

---

공학 수치해석  
Numerical Analysis for Engineers

구조해석 및 동역학 연구실  
(*Structural Analysis & Dynamics Laboratory*)  
단국대학교 건축대학

---

LECTURE NOTE  
NOTE-2012-ver-20120911

11 September 2012

EUNCHURN PARK (eunchurn@kmctech.co.kr)  
Structrual Analysis & Dynamics Laboratory  
Deppartment of Architectural Engineering  
Dankook University School of Architecture

Department of R&D Development  
Korea Maintenance Co., LTD.  
KM Tower 12F  
130-5, Guro-5-dong, Gurogu, Seoul (152-842)  
PHN: +82-2-830-7071 (236)  
SEL: +82-10-4499-6420  
FAX: +82-2-830-5256

# 공학 수치해석

## Numerical Analysis for Engineers

구조해석 및 동역학 연구실

(Structural Analysis & Dynamics Laboratory)

단국대학교 건축대학

*Dept. of Architectural Engineering, Dankook Univ. School of Architecture, NOTE-2012-ver-20120911*

11 September 2012

### Contents

<b>1 수학적 모델링과 공학 문제의 해결</b>	
<b>(Mathematical Modeling and Engineering Problem Solving)</b>	<b>2</b>
1.1 단순화된 수학적 모델 . . . . .	3
1.1.1 해석해(analytic solution) 예제 . . . . .	4
1.1.2 수치해법(numerical method) 예제) . . . . .	6
<b>A MATLAB m-code</b>	<b>8</b>
A.1 Figure 3의 낙하산병 문제 정확해와 수치해 . . . . .	8

# 1 수학적 모델링과 공학 문제의 해결

## (Mathematical Modeling and Engineering Problem Solving)

- 경험적 방법과 이론적 방법의 고찰
- 수학적 모델의 중요성
- 일반화 작업 (generalization)
- 컴퓨터의 활용

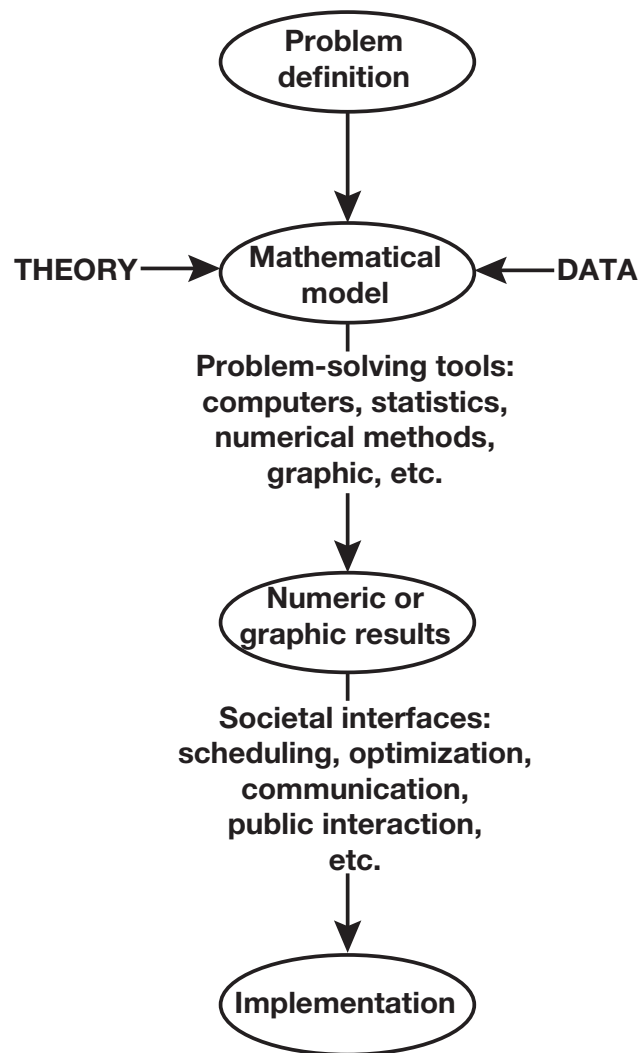


Figure 1: 공학적 문제의 해법과정

## 1.1 단순화된 수학적 모델

- 수학적 모델 (mathematical model) 물리적 시스템이나 과정의 이해에 필수적으로 요구되는 특징을 수학적으로 표현한 함수의 관계식

$$\text{종속변수} = f(\text{독립변수들, 매개변수들, 강제함수들}) \quad (1)$$

- 종속변수 (dependent variables) 시스템의 거동이사 상태를 기술하는 특성량
- 독립변수 (independent variables) 시스템의 거동을 결정하는데 사용되는 시간과 공간과 같은 차원
- 매개변수 (parameters) 시스템의 성질이나 구성
- 강제함수 (forcing functions) 시스템에 작용되는 외부의 영향

