등호 제약 하의 극대화

$\max_x \ f(x;a)$

subject to $g(x;a) = b$

$x \in R^n$ 이고 제약식의 숫자가 m 인 경우 $n \le m$ 이라면 일반적으로 해는 제약식에 의해 유일하게 결정된다. $n > m$ 인 경우 이론적으로 선택변수 n 개 중 m 개는 다른 $n-m$ 개의 선택변수로 표현할 수 있다. 따라서 n 개의 선택변수와 m 개의 등호 제약이 있는 극대화 문제는 $n-m$ 개의 선택변수로 이루어진 무제약 하의 극대화 문제로 생각해 볼 수 있다.

$\max_{x_1,x_2} \ f(x_1,x_2)$ subject to $x_1 + 2x_2 = 2$

$\max_{x_2} \ f(x_1(x_2),x_2),$ where $x_1(x_2) = 2 - 2x_2$

이러한 맥락에서 라그랑지 승수법 (Lagrange-multiplier method)는 제약하의 극대화 문제를 무제약하의 극대화 문제로 풀 수 있게 해 준다. 등호 제약하의 극대화 문제는 다음의 라그랑지안 함수(Lagrangian function)를 이용하여 무제약하에서와 동일한 1차 조건을 적용할 수 있다.

$$L(x,\lambda) = f(x) - \lambda[g(x) - b] = f(x) - \sum_m \lambda_m [g^m(x) - b^m]$$

여기서 λ_m 는 해당 제약식의 라그랑지 승수라고 부른다.

정리: x^* 가 극대화 문제의 해이고 제약식들이 $r(Dg(x^*)) = m$ 의 제약자격조건(constraint qualification)을 만족하면 $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial(x,\lambda)} = 0$ 이 된다. 즉, $D_x f(x^*) = \lambda^* D_x g(x^*)$ 이고 $g(x^*) = 0$ 이 된다.

*제약자격조건 (constraint qualification)
제약자격조건은 m 개의 제약식의 일차 도함수들이 선형독립이라는 것을 의미한다. 선형 독립인 m 개의 식이 있으면 n 개의 독립변수 중 m 개의 변수를 다른 변수들의 함수로 표시할 수 있다. 실제 극대화 문제의 1차 조건은 모두 1차 도함수의 값에 의해 표현되므로 $Dg(x^*)$ 가 full rank를 가질 경우 음함수 정리에 의해 x^* 에서 평가한 m 개 변수의 다른 변수에 대한 도함수를 구할 수 있다.

$\max_{x_1,x_2} -(x_1^2 + x_2^2)$

subject to $(x_1 - 1)^3 - x_2^2 = 0$

$x_2^2 \geq 0$ 이므로 $(x_1 - 1)^3 \geq 0$ 이어야 한다. 따라서 위의 극대화 문제의 해는 $(1,0)$ 임을 쉽게 알 수 있다. 하지만 $D_x g(1,0) = 3(x_1 - 1)^2 - 2x_2 = 0$ 이므로 이 문제는 제약자격조건을 만족하지 않는다. 이 문제를 라그랑지 승수법으로 풀어보자. 1차 조건은

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_1} = -2x_1^* - 3\lambda^*(x_1^* - 1)^2 = 0$$

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial x_2} = -2x_2^* + 2\lambda^* x_2^* = 0$$ 이 된다.

$$\frac{\partial L(x^*, \lambda^*)}{\partial \lambda} = -(x_1^* - 1)^3 + x_2^{*2} = 0$$

두 번째 식에서 $\lambda^* = 1$ 이므로 이를 처음 식에 대입하면 $3x_1^{*2} - 4x_1^* + 3 = 0$ 이 되고 이 방정식은 실근을 갖지 않는다. 따라서 라그랑지승수 방법을 사용해선 않된다.

정리 (등호 제약하의 포락선 정리, Envelope Theorem) 가치함수가 유일한 해를 가지고 모수에 대해 미분이 가능하면 $\frac{\partial V(a)}{\partial a} = \frac{\partial f(x^*, a)}{\partial a} - \lambda^* \frac{\partial g(x^*, a)}{\partial a}$ 이다.

