공학 수치해석

Numerical Analysis for Engineers

구조해석 및 동역학 연구실

(Structural Analysis & Dynamics Laboratory)

단국대학교 건축대학

LECTURE NOTE
NOTE-2012-ver-20121015

15 October 2012

EUNCHURN PARK (eunchurn@kmctech.co.kr)
Structrual Analysis & Dynamics Laboratory
Deppartment of Architectural Engineering
Dankook University School of Architecture

Department of R&D Development
Korea Maintenance Co., LTD.
KM Tower 12F
130-5, Guro-5-dong, Gurogu, Seoul (152-842)
PHN: +82-2-830-7071 (236)
SEL: +82-10-4499-6420
FAX: +82-2-830-5256

공학 수치해석

Numerical Analysis for Engineers

구조해석 및 동역학 연구실
(Structural Analysis & Dynamics Laboratory)
단국대학교 건축대학

Dept. of Architectural Engineering, Dankook Univ. School of Architecture, NOTE-2012-ver-20121015

15 October 2012

Table of Contents

1 수학적 모델링과 공학 문제의 해결 (Mathmetical Modeling and Engineering Problem Solving)

- 경험적 방법과 이론적 방법의 고찰
- 수학적 모델의 중요성
- 일반화 작업(generalization)
- 컴퓨터의 활용

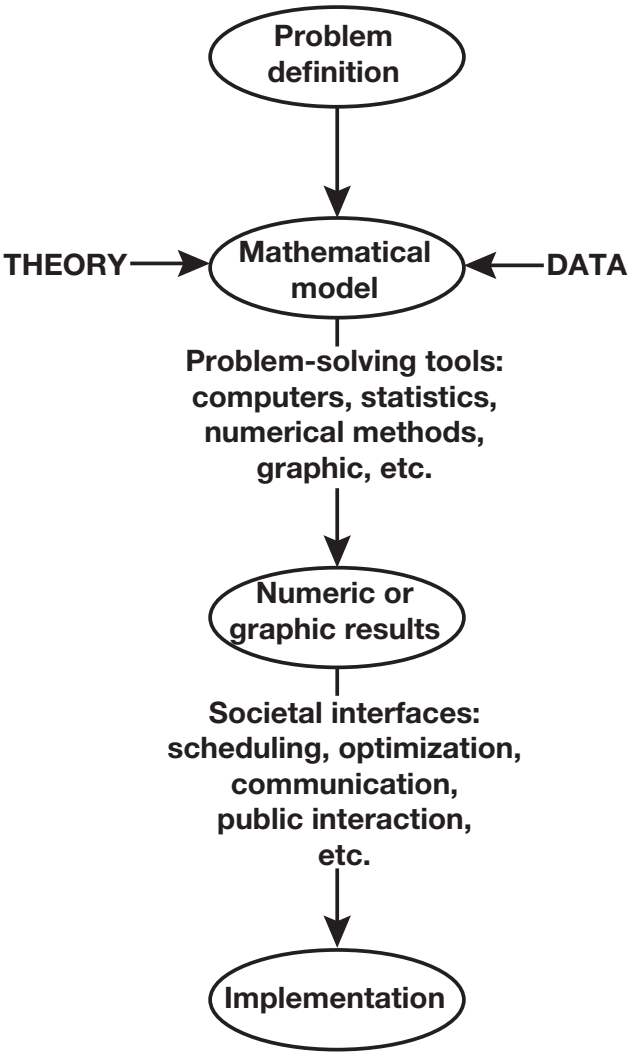


Figure 1: 공학적 문제의 해법과정

1.1 단순화된 수학적 모델

- **수학적 모델(mathematical model)** 물리적 시스템이나 과정의 이해에 필수적으로 요구되는 특징을 수학적으로 표현한 함수의 관계식

$$\text{종속변수} = f\left(\text{독립변수들}, \text{매개변수들}, \text{강제함수들}\right) \tag{1.1}$$

- **종속변수(dependent variables)** 시스템의 거동이사 상태를 기술하는 특성량
- **독립변수(independent variables)** 시스템의 거동을 결정하는데 사용되는 시간과 공간과 같은 차원
- **매개변수(parameters)** 시스템의 성질이나 구성
- **강제함수(forcing functions)** 시스템에 작용되는 외부의 영향

식(1.1)의 수학적 표현은, 단순한 대수적 관계식으로부터 매우 복잡한 연립미분방정식에 이르기까지 매우 다양한 적용범위를 가진다. 예를 들어, Newton은 그의 경험에 근거하여, 물체가 가지는 운동량의 시간에 따른 변화는 이에 작용되는 외력의 합과 같다는 제2 운동법칙을 공식화하였다.

$$F = ma \tag{1.2}$$

여기서 F는 물체에 주어진 유효힘$(N$ 또는 $kg \cdot m/s^2)$이며, m은 물체의 질량(kg)이며 a는 가속도(m/s^2)이다. 특정한 물체에 F의 힘을 가했을 경우 물체의 가속도 a는

$$a = \frac{F}{m} \tag{1.3}$$

- a : 시스템의 거동을 기술하는 종속변수(dependent variable)
- F : 시스템에 작용되는 외력을 나타내는 강제함수(forcing function)
- m : 시스템의 특성을 나타내는 매개변수(parameter)

a는 시간에따라 공간상에서 어떻게 변화할 것인가?
식(1.3)은 물리적 시스템을 기술하는 전형적인 수학적 모델이다.

1.1.1 해석해(analytic solution) 예제

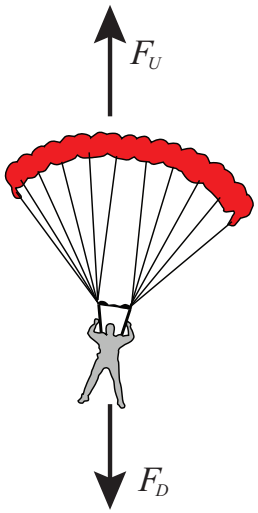


Figure 2: 낙하산병에 작용하는 힘에 대한 개략도. F_D는 중력에 의해 아래로 작용하는 힘이고, F_U는 공기의 저항에 의하여 위로 작용하는 힘이다.

낙하산병 문제로 정확해(exact solution) 구하기

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m} \tag{1.4}$$

$$F = F_D + F_U \tag{1.5}$$

$$F_U = -cv \tag{1.6}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{mg - cv}{m} \tag{1.7}$$

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \tag{1.8}$$

식 1.7 혹은 식 1.8의 엄밀해(exact solution)을 구하기 위해서는 미분방정식의 **변수분리(separation of variables)**[1] 방법등이 사용되어야 한다.

$$\frac{m}{mg - cv}dv = 1 \cdot dt \tag{1.9}$$

양변을 적분하면 식(1.9)은 시각 T에서 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\int_{v(0)}^{v(T)} \frac{m}{mg - cv}dv = \int_0^T 1 \cdot dt \tag{1.10}$$

초기속도가 0 즉, $t = 0$일때, $v(0) = 0$로 가정하고, $mg - cv$를 시간의 종속변수X로 치환하면,

$$mg - cv = X \tag{1.11}$$

$$\frac{dX}{dv} = -c \tag{1.12}$$

$$dv = -\frac{1}{c}dx \tag{1.13}$$

[1] 종속변수에 관련된 항과 독립변수에 관련된 항을 분리시킬 수 있을 때, 그 각각의 변수에 관해 적분하여 해를 구하는 미분방정식 풀이법의 일종

치환변수 X의 초기값과 T에서의 값은 각각, $X(0) = mg$ 그리고 $X(T) = mg - cv(T)$가 된다. 다시 식(1.10)에 대입하면,

$$-\frac{m}{c}\int_{X(0)}^{X(T)}\frac{1}{X}dv = \int_0^T 1\cdot dt \tag{1.14}$$

식(1.14)을 계산하면,

$$-\frac{m}{c}\ln X|_{X(0)}^{X(T)} = T \tag{1.15}$$

치환된 변수를 환원하면서 전개하면,

$$-\frac{m}{c}\left[\ln\{mg - cv(T)\} - \ln(mg)\right] = T \tag{1.16}$$

정리하면

$$\ln\left(1 - \frac{c}{mg}v(T)\right) = -\frac{c}{m}T \tag{1.17}$$

양변에 ln을 취하면,

$$e^{-(c/m)T} = 1 - \frac{c}{mg}v(T) \tag{1.18}$$

결국 시각 T에서 엄밀해는 식(1.21)과 같이 계산된다.

$$v(T) = \frac{mg}{c}\left(1 - e^{-(c/m)T}\right) \tag{1.19}$$

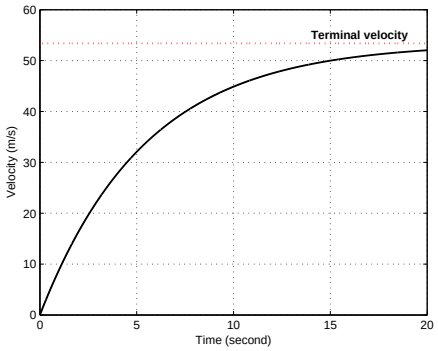


Figure 3: 낙하산병 문제의 해석해, 시간에 따라 속도가 증가하여 종단속도로 접근

1.1.2 수치해법(numerical method) 예제)

수치해법은 단순히 산술연산을 이용하여 해를 얻을 수 있도록 수학적 문제를 재공식화 하는 것이다. 근사화 문제를 생각하면 시간의 증분 즉, Δ가 유한하기 때문에 $dv/dt \cong \Delta v/\Delta t$는 근사식이 된다. 미적분학에서는

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \tag{1.20}$$

앞서 세운 수학적 모델 식(1.8)를 생각해보면 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t_{i+1}) - v(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = g - \frac{c}{m} v(t_i) \tag{1.21}$$

위의 식(1.21)을 다시 정리하면

$$v(t_{i+1}) = v(t_i) + \left[g - \frac{c}{m} v(t_i) \right] (t_{i+1} - t_i) \tag{1.22}$$

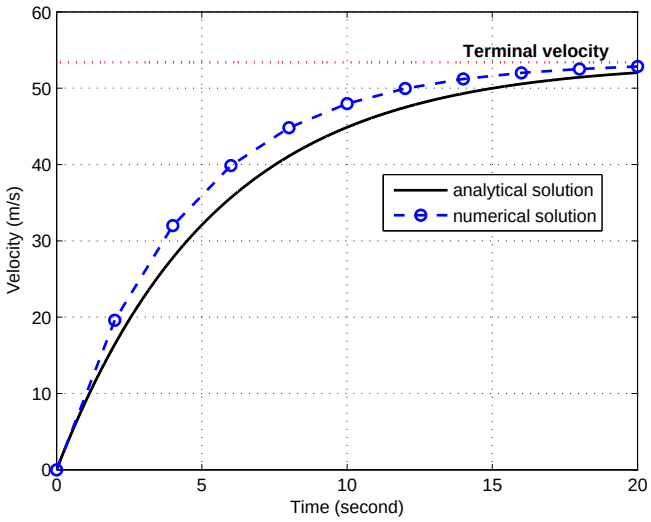


Figure 4: 낙하산병 문제에서의 수치해와 해석해의 비교

★테일러 급수(Taylor Series) 테일러 급수(Taylor Series)는 수치해석에서 매우 중요한 역할을 한다.(4장에서 학습)

Leonhard Euler 1707-1783

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

Isaac Newton 1642-1727

$$\begin{aligned} e &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &\cong 2.718281828459046\cdots \end{aligned}$$

Theorem 1.1. *$n \geq 0$ 인 정수 n 에 대하여, 폐구간$[a,x]$ 에서 n 번 미분가능하고 개구간(a,x) 에서 $(n+1)$ 번 미분가능한 함수f 는*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.23}$$

로 나타내어질 수 있다. 처음 몇 항까지를 선택함으로써 $x=a$ 주변에서의 $f(x)$ 의 근사식으로 사용할 수 있는데, 이를 **테일러 다항식** ***(Taylor polynomial)*** *이라고 한다. 특히* **선형근사**는 $n=1$ 인 테일러 급수로 볼 수 있다. *$a=0$ 인 경우를 특별히* **맥로린 급수** ***(Maclaurin series)*** *라고 부른다.*

과제1 (제출기한 9월18일)

1 초기속도 $v(0)$가 0이 아닌 경우, $v(0)$ 상수를 도입하여 정밀해를 구하라

2 낙하하는 낙하산병에게 작용하는 힘을 계산하는 과정에서, 식(1.8)로 주어진 선형관계식 대신, 다음과 같은 2차식을 사용하여 정밀해 혹은 수치해를 구하여라

$$F_U = -c'v^2$$

단, c'은 2차항력계수(kg/m)이며, 수치해를 구할땐, 10초후의 낙하산병의 속도를 구하라. 여기서, 낙하산병의 질량은 68.1kg이고 2차항력계수는 $0.232kg/m$이다.

3 테일러급수(Taylor series)를 증명하라.