식(1)의 수학적 표현은, 단순한 대수적 관계식으로부터 매우 복잡한 연립미분방정식에 이르기까지 매우 다양한 적용범위를 가진다. 예를 들어, Newton은 그의 경험에 근거하여, 물체가 가지는 운동량의 시간에 따른 변화는 이에 작용되는 외력의 합과 같다는 제2 운동법칙을 공식화하였다.

$$F = ma \quad (2)$$

여기서  $F$ 는 물체에 주어진 유효힘( $N$  또는  $kg \cdot m/s^2$ )이며,  $m$ 은 물체의 질량( $kg$ )이며  $a$ 는 가속도( $m/s^2$ )이다. 특정한 물체에  $F$ 의 힘을 가했을 경우 물체의 가속도  $a$ 는

$$a = \frac{F}{m} \quad (3)$$

- $a$  : 시스템의 거동을 기술하는 종속변수 (dependent variable)
- $F$  : 시스템에 작용되는 외력을 나타내는 강제함수 (forcing function)
- $m$  : 시스템의 특성을 나타내는 매개변수 (parameter)

$a$ 는 시간에따라 공간상에서 어떻게 변화할 것인가?

식(3)은 물리적 시스템을 기술하는 전형적인 수학적 모델이다.

### 1.1.1 해석해(analytic solution) 예제

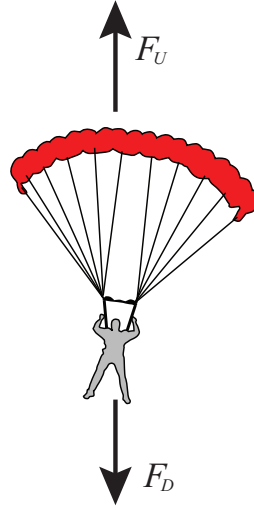


Figure 2: 낙하산병에 작용하는 힘에 대한 개략도.  $F_D$ 는 중력에 의해 아래로 작용하는 힘이고,  $F_U$ 는 공기의 저항에 의하여 위로 작용하는 힘이다.

#### 낙하산병 문제로 정확해(exact solution) 구하기

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \quad (4)$$

$$F = F_D + F_U \quad (5)$$

$$F_U = -cv \quad (6)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \quad (7)$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \quad (8)$$

식 7 혹은 식 8의 엄밀해(exact solution)을 구하기 위해서는 미분방정식의 **변수분리(separation of variables)**<sup>1</sup> 방법등이 사용되어야 한다.

$$\frac{m}{mg - cv} dv = 1 \cdot dt \quad (9)$$

양변을 적분하면 식(9)은 시각  $T$ 에서 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\int_{v(0)}^{v(T)} \frac{m}{mg - cv} dv = \int_0^T 1 \cdot dt \quad (10)$$

<sup>1</sup> 종속변수에 관련된 항과 독립변수에 관련된 항을 분리시킬 수 있을 때, 그 각각의 변수에 관해 적분하여 해를 구하는 미분방정식 풀이법의 일종

초기속도가 0 즉,  $t = 0$  일때,  $v(0) = 0$ 로 가정하고,  $mg - cv$ 를 시간의 종속변수  $X$ 로 치환하면,

$$mg - cv = X \quad (11)$$

$$\frac{dX}{dv} = -c \quad (12)$$

$$dv = -\frac{1}{c} dx \quad (13)$$

치환변수  $X$ 의 초기값과  $T$ 에서의 값은 각각,  $X(0) = mg$  그리고  $X(T) = mg - cv(T)$ 가 된다. 다시 식(10)에 대입하면,

$$-\frac{m}{c} \int_{X(0)}^{X(T)} \frac{1}{X} dv = \int_0^T 1 \cdot dt \quad (14)$$

식(14)을 계산하면,

$$-\frac{m}{c} \ln X \Big|_{X(0)}^{X(T)} = T \quad (15)$$

치환된 변수를 환원하면서 전개하면,

$$-\frac{m}{c} [\ln \{mg - cv(T)\} - \ln(mg)] = T \quad (16)$$

정리하면

$$\ln \left( 1 - \frac{c}{mg} v(T) \right) = -\frac{c}{m} T \quad (17)$$

양변에  $\ln$ 을 취하면,

$$e^{-(c/m)T} = 1 - \frac{c}{mg} v(T) \quad (18)$$

결국 시각  $T$ 에서 엄밀해는 식(21)과 같이 계산된다.

$$v(T) = \frac{mg}{c} \left( 1 - e^{-(c/m)T} \right) \quad (19)$$

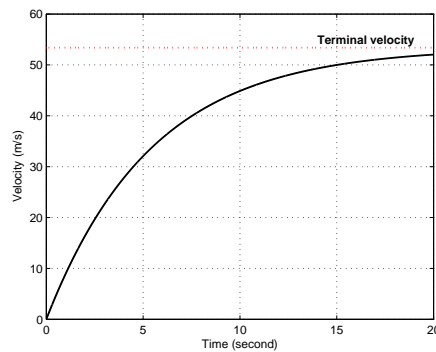


Figure 3: 낙하산병 문제의 해석해, 시간에 따라 속도가 증가하여 종단속도로 접근

### 1.1.2 수치해법 (numerical method) 예제)

수치해법은 단순히 산술연산을 이용하여 해를 얻을 수 있도록 수학적 문제를 재공식화 하는 것이다. 근사화 문제를 생각하면 시간의 증분 즉,  $\Delta$ 가 유한하기 때문에  $dv/dt \cong \Delta v/\Delta t$ 는 근사식이 된다. 미적분학에서는

