공학수치해석 기말고사 2012.12.18

문제1 다음 Figure 1과 같이 한쪽 끝은 열려 있으며, 두께를 무시할 수 있는 벽을 갖는 최적의 원통 용기를 설계하라. 용기는 $0.2m^3$ 의 체적을 담으려 한다. 밑면 면적과 옆면 면적이 최소화 되도록 설계하라.

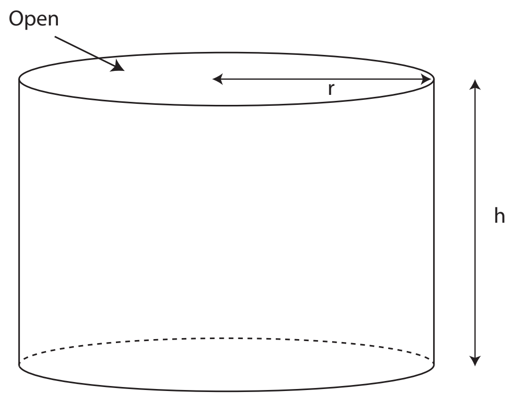

Figure 1: 뚜껑이 없는 원통형의 용기

(a) 일반적인 최적화 문제의 수식모델을 세워라. [10점]

(b) Lagrangian법으로 설계하라(각 설계값은 과학적표기법 소숫점 4째 짜리까지 표기). [20점]

solution (a) 밑면의 면적은 πr^2 옆면의 면적은 $2\pi rh$ 이기 때문에 최소화하려는 면적은 $P = \pi r^2 + 2\pi rh$ 가 된다. 원기둥의 최대 체적은 $\pi r^2 h$ 이다.

$$\begin{aligned} \underset{r,h}{\text{minimize}} \quad & \pi r^2 + 2\pi rh \\ \text{subject to} \quad & \pi r^2 h = 0.2 \end{aligned}$$

solution (b) Lagrangian L 을 구성하면

$$L(r,h,\lambda) = -\pi r^2 - 2\pi rh + \lambda \left(0.2 - \pi r^2 h\right)$$

각각에 대하여 편미분을 수행하면

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial r} &= -2\pi r - 2\pi h - 2\lambda \pi rh \\ &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial h} &= -2\pi r - \lambda \pi r^2 \\ &= 0 \\ \pi r^2 h &= 0.2 \end{aligned}$$

$r \neq 0$ 이므로 약분하여 정리하면

$$\begin{aligned} r + h + \lambda rh &= 0 \\ 2 + \lambda r &= 0 \end{aligned}$$

즉 $\lambda = -2/r$ 이 되고 $r = h$ 가 된다. 따라서 $\pi r^3 = 0.2$ 가 되어, $r = h = (0.2/\pi)^{1/3} = 3.9929 \times 10^{-1}$ 가 된다.

문제2 일반강도 콘크리트 공시체 20개의 압축강도(MPa)를 측정한 결과 다음과 같은 데이터가 산출되었다. 물음에 답하라.

21.867	19.672	24.612	22.785
23.736	22.215	21.933	22.583
21.430	21.375	23.320	20.069
21.548	22.505	21.409	19.450
19.992	20.411	21.506	20.103

(a) 평균($\bar{y}$), 표준편차(s_y), 분산(s_y^2), 분산계수(c.v)를 구하여라. (소숫점 3째 자리까지 표기) [10점]

(b) 데이터의 분포가 정규분포를 따른다고 가정하고 위에서 계산한 표준편차가 유효표준편차라고 가정하여 95%에 포함되는 영역(즉, 하한값과 상한값)을 계산하라. (소숫점 3째 자리까지 표기) [10점]

solution (a)

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = 21.626$$
$$s_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1}} = 1.403$$
$$s_y^2 = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = 1.967$$
$$\text{c.v} = \frac{s_y}{\bar{y}} 100 = 6.486(\%)$$

solution (b) 95%에 포함되는 영역은

$$\bar{y} - 1.96 s_y \leq \text{측정 개수의 } 95\% \leq \bar{y} + 1.96 s_y$$
$$18.877 \leq \text{측정 개수의 } 95\% \leq 24.375$$

가 된다.