2 프로그래밍과 소프트웨어 (Programming and Software)

2.1 프로그래밍

컴퓨터 프로그램이란 컴퓨터가 특정 작업을 수행하도록 지시하기 위한 명령어의 집합이다. 많은 개인들이 다양한 종류의 문제를 해결하기 위해 프로그램을 작성하기 때문에, 고급 컴퓨터 언어들은 아주 다양한 기능들을 가지고 있다. 어떤 공학자들은 특정 작업을 수행하기 위해서 컴퓨터 언어가 가지고 있는 모든 기능을 섭렵하여야 하지만, 대부분의 사람들은 공학적 응용 위주의 수치계산을 수행할 수 있을 정도면 충분하다.

- 단순한 정보의 표현[상수, 변수, 형식 선언(type declarations)]
- 효과적인 정보의 표현[데이터 구조, 배열(array), 기록(record)]
- 수학적 공식[지정(assignment), 우선순위 규칙(priority rule), 기본적 함수(intrinsic function)]
- 입력/출력
- 논리적 표현[순차적 진행(sequence), 선택 및 조건분기(selection), 반복(repetition)]
- 모듈프로그래밍(module programming)[함수(function), 서브루틴(subroutine)]

2.1.1 구조화된 프로그램(structured program)

구조적 프로그래밍의 주요 아이디어는 어떤 수치알고리즘도 순차적 진행(sequence), 선택(selection), 반복(repetition)이라는 3개의 기본적 제어구조(control structure)로 이루어질 수 있다.

구조적 프로그래밍 혹은 프로그래밍에 있어 순서도(flowchart)는 알고리즘 논리의 이해를 돕지만, 본 강의에서는 다루지 않는다.

2.1.2 논리적 표현

- **순차적 진행(sequence)** 순차적 구조(sequence structure)는 한번에 하나의 명령을 수행함. 코딩에 있어 위에서 아래구문으로 수행됨
- **선택(selection)** 순차적 구조의 프로그램의 흐름을 논리적 결정(logical condition)으로 분리하거나 분기시킴. (IF/IF-ELSE/CASE등)
- **반복(repetition)** 명령을 반복적으로 수행하는 수단. 흔히 루프(loop)라고 불리는 구문은 decision loop이 일반적이고 반복 구문에서 조건에 의해 반복문을 빠져나가는 위치가 어디에 있는지에 따라 pretset loop, posttest loop으로 불리운다. 그러나 MATLAB은 while 구문으로 decision loop을 제어하며 그 확장성이 많이 좋은편은 아니다. 주로 횟수제어(for-loop)방식을 사용한다.

2.2 모듈프로그래밍

컴퓨터 프로그램은 각각 독립적을 개발되고 검증될 수 있는 여러개의 작은 부프로그램(subprogram)과 모듈(module)로 나눌 수 있다. MATLAB에서는 함수(function)이 그역할을 하며, 여러개의 입력변수에서 여러개의 출력변수를 내보내는등 독립적인 역할을 한다. 모듈프로그래밍은 여러가지 장점을 가지고 있다. 크기가 작고, 스스로 필요한 도구들을 갖춘 구성단위들을 이용하면 그 밑에 깔려있는 논리를 고안해내고, 개발자와 사용자 모두가 이를 쉽게 이해하게 된다. 각각의 모듈이 독립적이면서도 완벽하게 작동하기 때문에 프로그램의 개발 작업도 매우 쉽게 진전될 수 있다.

2.3 라이브러리 & 툴박스(Toolbox)

본 강의에서 쓰일 MATLAB은 쉬운 대화식으로 프로그래밍되고, 행렬연산, 기호연산, 수치적 함수등을 포함하여 공학자들에게 매우 필요한 구조적인 프로그램이다. 그리고 수치해석이나 새로운 공학적 이슈들이 툴박스(Toolbox)의 형태로 배포된다.

3 근사값과 반올림오차 (Approximations and Round-off Errors)

수치해석의 효과적인 사용을 위해서는 오차에 대한 개념을 이해하는 것이 매우 중요하다.

- 수치해법 자체가 근사값을 다루는 것이기 때문에 정확한 해와 불일치, 즉 오차(error)가 항상 발생하게 된다.
- 수치해법으로 완벽한 결과를 얻는 것은 모든 사람이 바라는 목표이나, 실제로 이루기는 매우 어렵다.

3.1 유효숫자(Significant figures)

유효숫자 또는 자릿수의 개념은 수치의 신뢰도를 공식적으로 나타내기 위해 개발되었다. 즉, 유효숫자는 신뢰를 가지고 사용할 수 있는 수치의 개수이며, 정확한 자릿수에 하나의 추정자릿수를 더한 것과 같다. 유효숫자(Significant figures)는 수의 정확도에 영향을 주는 숫자이다. 보통 다음의 경우를 제외하고 모든 숫자는 유효숫자이다.

- 0.00012의 1 앞에 있는 0들처럼 자리수를 표시하기 위한 0
- 유효숫자가 아닌 자리의 숫자와 연산하여 영향받은 자리의 숫자
- 측정 기구의 한계로 정확하지 않은 자리의 숫자

48.50	87,324.35	0.00001845	45,000

과학적 표시법(scientific notatioin) 자리수가 10의 지수로 표현되고 유효숫자만이 10^n 를 곱하는 수로 표현된다.

4.850×10^1	8.732435×10^4	1.845×10^{-5}	4.500×10^4

유효숫자의 계산

- 덧셈과 뺄셈에서, 계산된 결과는 원래 있던 수의 소수점 아래 자리보다 더 낮은 유효숫자를 가질 수 없다. 예를 들어, 유효숫자 세 개인 수 3.14와 유효숫자 5개인 8.9714를 더하면 산술적으로는 12.1114가 나오지만, 3.14에 의해 10^{-2} 자리까지만이 유효한 결과로 판단되어 결과는 12.11이 된다.
- 곱셈과 나눗셈에서, 계산된 결과는 두 측정치 중 유효숫자가 적은 쪽과 같은 유효숫자를 가진다. 예를 들어, 2.56×12.8690의 산술적 계산결과는 4.78464이지만, 2.56의 유효숫자가 3개이므로 유효한 결과는 4.78이다.
- 세 개 이상의 숫자를 연속적으로 계산할 때, 중간의 연산 결과는 그 중간 연산으로 계산이 끝날 때의 유효숫자 개수보다 한 개 더 많다.

3.2 오차의 정의

수치오차는 정확한 수학적 연산을 근사값을 사용하여 표현하기 때문에 발생된다. 이는 정확한 수학적 절차를 근사값으로 표현하기 때문에 발생되는 절단오차(truncation error)와 정확한 수치를 유한한 수의 유효숫자로 표시하기 때문에 발생되는 반올림오차(round-off error or rounding error)를 포함한다.

IEEE 표준연산 (IEEE standard arithmetic)[2]

- **truncation** 유효숫자 이후 단순 모두 버림
  $0.142857 \cong 0.142$ (dropping all significant digits after the third)
- **round to nearest** 유효숫자 이후 반올림
  $0.142857 \cong 0.143$ (rounding the fourth significant digit. This is rounded up because $8 > 5$)
- **round to** $-\infty$ 항상 왼쪽 값을 취함
- **round to** $+\infty$ 항상 오른쪽 값을 취함

참값과 근사값 사이의 관계식은

$$\text{참값} = \text{근사값} + \text{오차} \tag{3.1}$$

식(3.1)을 다시 배열하면,

$$E_t = \text{참값} - \text{근사값} \tag{3.2}$$

이러한 오차의 정의는 수치의 크기에 대한 고려가 없다는 단점이 있다. 이때 다루고 있는 양의 크기를 고려하여 오차를 정의하는 방법중에 식(3.3)와 같이 오차를 참값으로 정규화하는 방법이다.

$$\text{참상대오차} = \frac{\text{참오차}}{\text{참값}} \tag{3.3}$$

참값의 백분율 상대오차(true percent relative error)는

$$\varepsilon_t = \frac{\text{참오차}}{\text{참값}} \times 100(\%) \tag{3.4}$$

수치해석에서는 실제 응용문제의 참값의 알지 못하는 경우가 대부분이며 이와 같은 상황에서의 대안은 오차를 정의할 때 참값을 가장 잘 나타내는 수렴의 오차의 한계로 정규화 시킨다.

$$\varepsilon_a = \frac{\text{현재의근사값} - \text{이전의근사값}}{\text{현재의근사값}} \times 100(\%) \tag{3.5}$$

3.3 컴퓨터상에서 수의 표현

컴퓨터에서 숫자를 저장하는 방법과 오차는 직접적인 관계가 있다.

- 물리적 측량
- 동적 계측(data acquisition)

[2] 5가지의 표준 근사화 절차는 **부동소수점 연산**에 대한 표준 IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic (IEEE 754)에 잘나타나 있다. `http://en.wikipedia.org/wiki/IEEE_754-2008`

- 음향 녹음(recording)

유동소수점 표현(floating point, FP)[3]

컴퓨터 내부에서 수의 표시는 주로 정보가 저장되는 작은 단위 1word의 구조를 살펴봐야한다. 과학적 표기법을 살펴보면

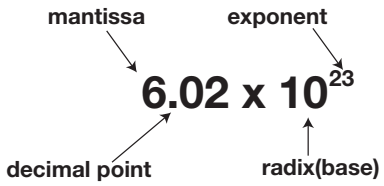


Figure 5: Scientific notation

가수(mantissa or significand)와 지수(exponent or characteristic) 그리고 기저(base)가 사용되며 이것을 2진법 과학적 표기법을 사용하여 컴퓨터 1word에 저장시킨다. 32bit의 유동소수점(floating point)의 표현은 Figure 6와 같다.

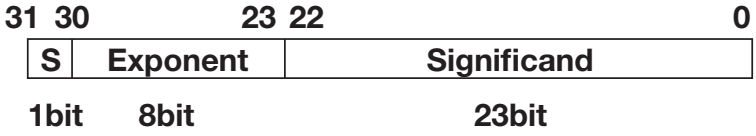


Figure 6: 32bit floating point

IEEE 754 Standard

$$FPnumber = (-1)^S \cdot (1 + Significand) \cdot 2^{Exponent} \tag{3.6}$$

$$FPnumber = (-1)^S \cdot (1 + Significand) \cdot 2^{Exponent - Bias} \tag{3.7}$$

[3]참조 http://www.cise.ufl.edu/~mssz/CompOrg/CDA-arith.html

4 절단오차와 Taylor 급수
(Truncation Errors and The Taylor Series)

4.1 Taylor 급수

Taylor 정리(Taylor theorem)와 이에 관련된 Taylor급수는 수치해법의 학습에 매우 중요한 가치를 갖는다. **Taylor 급수는 함수값 및 그의 도함수값들을 사용하여 예측하는 방법을 제공한다.**

만일 함수 f와 그것의 처음 $(n+1)$차까지의 미분이 a와 x를 포함하는 구간에서 연속적이라면, x에서의 함수값은 다음과 같이 주어진다.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-a)^n + R_n \tag{4.1}$$

여기서 나머지(remainder) R_n은 다음과 같이 정의된다.

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)dt \tag{4.2}$$

여기서 t는 모조변수(dummy variable)이다.

Taylor 급수를 통해 통찰력을 얻는 유용한 방법은 항을 추가해보면서 급수를 구성해보는 방법이다.

Taylor급수에서 x를 이전 함수값에 의한 새로운 위치 즉 x_{i+1}, 그리고 a를 이전 함수값의 위치 x_i로 생각해 보자.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}(x_{i+1}-x_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x_{i+1}-x_i)^n + R_n \tag{4.3}$$

- 0차근사(zero-order approximation) : $\boxed{f(x_{i+1}) \cong f(x_i)}$
  새로운 위치에서의 함수값은 이전의 위치에서의 **함수값**과 같다.

- 1차근사(first order approximation) : $\boxed{f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)}$
  이전의 위치에서의 **함수값**과 **기울기** $f'(x_i)$에 이전위치 x_i와 현재 위치 x_{i+1}사이의 **거리**가 곱해져서 얻어진다. 즉 이 표현은 직선의 형태를 가지며, x_i와 x_{i+1}사이의 구간에서 함수의 증가나 감소를 예측할 수 있다.

- 2차근사(second order approximation) : $\boxed{f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{1}{2!}f''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2}$
  1차근사는 직선 또는 선형의 경우에만 정확하다. 2차항을 추가하면서 함수가 가지는 **곡률**을 잡아낼 수 있다.

완전한 Taylor 급수의 전개는 식(4.3)이고 나머지 항은 $(n+1)$부터 무한대까지의 항을 나타낸다.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_{i+1}-x_i)^{n+1} \tag{4.4}$$

구간의 크기 $h = x_{i+1} - x_i$ 의 정의로 Taylor 급수를 단순화하여 식 (4.3) 을 다음과 같이 나타내면 편리할 때가 많다.