일단 $\begin{array}{l} \max_x f(x) \\ \text{subject to } g(x) = b \end{array}$ 에서 b 의 변화가 극대화된 함수값에 미치는 영향을 살펴보자. 목적함수는 b 의 함수가 아님에 주의하자. 이 경우 가치함수는 $V(b) = f(x^*(b))$ 이므로 $\frac{\partial V(b)}{\partial b} = \frac{\partial f(x^*(b))}{\partial x}\frac{\partial x^*(b)}{\partial b} + \frac{\partial f(x^*(b))}{\partial b} = \frac{\partial f(x^*(b))}{\partial x}\frac{\partial x^*(b)}{\partial b}$ 이다. 한편 극대화의 일차 조건은 $\frac{\partial f(x^*(b))}{\partial x} = \lambda^* \frac{\partial g(x^*(b))}{\partial x}$ 이므로 이를 위의 식에 대입하면 $\frac{\partial V(b)}{\partial b} = \lambda^* \frac{\partial g(x^*(b))}{\partial x}\frac{\partial x^*(b)}{\partial b} = \lambda^* \frac{\partial g(x^*(b))}{\partial b}$ 가 된다. 한편 제약식은 모든 b 에 대해 항등식이므로 제약식의 양변을 b 에 대해 편미분하면 $\frac{\partial g(x^*(b))}{\partial b} = 1$ 이므로 $\frac{\partial V(b)}{\partial b} = \lambda^*$ 가 된다. 이는 제약식의 b 값이 한 단위 커질 경우 극대화된 함수값이 λ^* 만큼 커진다는 것을

의미한다. 따라서 λ^*는 목적함수의 크기로 측정한 b 한 단위의 가치로 해석할 수 있고 이런 이유로 b의 잠재가격 (shadow price)이라고 부른다. 문제의 성질에 따라 λ^*는 음의 부호를 갖는 경우도 있다.

극대화 문제를 다음과 같이 고쳐 써보자.

$\max_x f(x,a)$

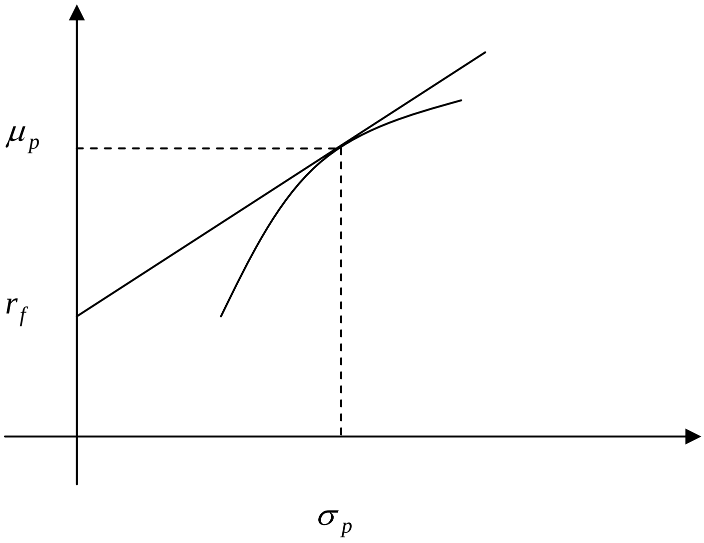
subject to $g(x,a)=0$

해당 가치함수를 모수에 대해 미분하면 $\frac{\partial V(a)}{\partial a}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial x}\frac{\partial x^*(a)}{\partial a}+\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}$이 된다. 극대화의 1차 조건은 $\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial x}=\lambda^*\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x}$ 이므로 $\frac{\partial V(a)}{\partial a}=\lambda^*\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x}\frac{\partial x^*(a)}{\partial a}+\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}+\lambda^*\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x}\frac{\partial x^*(a)}{\partial a}$ 이 된다. 한편 제약식을 a에 대해 미분해 보면 $\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x}\frac{\partial x^*(a)}{\partial a}+\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial a}=0$이므로 $\frac{\partial V(a)}{\partial a}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}+\lambda^*\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial x}\frac{\partial x^*(a)}{\partial a}=\frac{\partial f(x^*(a),a)}{\partial a}-\lambda^*\frac{\partial g(x^*(a),a)}{\partial a}$ 가 된다.

