专业：信息工程
姓名：张青铭
学号：3200105426
日期：10.8
地点：

浙江大学实验报告

课程名称：数字信号处理　指导老师：徐元欣　成绩：

实验名称：有限长序列、频谱、DFT 的性质　实验类型：演示　同组学生姓名：——

一、实验目的和要求

设计通过演示实验，建立对典型信号及其频谱的直观认识，理解 DFT 的物理意义、主要性质。

二、实验内容和步骤

2-1 用 MATLAB，计算得到五种共 9 个序列：

2-1-1 实指数序列 $x(n)=\begin{cases} a^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$　例如，a=0.5, length=10

a=0.9, length=10

a=0.9, length=20

2-1-2 复指数序列 $x(n)=\begin{cases} (a+jb)^n & 0\le n\le length-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$　例如，a=0.5, b=0.8, length=10

2-1-3 从正弦信号 $x(t)=\sin(2\pi ft+\text{delta})$抽样得到的正弦序列 $x(n)=\sin(2\pi fnT+\text{delta})$。如，信号频率 f=1Hz，初始相位 delta=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-4 从余弦信号 $x(t)=\cos(2\pi ft+\text{delta})$抽样得到的余弦序列 $x(n)=\cos(2\pi fnT+\text{delta})$。如，信号频率 f=1Hz，初相位 delta=0，抽样间隔 T=0.1 秒，序列长 length=10。

2-1-5 含两个频率分量的复合函数序列 $x(n)=\sin(2\pi f_1nT)+\text{delta}\times\sin(2\pi f_2nT+\text{phi})$。如，

频率 f_1 (Hz)	频率 f_2 (Hz)	相对振幅 delta	初相位 phi (度)	抽样间隔 T (秒)	序列长 length
1	3	0.5	0	0.1	10
1	3	0.5	90	0.1	10
1	3	0.5	180	0.1	10

2-2　用 MATLAB，对上述各个序列，重复下列过程。

2-2-1 画出一个序列的实部、虚部、模、相角；观察并记录实部、虚部、模、相角的特征。

2-2-2 计算该序列频谱的幅度和相位、频谱的实部和频谱虚部；观察和并记录它们的特征，给予解释。

备注：这里的频谱是指序列的 DTFT 和 DFT。

2-2-3 观察同种序列取不同参数时的频谱，发现它们的差异，给予解释。

三、主要仪器设备

MATLAB 编程。

四、操作方法和实验步骤

（参见“二、实验内容和步骤”）

五、实验数据记录和处理

5-1 利用 MATLAB 计算得到九个序列，程序如下：

```
clear;
%real sequence
length_n=[10;10;20];%序列长度
a=[0.5;0.9;0.9];
n1=0:1:length_n(1)-1;
n2=0:1:length_n(2)-1;
n3=0:1:length_n(3)-1;
x1=a(1).^n1;
x2=a(2).^n2;
x3=a(3).^n3;

%Complex sequence
re=0.5;
im=0.8;
x4=(re+im*i).^n1;

%sin/cos sequence
f1=1;f2=3;%频率
delta=0;%正弦信号和余弦信号的初始相位
T=0.1;%抽样间隔
phi=[0;pi/2;pi];%复合函数的初始相位
x5=sin(2*pi*f1*n1*T+delta);
x6=cos(2*pi*f1*n1*T+delta);
x7=sin(2*pi*f1*n1*T)+0.5*sin(2*pi*f2*n1*T+phi(1));
x8=sin(2*pi*f1*n1*T)+0.5*sin(2*pi*f2*n1*T+phi(2));
x9=sin(2*pi*f1*n1*T)+0.5*sin(2*pi*f2*n1*T+phi(3));
```

5-2 利用 MATLAB 构造画出每个序列的实部、虚部、模、相角的函数 fundraw，代码如下：

```
function fundraw(n,x)%函数名fundraw，输入序列长度，序列函数
    subplot(2,2,1);%实部
    stem(n,real(x));
    title('real part');
```

```
    subplot(2,2,2);%虚部
    stem(n,imag(x));
    title('imaginary part');

    subplot(2,2,3);%模
    stem(n,abs(x));
    title('magnitude part');

    subplot(2,2,4);%相角
    stem(n,angle(x));
    title('phase part');
end
```

