

1. Turing Machine  $M = (\{q_0, q_1, q_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_f\})$ 이 주어졌다. (15점)  
 $\delta(q_0, a) = (q_1, a, R), \delta(q_1, a) = (q_1, a, R), \delta(q_1, b) = (q_1, b, R), \delta(q_1, \square) = (q_f, \square, R),$   
(1) M에 의해 accept되는 길이가 3이하인 string을 모두 찾으시오.  
a. aa. ab. aaa. aab. aba. abb (모두 7개)

(2) M에 의해 accept되는 language  $L(M)$ 을 집합으로 나타내시오.  
 $L = \{aw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

(3) M과 equivalent하면서 다음 조건을 만족하는 Turing Machine  $M^{new}$ 를 정의하시오.  
조건:  $M^{new}$ 는 2개의 state와 1개의 transition 만으로 이루어짐.  
 $M = (\{q_0, q_f\}, \{a, b\}, \{a, b, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_f\})$   
 $\delta(q_0, a) = (q_f, a, R)$

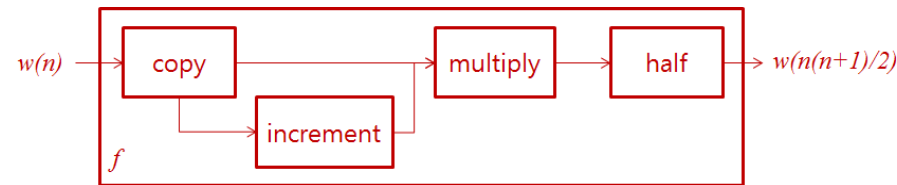
2. 함수  $f(n) = 1 + 2 + \dots + n$ 을 계산하는 Turing Machine을 만들고자 한다. 이 때 입력은 unary notation으로 표현된 string (예를 들어 숫자 3의 경우  $w(3)=111$ )을 사용한다.  
또한 increment, copy, multiply, half와 같은 연산에 대해서는 오른쪽과 같이 입출력이 정의되는 Turing machine들이 주어져 있다고 가정한다. (15점)

Copy (복사):  $q_{c_0}w(n) \vdash q_{c_f}w(n)0w(n)$   
Increment (1증가):  $q_{i_0}w(n)0 \vdash q_{i_f}w(n+1)0$   
Multiply (곱셈):  $q_{m_0}w(n)0w(m) \vdash q_{m_f}w(nm)$   
Half (2로 나눔):  $q_{h_0}w(2n) \vdash q_{h_f}w(n)$

(1) 함수  $f(n) = 1 + 2 + \dots + n$ 을 계산하는 Turing machine의 입출력을 위와 같은 형태로 정의하시오.

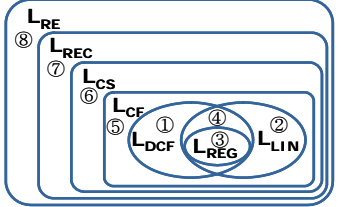
$q_0w(n) \vdash q_fw(n(n+1)/2)$  혹은  $q_0w(n) \vdash q_fw(1+2+\dots+n)$

(2) (1)에서 정의한 입출력 계산이 수행되도록 위에서 주어진 기본 turing machine들을 이용하여 계산하는 일련의 과정을 Block diagram으로 나타내시오.



Block diagram대신 TM의 입출력으로 나타내면 감점.

3. 다음 각 Language가 오른쪽 그림의 영역 ①부터 ⑧ 중 어디에 속하는지 말하고, 그 이유를 간단히 쓰시오. (25점)  
(1)  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1, n \neq 2\}$



답 ④  
Regular가 아닌 이유: Finite State machine으로는 a,b의 개수를 셀 수 없음.(pumping lemma로도 증명 가능)

Linear인 이유: Linear grammar 찾을 수 있음.  $S \rightarrow aaAbb \mid ab \quad A \rightarrow aAb \mid ab$

DFA인 이유:  $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\} \cap \{aabb\}c$  이 성립.  
즉, L은 DCFL과 Regular language의 교집합으로, DPDA를 만들 수 있음.