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (20)$$

앞서 세운 수학적 모델 식(8)를 생각해보면 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m}v(t_i) \quad (21)$$

위의 식(21)을 다시 정리하면

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[ g - \frac{c}{m}v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) \quad (22)$$

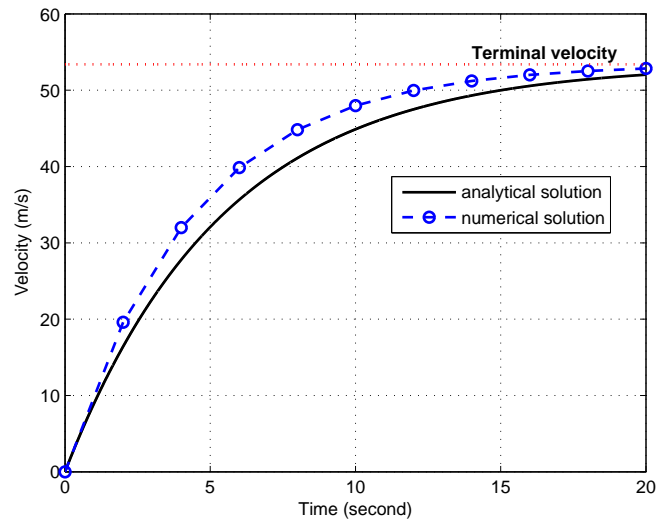


Figure 4: 낙하산병 문제에서의 수치해와 해석해의 비교

★테일러 급수 (Taylor Series) 테일러 급수 (Taylor Series)는 수치해석에서 매우 중요한 역할을 한다.(4장에서 학습)

**Leonhard Euler 1707-1783**

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

**Isaac Newton 1642-1727**

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &\cong 2.718281828459046 \cdots \end{aligned}$$

**정리 1**  $n \geq 0$  인 정수  $n$  에 대하여, 폐구간  $[a, x]$  에서  $n$  번 미분가능하고 개구간  $(a, x)$  에서  $(n+1)$  번 미분가능한 함수  $f$  는

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

로 나타내어질 수 있다. 처음 몇 항까지를 선택함으로써  $x=a$  주변에서의  $f(x)$  의 근사식으로 사용할 수 있는데, 이를 **테일러 다항식 (Taylor polynomial)** 이라고 한다. 특히 **선형근사** 는  $n=1$  인 테일러 급수로 볼 수 있다.  $a=0$  인 경우를 특별히 **매클로린 급수 (Maclaurin series)** 라고 부른다.

과제1 (제출기한 9월18일)

- 1 초기속도  $v(0)$  가 0이 아닌 경우,  $v(0)$  상수를 도입하여 정밀해를 구하라
- 2 낙하하는 낙하산병에게 작용하는 힘을 계산하는 과정에서, 식 (8) 로 주어진 선형관계식 대신, 다음과 같은 2차식을 사용하여 정밀해 혹은 수치해를 구하여라

$$F_U = -c'v^2$$

단,  $c'$  은 2차항력계수 ( $kg/m$ ) 이며, 수치해를 구할땐, 10초후의 낙하산병의 속도를 구하라. 여기서, 낙하산병의 질량은 68.1kg 이고 2차항력계수는 0.232kg/m 이다.

- 3 테일러급수 (Taylor series) 를 증명하라.



## A MATLAB m-code

### A.1 Figure 3의 낙하산병 문제 정확해와 수치해

```
1 clear all; clc; close all;

3 %% Parameters
m=68.1; % kg
5 c=12.5; % m/sec^2
g=9.8; % kg/s

7
%% Calculation
9 t=0:0.0001:20; % time of exact solution

11 dt=2; % dt of numerical solution
t1=0:dt:20; % time of numerical solution
13 v=g*m/c*(1-exp(-(c/m)*t)); % exact solution

15 v1(1)=0; % initial velocity of numerical solution
for kk=1:length(t1)
17 v1(kk+1)=v1(kk)+(g-c/m*v1(kk))*dt;
end

19
ref=ones(length(t),1)*g*m/c; % terminal velocity

21
%% Display result
23 figure
plot(t,v,'-k',t1,v1(1:end-1),'o--b',t,ref,':r','linewidth',1.5)
25 text(14,55,'Terminal velocity','FontWeight','bold')
grid on
27 legend('analytical solution','numerical solution','Location','best')
xlabel('Time (second)')
29 ylabel('Velocity (m/s)')
```

Listing 1: Comparison between exact and numerical solution