5-3 求序列的 DTFT 的函数 funDTFT，代码如下：

```
function funDTFT(x,n)
    k=-4000:4000;%控制作图范围
    w=(pi/1000)*k;%omiga，即横坐标
    X_w=x*(exp(-j*pi/1000)).^(n'*k);%DTFT，得到频域上的表达式
    magX = abs(X_w);%幅度
    angX = angle(X_w);%相角
    realX = real(X_w);%实部
    imagX = imag(X_w);%虚部

    subplot(2,2,1);
    plot(w/pi,magX);
    title('Magnitude Part');
    xlabel('w/pi');ylabel('Magnitude');

    subplot(2,2,2);
    plot(w/pi,angX);
    title('Angle Part');
    xlabel('w/pi');ylabel('Radians');

    subplot(2,2,3);
    plot(w/pi,realX);
    title('Real part');
    xlabel('w/pi');ylabel('Real');

    subplot(2,2,4);
    plot(w/pi,imagX);
    title('Imaginary Part');
    xlabel('w/pi');ylabel('Imaginary');
end
```

5-4 求序列 DFT 的函数 funDFT，代码如下：

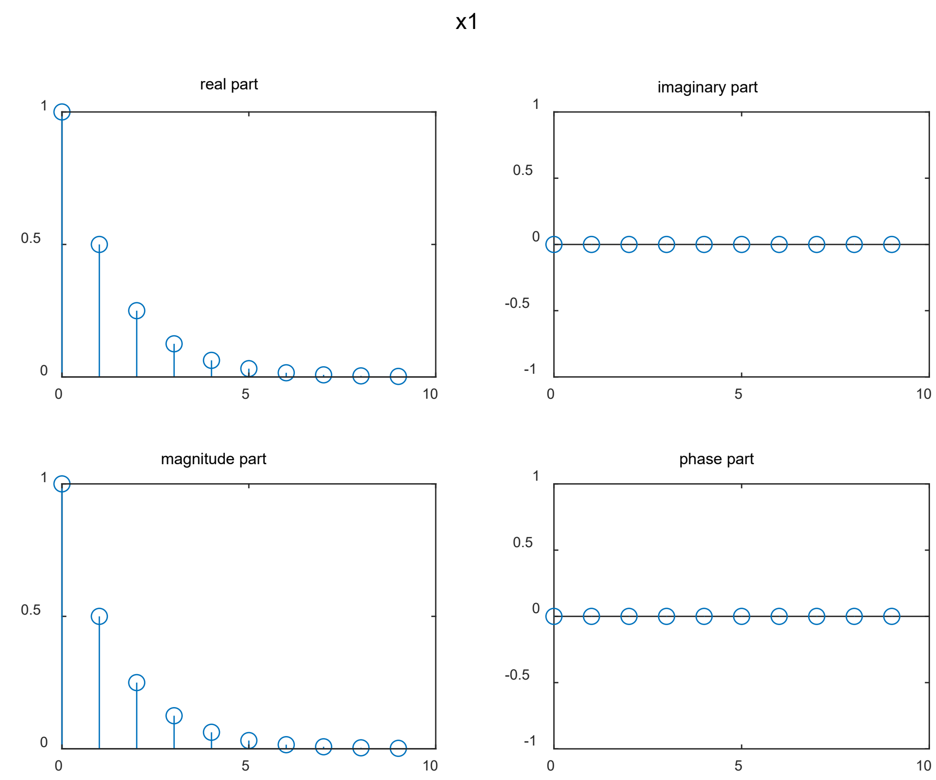
```
function funDFT(x,n)
```

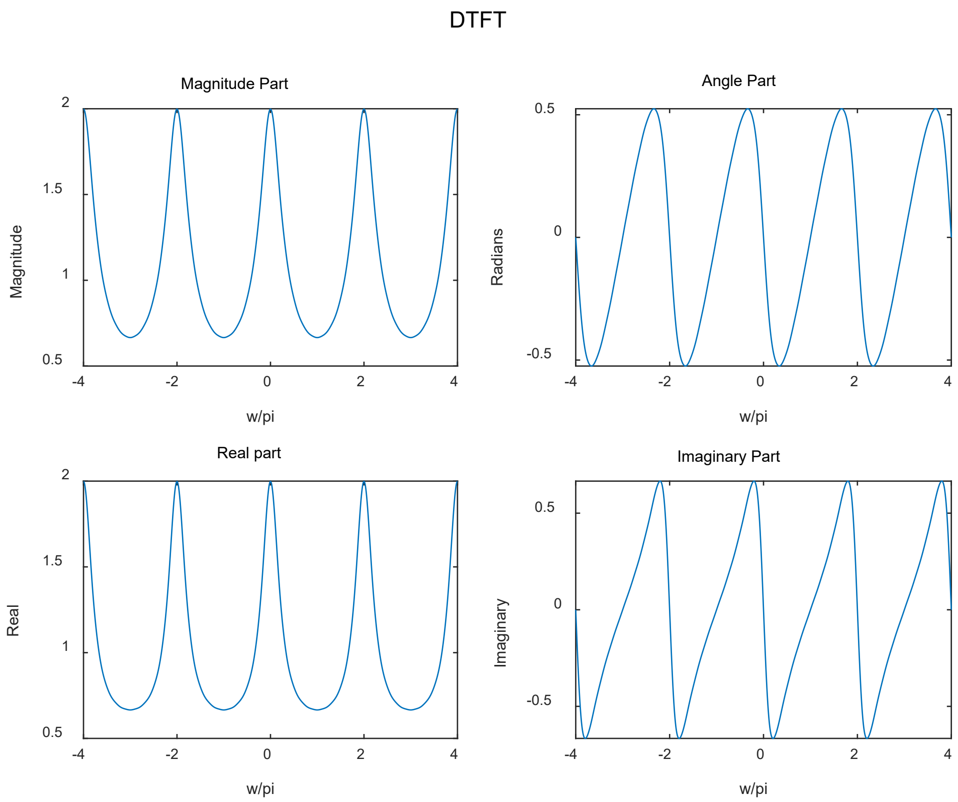
```
    N=length(n);%求序列长度，确定参数N
    k=-2*N:1:N*2;%横坐标范围
    X_k=x*(exp(-j*2*pi/N)).^(n'*k);%DFT，得到频域上的函数
    magX = abs(X_k);%幅度
    angX = angle(X_k);%相位
    realX = real(X_k);%实部
    imagX = imag(X_k);%虚部

    subplot(2,2,1);
    stem(k,magX);
    title('Magnitude Part');
    xlabel('k');ylabel('Magnitude');

    subplot(2,2,2);
    stem(k,angX);
    title('Angle Part');
    xlabel('k');ylabel('Radians');

    subplot(2,2,3);
    stem(k,realX);
    title('Real part');
    xlabel('k');ylabel('Real');

    subplot(2,2,4);
    stem(k,imagX);
    title('Imaginary Part');
    xlabel('k');ylabel('Imaginary');
end
```