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}h^n + R_n \tag{4.5}$$

여기서 나머지 항은 다음과 같이 나타낸다.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{4.6}$$

예제 **다항식에 대한 Taylor 급수 근사**

0차부터 4차까지의 Taylor 급수전개를 사용하여, $x_i = 0$ 에서부터 $h = 1$ 로 하여 다음의 함수를 근사하라

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2 \tag{4.7}$$

즉, $x_{i+1} = 1$ 에서의 함수값을 예측하라.

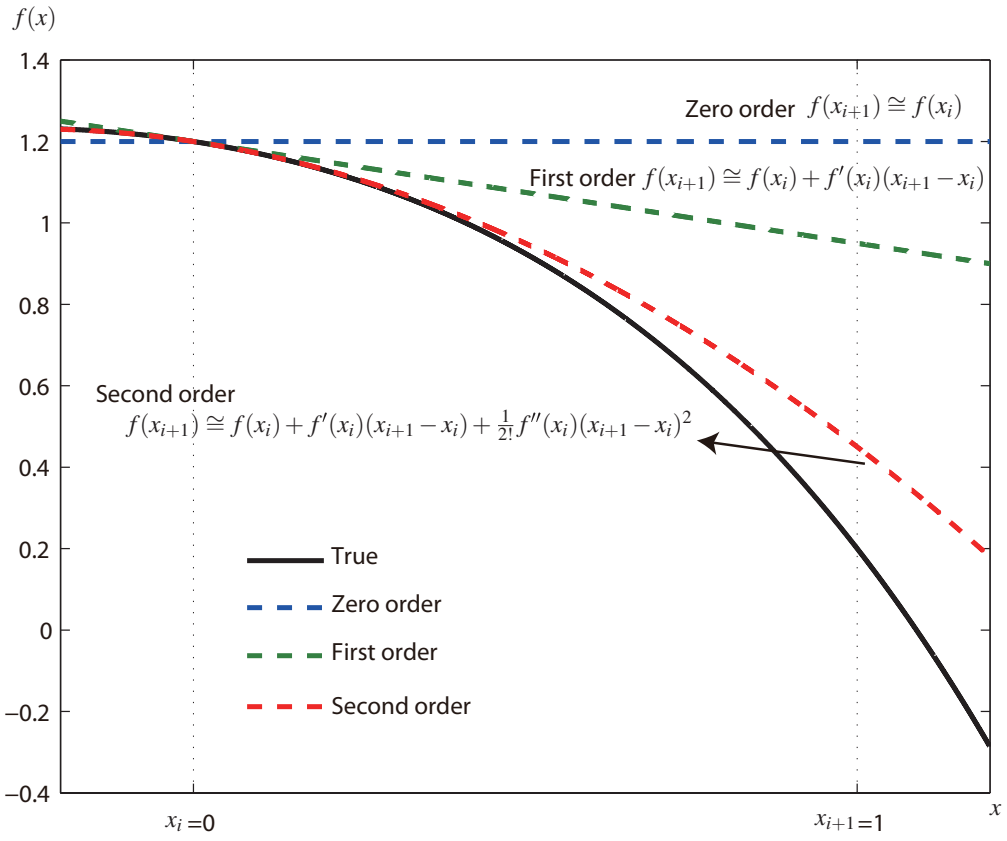


Figure 7: 0차, 1차, 2차 Taylor 급수전개를 이용한 $x = 1$ 에서의 함수 $f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$ 의 근사

해 함수의 형태를 알 고 있으므로, $f(0) = 1.2$ 로부터 시작하고 $f(1) = 0.2$ 의 값을 얻는다. 따라서 예측하고자 하는 참값은 0.2가 된다.

zero-order

$n=0$인 경우 Taylor 급수 근사

$$f(x_{i+1}) \cong 1.2$$

즉, $f(1) \cong 1.2$가 된다. 절단오차를 계산하면 $x=1$에서

$$E_t = 0.2 - 1.2 = -1.0$$

first order

$n=1$인 경우, $x=0$에서의 1차 도함수를 구하면,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -0.4x^3 - 0.45x^2 - 1.0x - 0.25 \\ f'(0) &= -0.25 \end{aligned}$$

따라서 1차 근사식은

$$f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25h$$

즉, $f(1) \cong 0.95$가 된다. 절단오차를 계산하면 $x=1$에서

$$E_t = 0.2 - 0.95 = -0.75$$

second order

$n=2$인 경우, $x=0$에서의 2차 도함수를 구하면,

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1.2x^2 - 0.9x - 1.0 \\ f''(0) &= -1.0 \end{aligned}$$

따라서 2차도함수값에 $1/2!$를 곱하여 추가한 2차 근사식은

$$f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25h - 0.5h^2$$

즉, $f(1) \cong 0.45$가 된다. 절단오차를 계산하면 $x=1$에서

$$E_t = 0.2 - 0.45 = -0.25$$

third order

$n=3$인 경우, $x=0$에서의 3차 도함수를 구하면,

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &= -2.4x - 0.9 \\ f^{(3)}(0) &= -9.0 \end{aligned}$$

따라서 3차도함수값에 $1/3!$를 곱하여 추가한 3차 근사식은

$$f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25h - 0.5h^2 - 0.15h^3$$

즉, $f(1) \cong 0.3$이 된다. 절단오차를 계산하면 $x=1$에서

$$E_t = 0.2 - 0.3 = -0.1$$

fourth order

$n=4$인 경우, $x=0$에서의 4차 도함수를 구하면,

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= -2.4 \\ f^{(4)}(0) &= -2.4 \end{aligned}$$

따라서 4차도함수값에 1/4!를 곱하여 추가한 4차 근사식은

$$f(x_{i+1}) \cong 1.2 - 0.25h - 0.5h^2 - 0.15h^3 - 0.1h^4$$

즉, $f(1) \cong 0.2$이 된다. 절단오차를 계산하면 $x=1$에서

$$E_t = 0.2 - 0.2 = 0$$

이때 나머지항을 살펴보자.

$$R_4 = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}h^5 = 0$$

이는 4차 다항식의 5차 미분항은 항상 0이 되기 때문에, 정확한 값을 얻을 수 있다.

4.2 Talyor 급수전개에서의 나머지 항

많은 경우에서 Taylor 급수의 실용적 가치는, 단지 몇 개의 항들만을 포함시키는 것만으로도 참값에 충분히 근접한 결과(공학적 측면에서)를 얻을 수 있다는 것이다. **충분히 근접한**값을 얻기 위해 얼마나 많은 항들이 필요한 지에 대한 평가는, 급수의 나머지 항을 기초로 하여 결정된다.

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$$

그러나 식 (4.4)를 찾으려면, x_i와 x_{i+1}사이에 놓인ξ를 알아야 하고, $f(x)$의 $(n+1)$차 도함수를 알아야하는데, 이것을 안다면 굳이 Taylor 급수전개를 할 필요가 없다. 모순

$x_i = \pi/4$에서의 $f(x)$값을 이용하여, $x_{i+1} = \pi/3$에서의 $f(x) = \cos x$를 근사하기 위해 Taylor급수전개를 6차까지 수행하면, (여기서 $h = \pi/3 - \pi/4$) **MATLAB 코드 A.2장 (40페이지)**

Order n	$f^{(n)}(x)$	$f(\pi/3)$	E_t
0	$\cos x$	0.707106781	-41.4
1	$-\sin x$	0.521986659	-4.4
2	$-\cos x$	0.497754491	0.449
3	$\sin x$	0.499869147	2.62×10^{-2}
4	$\cos x$	0.500007551	-1.51×10^{-3}
5	$-\sin x$	0.500000304	-6.08×10^{-5}
6	$-\cos x$	0.499999988	2.44×10^{-6}

4.3 수치미분

Taylor급수전개 식(4.3)에서 x를 시간함수로 생각해보면,

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + f'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + \frac{f''(t_i)}{2!}(t_{i+1}-t_i)^2 + \frac{f^{(3)}(t_i)}{3!}(t_{i+1}-t_i)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(t_{i+1}-t_i)^n + R_n \tag{4.8}$$

1차 도함수의 항 뒤에 있는 모든 항을 R_1로 표현하면 다음과 같다.

$$f(t_{i+1}) = f(t_i) + f'(t_i)(t_{i+1}-t_i) + R_1 \tag{4.9}$$

따라서 식(4.9)을 사용하여 다음 도함수의 근사식을 구할 수 있다.

$$\star f'(t_i) = \frac{f(t_{i+1})-f(t_i)}{t_{i+1}-t_i} - \frac{R_1}{t_{i+1}-t_i} \tag{4.10}$$

Tayler급수의 절단오차 R_1은 식(4.4)에 의해,

$$R_1 = \frac{f''(\xi)}{2!}(t_{i+1}-t_i)^2 \tag{4.11}$$

따라서, 수치미분의 절단오차를 추정값은,

$$\frac{R_1}{t_{i+1}-t_i} = \frac{f''(\xi)}{2!}(t_{i+1}-t_i) \tag{4.12}$$

$$= O(t_{i+1}-t_i) \tag{4.13}$$

즉, 절단오차는 시간간격에 비례하게 된다.

식(4.10)는 수치해법에서 **유한제차분(finite divided difference)**이라고 불린다. 일반적으로 표현하면,

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i} + O(x_{i+1}-x_i) \tag{4.14}$$

$$= \frac{\Delta f_i}{h} + O(h) \tag{4.15}$$

4.3.1 1차 도함수의 전진차분 근사

여기서, Δf_i는 **전진차분(first forward difference)**이고, h는 구간 간격의 크기. 즉 근사값이 구해지는 구간의 길이이다. h를 구간의 크기(절대값)로 표시되기 때문에 i를 시작으로 $i+1$에 도달하게 된다. 전체 항 $\Delta f/h$는 **1차 유한제차분(first finite divided difference)**라고 한다.

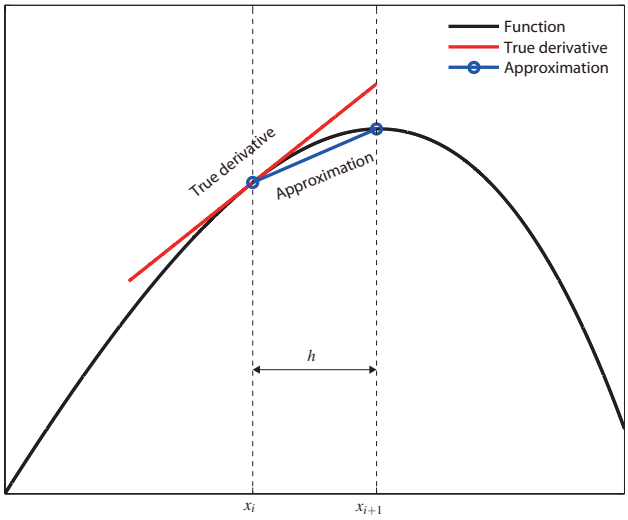


Figure 8: 전진 유한제차분 근사

4.3.2 1차 도함수의 후진차분 근사

현재 위치에서의 값을 기초로 하여 이전 값을 계산하기 위해 Taylor 급수를 다음과 같이 후진전개(backward expansion)한다.

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \cdots \tag{4.16}$$

1차 도함수 이상의 항들을 절단하고, 이를 재배열하면,

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\nabla f_1}{h} \tag{4.17}$$

여기서 오차는 $O(h)$이고 ∇f_1는 **1차 후진차분(backward difference)**라고 한다.

4.3.3 1차 도함수의 중심차분 근사

1차 도함수를 근사적으로 구하기 위한 세번째 방법은 다음과 같이 주어진

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots \tag{4.18}$$

전진 Taylor 급수전개에서 식(4.16)를 뺌으로써 얻을 수 있다.

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + \frac{2f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \cdots \tag{4.19}$$

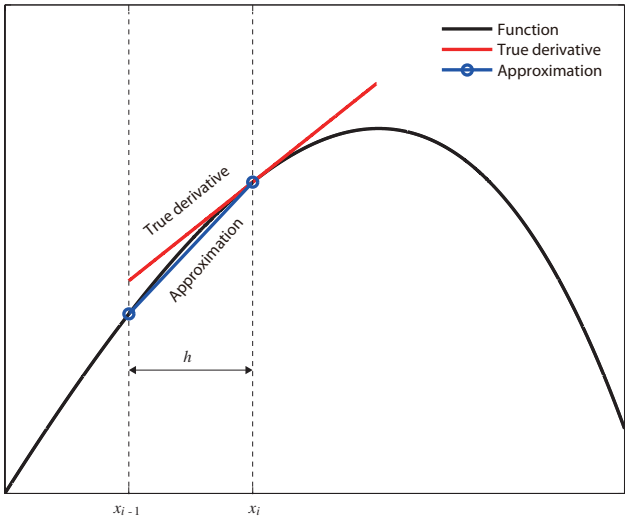


Figure 9: 후진 유한제차분 근사

이를 $f'(x_{i+1})$에 대해 정리하면

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2 - \cdots \tag{4.20}$$

$$= \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} - O(h^2) \tag{4.21}$$

식(4.21)는 1차 도함수에 대한 중심차분(centered difference)의 표현이다. 절단오차의 경우. $O(h)$인 전진 또는 후진차분과는 달리 $O(h^2)$가 된다. 따라서 중심차분이 수치미분값을 나타내는데 더 정확한 표현이라는 것을 나타내준다.

