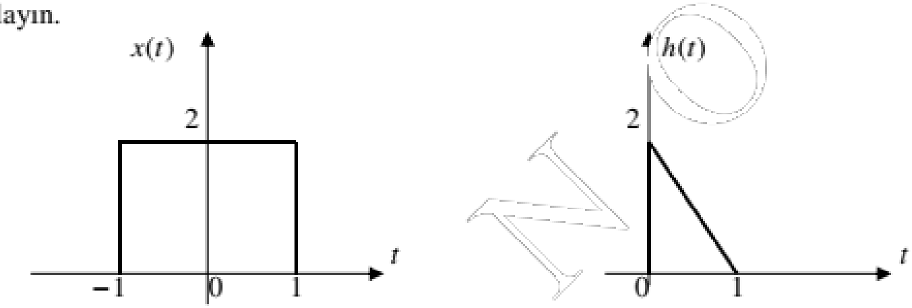
Örnek

Giriş $x(t)$ ve sistem impuls fonksiyonu $h(t)$ aşağıdaki gibi tanımlanıyorsa sistem çıkışı $y(t)$ yi hesaplayın.



- a -   - b -

Şekil 31. Sistem giriş ve impuls fonksiyonları

Çözüm

Verilen tanımlara göre $x(t)$ ve $h(t)$ nın değişimleri aşağıdaki gibi olacaktır.

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -1 < t < 1 \\ 0, & -1 > t > 1 \end{cases} \quad ; \quad h(t) = \begin{cases} -2t + 2, & 0 < t < 2 \\ 0, & 0 > t > 2 \end{cases}$$

Sistem çıkışı $y(t)$, giriş ve çıkışın konvolüsyonu olarak $y(t) = x(t) * h(t)$ ile hesaplanacaktır.

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

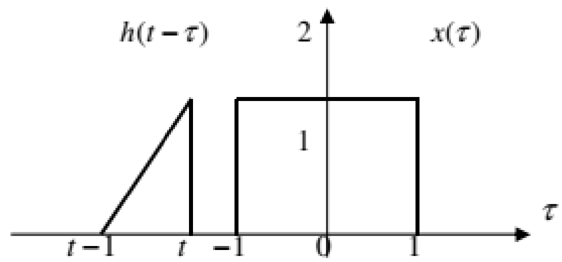
Kuralı gereğince impuls fonksiyonu üzerinde teknik olarak convolution prosesi ile ilgili olarak sırasıyla

1. $h(t) \rightarrow h(\tau)$, 2. $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$, 3. $h(-\tau) \rightarrow h(-\tau + t)$, 4. $h(-\tau + t) = h(t - \tau)$

Not : Yukarıda Şekil (b) de verilen üçgene ait $h(t) = -2t + 2$ denklemi aslında bir tür "doğru denklemi" dir. Koordinatları belli olan bir doğrunun belirlenmesini iyi bilmekteyiz :

1. $t < -1$ için

Bu durum Şekil (d) ye özdeş olacaktır.



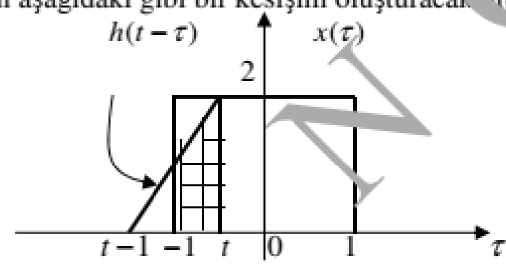
- c -

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ bağıntısına göre $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ arasında bir örtüşme olmadığı için convolution, dolaysıyla çıkış sıfır olacaktır.

$y(t) = 0\,, \quad t < -1$

2. $-1 < t < 0$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi bir kesişim oluşturacaklardır.



