Pumping Lemma 한줄 정리: 어떤 language L이 infinite한 (regular/linear/CF) language라면, L에 포함되면서 충분히 길이가 긴 sentence w에는 pumping되는 부분(반복해서 계속 들어가는)이 존재함.

Pumping Lemma for Regular Language

If L is an infinite regular language,	L이 infinite한 regular이면,
then	then
∃ positive integers m,	양의 정수 m이 존재하여,
$\forall w \in L$ with $\lvert w \rvert \geq m$,	m보다 길이가 길고 L에 속하는 모든 w에 대해,
∃ decomposition of w=xyz	w는 3개의 substring xyz로 분해가능하고,
$(\lvert xy \rvert \leq m, \lvert y \rvert \geq 1)$,	y는 pumping되며,
$\forall\ i=0,1,2,\ldots,\ w_i = xy^iz \in L$	그 위치는 w의 앞부분 한정된 길이 내에 있음.

Pumping Lemma for Linear Language

If L is an infinite linear language,	L이 infinite한 linear이면,
then	then
∃ positive integers m,	양의 정수 m이 존재하여,
$\forall w \in L$ with $\lvert w \rvert \geq m$,	m보다 길이가 길고 L에 속하는 모든 w에 대해,
∃ decomposition of w=uvxyz	w는 5개의 substring uvxyz로 분해가능하고,
$(\lvert uvyz \rvert \leq m, \lvert y \rvert \geq 1)$,	v, y는 pumping되며,
$\forall\ i=0,1,2,\ldots,\ w_i = uv^ixy^iz \in L$	그 위치는 w의 양쪽 끝 한정된 길이 내에 있음.

Pumping Lemma for Context Free Language

If L is an infinite context free language,	L이 infinite한 context free이면,
then	then
∃ positive integers m,	양의 정수 m이 존재하여,
$\forall w \in L$ with $\lvert w \rvert \geq m$,	m보다 길이가 길고 L에 속하는 모든 w에 대해,
∃ decomposition of w=uvxyz	w는 5개의 substring uvxyz로 분해가능하고,
$(\lvert vxy \rvert \leq m, \lvert y \rvert \geq 1)$,	v, y는 pumping되며,
$\forall\ i=0,1,2,\ldots,\ w_i = uv^ixy^iz \in L$	그 위치는 w의 중간 부분 한정된 길이 내에 있음.

Pumping이 존재하는 이유

Infinite languag가 L, L을 생성하는 gramma가 G일 때, 다음 사실에 주목

① G의 **variable의 개수는 유한**

② L의 sentence 수는 무한하므로, sentence **w의 길이는 무한히** 길어질 수 있음

➔ Derivation 과정에서 **두 번 이상 반복되는 variable이 존재**

$$S \Rightarrow uAz \xrightarrow{A \Rightarrow vAy} uvAyz \xrightarrow{A \Rightarrow x} uvxyz,$$

$$uvAyz \xrightarrow{A \Rightarrow vAy} uvvAyyz \xrightarrow{A \Rightarrow vAy} uvvvAyyyz \xrightarrow{A \Rightarrow x} uvvvxyyyz$$

이 derivation은
여러 번 반복 되어 pumping될 수 있음

Pumping이 발생하는 위치 비교

Rig-L Left-L

① Regular grammar: S → abS | ab
w=xyz, |xy|≤m

$S \Rightarrow abS \Rightarrow ababS \Rightarrow abab...abS \Rightarrow \underbrace{ab}_{x}\underbrace{ab}_{y}\underbrace{...abab}_{z} = w = \boxed{(ab)^n}$

앞쪽에서 pumping 나타남

② Linear grammar: S → aSb | ab
w=uvxyz, |uvyz|≤m

$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aa...aSb...bb \Rightarrow \underbrace{a}_{u}\underbrace{a}_{v}\underbrace{...aabb...}_{x}\underbrace{b}_{y}\underbrace{b}_{z} = w = a^nb^n$

양끝에서 pumping 나타남

가운데에서 찾을 수 있다.