(2)  $L = \{w \in \{a, b, c\}^+ \mid n_a(w) = n_b(w) = n_c(w)\}$

답 ⑥  
Context Free가 아닌 이유: stack을 가진 PDA로는 a,b,c의 개수를 셀 수 없음. (pumping lemma로 증명하거나,  $\{a^n b^n c^n\}$ 이 CFL이 아님을 이용해서 증명해도 됨.  
Context Sensitive인 이유: LBA를 만들 수 있음. (CSG를 제시해도 무방)

4. 다음 명제의 참, 거짓을 판단하고 간단히 증명하시오. (20점)  
(1)  $L_1, L_2$ 가 context sensitive이면  $L_1 \cup L_2$ 를 위한 Linear Bounded Automata가 존재한다.

참. LBA는 nondeterministic automata이므로 union에 닫혀있음.

(2) 임의의 Unrestricted Grammar  $G$ 에 대해, language  $(L(G))^c$ 를 생성하는 Unrestricted Grammar가 존재한다.

거짓.

$L(G)$ 는 Recursively Enumerable Language임.

그러나  $L(G)^c$ 는 Recursively Enumerable Language가 아닐 수도 있으므로, Unrestricted Grammar가 존재한다는 보장이 없음.

(3) Recursively enumerable language는 concatenation에 대하여 닫혀있다.

참.  
두 language  $L_1, L_2$ 가 각각 Recursively enumerable language이면, 각각에 속하는 모든 string들에 대해 enumeration procedure가 존재. concatenation으로 얻어지는 language  $L_1L_2$ 에 속하는 string들에 대해서도 order를 매길 수 있음. (두 집합의 곱집합에 속하는 원소들에 대해 순서를 매기는 방법을 사용)

(4)  $L$ 이 recursive 이면  $L^+$ 도 recursive이다.

참.  
 $L$ 을 위한 membership 알고리즘이 존재.  
 $L^+$ 에 속하는 임의의 스트링  $w$ 를 substring으로 분해하는 가능한 모든 방법 (유한함)에 대해 각 substring을  $L$ 의 membership 알고리즘을 이용하여 체크하여, 모든 substring이 accept되면  $w$ 를 accept. 하나라도 reject되면 reject하는 membership algorithm을 만들 수 있음.

5. Standard Turing Machine의 변형으로, 3개의 head를 가지고 있어서 한 번에 3개의 cell에 있는 심볼을 읽고 쓸 수 있는 Turing Machine을 생각한다. (15점)

(1) 이 변형된 Turing machine의 formal definition을 찾고자 한다. state의 집합을  $Q$ , tape symbol 집합을  $\Gamma$ 라고 할 때, transition function에 대한 formal definition을 쓰시오.

$$\delta: Q \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \Gamma \times \Gamma \times \{L, R\}^3$$

(2) 이 변형된 Turing machine의 계산파워를 standard Turing machine과 비교하시오.

파워는 같음.

먼저 4개의 track으로 이루어진 multitrack TM을 이용하여 3개의 head를 가진 TM을 simulate할 수 있음. 즉, 첫 번째 track에 tape symbol을 쓰고, 나머지 3개의 track을 이용하여 head의 위치를 나타냄. 한 번에 하나의 head위치의 정보를 읽으면서 그 상태를 기억하는 state를 추가로 정의 하여 사용.

이렇게 구현된 multitrack TM은 다시 symbol을 재정의하여 standard TM으로 simulate할 수 있음.

6. Turing Machine이 해결하지 못하는 문제를 한 가지 들고 간단히 설명하시오. (10점)

Halting problem.

(설명은 이미 공지된 12장 보충자료 참조)

[유의사항]

- 1. 개별적 질문은 받지 않음. 문제 해석에 의문이 있는 경우에는 자신이 이해한 내용을 기술한 후 풀이를 작성하면 채점 시에 참고로 할 예정.
- 2. 교과서 본문에 증명되어 있는 사실들은 별도의 증명과정 없이 풀이에서 인용 가능함.