문제3 다음 Figure 2와 같이 하중을 받고 있는 단순지지된 보가 있다. 이러한 보의 전단력의 함수는 다음 식과 같이 특이함수(singularity function)을 사용하여 나타낼 수 있다.

$$V(x) = 20\left[\langle x-0\rangle^1 - \langle x-5\rangle^1\right] - 15\langle x-8\rangle^0 - 57$$

$$\langle x-a\rangle^n = \begin{Bmatrix} \langle x-a\rangle^n & \text{when } x > a \\ 0 & \text{when } x \le a \end{Bmatrix}$$

전단력이 0이 되는 점들을 이분법을 써서 구하라. [30점]

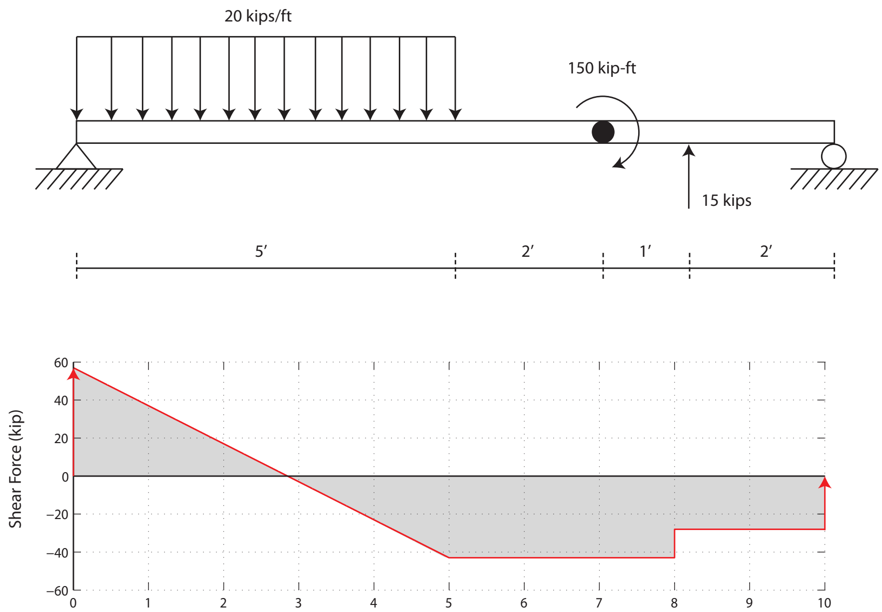

Figure 2: Simple supported beam

solution Figure 2의 아래와 같이 전단력도를 그려서보면 $0m5m$ 사이에 근이 존재한다. 따라서 $x_l = 0$과 $x_u = 5$로 놓고 이분법을 수행한다.

Iteration	x_l	x_u	x_r	$f(r)$	ε_a
1	0.0000	5.0000	2.5000	-7.0000	-
2	2.5000	5.0000	3.7500	18.0000	0.5000
3	2.5000	3.7500	3.1250	5.5000	0.1667
4	2.5000	3.1250	2.8125	-0.7500	0.1000
5	2.8125	3.1250	2.9688	2.3750	0.0556
6	2.8125	2.9688	2.8906	0.8125	0.0263
7	2.8125	2.8906	2.8516	0.0313	0.0135
8	2.8125	2.8516	2.8320	-0.3594	0.0068

문제4 다음 표로 주어진 데이터에 대하여 다음 문제를 풀어라

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	-10.41	-4.03	-10.00	-0.17	5.12	14.05	19.36	34.01	55.10	94.54	96.47

(a) 직선으로 최소제곱회귀분석을 하여라. [10점]

(b) 2차 다항식으로 최소제곱회귀분석을 하여라. [10점]

solution (a)

$$a_1 = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = 10.969$$

$$a_0 = \bar{y} - a_1\bar{x} = -28.114$$

$$\therefore y = a_0 + a_1 x = -28.114 + 10.969x$$

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t} = 0.859$$

solution (b)

$$\begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 11 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 294.04 \\ 2676.78 \\ 23582.2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 294.04 \\ 2676.78 \\ 23582.2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -6.698 \\ -3.308 \\ 1.428 \end{Bmatrix}$$

$$\therefore y = -6.698 - 3.308x + 1.428x^2$$

$$r^2 = 0.973$$