이윤극대화

효용극대화

최적 포트폴리오



시장 포트폴리오와 무위험 자산을 연결하는 직선(효율적인 포트폴리오)의 기울기가 극대화되므로 시장 포트폴리오를 찾는 문제는

$$\theta = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p}$$

를 극대화하는 문제로 귀결된다. 따라서, 시장 포트폴리오를 찾기 위해서

$$\max_{x_i} \theta = \frac{r_p - r_f}{\sigma_p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}}} \quad s.t. \ \sum_i x_i = 1$$

을 풀면 된다. 복잡한 계산 과정을 거쳐 극대화 문제의 1계 조건을 구해보면

$$r_1 - r_f = \lambda(x_1\sigma_1^2 + x_2\sigma_{12} + x_3\sigma_{13} + \cdots x_n\sigma_{1n})$$

$$r_2 - r_f = \lambda(x_1\sigma_{21} + x_2\sigma_2^2 + x_3\sigma_{23} + \cdots x_n\sigma_{2n})$$

$$\vdots$$

$$r_n - r_f = \lambda(x_1\sigma_{n1} + x_2\sigma_{n2} + x_3\sigma_{n3} + \cdots x_n\sigma_n^2)$$

혹은

$$\begin{bmatrix} r_1 - r_f \\ \vdots \\ r_n - r_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} \text{ 혹은 } \begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 - r_f \\ \vdots \\ r_n - r_f \end{bmatrix}$$

여기에 $\sum_i x_i = 1$라는 조건을 적용하면 해를 얻는다. 즉, $x_i = \dfrac{\lambda x_i}{\sum_k \lambda x_k} = x_i$이다.

부등호 제약하의 극대화 문제

$$\begin{aligned} &\max_x f(x;a) \\ &\text{subject to } g(x;a) = b \\ &\qquad\qquad h(x;a) \le c \end{aligned}$$

부등호 제약 하의 극대화 문제 역시 라그랑지 함수를 이용하여 유사한 방법으로 1차 조건을 구할 수 있다. 등호 제약식에 해당하는 라그랑지 승수를 λ라 하고 부등호 제약식에 해당하는 것을 μ라고 하면, 극대화 문제의 라그랑지 함수는 다음과 같다.

$$L(x,\lambda,\mu) = f(x,a) - \lambda[g(x;a) - b] - \mu[h(x;a) - c]$$

정리 (쿤터커 조건, Kuhn-Tucker conditions) x^*가 오목한 목적함수와 볼록한 제약집합으로 이루어진 극대화 문제의 해이고 제약자격조건을 만족하면 $\dfrac{\partial L(x^*,\lambda^*)}{\partial(x,\lambda)} = 0$ 또는

$D_x f(x^*) = \lambda^* D_x g(x^*) + \mu^* D_x h(x^*)$와 $\lambda^*[h(x^*) - b] = 0$가 된다.

문제 풀이 방법은 등호제약하의 극대화 경우와 유사하지만 몇 가지 차이점이 있다. 부등호 제약의 라그랑지 승수는 (-)값을 갖지 않는다 ($\mu^* \ge 0$.) 앞에서 살펴본 바와 같이 라그랑지 승수는 제약이 "완화"될 경우 증가하는 목적함수값의 크기를 나타낸다. 부등호 제약의 경우 제약의 완화는 선택가능 집합을 더욱 크게 만들므로 극대값이 작아질 수 없다. 한편, 만일 하나의 제약이 부등호로 성립한다면 $D_x f(x^*) = \lambda^* D_x g(x^*) + \mu^* D_x h(x^*)$와 제약조건만으로는 해를 구할 수 없다. (선택변수의 수는 n , 승수의 수는 m 이므로 등호제약이 $n+m$보다 작으면 해를 유일하게 결정할 수 없다.)

이와 관련해 1차 조건 $\lambda^*[h(x^*) - b] = 0$을 살펴보자. 일반적으로 제약식이 구속력이 있는

경우 (제약식을 변형시켰을 경우 목적함수의 값을 더 크게 만들 수 있는 경우 제약식은 구속력이 있다고 한다. binding constraint) 해당 제약식의 라그랑지 승수는 0이 아니다. 반대로 제약식이 구속력이 없는 경우 라그랑지 승수의 값은 0이 된다. 따라서 극대화 문제의 해에서는 λ^* 와 $h(x^*)-b$, 둘 중 하나 이상은 그 값이 0이라는 것을 의미한다.

이러한 제약을 상보적 여분성 조건(complementary slackness condition) 이라 하고 이를 이용하여 부등호 제약이 등호로 성립하지 않을 경우에도 1차 조건을 만족시키는 해를 구할 수 있다.

지금까지는 국지적 극대점을 찾는 방법을 살펴보았다. 많은 경제학 문제에서, 국지적 극대점은 전역적 극대점과 일치하지만 일반적인 성질은 아니므로 이에 대한 고려가 필요하다.

