Pumping Lemma 한줄 정리: 어떤 language L이 infinite한 (regular/linear/CF) language라면, L에 포함되면서 충분히 길이가 긴 sentence w에는 pumping되는 부분(반복해서 계속 들어가는)이 존재함.

```
Pumping Lemma for Regular Language

If L is an infinite regular language, Lol infinite한 regular이면,
then then

∃ positive integers m, Sel 정수 mol 존재하여,
∀w∈L with |w| ≥ m, Multiput Mul
```

```
Pumping Lemma for Linear Language

If L is an infinite linear language, then then
∃ positive integers m, Sel 정수 m이 존재하여,
∀w∈L with |w| ≥ m, m보다 길이가 길고 L에 속하는 모든 w에 대해,
∃ decomposition of w=uvxyz web 5개의 substring uvxy2로 분해가능하고,
(|uvyz|≤m,|y|≥1), v, y pumping되며,
∀ i=0,1,2,..., w<sub>i</sub>=uv<sup>i</sup>xy<sup>i</sup>z ∈ L → 고 위치는 w의 양쪽 끝 한정된 길이 내에 있음.
```

```
Pumping Lemma for Context Free Language

If L is an infinite context free language, LOI infinite한 context free이면, then then

∃ positive integers m, SOI 정수 mOI 존재하여,

∀W∈L with |w| ≥ m, MIT 길이가 길고 LOI 속하는 모든 wOI 대해,

∃ decomposition of w=uvxyz w는 5개의 substring uvxyz로 분해가능하고,

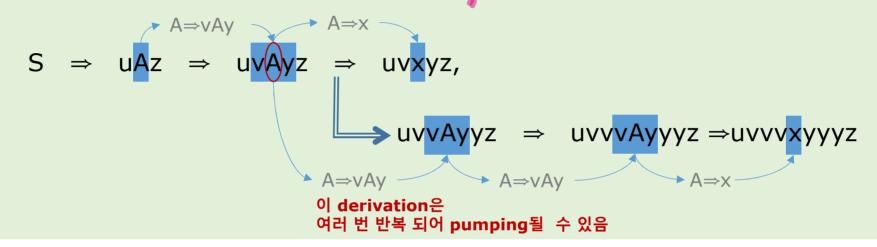
(|vxy|≤m,|y|≥1), V, Y는 pumping되며,

∀ i=0,1,2,..., w<sub>i</sub>=uv<sup>i</sup>xy<sup>i</sup>z ∈ L J 기치는 wOI 중간 부분 한정된 길이 내에 있음.
```

Pumping이 존재하는 이유

Infinite languag가 L, L을 생성하는 gramma가 G일 때, 다음 사실에 주목

- ① G의 variable의 개수는 유한
- ② L의 sentence 수는 무한하므로, sentence w의 길이는 무한히 길어질 수 있음
 - → Derivation 과정에서 <u>두 번 이상 반복되는 variable</u>이 존재



Pumping이 발생하는 위치 비교

Rig-L left-L-

② Linear grammar: $S \rightarrow aSb \mid ab$, $S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSb \Rightarrow aa...aSb...bb \Rightarrow aa...bb \Rightarrow aa...bb \Rightarrow aa...bb \Rightarrow aa...bb \Rightarrow$

③ Context free grammar: $S \rightarrow SS|aAb|ab$ $S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aAbSS \Rightarrow a^nb^nSS \Rightarrow a^nb^na^mb^mS$ $S \Rightarrow a^nb^na^mb^maAb \Rightarrow a^nb^na^mb^maAb \Rightarrow a^nb^na^mb^maAb \Rightarrow a^nb^na^mb^maAb$...b

⇒ anbnambma...aabb...b = w

u x y z

앞쪽에서 pumping 나타남

Pumping Lemma를 이용한 증명의 기본 틀 (L이 not CFL임을 증명할 때)

L이 CFL이라고 가정 → pumping lemma for CFL의 부정을 증명 → 모순 되므로 L은 CFL이 아님

Pumping Lemma의 부정 for Context Free Language

예) L={aⁿbⁿcⁿ | n≥0} 이 context-free가 아님을 증명

Assume L is context free.

```
\forall m>0,
 We choose w= a<sup>m</sup>b<sup>m</sup>c<sup>m</sup> (w\inL, |w| \geq m)
 \forall decomposition of w = aa....aabb....bbcc....cc = uvxyz ( |vxy| \leqm, |y|\geq1),
```

vxy has the forms,

① vxy = $a^{k1}xa^{k2}$ (0 ≤ k1+k2 ≤m), set i=0, then $w_0=uxz=a^{m-(k1+k2)}b^mc^m \notin L$ (∵ m-(k1+k2)≠m)

② $vxy = b^{k1}xb^{k2}$ (0 $\leq k1+k2 \leq m$), set i=0, then $w_0 = uxz = m$

③ $vxy = c^{k_1}xc^{k_2}$ (0 $\leq k_1+k_2 \leq m$), set i=0, then $w_0=uxz=$

④ vxy = $a^{k_1}xb^{k_2}$ (0 ≤ k_1+k_2 ≤m), set i=0, then $w_0=uxz=a^{m-k_1}b^{m-k_2}c^m \notin L$ (∵m-k1≠m or m-k2≠m)

⑤ $vxy = b^{k_1}xc^{k_2}$ (0 ≤ k1+k2 ≤m), set i=0, then $w_0 = uxz = 0$

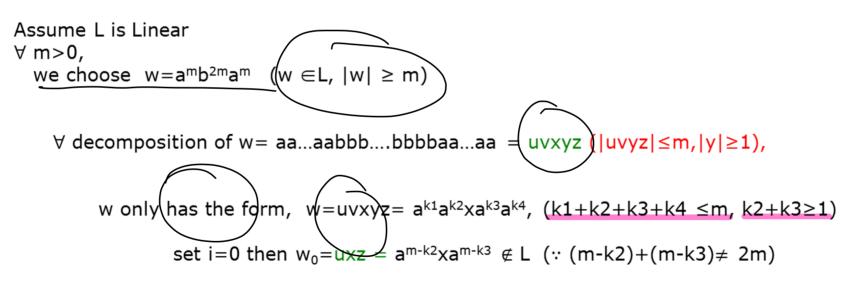
Pumping Lemma for Context Free Language가 거짓이므로 모순 :: L is not Context Free.

Pumping Lemma를 이용한 증명의 기본 틀 (L이 not Linear임을 증명할 때)

L이 Linear이라고 가정 → pumping lemma for Linear Lang의 부정을 증명 → 모순 되므로 L은 not Linear임

Pumping Lemma의 부정 for Linear Language

예) $L = \{w \mid n_a(w) = n_b(w)\}$ 가 Linear가 아님을 증명



pumping lemma for Linear language가 거짓이므로 모순 : L is not Linear