- d -

burada taralı alanın hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. Integrasyondaki alt ve üst sınırın $(-1,\ t)$ olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{-1}^{t} (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{-1}^{t} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

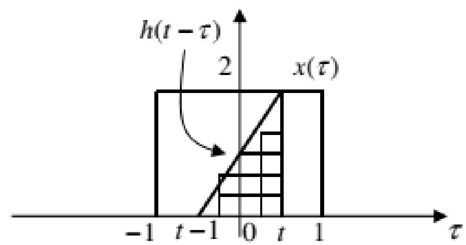
$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{-1}^{t} = 4\left[\,[(1-t)t + \frac{t^2}{2}] - [(1-t)(-1) + \frac{(-1)^2}{2}]\right] = 4\left[\,[t - t^2 + \frac{t^2}{2}] - [-1 + t + \frac{1}{2}]\right]$$

$$= 4\left[t - \frac{t^2}{2} + 1 - t - \frac{1}{2}\right] = 4\left[-\frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\right] = (-2t^2 + 2)$$

$$= 2(1-t^2)$$

3. $0 < t < 1$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- e -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

integrasyonda gerekli parametrelerin yerine yazılması gerekecektir. Integrasyondaki alt ve üst sınırın ($t-1, t$) olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise
$h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{t} (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{t-1}^{t} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{t-1}^{t} = 4\left[\,[(1-t)t + \frac{t^2}{2}] - [(1-t)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2}]\right]$$

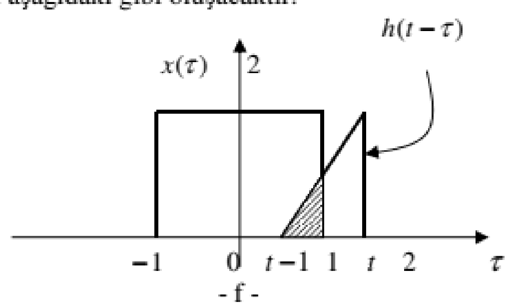
$$= 4\left[\,[t - t^2 + \frac{t^2}{2}] - [-(1-2t+t^2) + \frac{t^2-2t+1}{2}]\right] = 4\left[\,[t - \frac{t^2}{2}] - [-1+2t-t^2+\frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}]\right]$$

$$= 4\left[\,[t - \frac{t^2}{2}] - [-\frac{t^2}{2} + t - \frac{1}{2}]\right] = 4\left[t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2}\right] = 4\left[\frac{1}{2}\right]$$

$$= 2$$

4. $1 < t < 2$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



- f -

Taralı alanın benzer şekilde hesaplanması gerekecektir. Bunun için kullanılacak

$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

integrasyonda gerekli parametreler olarak alt ve üst sınırın ($t-1, 1$) olduğu, $x(\tau) = 2$ (dörtgenin değeri), $h(t) = -2t + 2$ ise $h(t-\tau) = -2(t-\tau) + 2 = 2(-t+1+\tau)$ alınırsa integrasyon,

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^{1} (2)\,[2(-t+1+\tau)]\, d\tau = 4\int_{t-1}^{1} [(1-t)+\tau)]\, d\tau$$

$$= 4[(1-t)\,\tau + \frac{\tau^2}{2}]_{t-1}^{1} = 4\left[[(1-t)+\frac{1}{2}] - [(1-t)(t-1) + \frac{(t-1)^2}{2}] \right]$$

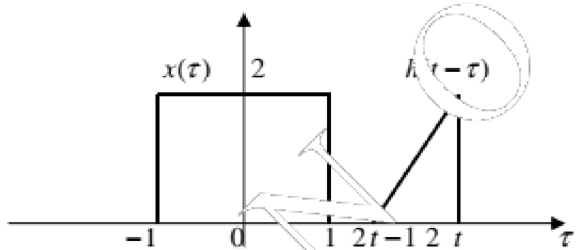
$$= 4\left[[1-t-+\frac{1}{2}] - [-(1-2t+t^2) + \frac{t^2-2t+1}{2}] \right] = 4\left[[\frac{3}{2}-t] - [-1+2t-t^2+\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2}] \right]$$

$$= 4\left[[\frac{3}{2}-t] - [-\frac{t^2}{2}+t-\frac{1}{2}] \right] = 4\left[\frac{3}{2}-t+\frac{t^2}{2}-t+\frac{1}{2} \right] = 4\left[\frac{t^2}{2}-2t+2 \right] = (2t^2-8t+8) = 2(t^2-4t+4)$$

$$= 2(t-2)^2$$

5. $2 < t$ için

Bu koşul için iki fonksiyon aşağıdaki gibi oluşacaktır.



\- g -

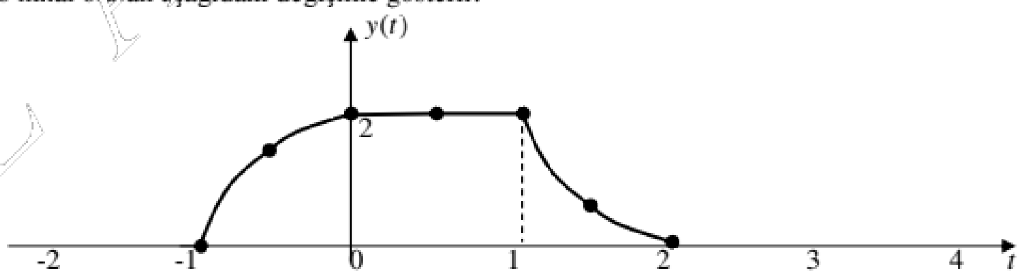
Son durumda $x(\tau)$ ve $h(t-\tau)$ arasında örtüşme olmadığından bir alan söz konusu olamayacağından convolution veya sistem çıkış fonksiyonu sıfır olacaktır.

$y(t) = 0\,,\quad t > 2$

bulunan çıkışlar aşağıdaki tabloda ayrıca derlenmiştir.

Çıkış	$t < -1$	$-1 < t < 0$	$0 < t < 1$	$1 < t < 2$	$2 < t$
$y(t)$	0	$2(1-t^2)$	2	$2(t-2)^2$	0

Tablo nihai olarak aşağıdaki değişime gösterir.



\- h -

Şekil 32. Örneğe ait çıkışın $y(t) = x(t) * h(t)$ convolution ile hesaplanması

2.30. Evaluate $y[n]=x[n]*h[n]$, where $x[n]$ and $h[n]$ are shown in Fig. 2-23, (a) by an analytical technique, and (b) by a graphical method.

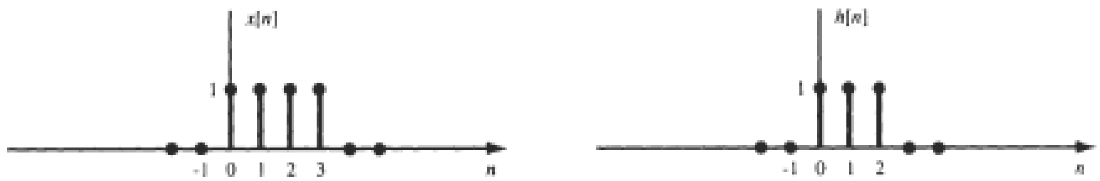


Fig. 2-23

(a) Note that $x[n]$ and $h[n]$ can be expressed as

$$x[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]$$
$$h[n]=\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$$

Now, using Eqs. (*2.38*), (*2.130*), and (*2.131*), we have

$$\begin{aligned} x[n]*h[n] &= x[n]*\{\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]\} \\ &= x[n]*\delta[n]+x[n]*\delta[n-1]+x[n]*\delta[n-2]\} \\ &= x[n]+x[n-1]+x[n-2] \end{aligned}$$

Thus,
$$\begin{aligned} y[n] = {} & \delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3] \\ & +\delta[n-1]+\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4] \\ & +\delta[n-2]+\delta[n-3]+\delta[n-4]+\delta[n-5] \end{aligned}$$

or
$$y[n]=\delta[n]+2\delta[n-1]+3\delta[n-2]+3\delta[n-3]+2\delta[n-4]+\delta[n-5]$$

or
$$y[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$$

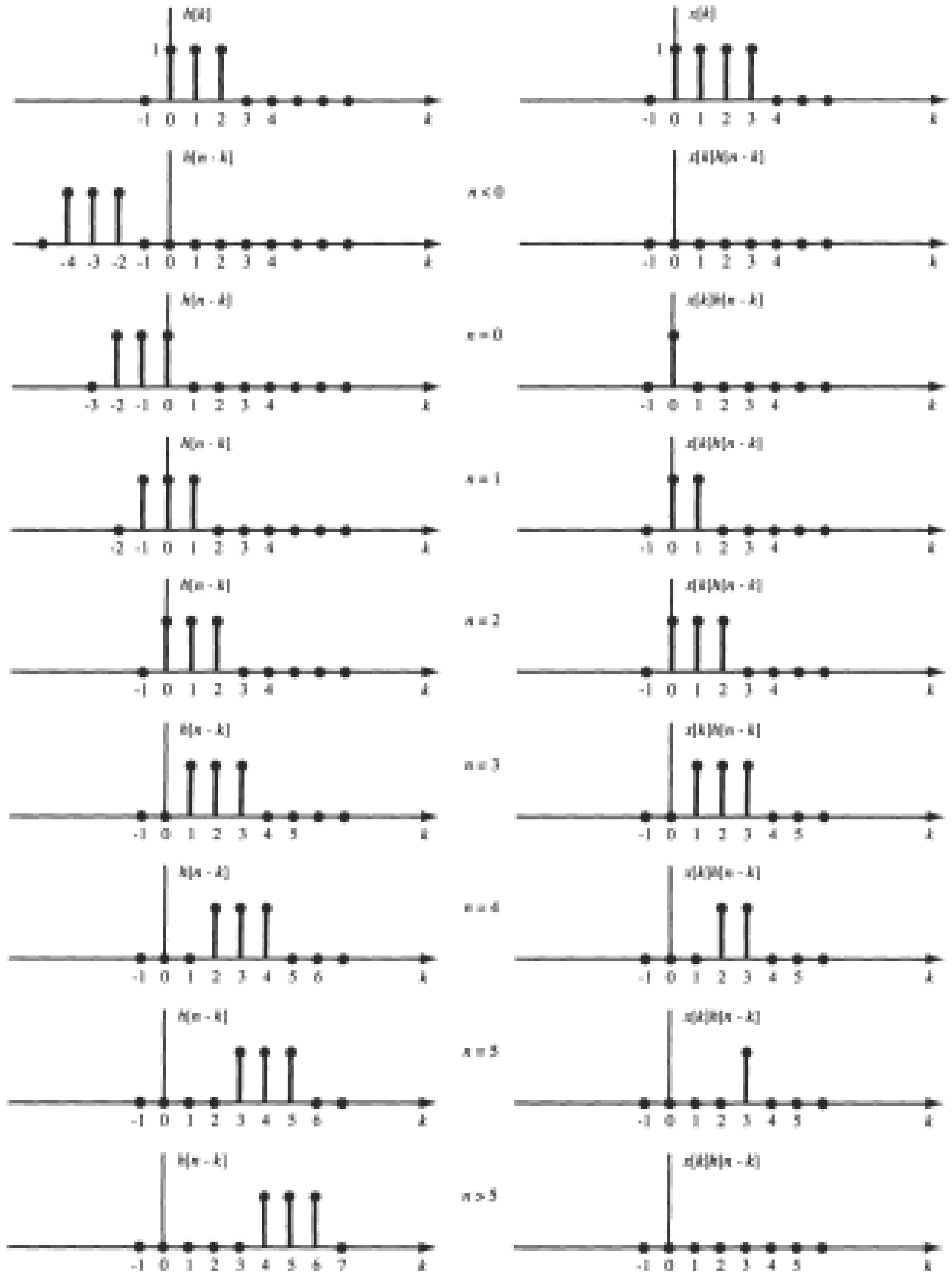


Fig. 2-24

(*b*) Sequences $h[k]$, $x[k]$ and $h[n-k]$, $x[k]h[n-k]$ for different values of n are sketched in Fig. 2-24. From Fig. 2-24 we see that $x[k]$ and $h[n-k]$ do not overlap for $n<0$ and $n>5$, and hence $y[n]=0$ for $n<0$ and $n>5$. For $0 \le n \le 5$, $x[k]$ and $h[n-k]$ overlap. Thus, summing $x[k]h[n-k]$ for $0 \le n \le 5$, we obtain

$$y[0]=1 \qquad y[1]=2 \qquad y[2]=3 \qquad y[3]=3 \qquad y[4]=2 \qquad y[5]=1$$

or

$$y[n]=\{1,2,3,3,2,1\}$$

which is plotted in Fig. 2-25.

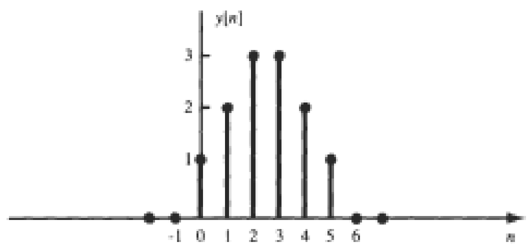


Fig. 2-25