Kuhn-Tucker Theorem

쿤-터커 정리

1 요약

부등식이 제약조건인 최적화문제의 1계조건(First Order Condition)에 대한 정리

2 쿤-터커 정리

다음 최적화 문제를 생각해보자.

Max $f(x)$ subject to $g(x) \geq a$

위 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

Max $f(x)$ subject to (1) $g(x) = b$, (2) $b \geq a$ with b as a variable

FOC는 다음과 같다.

(1) $L(x, \lambda, b) \equiv f(x) - \lambda(g(x) - b)$
(2) $\Delta L = \Delta f(x) - \lambda \Delta g(x) = 0$
(3) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x) - b = 0$
(4) $\frac{\partial L}{\partial b} = \lambda \leq 0$
(5) $(a - b)\lambda = 0$

3 FOC(5)의 의미

(1) $(a - b)\lambda = 0;\ \Longrightarrow\ a = b$ 또는 $\lambda = 0$
(2) $a = b;\ \Longrightarrow$제약식의 경계점에서 극한을 갖는다(the constraint is binding).
(3) $\lambda = 0;\ \Longrightarrow$제약식이 의미가 없다(the constraint is non-binding).

In sum

부등 제약식을 가진 최적화 문제의 경우 (1)제약식이 구속적인 경우와 (2)그렇지 않은 경우로 나누어 문제를 풀어야 한다.

4 예제

min $f(x) = x^2 + 3$ subject to $g(x) = x \geq 2$

풀이;

라그랑지안; $L(x, \lambda, b) = x^2 + 3 - \lambda(x - 2)$

FOC

(1) $\frac{\partial L}{\partial x} = 2x - \lambda = 0$
(2) $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (x - 2) = 0$
(3) $\frac{\partial L}{\partial b} = \lambda \leq 0$

구속적인 경우; If $a = b\ \Longrightarrow\ x^* = 2$ and $f(x^*) = 7$
비구속적인 경우; If $\lambda = 0$; ;$x^* = 0$ and $f(x^*) = 7$; but 제약조건 불만족
따라서 문제의 답은 $x^* = 2$ and $f(x^*) = 7$

참고자료

[1] Ingersoll, 1987, Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield