공학수치해석 중간고사 2012.11.1

문제1 다음 Figure 1은 전투기가 착륙할 때 펼쳐지는 drag parachute 를 보여준다. 이 때 전투기는 속도함수의 가속도 ($a = -0.004v^2 m/sec^2$)의 지배를 받게 된다. 다음 문항에 답하여라.

Figure 1: Drag chute

(a) 감속하는 전투기의 속도에 대한 수학적모델을 세우고, 독립변수와 종속변수를 나타내시오. [5점]

solution (a)

$$a = \frac{dv}{dt} = -0.004v^2$$

종속변수 :a,v, 독립변수 :t

(b) 감속하는 전투기의 속도 $80m/s$에서 $10m/s$에 도달하기 까지 걸리는 시간의 해석해(exact solution)를 구하시오. [10점]

solution (b)

$$\frac{dv}{v^2} = 0.004dt$$

$$\int_{80}^{v} \frac{1}{v^2} dv = \int_0^t -0.004dt$$

$$\left[\frac{-1}{v}\right]_{80}^{v} = -0.004t$$

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{80}\right) = 0.004t$$

$$t = 250\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{80}\right)$$

$$\therefore t(v = 10) = 21.9\ (second)$$

(c) (b)에서 동일하게 감속하는 시간동안 이동한 거리의 해석해(exact solution) 혹은 Euler법을 사용한 수치해 (numerical solution)을 구하시오. (단, 수치해를 구할때 독립변수의 간격은 2로 하고, 각 단계에서의 절단오차 소숫점 4째자리까지 나타내시오) [10점]

solution (c)

exact sol.

$$
\begin{aligned}
a &= \frac{dv}{dt} \\
\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} &= \frac{dv}{ds}v \\
\frac{dv}{v} &- 0.004ds \\
\int_{80}^{v} \frac{dv}{v} &= \int_{0}^{s} -0.004ds \\
[\ln v]_{80}^{v} &= -0.004s \\
\ln v - \ln 80 &= -0.004s \\
s &= 250 \ln\left(\frac{80}{v}\right) \\
\therefore s(v = 10) &= 520 \ (m)
\end{aligned}
$$

num. sol.

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{80}\right) &= 0.004t \\
v &= \left(0.004t + \frac{1}{80}\right)^{-1} \\
\frac{ds}{dt} &= \left(0.004t + \frac{1}{80}\right)^{-1} \\
s_{i+1} &= s_i + (t_{i+1} - t_i)\left(0.004t_i + \frac{1}{80}\right)^{-1}
\end{aligned}
$$

Time(second)	Distance(m)
0	0
2	160
4	257.561
6	327.7364
8	382.5309
10	427.4748
12	465.57
14	498.6278
16	527.8249
18	553.9687
20	577.6374
22	599.259

문제2 다음 Figure2는 등분포하중을 받는 캔틸레버보를 나타낸다. 탄성곡선의 방정식은 식(1)와 같다. 다음 문항에 답하여라.