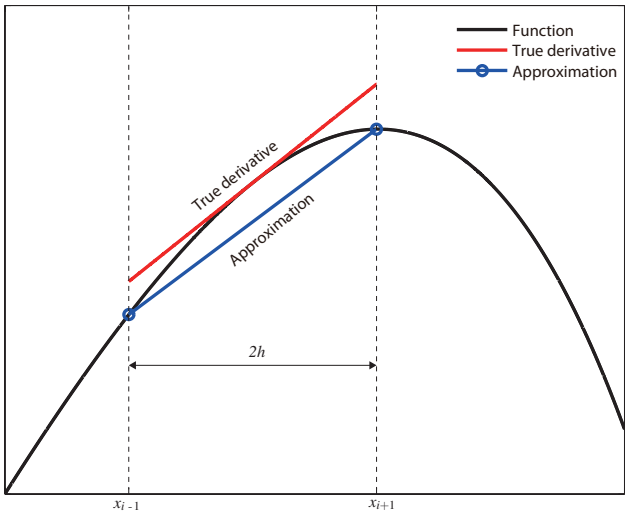


Figure 10: 중심 유한제차분 근사

4.3.4 고차 도함수의 유한차분근사

Taylor 급수전개를 사용하여 고차 도함수의 수치적 근사식을 유도할 수 있다. $f(x_{i+2})$를 위한 Taylor 급수전개를 $f(x_i)$을 기준으로 수행하면,

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots \tag{4.22}$$

식 (4.18)에 2를 곱한후, 식 (4.22)에서 빼면,

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots \tag{4.23}$$

즉 함수 $f(x)$에 대하여 x_i에서의 2차도함수는

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h) \tag{4.24}$$

이 관계식은 **2차 전진유한제차분(second forward finite divided difference)**이라고 한다. 비슷한 과정을 통해 다음과 같은 후진차분식과,

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h) \tag{4.25}$$

다음의 중심차분식을 얻을 수 있다.

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2) \tag{4.26}$$

1차 유한제차분식 처럼 절단오차의 Big-O notation $O(h^2)$으로 쓰기때문에 2차도함수의 중심차분근사가 더 정확한 결과를 얻는다.

4.4 오차의 전파

근사값에 의해 함수값들의 오차가 어떻게 전파되는지 파악하기 위해 오차의 전파를 해석해야 한다.

4.4.1 단일 변수 함수

단일 독립변수 x의 함수 $f(x)$가 있다고 가정하자. $\tilde{x}$가 x의 근사값이라고 가정할 때, x와 $\tilde{x}$의 오차가 함수값에 미치는 영향을 구해보자.

$$\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})| \tag{4.27}$$

$\Delta f(\tilde{x})$의 값을 구하기 위한 문제는 x를 모르기 때문에 $f(x)$를 알 수 없는 문제가 있다 하지만, $\tilde{x}$가 x에 매우 가깝고, $f(\tilde{x})$가 연속이며 미분가능하면 Taylor급수 전개($f(\tilde{x})$에 인접한 $f(x)$)를 통해 함수값의 오차를 계산할 수 있다.

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) + \frac{f''(\tilde{x})}{2!}(x - \tilde{x})^2 + \cdots \tag{4.28}$$

2차와 그 이상의 고차항들을 절단하고 결과를 재배열하면,

$$f(x) - f(\tilde{x}) \cong f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \tag{4.29}$$

또는

$$\Delta f(\tilde{x}) = \left|f'(\tilde{x})\right| \Delta\tilde{x} \tag{4.30}$$

여기서, $\Delta f(\tilde{x}) = |f(x) - f(\tilde{x})|$는 함수의 추정오차이며, $\Delta\tilde{x} = |x - \tilde{x}|$는 x에 대한 오차의 추정값이다. 식(4.30)는 함수의 도함수 및 독립변수의 추정오차값이 주어진 경우, $f(x)$의 오차의 근사값을 계산할 수 있도록 해준다.

4.4.2 다중 변수 함수

같은 방식으로 독립변수가 1개 이상의 경우의 함수에도 일반화될 수 있다. 즉, Taylor급수의 다중 변수 형태를 사용하여 얻을 수 있다. 함수가 두 개의 독립변수 u와 v의 함수라면, Taylor 급수는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} f(u_{i+1}, v_{i+1}) =& f(u_i, v_i) + \frac{\partial f}{\partial u}(u_{i+1} - u_i) + \frac{\partial f}{\partial v}(v_{i+1} - v_i) \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_{i+1} - u_i)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u_{i+1} - u_i)(v_{i+1} - v_i) + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(v_{i+1} - v_i)^2\right] + \cdot \end{aligned} \tag{4.31}$$

여기서 모든 편도함수들을 기준점 i에서 구한다. 만일 2차와 그 이상의 고차 항들을 버리면, 식(4.31)은 다음의 식으로 풀 수 있다.

$$\Delta f(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| \Delta\tilde{u} + \left|\frac{\partial f}{\partial v}\right| \Delta\tilde{v} \tag{4.32}$$

여기서 $\Delta\tilde{u}$와 $\Delta\tilde{v}$는 각각 u와 v의 추정오차값이다. n개의 독립변수, $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n$가 $\Delta\tilde{x}_1, \Delta\tilde{x}_2, \cdots, \Delta\tilde{x}_n$의 오차를 갖는다면, 다음과 같은 일반적인 관계식으로 쓸 수 있다.

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \cdots, \tilde{x}_n) \cong \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| \Delta\tilde{x}_1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| \Delta\tilde{x}_2 + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| \Delta\tilde{x}_n \tag{4.33}$$

예제 **다중 변수 함수에서의 오차의 전파**

배의 돛대의 위 끝에서의 휨(deflection) y는 다음과 같다.

$$y = \frac{FL^4}{8EI}$$

여기서 F는 균일한 측면 하중(N/m), L은 높이(m), E는 탄성계수(N/m^2), I는 관성모멘트(m^4)이다. 다음의 데이터를 사용하여, y의 오차를 추측하라.

$$\begin{aligned} \tilde{F} &= 750N/m & \Delta\tilde{F} &= 30N/m \\ \tilde{L} &= 9m & \Delta\tilde{L} &= 0.03m \\ \tilde{E} &= 7.5 \times 10^9 N/m^2 & \Delta\tilde{E} &= 5 \times 10^7 N/m^2 \\ \tilde{I} &= 0.0005m^4 & \Delta\tilde{I} &= 0.000005m^4 \end{aligned}$$

해 원래 휨식에 측정값을 대입하여 구한 근사값은,

$$\begin{aligned} \tilde{y} &= \frac{750 \times 9^4}{8 \times (7.5 \times 10^9) \times 0.0005} \\ &= 1.64025 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

추정된 변형의 오차를 구하기 위해, 식(4.33)을 사용하면,

$$\Delta y(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{E},\tilde{I}) = \left|\frac{\partial y}{\partial F}\right|\Delta\tilde{F} + \left|\frac{\partial y}{\partial L}\right|\Delta\tilde{L} + \left|\frac{\partial y}{\partial E}\right|\Delta\tilde{E} + \left|\frac{\partial y}{\partial I}\right|\Delta\tilde{I}$$

$$\Delta y(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{E},\tilde{I}) \cong \frac{\tilde{L}^4}{8\tilde{E}\tilde{I}}\Delta\tilde{F} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^3}{2\tilde{E}\tilde{I}}\Delta L + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}^2\tilde{I}}\Delta\tilde{E} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}\tilde{I}^2}\Delta\tilde{I}$$

값을 대입하여 추정된 오차를 구하면

$$\Delta y = 0.006561 + 0.002187 + 0.001094 + 0.00164 = 0.011482$$

즉, $y = 0.164025 \pm 0.011482$의 결과가 나온다. y의 최소값은 0.152543, y의 최대값은 0.175507라고 추정할 수 있는데, 이 값이 타당한지 알아보기 위해 변형식의 분자에 최대값들을 대입하고 분모에 최소값들을 대입하여 최대값 $y_{\max}$와 분자에 최소값들을 대입하고 분모에 최대값들을 대입하여 최소값 $y_{\min}$을 찾아보면

$$y_{\min} = \frac{720 \times 8.97^4}{8 \times (7.55 \times 10^9) \times 0.000505} = 0.152818$$

$$y_{\max} = \frac{780 \times 9.03^4}{8 \times (7.45 \times 10^9) \times 0.000495} = 0.175790$$

휨변형에 대한 오차영향 검토

$$\begin{aligned}\Delta y(\tilde{F},\tilde{L},\tilde{E},\tilde{I}) &\cong \frac{\tilde{L}^4}{8\tilde{E}\tilde{I}}\Delta\tilde{F} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^3}{2\tilde{E}\tilde{I}}\Delta L + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}^2\tilde{I}}\Delta\tilde{E} + \frac{\tilde{F}\tilde{L}^4}{8\tilde{E}\tilde{I}^2}\Delta\tilde{I} \\ &= 2.187 \times 10^{-4}\Delta\tilde{F} + 7.29 \times 10^{-2}\Delta\tilde{L} + 2.187 \times 10^{-11}\Delta\tilde{E} + 3.2805 \times 10^{2}\Delta\tilde{I}\end{aligned}$$

4.4.3 안정성과 조건수

대체적으로 수학문제의 조건(condition)은 입력값의 변화에 대한 민감도와 관련되어 있다. 입력값의 불확실성이 수치해법에 의해 크게 확대되면 계산이 **수치적으로 불안정**(numerically unstable)하다고 말한다. 함수$f(x)$의 오차를 1차 Taylor급수로 확인해보자.

$$f(x) = f(\tilde{x}) + f'(\tilde{x})(x - \tilde{x}) \tag{4.34}$$

위의 식을 함수값$f(x)$의 상대오차를 구하기위해 변형하면

$$\varepsilon_f = \frac{f(x) - f(\tilde{x})}{f(x)} \cong \frac{f'(\tilde{x})(x - \tilde{x})}{f(\tilde{x})} \tag{4.35}$$

x의 상대오차는 $\varepsilon_x = (x - \tilde{x})/\tilde{x}$이고, **조건수**(condition number)[4]는 이들 상대오차의 비로 정의 된다.

$$\kappa = \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_x} = \frac{\tilde{x}f'(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} \tag{4.36}$$

이 조건수는 x의 불확실성이 함수값$f(x)$에 얼마나 영향을 미치는지에 대한 척도를 제공한다.

수치해석 분야에서 함수의 조건수(condition number)는 argument에서 의 작은 변화의 비율에 대해 함수가 얼마나 변화할 수 있는지에 대한 argument measure이다. 여기서 "함수"는 문제의 해를 의미하며, "argument"는 문제에서의 데이터를 의미한다. 작은 조건수를 갖는 문제를 "well-conditioned"라고 하며, 큰 조건수를 갖는 문제를 "ill-conditioned"라고 한다. 조건수는 문제의 고유한 성질이다.

[4] http://en.wikipedia.org/wiki/Condition_number

과제2 (제출기한 10월9일)

1. $\cos x$의 Maclaurin 급수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\end{aligned}$$

가장 간단한 형태인 $\cos x = 1$로부터 시작하여 항들을 추가해 가면서 $\cos(\pi/3)$의 값을 구하라. 각각의 항이 추가될 때마다, 절단오차(상대오차)를 계산하라.

2. $x \in \Re$에 대하여 $|x| > 1$의 개구간 미분이 가능한 다음 함수$f(x)$의 Taylor 급수를 전개하고, $x = 3$에서 5차 근사값을 구하고, 절단오차 E_t를 각각의 차수에 대하여 표시하라.

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

3. 다음 함수 $f(x) = \ln(\cos x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$를 7차이상의 다항식으로 전개하라

참고 Maclaurin 급수

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, (|x| \leq 1, x \neq 1) \\ \ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, (|x| \leq 1, x \neq -1)\end{aligned}$$

4. 정확도(accuracy)와 정밀도(precision)에 대하여 조사하라[5] 그리고 각 전공영역에 맞추어 특정한 공학적 이슈를 예를들어 불확실성(uncertainty)에 대하여 자신의 생각을 쓰시오.

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Accuracy_and_precision

5 구간법
(Bracketing Method)

구간법은 함수가 근의 근처에서 부호(sign)가 변한다는 사실에 기초한다. 이 방법을 사용하여 근을 구하기 위해서는 두 개의 초기 가정값이 필요하기 때문에 구간법(bracketing method)이라고 부른다.

