답하여라.

$$y = \frac{w_0}{24EI}\left(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2\right) \tag{1}$$

(a) 캔틸레버보의 $x = 50cm$일 때를 기준점으로 하여 0차에서 3차까지의 Taylor급수전개를 사용하여 $x = 100cm$지점의 처짐(y)의 근사값을 구하고, 참백분율 상대오차 ε_t를 구하라. (단, 매개변수는 $L = 300cm$, $E = 50,000kN/cm^2$, $I = 30,000cm^4$, $w_0 = 2.5kN/cm$과 같으며 참상대오차의 절단오차는 소수점 4째 자리의 과학적 표기법으로 표시한다.) [10점]

(b) (a)의 매개변수에서 $L = 300 \pm 5cm$ 그리고 $I = 30,000 \pm 100cm^4$의 측정오차가 있었다. 1차 오차해석으로 $x = 100cm$ 지점에서의 처짐각(dy/dx)의 추정오차값을 구하여라. (단, 절단오차는 소수점 4째 자리의 과학적 표기법으로 표시한다.) [10점]

(c) 처짐 y가 $1cm$가 되는 지점을 이분법을 사용하여 근을 구하라, $x_l = 200cm$, $x_u = 250cm$을 초기구간으로 가정하고, 근사오차 ε_a가 1% 이하로 떨어질 때까지 반복하라. [10점] (단, 반복횟수만큼의 열을 가지는 테이블을 작성하고 함수값등의 절단오차는 소수점 4째 자리까지 표시한다.)

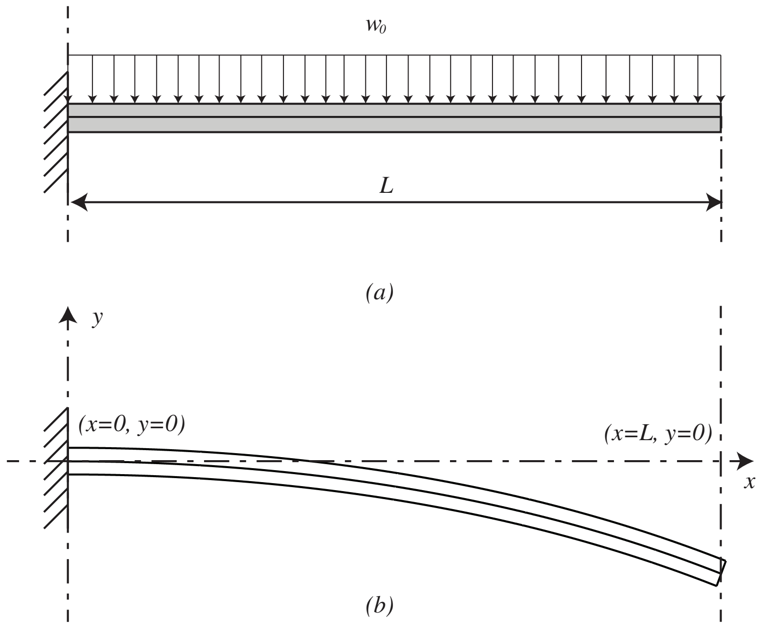

Figure 2: Cantilever beam

문제3 점성감쇠조화진동(harmonic vibration with viscous damping)하는 물체가 공진상태까지 도달할 때, 정적변위응답u_{st} 에 대한 동적변위응답$u(t)$는 ξ가 작은 경우 다음 근사식(2)과 같이 주어진다. 다음 문항에 답하여라.

$$u(t) \cong u_{st} \frac{1}{2\xi} \left(e^{-\xi \omega_n t} - 1 \right) \cos \omega_n t \tag{2}$$

여기서, ξ는 감쇠비, ω_n은 고유진동수이다.

(a) $\omega_n = 1$이고, $\xi = 0.05$일 때, 식(2)을 통해 최대변위증폭비 $\max\{u(t)/u_{st}\}$가 5에 도달하는 시간을 Newton-Raphson법을 통해 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$으로 세번 반복한다. [15점]

(b) (a)를 할선법(secant method)를 사용하여 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$, $x_1 = 11$으로 시작하고 세번 반복하라 [15점]

(c) (a)를 수정된 할선법(modified secant method)를 사용하여 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$, $\delta = 0.01$로 시작하고 세번 반복하라 [15점]

► 유의사항 : 식(2)의 1차도함수를 구하기 어려운 경우, 최대변위증폭비를 구하는 문제이기 때문에 $\max(\cos \omega_n t) = 1$로 가정한 포락곡선함수(envelope function)를 함수로 사용하여도 되며, 증폭비는 절대값이기 때문에 함수의 근의 존재유무에 유의하라.

Algorithm 1 이분법(Bisection Method)

Choose lower x_l and upper x_u guesses for the root such that the function changes sign over the interval. This can be checked by ensuring that $f(x_l)f(x_u) < 0$.

while $f(x_r)$ is not sufficiently small **do**
  $x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$
  if $f(x_l)f(x_r) < 0$ **then**
    $x_u = x_r$
  else
    $x_l = x_r$
  end if
  if $\varepsilon_a = \left|\frac{x_{new} - x_{old}}{x_{new}}\right|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{new}$
    return x_r
  end if
end while

Algorithm 2 Newton-Raphson Method

Choose an initial guess x_0.

for $i = 0, 1, 2, \cdots$ **do**
  if $f(x_i)$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_i$
    return x_r
  end if
  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
  if $|x_{i+1} - x_i|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{i+1}$
    return x_r
  end if
end for

Algorithm 3 Secant Method

Choose an initial guess x_0 and x_1.

for $i = 0, 1, 2, \cdots$ **do**
  if $f(x_i)$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_i$
    return x_r
  end if
  $x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})(x_i - x_{i+1})}{f(x_i) - f(x_{i+1})}$
  if $|x_{i+2} - x_{i+1}|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{i+2}$
    return x_r
  end if
end for

Algorithm 4 Modified Secant Method

Choose an initial guess x_0 and δ.

for $i = 0, 1, 2, \cdots$ **do**
  if $f(x_i)$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_i$
    return x_r
  end if
  $x_{i+1} = x_i - \frac{\delta x_i f(x_i)}{f(x_i + \delta x_i) - f(x_i)}$
  if $|x_{i+1} - x_i|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{i+1}$
    return x_r
  end if
end for