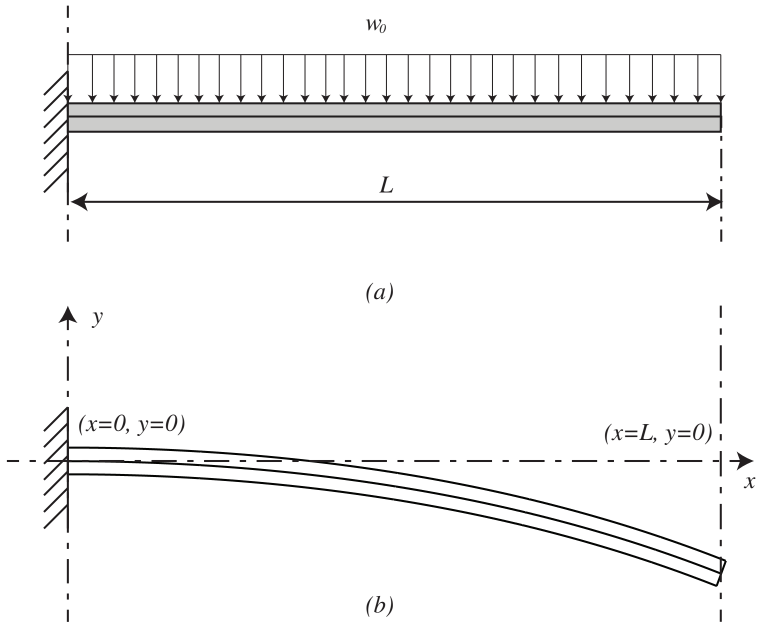

Figure 2: Cantilever beam

$$y = \frac{w_0}{24EI}\left(-x^4 + 4Lx^3 - 6L^2x^2\right) \tag{1}$$

(a) 캔틸레버보의 $x = 50cm$ 일 때를 기준점으로 하여 0차에서 3차까지의 Taylor급수전개를 사용하여 $x = 100cm$ 지점의 처짐(y)의 근사값을 구하고, 참백분율 상대오차 ε_t 를 구하라. (단, 매개변수는 $L = 300cm$, $E = 50,000kN/cm^2$, $I = 30,000cm^4$, $w_0 = 2.5kN/cm$ 과 같다.) [10점]

solution (a) 참값 $f(100) = -2.9861 \times 10^{-1}$

Order	Equation	Result	ε_t
0	$f(100) \cong f(50)$	$f(100) \cong -8.3767 \times 10^{-2}$	71.9477%
1	$f(100) \cong f(50) + f'(50)(50)$	$f(100) \cong -2.4175 \times 10^{-1}$	19.0407%
2	$f(100) \cong f(50) + f'(50)(50) + \frac{1}{2!}f''(50)(50)^2$	$f(100) \cong -3.0686 \times 10^{-1}$	2.7616%
3	$f(100) \cong f(50) + f'(50)(50) + \frac{1}{2!}f''(50)(50)^2 + \frac{1}{3!}f'''(50)(50)^3$	$f(100) \cong= -2.9818 \times 10^{-1}$	0.1453%

(b) (a)의 매개변수에서 $L = 300 \pm 5cm$ 그리고 $I = 30,000 \pm 100cm^4$ 의 측정오차가 있었다. 1차 오차해석으로 $x = 100cm$ 지점에서의 처짐각(dy/dx)의 추정오차값을 구하여라. (단, 절단오차는 소수점 4째 자리의 과학적 표기법으로 표시한다.) [10점]

solution (b)

$$\begin{aligned}\Delta y' &= \left|\frac{\partial y'}{\partial L}\right|\Delta L + \left|\frac{\partial y'}{\partial I}\right|\Delta I \\ &= \left|\frac{w_0}{24EI}(12x^2-24Lx)\right|\Delta L + \left|-\frac{w_0}{24EI^2}(-4x^3+12Lx^2-12L^2x)\right|\Delta I \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= -5.2778\times10^{-3} \pm 2.2593\times10^{-4}\end{aligned}$$

(c) 처짐 y가 $1cm$가 되는 지점을 이분법을 사용하여 근을 구하라, $x_l = 200cm$, $x_u = 250cm$을 초기구간으로 가정하고, 근사오차 ε_a가 1% 이하로 떨어질 때까지 반복하라. [10점] (단, 반복횟수만큼의 열을 가지는 테이블을 작성하고 함수값등의 절단오차는 소수점 4째 자리의 과학적 표기법으로 표시한다.)

Iter.	x_l	x_u	x_r	$f'(x_r)$	$f(x_r)$	ε_a
1	200	250	225	-0.00076538	-0.1272	11.1111%
2	200	225	212.5	-0.00097819	-0.035321	5.8824%
3	200	212.5	206.25	-0.0010825	0.010261	3.0303%
4	206.25	212.5	209.375	-0.0010305	-0.012497	1.4925%
5	206.25	209.375	207.8125	-0.0010566	-0.0011094	0.75188%

solution (c)

문제3 점성감쇠조화진동(harmonic vibration with viscoud damping)하는 물체가 공진상태까지 도달할 때, 정적변위응답u_{st}에 대한 동적변위응답$u(t)$는 ξ가 작은 경우 다음 근사식(2)과 같이 주어진다. 다음 문항에 답하여라.

$$u(t) \cong u_{st}\frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi\omega_n t}-1\right)\cos\omega_n t \tag{2}$$

여기서, ξ는 감쇠비, ω_n은 고유진동수이다.

(a) $\omega_n = 1$이고, $\xi = 0.05$일 때, 식(2)을 통해 최대변위증폭비 $\max\{u(t)/u_{st}\}$가 5에 도달하는 시간을 Newton-Raphson법을 통해 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$으로 세번 반복한다. [15점]

(b) (a)를 할선법(secant method)를 사용하여 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$, $x_1 = 11$으로 시작하고 세번 반복하라 [15점]

(c) (a)를 수정된 할선법(modified secant method)를 사용하여 구하여라. 초기가정 $x_0 = 10$, $\delta = 0.01$로 시작하고 세번 반복하라 [15점]

► 유의사항 : 식(2)의 1차도함수를 구하기 어려운 경우, 최대변위증폭비를 구하는 문제이기 때문에 $\max(\cos\omega_n t) = 1$로 가정한 포락곡선함수(envelope function)를 함수로 사용하여도 되며, 증폭비는 절대값이기 때문에 함수의 근의 존재유무에 유의하라.

문제3(CASE-1) 식(2)을 사용하는 경우 Newton-Raphson법에서는 1차도함수 $f'(t)$를 구해야한다.

$$f'(t) = -\frac{\omega_n}{2\xi}\left\{\xi e^{-\xi\omega_n t}\cos\omega_n t + \left(e^{-\xi\omega_n t} - 1\right)\sin\omega_n t\right\} \tag{3}$$

(a) Newton-Raphson method

Iter.	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	ε_a
0	10	1.0653	-1.8861	5.3462%
1	10.5648	0.89641	-3.6056	2.2991%
2	10.8134	0.82357	-4.0546	1.8438%

(b) Secant method

Iter.	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	ε_a
0	10	11	1.0653	0.7695	19.1256%
1	11	13.6013	0.7695	0.065831	1.7578%
2	13.6013	13.8447	0.065831	0.0045619	0.13071%

(c) Modified secant method

Iter.	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i + \delta x_i)$	ε_a
0	10	1.0653	1.0351	26.0441%
1	13.5216	0.086074	0.051804	2.4501%
2	13.8612	0.00043785	-0.034098	0.012676%

문제3(CASE-2) 포락곡선함수를 사용하는 경우 포락곡선함수는 다음 식(4)과 같다. 0에서 작아지는 함수이므로, $f(t)+5=0$으로 함수를 구성해야한다.

$$\frac{u(t)}{u_{st}} = f(t) = \frac{1}{2\xi}\left(e^{-\xi\omega_n t} - 1\right) \tag{4}$$

$$f'(t) = -\frac{\omega_n}{2}e^{-\xi\omega_n t} \tag{5}$$

(a) Newton-Raphson method

Iter.	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	ε_a
0	10	1.0653	-0.30327	25.996%
1	13.5128	0.08831	-0.25442	2.5044%
2	13.8599	0.00076191	-0.25004	0.021981%

(b) Secant method

Iter.	x_i	x_{i+1}	$f(x_i)$	$f(x_{i+1})$	ε_a
0	10	11	1.0653	0.7695	19.1256%
1	11	13.6013	0.7695	0.065831	1.7578%
2	13.6013	13.8447	0.065831	0.0045619	0.13071%

(c) Modified secant method

Iter.	x_i	$f(x_i)$	$f(x_i+\delta x_i)$	ε_a
0	10	1.0653	1.0351	26.0441%
1	13.5216	0.086074	0.051804	2.4501%
2	13.8612	0.00043785	-0.034098	0.012676%