5.1 도식적 방법

방정식 $f(x)=0$에 대한 근사값을 구하기 위한 간단한 방법은 함수를 그려서 x축과 만나는 곳을 찾아보는 것이다. $f(x)=0$이 되게 하는 x값을 근의 대략적인 근사값으로 간주할 수 있다.

예제 **도식적 방법**

도식적 방법을 사용하여 질량 $m=68.1\text{kg}$인 낙하산병이 자유 낙하 10초 후에 $40m/s$의 속도를 갖도록 하는 제동계수를 구하라(단, 중력에 의한 가속도는 $9.8m/s^2$이다).

해 식(1.21)에서 제동계수인 c를 내재적(implicit) 매개변수로 포함시키면

$$f(c)=\frac{gm}{c}\left(1-e^{-(c/m)t}\right)-v \tag{5.1}$$

과 같이 쓸 수 있다. 즉, 매개변수 $t=10, g=9.8, v=40, m=68.1$ 이 주어진 c에 대한 함수$f(c)$로 쓸 수 있다.

$$f(c)=\frac{9.8\times 68.1}{c}\left(1-e^{-(c/68.1)\times 10}\right)-40 \tag{5.2}$$

다양한 c의 값을 대입하여 $f(c)$값을 계산한다. (MATLAB 활용)

```
clear all; clc; close all;
c=4:1:20;

for kk=1: length(c)
    f(kk)=9.8*68.1/c(kk)*(1-exp(-10*c(kk)/68.1)) -40;
end

figure
plot(c,f,'-ok')
xlabel('c')
ylabel('f(c)')
xlim([0 24])
ylim([-10 40])
grid on
```

Code [MATLAB] 1: 도식적 방법으로 방정식의 근 구하기

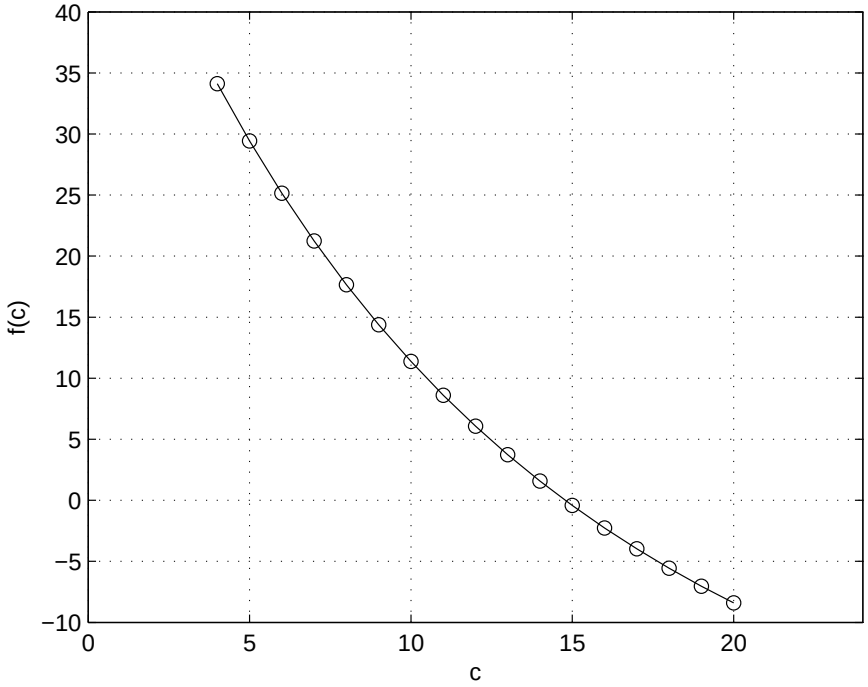


Figure 11: 방정식의 근을 구하기 위하여 도식적(그래프를 사용하는) 방법

5.2 이분법

일반적으로 $f(x)$가 구간 x_l과 x_u사이에서 실수이고 연속이며, $f(x_l)$과 $f(x_u)$가 반대 부호를 갖는다면, 즉

$$f(x_l)(x_u) < 0 \tag{5.3}$$

이면 x_l과 x_u사이에는 적어도 하나 이상의 실근(real root)이 존재한다.

- 증분탐색법(incremental search method) : 함수의 부호가 변화하는 구간을 찾아내어 근을 구하는 방법. 부호가 변하는 위치는 구간을 보다 작은 소구간으로 나눔으로써 정밀하게 식별할 수 있다.
- 이분법(bisection method) : 이진 버림(binary chopping), 구간 반분법(interval halving) 또는 Bolzano 법이라고도 부른다. 이분법은 증분탐색법의 하나로 구간을 항상 반으로 나눈다. 만일 함수의 부호가 구간 내에서 바뀐다면 구간의 중간점에서 함수값을 계산한다.

Step 1 Choose lower x_l and upper x_u guesses for the root such that the function changes sign over the interval. This can be checked by ensuring that $f(x_l)f(x_u) < 0$.

Step 2 An estimate of the root x_r is determined by

$$x_r = \frac{x_l + x_u}{2}$$

Step 3 Make the following evaluations to determine in which subinterval the root lies:

(a) if $f(x_l)f(x_r) < 0$, the root lies in the lower subinterval. Therefore, set $x_u = x_r$ and return to **Step 2**.

(b) if $f(x_l)f(x_r) > 0$, the root lies in the upper subinterval. Therefore, set $x_l = x_r$ and return to **Step 2**.

(c) if $f(x_l)f(x_r) = 0$, the root equals x_r; terminate the computation.

도식적 방법의 예제에서 식(5.2)를 이분법을 이용해서 풀어보자.

예제 **이분법**

```
function y=f(x)

% y=(9.8*68.1)/x*(1-exp(-(x/68.1) *10))-40;
y=x^10-1;
```

Code [MATLAB] 2: 식(5.2)의 함수 정의

Code 2와 같이 식(5.2)을 함수화 시키자. 그리고 이분법 연산은

```
clear all; clc; close all;

```

```
xl=12;   % lower bound
xu=16;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1.478020383166106e+001; % true x
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=(xl+xu)/2;     % bisection
    id=f(xl)*f(xr);
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xu to xl
    else
        break;        % break loop
    end
    x(ii)=xr;         % calculated x vector
    et(ii)=(xt-xr)/xt;% calculated error vector
end
```

Code [MATLAB] 3: 식(5.2)의 이분법 코드

Code 3과 같이 반복문(loop)와 조건문(selection)으로 이뤄진다. 여기서는 `while`문을 사용하여 코딩을 하였는데, 이것은 반복문의 반복횟수로 종료판정을 하지 못하기 때문이다. `while`문은 `while` 이후에 조건을 입력해야 하지만 여기서는 여러조건이 함께 존재하기 때문에 `1` 즉, 무한반복을 선택하였다. 대신 `if`문과 `elseif` 그리고 `else` 문을 사용하였고 종료판정은 `else`에 `break`를 사용하여 반복을 종료하게 된다.

5.2.1 종료 판정 기준과 오차추정

실제로 예제의 정확한 값을 얻기 위해서 이분법을 반복시킬 수 있지만, 실제로 컴퓨터 연산은 일반적인 경우 $f(x_r) = 0$이 되는 경우까지 하는것은 매우 비효율 적이고, 복잡한 수치모델의 경우 반복문이 끝나지 않을 수가 있다. 따라서 언제 이 반복문을 끝낼 것인지에 대한 객관적인 판정 기준을 제시해야한다.
예를들어 오차가 미리 정한 정밀도 이하로 떨어지면 계산을 종료한다고 생각해보자. 상대오차가 0.1% 이하로 떨어지면 계산을 종료한다고 가정하면 문제가 발생한다. 왜냐하면 우리는 참값을 알지 못하기 때문에 상대오차를 계산할 수 없디 때문이다. 참값을 안다면 굳이 이분법 같은 수치해법으로 근을 구할 필요가 없기 때문이다. 하지만 12페이지 3.2절에서 식(3.5)를 통해 근사화된 상대오차를 구한적이 있다. 즉, 식(5.4)와 같이 반복계산문에서 이전의 값과 현재의 값의 변화로 판별하여 근사상대오차를 구한다.

$$e_a = \left| \frac{x_r^{new} - x_r^{old}}{x_r^{new}} \right| 100(\%) \tag{5.4}$$

5.2.2 함수 계산의 최소화

Code 3과 같은 알고리즘은 계산하기 쉬운 함수의 단일근을 찾는 경우에는 유용하게 사용될 수 있으나 실제 공학 문제에서 이와 같은 경우는 드물다. 예를들어 많은 근을 찾아야하는 프로그램을 개발하는 경우, Code 2와 같은 알고리즘을 수천, 수백만번 수행할 수 도 있다. 또한 함수의 경우 간단하게 처리하는(수행시간이 짧은) 함수가 아닌 경우가 더 많다. 특히 연산 시간이 많이 소요되는 경우 우리는 함수계산을 최소화 시켜야 한다. 변경된 코드를 보자

```
clear all; clc; close all;

xl=12;   % lower bound
xu=16;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1.478020383166106e+001; % true x
fl=f(xl);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=(xl+xu)/2;     % bisection
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xl to xr
        fl=fr;        % replace fl to fr
    else
        break;        % break loop
    end
    x(ii)=xr;         % calculated x vector
    et(ii)=(xt-xr)/xt;% calculated error vector
end
```

Code [MATLAB] 4: 함수계산을 최소화한 이분법 코드

즉 Code 3에서 $2n$번 수행이 되는 함수연산을 Code 4에서 $n+1$으로 축소시켰다. (여기서 n은 반복문의 반복횟수 `ii`)

5.3 가위치법

이분법이 단일근을 찾는데에는 우수한 기법이지만 근에 접근하는 방식은 상당히 비효율적이다. 이분법의 단점은 구간 x_l과 x_u 사이를 항상 반으로 나누고, 함수값 $f(x_l)$과 $f(x_u)$의 크기를 고려하지 않는다. 가위치법은 이러한 단점을 고려하여 $f(x_l)$과 $f(x_u)$ 사이의 곡선을 직선으로 연결시켜 x축과 만나는 교점을 찾아 그 교점이 추정값이 되는 방식이다. 곡선을 직선으로 대치하여 근의 "**가위치법**"(false position method), 또는 라틴어로 "**정규거짓**"(regula falsi)이라고 하며, "**선형보간법**"(linear interpolation method)라고도 한다.

$$\frac{f(x_l)}{x_r - x_l} = \frac{f(x_u)}{x_r - x_u} \tag{5.5}$$

위의 식(5.5)은 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$x_r = x_u - \frac{f(x_u)(x_l - x_u)}{f(x_l) - f(x_u)} \tag{5.6}$$

즉, 식 (5.6) 로 x_r 의 값을 계산한 후, 두 개의 초기경계값 x_l 또는 x_u 중 하나로 대치하고, $f(x_r)$ 과 같은 부호를 가진 함수값을 산출한다. 이 방법으로 x_l 과 x_u 의 사이에는 항상 참근이 존재하게 된다. 정확한 근을 구할 때 까지 이 과정을 반복한다. 이 알고리즘은 이분법의 **Step 2**에서 식 (5.6) 을 사용하는 것을 제외하고 이분법과 같다.