제약 집합의 내부점에서 극대화가 이루어지는 경우에는 위의 방법으로 극대점을 찾을 수 있지만 제약 집합의 경계점에서 극대화가 이루어지는 경우 1차 조건은 만족하지 않을 수 있으며 이러한 해를 모퉁이 해(corner solution)라고 한다. 모퉁이 해의 존재 여부를 손쉽게 확인할 수 있는 방법이 없으며 1차 조건의 성질을 이용하여 확인하거나 가능한 모퉁이 값을 모두 계산하여 확인하여야 한다.

비음제약하의 극대화 문제

다음과 같은 일반적인 효용극대화 문제를 생각해 보자.

$$\max_x u(x) \quad s.t.\ px = m,\ \ x \geq 0$$

선호가 단조성을 만족하는 경우 예산 제약은 항상 등호로 성립을 하지만 어떤 재화의 경우 소비를 하지 않을 수도 있으므로 $x \geq 0$ 이라는 제약이 추가되었다. 이 문제의 쿤-터커 조건을 구하기 위해 위 문제의 제약을 다음과 같이 바꾸어 보자.

$$\max_x u(x) \quad s.t.\ px = m,\ -x \leq 0$$

이 문제의 쿤-터커 조건은 $\nabla u(x) = \lambda p - (\mu_1 + \cdots + \mu_n)$ 과 상보적 여분성 조건이므로 만일 재화 i 의 소비량이 0이 되는 경우 해당 라그랑지 승수 μ_i 의 값은 0보다 크게 된다. (즉 음의 소비가 허락되는 경우 효용이 증가할 수 있다는 의미이다.) 따라서 위의 일계조건은 $\nabla u(x) \leq \lambda p$ 로 간단히 표현할 수 있다. 이를 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} \leq \lambda p_i,\ i = 1,2,\cdots,n$ 으로 바꾸어 보면 x_i 에 대한 상보적 여분성 조건에 의해 $x_i > 0$ 인 경우 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} = \lambda p_i$ 가 되고 $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i} < \lambda p_i$

인 경우에는 $x_i = 0$ 임을 알 수 있다.

준선형 효용함수

$$\max_{x \geq 0} u(x) = x_1 + \ln x_2 \quad s.t.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$
$$\max_{x \geq 0} u(x) = (x_1 + 3)(x_2 + 5) \quad s.t.\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

정리 (부등호 제약하의 포락선 정리, Envelope Theorem) 가치함수가 유일한 해를 가지고 모수에 대해 미분이 가능하면 $\dfrac{\partial V(a)}{\partial a} = \dfrac{\partial f(x^*, a)}{\partial a} - \lambda^* \dfrac{\partial g(x^*, a)}{\partial a} - \mu^* \dfrac{\partial h(x^*, a)}{\partial a}$ 이다.
부등호 제약조건이 구속력이 없는 경우 해당 라그랑지 승수는 0이므로 제약 조건의 국지적인 변화는 가치함수의 값에 아무런 영향을 미치지 않는다. 따라서 등호 제약하의 포락선 정리의 증명 방법을 그대로 적용할 수 있다.

쌍대성(duality)

원문제 (primal problem)
$$\max_x u(x) \quad s.t.\ e(x, p) \leq e_0$$

이 문제의 일차 조건은 $Du(x^*) = \lambda^* De(x^*, p)$ 이다. 만일 $\lambda^* > 0$ 라면 $e(x^*, p) = e_0$ 이다. 여기서 $\lambda^* > 0$ 의 의미는 제약을 완화시킬 경우 목적함수의 극대값이 증가한다는 것이므로 극대점에서 제약은 등호로 성립하게 되고 $e(x^*, p) = e_0$ 을 얻게 된다. 이를 다르게 해석해 보면 극대값 $u(x^*)$ 을 얻기 위해 필요한 최소한의 자원은 e_0 임을 알 수 있다.

이 문제의 해를 $x^* = x(p, e_0)$ 라고 하면 극대화된 값은 $u_0 = u(x^*) = u(x(p, e_0))$ 이 된다.

쌍대문제 (dual problem)
$$\min_x e(x, p) \quad s.t.\ u(x) \geq u_0$$

이 문제의 일차 조건은 $De(x^*, p) = \mu^* Du(x^*)$ 이다. 만일 $\mu^* > 0$ 라면 $u(x^*) = u_0$ 이다.

한편 $\mu^* = \dfrac{1}{\lambda^*}$ 이므로 이 문제의 해를 $x^* = x(p, u_0)$ 라고 하면 극소화된 값은 $e(x^*(p, u_0)) = e_0$ 이 된다.