Lagrangian method (제출일 : 2012.12.15)

1. 다음 최적화식을 풀어라

$$\begin{aligned}\underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ & x_1^2 + x_2^2 = 4\end{aligned}$$

$\boxed{\text{solution}}$ 문제에 -1 을 곱하고 최대값을 구하는 최적화문제로 변형하여 Lagrangian을 구하면

$$L(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2) = -x_1 + x_2 + 2x_3 + \lambda_1(5 - x_1 - x_2 - x_3) + \lambda_2(4 - x_1^2 - x_2^2)$$

편미분을 수행하면,

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -1 - \lambda_1 - 2x_1\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 1 - \lambda_1 - 2x_2\lambda_2 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} &= 2 - \lambda_1 = 0\end{aligned}$$

즉, $\lambda_1 = 2$가 된다. 따라서 $x_1 = -\frac{3}{2\lambda_2}$, $x_2 = -\frac{1}{2\lambda_2}$ 로 정리하여, 조건식 $x_1^2 + x_2^2 = 4$에 대입하면, $x_1 = -\frac{6}{\sqrt{10}}$, $x_2 = -\frac{2}{\sqrt{10}}$ 이 되고, 나머지 조건식에 x_1 과 x_2 를 대입하여 x_3 을 구하면 $x_3 = 5 + \frac{8}{\sqrt{10}}$ 이 되고, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \sqrt{5/8}$ 이 된다.

2. 다음 최적화식을 풀어라

$$\begin{aligned}\underset{x_1,x_2}{\text{minimize}} \quad & 2x_1^2 - x_2^2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 = 1\end{aligned}$$

$\boxed{\text{solution}}$ Lagrangian을 구하면,

$$L(x_1,x_2,\lambda) = -2x_1^2 + x_2^2 + \lambda(1 - x_1 - x_2)$$

편미분하면

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial x_1} &= -4x_1 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 2x_2 - \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 1 - x_1 - x_2 = 0\end{aligned}$$

즉, $\lambda = 4$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$가 된다.

3. 어떤 사람의 저축이 3개의 펀드에 가입되어 있다. 각각의 펀드는 10%, 10% 그리고 15%의 수익을 기대할 수 있다. 12%의 수익률을 기대하면서, 위험(risk)를 최소화하도록 분배하고자 한다. 투자에 대한 위험도를 다음과 같이 분석하였다. 펀드1에서 저축에 대한 위험비율은 x, 펀드2에서 저축에 대한 위험비율은 y 그리고 펀드3에서 저축에 대한 위험비율은 z. 여기서 $x + y + z = 1$이고, 상호연계된 위험도는 다음 식과 같다.

$$400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$$

(1) 위험도(risk)를 최소화 시키면서 12%의 수익률을 기대할 수 있는 투자비율을 찾아라.

(2) 문제3(1)에서 위험도 목표함수의 값은 390이었다. 만약 수익률을 12%대신에 12.5%을 목표로 한다면, 위험도 함수는 어떻게 변화되는지 찾아라.

solution 문제를 세우면,

$$\begin{aligned} \underset{x,y,z}{\text{minimize}} \quad & 400x^2+800y^2+200xy+1600z^2+400yz \\ \text{subject to} \quad & x+y+1.5z=1.2 \\ & x+y+z=1 \end{aligned}$$

Lagrangian은

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = -400x^2-800y^2-200xy-1600z^2-400yz+\lambda_1(1.2-x-y-1.5z)+\lambda_2(1-x-y-z)$$

편미분을 수행하면,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= -800x-200y-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -1600x-200x-400z-\lambda_1-\lambda_2=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} &= -3200z-400y-1.5\lambda_1-\lambda_2=0 \end{aligned}$$

이 된다. 선형대수로 표현하면,

$$\begin{bmatrix} -800 & -200 & 0 \\ -200 & -1600 & -400 \\ 0 & -400 & -3200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \lambda_1+\lambda_2 \\ \lambda_1+\lambda_2 \\ 1.5\lambda_1+\lambda_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

여기서 $\lambda_1+\lambda_2$ 항을 소거하여 x,y,z를 구하면,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1.5 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.2 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

즉, $x=0.5, y=0.1, z=0.4$가 된다. 다시 위의 식에 대입하여 λ_1과 λ_2를 구하면, $\lambda_1=-1800$, $\lambda_2=1380$이 된다. 수익률을 12.5%를 목표로 하게 되면, 원래의 수익률에서 λ_1 만큼의 증분이 더해지면 된다. 따라서, $\Delta=0.05$가 되기 때문에,

$$\Delta\lambda_1 = 0.05\times(-1800) = -90$$

즉, 수익률 5%를 늘렸을때 기존의 위험도함수 390에서 90이 증가된 480가 위험도함수가 된다.
4. 한미페인트는 건축용 페인트와 공업용 페인트 두 종류의 페인트를 생산하여 판매한다. 건축용 페인트는 갤런(gallon) 당 4,000원의 이익을, 공업용 페인트는 5,000원의 이익을 얻는다. 두 제품은 가공공정과 혼합공정을 거치는데 건축용

페인트 1갤런을 생산하기 위해서는 가공공정에서 4시간, 혼합공정에서 2시간의 작업이 필요하며 공업용 페인트 1갤런을 생산하기 위해서는 가공공정에서 2시간, 혼합공정에서 3시간의 작업이 필요하다. 하루에 가능한 작업시간은 가공공정이 100시간, 혼합공정이 60시간이다. 공업용 페인트는 특수한 색소가 첨가되는데 1갤런을 가공하는 데 색소는 2g이 필요하며 하루에 가용가능한 색소는 20g이다. 이익을 최대로 하기 위해 하루에 생산해야 할 건축용 페인트와 공업용 페인트를 구하여라.

(1) 선형계획모델을 세워라.

(2) 도해법(graphical method)로 최적의 해를 구하여라.

(3) MATLAB 함수 `linprog()`를 사용하여 최적의 해를 구하여라.

$\boxed{\text{solution}}$

$$
\begin{aligned}
\underset{x_1,x_2}{\text{maximize}} \quad & 4000x_1 + 5000x_2 \\
\text{subject to} \quad & 4x_1 + 2x_2 \leq 100 \\
& 2x_1 + 3x_2 \leq 60 \\
& 2x_2 \leq 20 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$