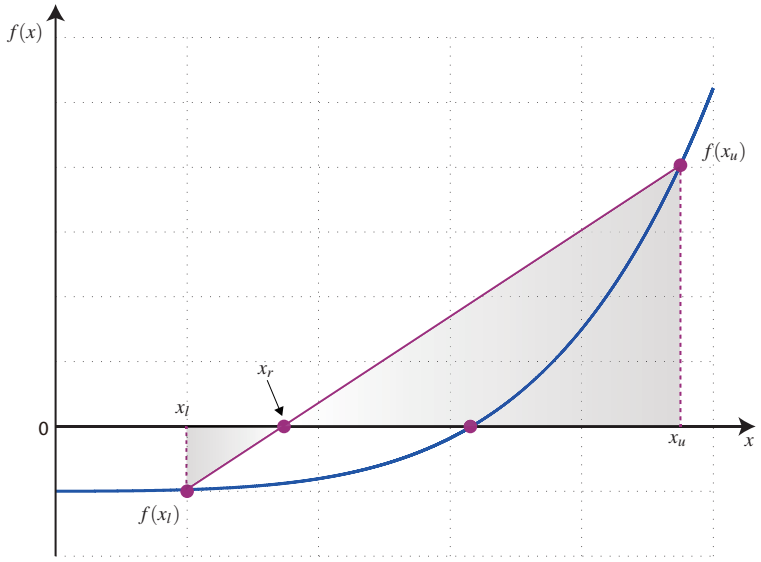


Figure 12: 가위치법의 도식적 묘사

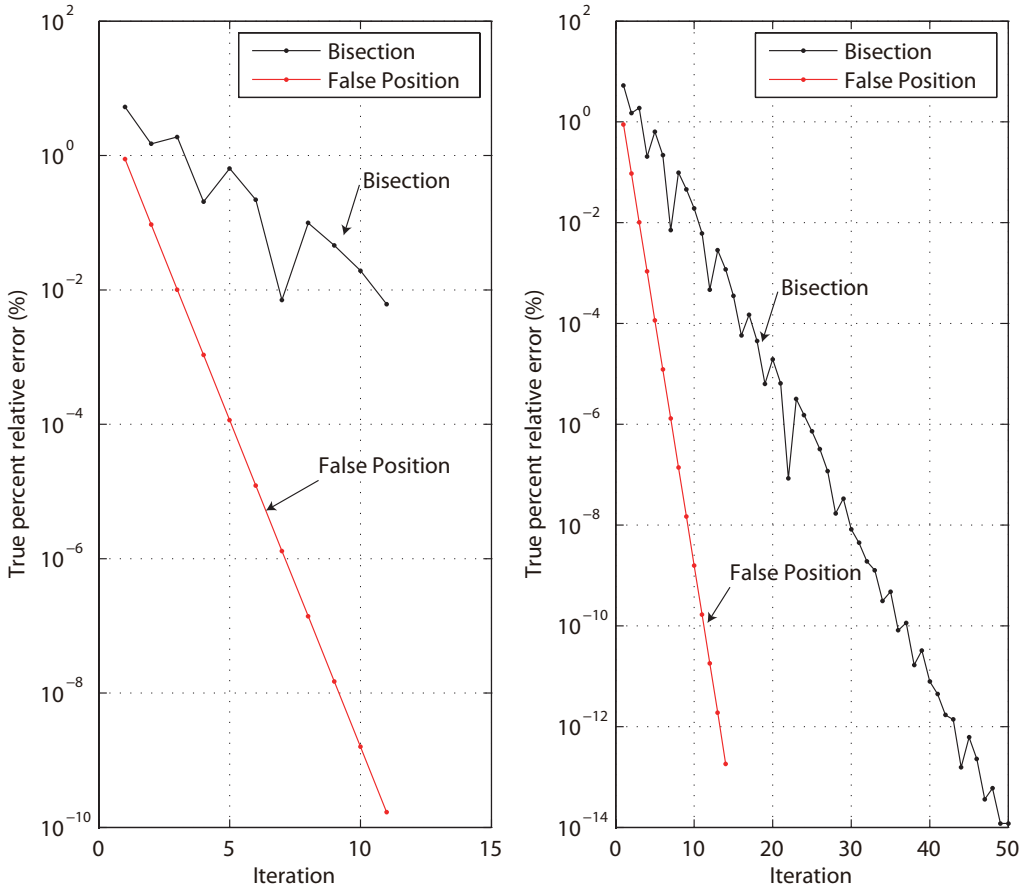
이분법과 같은 방식으로 낙하산병 예제를 풀어보자

```
clear all; clc; close all;

xl=12;   % lower bound
xu=16;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1.478020383166106e+001; % true x
fl=f(xl);
fu=f(xu);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=xu-(fu*(xl-xu))/(fl-fu);
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
        fu=f(xu);     % replace fu to f(xu)
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xu to xl
        fl=f(xl);     % replace fl to f(xl)
    else
        break;        % break loop
    end
    x(ii)=xr;         % calculated x vector
```

```
    et(ii)=(xt-xr)/xt;% calculated error vector
25 end
```

Code [MATLAB] 5: 식(5.2)의 가위치법 코드

이분법과 가위치법의 상대적인 효율성을 비교해보자, 반복횟수에 대한 참상대오차가 줄어드는 경향을 판단해볼 수 있다.



(a) Short Iteration **(b)** Full Iteration

Figure 13: 이분법과 가위치법 상대오차 비교

5.4 수정된 가위치법

$$f(x) = x^{10} - 1 \tag{5.7}$$

식(5.7)의 경우 이분법이 가위치법보다 빠르게 수렴한다. 이것은 근을 찾는 방법을 일반화하는 것은 불가능하다는 것을 보여준다. 즉, 이것은 수정된 가위치법을 통해서 한쪽 경계가 변하지 않는 경우 알아내는 알고리즘을 포함시키는 것이다.

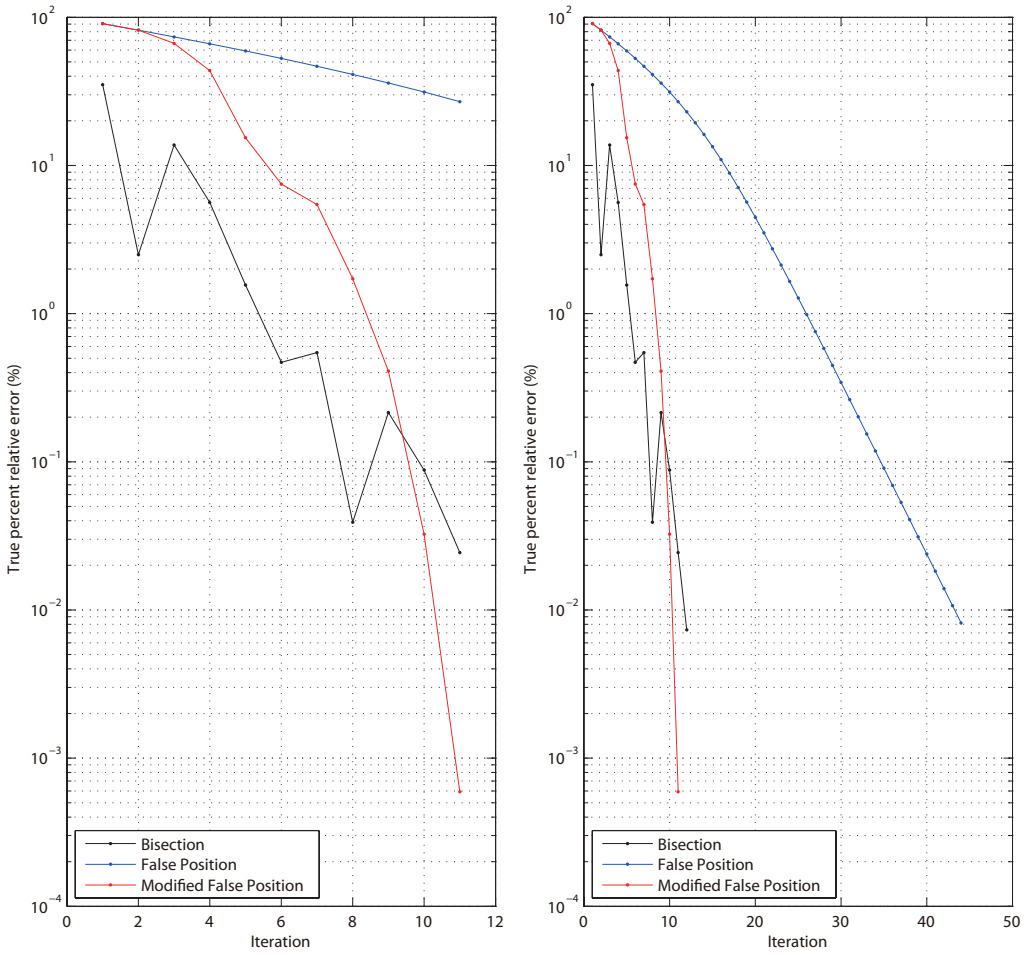
```
1 clear all; clc; close all;
```

```
xl=0;   % lower bound
xu=1.3;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1; % true x
il=0;iu=0;
fl=f(xl);
fu=f(xu);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=xu-(fu*(xl-xu))/(fl-fu);
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
        fu=f(xu);     % replace fu to f(xu)
        iu=0;         % set zero iteration of upper bound
        il=il+1;      % count iteration of lower bound
        if il≥2, fl=fl/2; end % modify lower function value
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xu to xl
        fl=f(xl);     % replace fl to f(xl)
        il=0;         % set zero iteration of lower bound
        iu=iu+1;      % count iteration of upper bound
        if iu≥2, fu=fu/2; end % modify upper function value
    end
    x(ii)=xr;               % calculated x vector
    et(ii)=abs((xt-xr)/xt); % calculated error vector
    if et(end)≤0.0001
        break;        % break loop
    end
end
```

Code [MATLAB] 6: 식(5.7)의 수정된 가위치법 코드

이러한 기존의 조건문에 또다른 조건문을 포함시켜 알고리즘을 추가하는 방식은 추후 증분탐색과 초기가정값의 크기에 따라 탐색을 놓칠 경우가 있기 때문에, 완전한 방법이라고 볼 수는 없다.

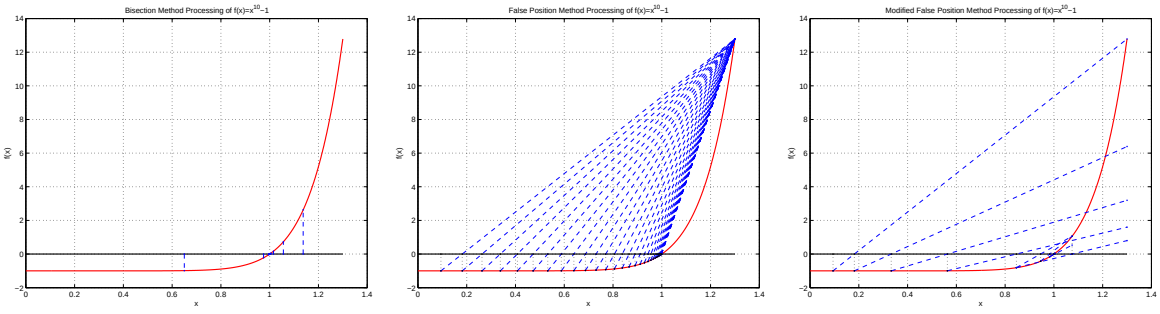
Figure 14을 통해 식 (5.7) 의 이분법, 가위치법, 수정된 가위치법의 참상대오차의 수렴과정을 살펴보자. 식 (5.7) 문제의 이분법, 가위치법의 각각의 MATLAB 코드는 41페이지의 부록A.3장을 참고.



(a) Short Iteration **(b)** Full Iteration

Figure 14: 이분법과 가위치법 및 수정된 가위치법 상대오차 비교

Figure 15에서 이분법, 가위치법 그리고 수정된 가위치법이 단계별로 어떻게 근으로 수렴하는지 알 수 있다.



(a) Bisection method **(b)** False position method **(c)** Modified false position method

Figure 15: 이분법과 가위치법 및 수정된 가위치법의 계산과정

6 개구간법 (Open Method)

구간법은 미리 정의된 하한치(lower bound)와 상한치(upper bound)의 경계값으로 이루어지는 구간 내에서 근을 찾았다. 반면에 이장에서 다룰 개구간법(open methods)은 한 개의 초기값에서 시작하거나 구간 내에 근을 포함하지 않을 수도 있는 두 개의 초기값들로부터 시작하는 방법들이다. 이러한 개구간법은 종종 발산(diverge)하거나 근에서 멀어지기도 한다. 그러나 수렴(convergent)할 경우 빠르게 수렴한다.

6.1 고정점 반복법(fixed point iteration)

함수 $f(x)=0$의 형태를 다음 식과 같이 변형할 수 있다.

$$g(x)=x \tag{6.1}$$

이 변형된 함수는 함수 g에 대한 *fixed point*의 해가 된다. 이러한 함수 $f(x)=0$에서 단순한 해법으로 재구성하는 방법은 고정점 반복(fixed point iteration)으로 이루어진다. 그러나 이러한 방법을 수행하기 이전에 우리는 변형된 함수 $g(x)=x$의 해의 존재와 유일성을 검토해야한다. 다음 정리가 이러한 질문에 대한 해를 제시한다.

Theorem 6.1 (Fixed-Point Iteration). *함수 $g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속의 함수일 때, $\forall x \in [a,b]$에 대해 $g(x) \in [a,b]$ 이면, g는 $[a,b]$에서 고정점(fixed point)를 갖는다. 또한, 함수 $g(x)$가 미분가능한 함수이고 아래의 식(6.2)과 같은 상수 $k<1$가 존재한다면,*

$$\left|g'(x)\right| \le k, x \in (a,b) \tag{6.2}$$

g는 정확하게 $[a,b]$에서 하나의 고정점(fixed point)를 갖는다.

구간 $[a,b]$에서 고정점을 갖는 연속함수 g가 주어진다면, 그 고정점(fixed point)은 구간 $[a,b]$에서 $g(x)=x$를 만족하는 x를 무수히 반복하여 찾을 수 있다.

Algorithm 1 Fixed-Point Iteration

Let g be a continuous function defined on the interval $[a,b]$. The following algorithm computes a number $x_r \in (a,b)$ that is a solution to the equation $g(x)=x$.

Choose an initial guess x_0 in $[a,b]$.

for $i=0,1,2,\cdots$ **do**
  $x_{i+1}=g(x_i)$
  if $|x_{i+1}-x_i|$ is sufficiently small **then**
    $x_r=x_{i+1}$
    return x_r
  end if
end for

어떠한 환경에서 고정점 반복이 수렴해서 x_r을 찾을 수 있을까? 단순히 오차를 $e_i=x_i-x_r$로 가정한다면, Taylor 급수에서 $e_{i+1} \approx g'(x_r)e_i$일 때, $g(x_r)=x_r$임을 찾을 수 있다. 즉, $k<1$일 때, $|g'(x_r)| \le k$ 라면, 고정점 반복

(fixed-point iteration)은 부분수렴(locally convergent)한다고 한다. 즉, 초기설정값 x_0가 x_r에 충분히 근접한 값을 선택했을 때 수렴한다는 말이다. 이러한 결과는 다음 정리를 통해 알 수 있다.

Theorem 6.2 (Fixed-Point Theorem). *함수 $g(x)$가 구간 $[a,b]$에서 연속의 함수일 때, $\forall x \in [a,b]$에 대해 $g(x) \in [a,b]$ 이고, 다음 식과 같이 상수 $k<1$인 점이 존재한다면,*

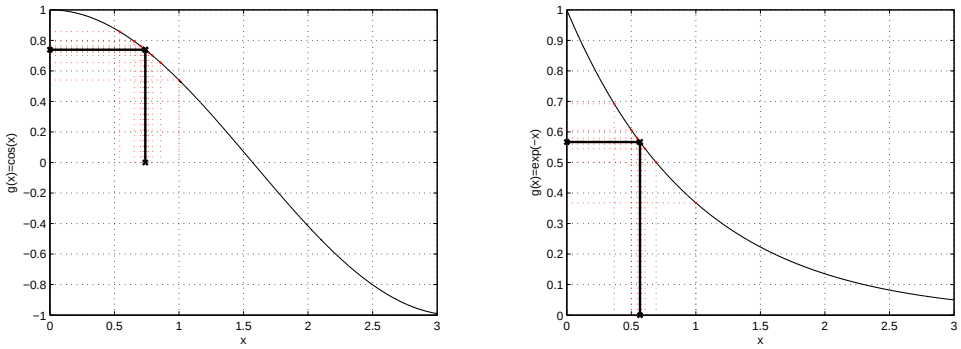
$$\left|g'(x)\right| \leq k, x \in (a,b), \tag{6.3}$$

반복문(the sequence of iterates) $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$는 어떤 초기가정 $x_0 \in [a,b]$에도, 특정 고정값 x_r으로 수렴하게 된다.

함수 $g'(x)$가 수렴의 약조건 $|g'(x)|<1$에 비하여 (a,b)에서 1과 떨어지도록 경계지어야하는지에 대하여, 만약 $g'(x)$가 x가 어느 한점 $c \in (a,b)$로 접근할 때 1로의 접근을 허용한다면, 오차 e_i가 i가 증가할 수록 0으로 수렴하지 않을 수가 있다. 이러한 경우 고정점 반복법(fixed-point iteration)은 수렴하지 않는다.

일반적으로 고정점 반복(fixed-point iteration)이 수렴할 때, $|g'(x)|$의 경계치는 상수 k의 역으로 변화하면서 수렴한다.

한편, $f(x)=0$를 $g(x)=x$로 변환하는 식은 많은 방법이 존재하지만, 단순화된 방법으로 특정함수 $\phi(x)$를 추가한 $g(x)=x-\phi(x)f(x)$방법을 사용한다. 그러나 이러한 함수변형에 있어 가장 중요한 요소는 함수 $g(x)$의 수렴성이다.



(a) $g(x)=\cos(x)$ **(b)** $g(x)=\exp(-x)$

Figure 16: 고정점 반복법의 수렴과정

6.2 Newton-Raphson법 (Newton-Raphson method)

구간법의 문제점은 적어도 한 근을 포함하는 구간을 알고있어야 한다는 점이다. 즉, 이러한 방법은 필요한 구간을 상정하기 위해서 무수히 많이 반복을 수행해야하기 때문에 실용적이지 못하다. 좀더 효과적으로 근을 구하는 방법을 찾기 위해서는 다음과 같은 질문을 해결해야 한다.

- Are there cases in which the problem easy to solve, and if so, how do we solve it in such cases?
- Is it possible to apply our method of solving the problem in these "easy" cases to more general cases?

근을 구하는 공식들 중에서 가장 일반적으로 사용하는 것이 Newton-Raphson 법이다. 근에 대한 초기가정값이 x_i라면, 점 $[x_i, f(x_i)]$에 접하는 접선을 구할 수 있고, 이 접선이 x축과 교차하는 점이 개선된 근이 된다. 4.1장 14 페이지 식 (4.3) 의 Taylor 급수를 통해 1차항으로 구성된 다음 식으로 근사화 시킬 수 있다.

$$f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{6.4}$$

즉, x축과의 교점에서 $f(x_{i+1}) = 0$이 되므로 다음과 같이 근사할 수 있다.

$$0 = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) \tag{6.5}$$

x_{i+1}에 대하여 정리하면 다음식 (6.6) 과 같다.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{6.6}$$

Algorithm 2 Newton-Raphson Method

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function. The following algorithm computes an approximate solution x_r to the equation $f(x) = 0$.

Choose an initial guess x_0.

for $i = 0, 1, 2, \cdots$ **do**
  if $f(x_i)$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_i$
    return x_r
  end if
  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$
  if $|x_{i+1} - x_i|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{i+1}$
    return x_r
  end if
end for

Newton-Raphson법이 수렴할때, 상당히 빨리 수렴한다. 그러나, 수렴 여부에 대해 찾기가 쉽지 않을 수 있다. 특히, 함수 $f(x)$가 근의 부근 x_r에서 수평기울기 (horizontal tangent) 을 가지게 될 때 반복구간에서 값이 커질 수가 있다. 이러한 경우 일반적으로 시작지점 x_0을 x_r에 가장 가까운 곳에서 선택할 필요가 있다.

Theorem 6.3 (Convergence of Newton-Raphson's Method). *함수 $f(x)$를 구간 $[a,b]$에서 연속이며 미분가능하다고 가정하고, 특정한 값 $c \in [a,b]$에서 $f(c)=0$와 $f'(c)=0$을 만족한다고 가정하면, 함수 $f(x)$에 Newton-Raphson법을 적용했을때 $[c-\delta, c+\delta]$구간에서 수렴하는 어떤 초기값 x_0을 갖는 $\delta > 0$인 δ가 존재한다.*

예제 **Newton-Raphson법 예제 ($\sqrt{2}$ 찾기)**

다음 함수 $f(x)$를 통해 $\sqrt{2}$의 값을 Newton-Raphson법을 이용하여 예측하라.

$$f(x) = x^2 - 2 \tag{6.7}$$

해 $f'(x) = 2x$이기 때문에, Newton-Raphson법에서 x_i에 대한 x_{i+1}은 다음식과 같다.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - 2}{2x_i} = \frac{x_i}{2} + \frac{1}{x_i} \tag{6.8}$$

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	**Tangent line**
$x_0 = 0.5$	$f(x_0) = -1.75$	$f'(x_0) = 1$	$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
$x_1 = 2.25$	$f(x_1) = 3.0625$	$f'(x_1) = 4.5$	$y = f'(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$
$x_2 = 1.5694$	$f(x_2) = 0.463155$	$f'(x_2) = 3.13889$	$y = f'(x_2)(x-x_2) + f(x_2)$
$x_3 = 1.42189$	$f(x_3) = 2.177221 \times 10^{-2}$	$f'(x_3) = 2.84378$	$y = f'(x_3)(x-x_3) + f(x_3)$
$x_4 = 1.414234$	$f(x_4) = 5.861552 \times 10^{-5}$	$f'(x_4) = 2.82847$	$y = f'(x_4)(x-x_4) + f(x_4)$

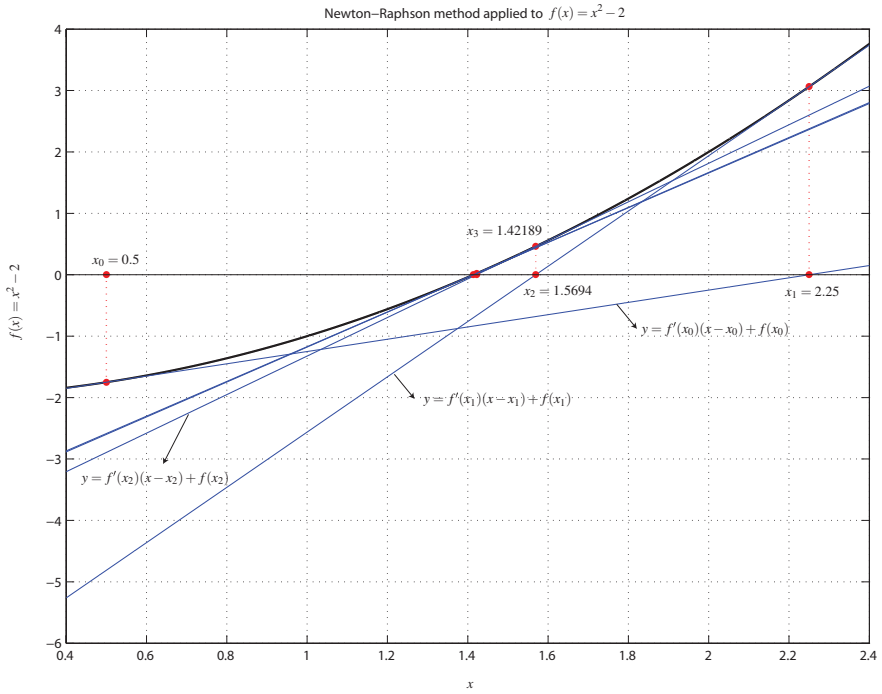


Figure 17: Newton-Raphson Method

6.3 할선법 (secant method)

Newton-Raphson법을 수행하는데 어려운점은 바로 도함수의 계산이다. 어떤 함수에서는 도함수를 계산하는 것이 매우 어려울 수 있다. 그러한 경우 도함수는 4.3장에서 학습한 수치미분중 후진유한제차분으로 근사시킬 수 있다. 후진차분근사법은 식(4.17)에서 도함수를 가져오기로 하자.

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_{i-1}) - f(x_i)}{x_{i-1} - x_i} \tag{6.9}$$

도함수의 후진차분근사 식(6.9)을 Newton-Raphson법 식(6.6)에 대입시킨다.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)} \tag{6.10}$$

식(6.10)과 같이 할선법(secant method)는 두개의 초기값 x_{i-1}, x_i이 필요하다. 즉, x_2부터 추적해나가기 때문에 x_0과 x_1의 초기값이 필요하다.

Algorithm 3 Secant Method

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a differentiable function. The following algorithm computes an approximate solution x_r to the equation $f(x) = 0$.

Choose an initial guess x_0 and x_1.

for $i = 0, 1, 2, \cdots$ **do**
  if $f(x_i)$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_i$
    return x_r
  end if
  $x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{f(x_{i+1})(x_i - x_{i+1})}{f(x_i) - f(x_{i+1})}$
  if $|x_{i+2} - x_{i+1}|$ is sufficiently small **then**
    $x_r = x_{i+2}$
    return x_r
  end if
end for

Appendices

A MATLAB m-code

A.1 Figure 3의 낙하산병 문제 정확해와 수치해

```
clear all; clc; close all;

%% Parameters
m=68.1; % kg
c=12.5; % m/sec^2
g=9.8;  % kg/s

%% Calculation
t=0:0.0001:20; % time of exact solution

dt=2;          % dt of numerical solution
t1=0:dt:20;    % time of numerical solution
v=g*m/c*(1-exp(-(c/m)*t)); % exact solution

v1(1)=0;       % initial velocity of numerical solution
for kk=1:length(t1)
    v1(kk+1)=v1(kk)+(g-c/m*v1(kk))*dt;
end

ref=ones(length(t),1)*g*m/c; % terminal velocity

%% Display result
figure
plot(t,v,'-k',t1,v1(1:end-1),'o--b',t,ref,':r','linewidth',1.5)
text(14,55,'Terminal velocity','FontWeight','bold')
grid on
legend('analytical solution','numerical solution','Location','best')
xlabel('Time (second)')
ylabel('Velocity (m/s)')
```

Code [MATLAB] 7: Comparison between exact and numerical solution

A.2 무한히 미분 가능한 함수를 근사하기 위한 Taylor 급수전개

```
clear all; clc; close all;

xi=pi/4; % initial position of x

%% Derivative values of Cosine function
deriv=[cos(xi) -sin(xi) -cos(xi) sin(xi)]; % derivative values of f(x)
derivs=repmat(deriv,1,10); % repeatation of derivative function values

%% Taylor Series Expansion
xd=pi/3; % desired position of x
N=7;
for kk=1:N

    terms(kk)=derivs(kk)*(xd-xi)^(kk-1)/factorial(kk-1); % Taylor expansion

    order(kk)=kk-1; % order
    estival(kk)=sum(terms); % approximation value
    et(kk)=(cos(xd)-estival(kk))/cos(xd); % truncation error
end
%% Prrint Result
fid=fopen('result.txt','w');
header={'Order','Approx. Val','Et'};
fprintf(fid,'%s \t %s \t %s \n','Order','Approx. Value','Et(%)');
for kk=1:N
    fprintf(fid,'\t %d \t %.9f \t %0.2e \n',order(kk),estival(kk),et(kk));
end
fclose(fid);
%% Show Result
type result.txt
```

Code [MATLAB] 8: Approximation $\cos(\pi/3)$ from $\cos(\pi/4)$ using Taylor series expansion

A.3 예제풀이 5.6 : 이분법 및 가위치법

```
function y=f(x)


y=x^10-1;
```

Code [MATLAB] 9: 예제 함수

```
clear all; clc; close all;

xl=0;   % lower bound
xu=1.3;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1; % true x
fl=f(xl);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=(xl+xu)/2;     % bisection
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xl to xr
        fl=fr;        % replace fl to fr
    end
    x(ii)=xr;               % calculated x vector
    et(ii)=abs((xt-xr)/xt); % calculated error vector
    if et(end)≤0.0001
        break;        % break loop
    end
end
```

Code [MATLAB] 10: 이분법

```
clear all; clc; close all;

xl=0;   % lower bound
xu=1.3;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1; % true x
fl=f(xl);
fu=f(xu);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
```

```
    xr=xu-(fu*(xl-xu))/(fl-fu);
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
        fu=f(xu);     % replace fu to f(xu)
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xu to xl
        fl=f(xl);     % replace fl to f(xl)
    end
    x(ii)=xr;               % calculated x vector
    et(ii)=abs((xt-xr)/xt); % calculated error vector
    if et(end)≤0.0001
        break;        % break loop
    end
end
```

Code [MATLAB] 11: 가위치법

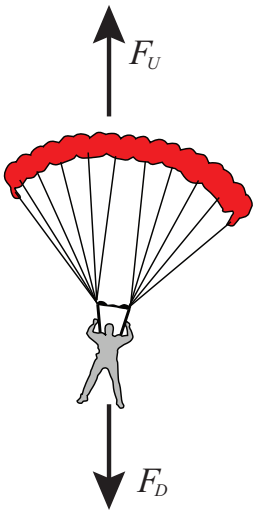
```
clear all; clc; close all;

xl=0;   % lower bound
xu=1.3;   % upper bound
ii=0;    % initial iteration value
xt=1; % true x
il=0;iu=0;
fl=f(xl);
fu=f(xu);
while 1
    ii=ii+1;          % increment iteration value
    xr=xu-(fu*(xl-xu))/(fl-fu);
    fr=f(xr);
    id=fl*fr;
    if id<0
        xu=xr;        % assume xu to xr
        fu=f(xu);     % replace fu to f(xu)
        iu=0;         % set zero iteration of upper bound
        il=il+1;      % count iteration of lower bound
        if il≥2, fl=fl/2; end % modify lower function value
    elseif id>0
        xl=xr;        % assume xu to xl
        fl=f(xl);     % replace fl to f(xl)
        il=0;         % set zero iteration of lower bound
        iu=iu+1;      % count iteration of upper bound
        if iu≥2, fu=fu/2; end % modify upper function value
    end
    x(ii)=xr;               % calculated x vector
    et(ii)=abs((xt-xr)/xt); % calculated error vector
```

```
30      if et(end)≤0.0001
            break;          % break loop
32      end
    end
```

Code [MATLAB] 12: 수정된 가위치법

B 과제풀이

B.1 과제 1



B.1.1 낙하산병의 초기속도 $v(0)$가 0이 아닌 경우, $v(0)$ 상수를 도입하여 정밀해를 구하라

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \tag{B.1}$$

풀이 강의노트에서 해석해 풀이과정과 유사하게 변수분리방법을 사용하면

$$\frac{m}{mg-cv}dv = 1 \cdot dt \tag{B.2}$$

양변을 적분하면 식(B.2)은 시각 T에서 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\int_{v(0)}^{v(T)} \frac{m}{mg-cv}dv = \int_0^T 1 \cdot dt \tag{B.3}$$

초기속도가 0이 아니기 때문에 즉, $t=0$일때, $v(0)$로 놓고, $mg-cv$를 시간의 종속변수X로 치환하면,

$$mg - cv = X \tag{B.4}$$

$$\frac{dX}{dv} = -c \tag{B.5}$$

$$dv = -\frac{1}{c}dx \tag{B.6}$$

치환변수 X의 초기값과 T에서의 값은 각각, $X(0) = mg - cv(0)$ 그리고 $X(T) = mg - cv(T)$가 된다. 다시 식(B.3)에 대입하면,

$$-\frac{m}{c}\int_{X(0)}^{X(T)} \frac{1}{X}dv = \int_0^T 1 \cdot dt \tag{B.7}$$

식(B.7)을 계산하면,

$$-\frac{m}{c}\ln X|_{X(0)}^{X(T)} = T \tag{B.8}$$

치환된 변수를 환원하면서 전개하면,

$$-\frac{m}{c}\left[\ln\{mg-cv(T)\}-\ln\{mg-cv(0)\}\right]=T \tag{B.9}$$

정리하면

$$\ln\left(\frac{mg-cv(T)}{mg-cv(0)}\right)=-\frac{c}{m}T \tag{B.10}$$

양변에 ln을 취하면,

$$e^{-(c/m)T}=\frac{mg-cv(T)}{mg-cv(0)} \tag{B.11}$$

함수$v(T)$를 구하기위해 정리하면

$$\{mg-cv(0)\}e^{-(c/m)T}=mg-cv(T) \tag{B.12}$$

$$v(T)=\frac{mg}{c}-\frac{\{mg-cv(0)\}}{c}e^{-(c/m)T} \tag{B.13}$$

결국 시각 T에서 엄밀해는 식(B.14)과 같이 계산된다.

$$v(T)=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-(c/m)T}\right)+v(0)e^{-(c/m)T} \tag{B.14}$$

B.1.2 낙하하는 낙하산병에게 작용하는 힘을 계산하는 과정에서, 식(B.1)로 주어진 선형관계식 대신, 다음과 같은 2차식을 사용하여 정밀해 혹은 수치해를 구하여라

$$F_U=-c'v^2$$

단, c'은 2차항력계수(kg/m)이며, 수치해를 구할땐, 10초후의 낙하산병의 속도를 구하라. 여기서, 낙하산병의 질량은 68.1kg이고 2차항력계수는 $0.232kg/m$이다.

풀이(정확해)

같은 방식으로 식(B.1)을 속도의 제곱항으로 변형하면,

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{c'}{m}v^2 \tag{B.15}$$

$$=\frac{mg-c'v^2}{m} \tag{B.16}$$

같은 방식으로 변수분리 방식을 사용하기 위해 식을 변형하면,

$$\frac{m}{mg-c'v^2}dv=1\cdot dt \tag{B.17}$$

양변의 시간 $t=0$에서 $t=T$까지 정적분을 취하면,

$$\int_{v(0)}^{v(T)}\frac{m}{mg-c'v^2}dv=\int_0^T dt \tag{B.18}$$

다음 식(B.19)과 같은 적분공식을 적용하기 위하여 식을 변형하고

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+C \tag{B.19}$$

적분식에서 발생하는 $\sqrt{c'}v$ 항을 X 로 치환하면

$$m\int_{v(0)}^{v(T)}\frac{1}{(\sqrt{mg})^2-(\sqrt{c'}v)^2}=\int_0^T dt \tag{B.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{c'}}\int_{X(0)}^{X(T)}\frac{1}{\sqrt{mg}^2-X^2}dX=\int_0^T dt \tag{B.21}$$

여기서, 치환변수 $X=\sqrt{c'}v$는, $dX/dv=\sqrt{c'}$, $dv=(1/\sqrt{c'})dX$ 로 변형되고, 적분구간은 $X(0)=v(0)=0$, $X(T)=\sqrt{c'}v(T)$ 로 변형된다. 정적분을 풀고 이항하여 $v(T)$ 로 정리하면,

$$\frac{m}{\sqrt{c'}}\left[\frac{1}{\sqrt{mg}}\tanh^{-1}\frac{X}{\sqrt{mg}}\right]_{X(0)}^{X(T)}=T \tag{B.22}$$

$$\frac{m}{\sqrt{mgc'}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)\right)=T \tag{B.23}$$

$$\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)\right)=\frac{\sqrt{gc'}m}{T} \tag{B.24}$$

$$\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)=\tanh\left(\sqrt{\frac{gc'}{m}}T\right) \tag{B.25}$$

$$\therefore v(t)=\sqrt{\frac{mg}{c'}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc'}{m}}T\right) \tag{B.26}$$

풀이(수치해)

부록1장에 수록된 MATLAB Code에서 `v(kk)`를 `v(kk)^2`로 수정한다.

```
clear all; clc; close all;

%% Parameters
m=68.1; % kg
c=0.232; % kg/m
g=9.8;  % kg/s

%% Calculation
t=0:0.0001:20; % time of exact solution

dt=2;          % dt of numerical solution
t1=0:dt:20;    % time of numerical solution
v=sqrt((m*g)/c)*tanh(sqrt((g*c)/m)*t); % exact solution

v1(1)=0;       % initial velocity of numerical solution
for kk=1:length(t1)
    v1(kk+1)=v1(kk)+(g-c/m*v1(kk)^2)*dt;
end

ref=ones(length(t),1)*v(end); % terminal velocity

%% Display result
```

```
figure
plot(t,v,'-k',t1,v1(1:end-1),'o--b',t,ref,':r','linewidth',1.5)
text(14,55,'Terminal velocity','FontWeight','bold')
grid on
legend('analytical solution','numerical solution','Location','best')
xlabel('Time (second)')
ylabel('Velocity (m/s)')
```

Code [MATLAB] 13: 2번문제 수치해

B.1.3 테일러급수(Taylor series)를 증명하라.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

풀이 Taylor급수를 증명하기 위해서는 미적분학 제1기본정리와 제2기본정리를 알아야한다.

Theorem B.1 (미적분학 제1기본정리). *함수 f가 폐구간 $[a,b]$에서 적분가능할 때, 함수 F를 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$라 하면, 이때 다음이 성립한다. f가 $[a,b]$상의 점 c에서 연속이면, F는 $[a,b]$에서 미분가능하고, $F'(c) = f(c)$이다. 즉,*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{B.27}$$

Proof $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ 함수 $f(t)$에 대해 $[a,b]$에서 연속이고, (a,b)에서 미분가능하므로 함수 $S(x)$도 $[a,b]$에서 연속하고 (a,b)에서 미분가능하다. 최대최소 정리에 의해 $h>0$ 일 때 $[x,x+h]$에서 $f(t)$는 최대값 M과 최소값 m을 가진다. 여기서 $mh < S(x+h) - S(x) < Mh$이므로

$$\lim_{h\to 0} m \le \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} M$$

이다, 즉 압착정리에 의해 $\lim_{h\to 0} m = \lim_{h\to 0} M = f(x) = S'(x)$이 되므로, $S'(x) = f(x)$가 성립한다.

Theorem B.2 (미적분학 제2기본정리). *f가 폐구간 $[a,b]$에서 적분가능한 함수이고, 함수 F를 f의 임의의 역도함수라 하면, 다음식*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \tag{B.28}$$

이 성립한다. 즉, 정적분은 임의의 역도함수의 차로 계산할 수 있다.

Proof 미적분학 제1기본정리에서 $S(x) = F(x) + C$(단, C는 적분상수)에서, $S(x) = \int_a^x f(t)dt$로 정의되었으므로,

$$S(a) = F(a) + C = 0 \tag{B.29}$$

위 식에서 $C = -F(a)$, $S(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$이다. 따라서,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{B.30}$$

이 성립한다.

Taylor series 미적분학 제2기본정리로부터,

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \tag{B.31}$$

위의 식 (B.31)을 부분적분을 하기 위해 다음 식 (B.32)로 변형하자

$$\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x (-1)\left\{-f'(t)\right\}dt \tag{B.32}$$

$f(t)$는 무한번 미분가능하면 부분적분을 무한번 수행할 수 있으므로, -1을 적분할 함수, $-f'(t)$를 미분할 함수로 두고, 부분적분을 수행하면[6],

$$\int_a^x (-1)\left\{-f'(t)\right\}dt = \left[-(x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t) - \frac{(x-t)^3}{6}f'''(t) - \cdots\right]_a^x \tag{B.33}$$

이제 식 (B.33)을 풀게되면,

$$\begin{aligned}\left[-(x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t) - \frac{(x-a)^3}{6}f'''(t) - \cdots\right] &= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f'''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots \\ &= f(x) - f(a)\end{aligned} \tag{B.34}$$

그러므로, 무한번 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots \tag{B.35}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{B.36}$$

---

[6] 단, 여기서 -1을 계속 적분할 때 -1의 한 부정적분을 구해서 써주면 되는데, 적분변수 t와 관계없는 값x를 상수취급하여 $x-t$를 부정적분으로서 구했다.