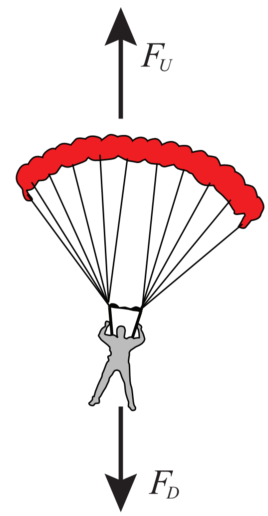
1 공학 수치해석 과제1 (제출기한 9월18일)



1.1 낙하산병의 초기속도 $v(0)$가 0이 아닌 경우, $v(0)$ 상수를 도입하여 정밀해를 구하라

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v \tag{1.1}$$

풀이 강의노트에서 해석해 풀이과정과 유사하게 변수분리방법을 사용하면

$$\frac{m}{mg - cv}dv = 1 \cdot dt \tag{1.2}$$

양변을 적분하면 식 (1.2) 은 시각 T 에서 다음과 같이 변형할 수 있다.

$$\int_{v(0)}^{v(T)} \frac{m}{mg - cv}dv = \int_0^T 1 \cdot dt \tag{1.3}$$

초기속도가 0이 아니기 때문에 즉, $t = 0$ 일때, $v(0)$ 로 놓고, $mg - cv$ 를 시간의 종속변수 X 로 치환하면,

$$mg - cv = X \tag{1.4}$$

$$\frac{dX}{dv} = -c \tag{1.5}$$

$$dv = -\frac{1}{c}dx \tag{1.6}$$

치환변수 X 의 초기값과 T 에서의 값은 각각, $X(0) = mg - cv(0)$ 그리고 $X(T) = mg - cv(T)$ 가 된다. 다시 식 (1.3) 에 대입하면,

$$-\frac{m}{c}\int_{X(0)}^{X(T)} \frac{1}{X}dv = \int_0^T 1 \cdot dt \tag{1.7}$$

식 (1.7) 을 계산하면,

$$-\frac{m}{c}\ln X|_{X(0)}^{X(T)} = T \tag{1.8}$$

치환된 변수를 환원하면서 전개하면,

$$-\frac{m}{c}\left[\ln\{mg - cv(T)\} - \ln\{mg - cv(0)\}\right] = T \tag{1.9}$$

정리하면

$$\ln\left(\frac{mg-cv(T)}{mg-cv(0)}\right)=-\frac{c}{m}T \tag{1.10}$$

양변에 ln을 취하면,

$$e^{-(c/m)T}=\frac{mg-cv(T)}{mg-cv(0)} \tag{1.11}$$

함수 $v(T)$를 구하기위해 정리하면

$$\{mg-cv(0)\}\,e^{-(c/m)T}=mg-cv(T) \tag{1.12}$$

$$v(T)=\frac{mg}{c}-\frac{\{mg-cv(0)\}}{c}e^{-(c/m)T} \tag{1.13}$$

결국 시각 T에서 엄밀해는 식(1.14)과 같이 계산된다.

$$v(T)=\frac{mg}{c}\left(1-e^{-(c/m)T}\right)+v(0)e^{-(c/m)T} \tag{1.14}$$

1.2 낙하하는 낙하산병에게 작용하는 힘을 계산하는 과정에서, 식(1.1)로 주어진 선형관계식 대신, 다음과 같은 2차식을 사용하여 정밀해 혹은 수치해를 구하여라

$$F_U=-c'v^2$$

단, c'은 2차항력계수(kg/m)이며, 수치해를 구할땐, 10초후의 낙하산병의 속도를 구하라. 여기서, 낙하산병의 질량은 68.1kg이고 2차항력계수는 0.232kg/m이다.

풀이(정확해)

같은 방식으로 식(1.1)을 속도의 제곱항으로 변형하면,

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{c'}{m}v^2 \tag{1.15}$$

$$=\frac{mg-c'v^2}{m} \tag{1.16}$$

같은 방식으로 변수분리 방식을 사용하기 위해 식을 변형하면,

$$\frac{m}{mg-c'v^2}dv=1\cdot dt \tag{1.17}$$

양변의 시간 $t=0$에서 $t=T$까지 정적분을 취하면,

$$\int_{v(0)}^{v(T)}\frac{m}{mg-c'v^2}dv=\int_0^T dt \tag{1.18}$$

다음 식(1.19)과 같은 적분공식을 적용하기 위하여 식을 변형하고

$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx=\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}+C \tag{1.19}$$

적분식에서 발생하는 $\sqrt{c'}v$항을 X로 치환하면

$$m\int_{v(0)}^{v(T)}\frac{1}{(\sqrt{mg})^2-(\sqrt{c'}v)^2}=\int_0^T dt \tag{1.20}$$

$$\frac{m}{\sqrt{c'}}\int_{X(0)}^{X(T)}\frac{1}{\sqrt{mg}^2-X^2}dX=\int_0^T dt \tag{1.21}$$

여기서, 치환변수 $X=\sqrt{c'}v$는, $dX/dv=\sqrt{c'}$, $dv=(1/\sqrt{c'})dX$로 변형되고, 적분구간은 $X(0)=v(0)=0$, $X(T)=\sqrt{c'}v(T)$로 변형된다. 정적분을 풀고 이항하여 $v(T)$로 정리하면,

$$\frac{m}{\sqrt{c'}}\left[\frac{1}{\sqrt{mg}}\tanh^{-1}\frac{X}{\sqrt{mg}}\right]_{X(0)}^{X(T)}=T \tag{1.22}$$

$$\frac{m}{\sqrt{mgc'}}\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)\right)=T \tag{1.23}$$

$$\tanh^{-1}\left(\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)\right)=\frac{\sqrt{gc'}m}{T} \tag{1.24}$$

$$\sqrt{\frac{c'}{mg}}v(T)=\tanh\left(\sqrt{\frac{gc'}{m}}T\right) \tag{1.25}$$

$$\therefore v(t)=\sqrt{\frac{mg}{c'}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gc'}{m}}T\right) \tag{1.26}$$

$\boxed{\text{풀이 (수치해)}}$

부록1장에 수록된 MATLAB Code에서 `v(kk)`를 `v(kk)^2`로 수정한다.

```
clear all; clc; close all;

%% Parameters
m=68.1; % kg
c=0.232; % kg/m
g=9.8;  % kg/s

%% Calculation
t=0:0.0001:20; % time of exact solution

dt=2;           % dt of numerical solution
t1=0:dt:20;     % time of numerical solution
v=sqrt((m*g)/c)*tanh(sqrt((g*c)/m)*t); % exact solution

v1(1)=0;        % initial velocity of numerical solution
for kk=1:length(t1)
    v1(kk+1)=v1(kk)+(g-c/m*v1(kk)^2)*dt;
end

ref=ones(length(t),1)*v(end); % terminal velocity

%% Display result
figure
plot(t,v,'-k',t1,v1(1:end-1),'o--b',t,ref,':r','linewidth',1.5)
text(14,55,'Terminal velocity','FontWeight','bold')
grid on
legend('analytical solution','numerical solution','Location','best')
xlabel('Time (second)')
ylabel('Velocity (m/s)')
```

Listing 1: 2번문제 수치해

1.3 테일러급수(Taylor series)를 증명하라.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

풀이 Taylor급수를 증명하기 위해서는 미적분학 제1기본정리와 제2기본정리를 알아야한다.

Theorem 1.1 (미적분학 제1기본정리). *함수 f 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 적분가능할 때, 함수 F 를 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 라 하면, 이때 다음이 성립한다. f 가 $[a,b]$ 상의 점 c 에서 연속이면, F 는 $[a,b]$ 에서 미분가능하고, $F'(c) = f(c)$ 이다. 즉,*

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \tag{1.27}$$

Proof $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ 함수 $f(t)$ 에 대해 $[a,b]$ 에서 연속이고, (a,b) 에서 미분가능하므로 함수 $S(x)$ 도 $[a,b]$ 에서 연속하고 (a,b) 에서 미분가능하다. 최대최소 정리에 의해 $h > 0$ 일 때 $[x, x+h]$ 에서 $f(t)$ 는 최대값 M 과 최소값 m 을 가진다. 여기서 $mh < S(x+h) - S(x) < Mh$ 이므로

$$\lim_{h\to 0} m \le \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} \le \lim_{h\to 0} M$$

이다, 즉 압착정리에 의해 $\lim_{h\to 0} m = \lim_{h\to 0} M = f(x) = S'(x)$ 이 되므로, $S'(x) = f(x)$ 가 성립한다.

Theorem 1.2 (미적분학 제2기본정리). *f 가 폐구간 $[a,b]$ 에서 적분가능한 함수이고, 함수 F 를 f 의 임의의 역도함수라 하면, 다음식*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \tag{1.28}$$

이 성립한다. 즉, 정적분은 임의의 역도함수의 차로 계산할 수 있다.

Proof 미적분학 제1기본정리에서 $S(x) = F(x) + C$(단, C는 적분상수) 에서, $S(x) = \int_a^x f(t)dt$ 로 정의되었으므로,

$$S(a) = F(a) + C = 0 \tag{1.29}$$

위 식에서 $C = -F(a)$, $S(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ 이다. 따라서,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{1.30}$$

이 성립한다.

Taylor series 미적분학 제2기본정리로부터,

$$\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a) \tag{1.31}$$

위의 식 (1.31) 을 부분적분을 하기 위해 다음 식 (1.32) 로 변형하자

$$\int_a^x f'(t)dt = \int_a^x (-1)\left\{-f'(t)\right\}dt \tag{1.32}$$

$f(t)$ 는 무한번 미분가능하면 부분적분을 무한번 수행할 수 있으므로, -1 을 적분할 함수, $-f'(t)$ 를 미분할 함수로 두고, 부분적분을 수행하면[1],

$$\int_a^x (-1)\left\{-f'(t)\right\}dt = \left[-(x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t) - \frac{(x-t)^3}{6}f'''(t) - \cdots\right]_a^x \tag{1.33}$$

이제 식 (1.33) 을 풀게되면,

$$\begin{aligned}\left[-(x-t)f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2}f''(t) - \frac{(x-a)^3}{6}f'''(t) - \cdots\right] &= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f'''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots \\ &= f(x) - f(a)\end{aligned} \tag{1.34}$$

그러므로, 무한번 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \cdots && (1.35) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n && (1.36)\end{aligned}$$

---

2 공학 수치해석 과제2 (제출기한 2012년10월9일)

2.1 $\cos x$ 의 Maclaurin 급수는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \cdots\end{aligned} \tag{2.1}$$

가장 간단한 형태인 $\cos x = 1$ 로부터 시작하여 항들을 추가해 가면서 $\cos(\pi/3)$ 의 값을 구하라. 각각의 항이 추가될 때마다, 절단오차 (상대오차) 를 계산하라.

2. $x \in \Re$ 에 대하여 $|x| > 1$ 의 개구간 미분이 가능한 다음 함수 $f(x)$ 의 Taylor 급수를 전개하고, $x = 3$ 에서 5차 근사값을 구하고, 절단오차 E_t 를 각각의 차수에 대하여 표시하라.

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

[1] 단, 여기서 -1 을 계속 적분할 때 -1 의 한 부정적분을 구해서 써주면 되는데, 적분변수 t 와 관계없는 값 x 를 상수취급하여 $x-t$ 를 부정적분으로서 구했다.

3. 다음 함수 $f(x) = \ln(\cos x), x \in (-\pi/2, \pi/2)$ 를 7차이상의 다항식으로 전개하라

참고 Maclaurin 급수

$$
\begin{aligned}
\ln(1-x) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, (|x| \le 1, x \ne 1) \\
\ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, (|x| \le 1, x \ne -1)
\end{aligned}
$$

4. 정확도 (accuracy) 와 정밀도 (precision) 에 대하여 조사하라[2] 그리고 각 전공영역에 맞추어 특정한 공학적 이슈를 예를들어 불확실성 (uncertainty) 에 대하여 자신의 생각을 쓰시오.

[2] http://en.wikipedia.org/wiki/Accuracy_and_precision