③ Context free grammar: (S → SS|aAb|ab
A→aAb|ab.)
w=uvxyz, |uvyz|≤m

$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS \Rightarrow aAbSS \Rightarrow a^nb^n SS \Rightarrow a^nb^na^mb^mS$ ⇒SSSS

$\Rightarrow a^nb^na^mb^maAb \Rightarrow a^nb^na^mb^ma...aAb...b$

$\Rightarrow \underbrace{a^nb^na^mb^ma...a}_{u}\underbrace{a}_{v}\underbrace{ab}_{x}\underbrace{b}_{y}\underbrace{...b}_{z} = w$

≤M

중간에서 pumping 나타남

양쪽 끝에서 불가능

Pumping Lemma를 이용한 증명의 기본 틀 (L이 not CFL임을 증명할 때)

L이 CFL이라고 가정 → pumping lemma for CFL의 부정을 증명 → 모순 되므로 L은 CFL이 아님

Pumping Lemma의 부정 for Context Free Language

$\forall$ positive integers m, → 양의 정수 m은 주어졌다고 가정
  $\exists$ w$\in$L with |w| $\geq$ m, → m보다 길이가 길고 L에 속하는 w를 선택함.
    $\forall$ decomposition of w=uvxyz → w를 uvxyz로 분해하는 모든 방법 중
      (|vxy|$\leq$m,|y|$\geq$1), → |vxy|$\leq$m 를 만족하는 vxy의 형태를 나타냄.
  $\exists$ i=0,1,2,..., $w_i=uv^ixy^iz \notin L$ → $w_i=uv^ixy^iz$ 가 L에 속하지 않게 되는 i를 찾음.

예) L={$a^nb^nc^n$ | n$\geq$0} 이 context-free가 아님을 증명

Assume L is ~~not~~ context free.
$\forall$ m>0,
  We choose w= $a^mb^mc^m$ (w$\in$L, |w| $\geq$ m)

  $\forall$ decomposition of w = aa.....aabb.....bbcc.....cc = uvxyz (|vxy| $\leq$m, |y|$\geq$1),
    vxy has the forms,
① vxy = $a^{k1}xa^{k2}$ (0 $\leq$ k1+k2 $\leq$m), set i=0, then w_0=uxz= $a^{m-(k1+k2)}b^mc^m \notin L$ ($\because$ m-(k1+k2)$\neq$m)
② vxy = $b^{k1}xb^{k2}$ (0 $\leq$ k1+k2 $\leq$m), set i=0, then w_0=uxz=
③ vxy = $c^{k1}xc^{k2}$ (0 $\leq$ k1+k2 $\leq$m), set i=0, then w_0=uxz=
④ vxy = $a^{k1}xb^{k2}$ (0 $\leq$ k1+k2 $\leq$m), set i=0, then w_0=uxz= $a^{m-k1}b^{m-k2}c^m \notin L$ ($\because$m-k1$\neq$m or m-k2$\neq$m)
⑤ vxy = $b^{k1}xc^{k2}$ (0 $\leq$ k1+k2 $\leq$m), set i=0, then w_0=uxz=

Pumping Lemma for Context Free Language가 거짓이므로 모순
$\therefore$ L is not Context Free.

Pumping Lemma를 이용한 증명의 기본 틀 (L이 not Linear임을 증명할 때)

L이 Linear이라고 가정 → pumping lemma for Linear Lang의 부정을 증명 → 모순 되므로 L은 not Linear임

Pumping Lemma의 부정 for Linear Language

$\forall$ m>0, → 양의 정수 m은 주어졌다고 가정
$\exists$ w∈L with |w| ≥ m, → m보다 길이가 길고 L에 속하는 w를 선택함.
$\forall$ decomposition of w=uvxyz → w를 uvxyz로 분해하는 모든 방법 중
(|uvyz|≤m,|y|≥1), |uvyz|≤m 를 만족하는 uvyz의 형태를 나타냄.
$\exists$ i=0,1,2,..., $w_i=uv^ixy^iz \notin L$ → $w_i=uv^ixy^iz$ 가 L에 속하지 않게 되는 i를 찾음.

예) L ={w| $n_a(w)=n_b(w)$}가 Linear가 아님을 증명

Assume L is Linear
$\forall$ m>0,
we choose $w=a^mb^{2m}a^m$ (w ∈L, |w| ≥ m)

$\forall$ decomposition of w= aa...aabbb....bbbbaa...aa = uvxyz (|uvyz|≤m,|y|≥1),

w only has the form, $w=uvxyz= a^{k1}a^{k2}xa^{k3}a^{k4}$, (k1+k2+k3+k4 ≤m, k2+k3≥1)

set i=0 then $w_0=uxz = a^{m-k2}xa^{m-k3} \notin L$ (∵ (m-k2)+(m-k3)≠ 2m)

pumping lemma for Linear language가 거짓이므로 모순
∴ L is not Linear