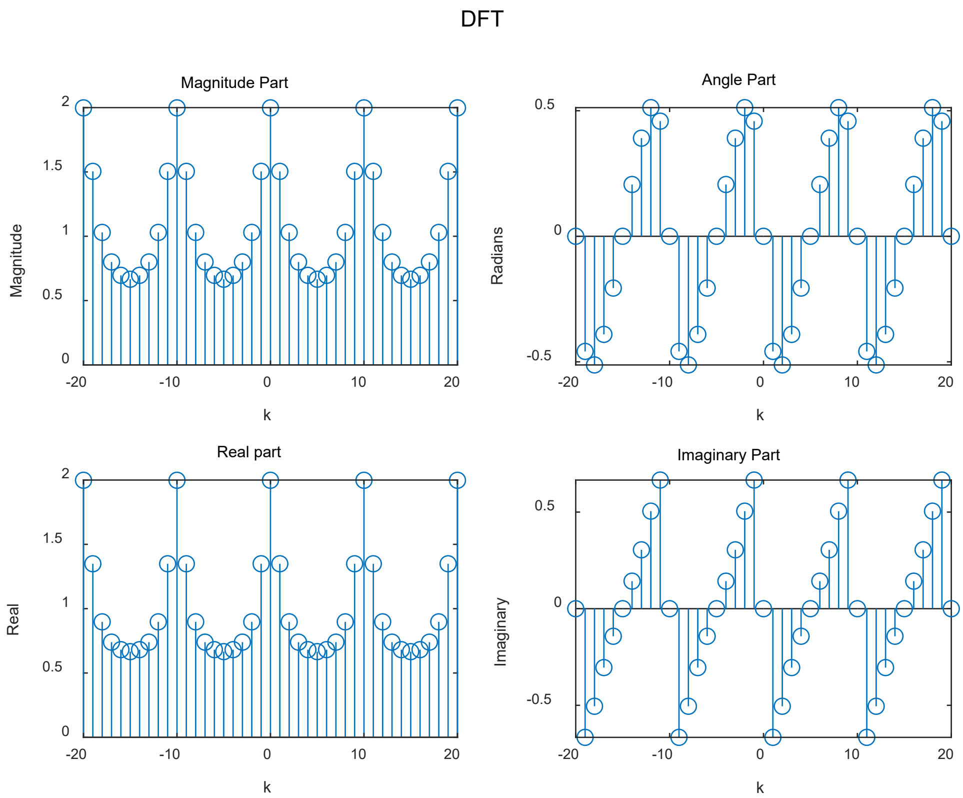
六、实验结果与分析

6-1 各种序列的图形（时域）和频谱（频域）各有何特征，给予解释。

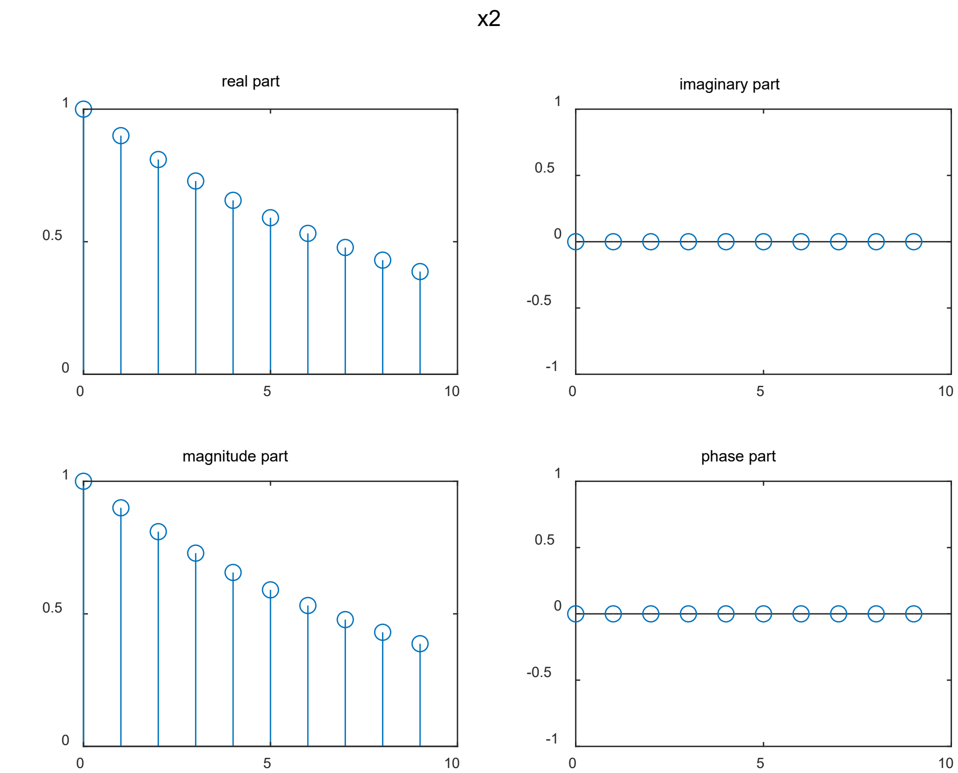
6-1-1 实指数序列 a=0.5，length=10 时域和频域图像如下：

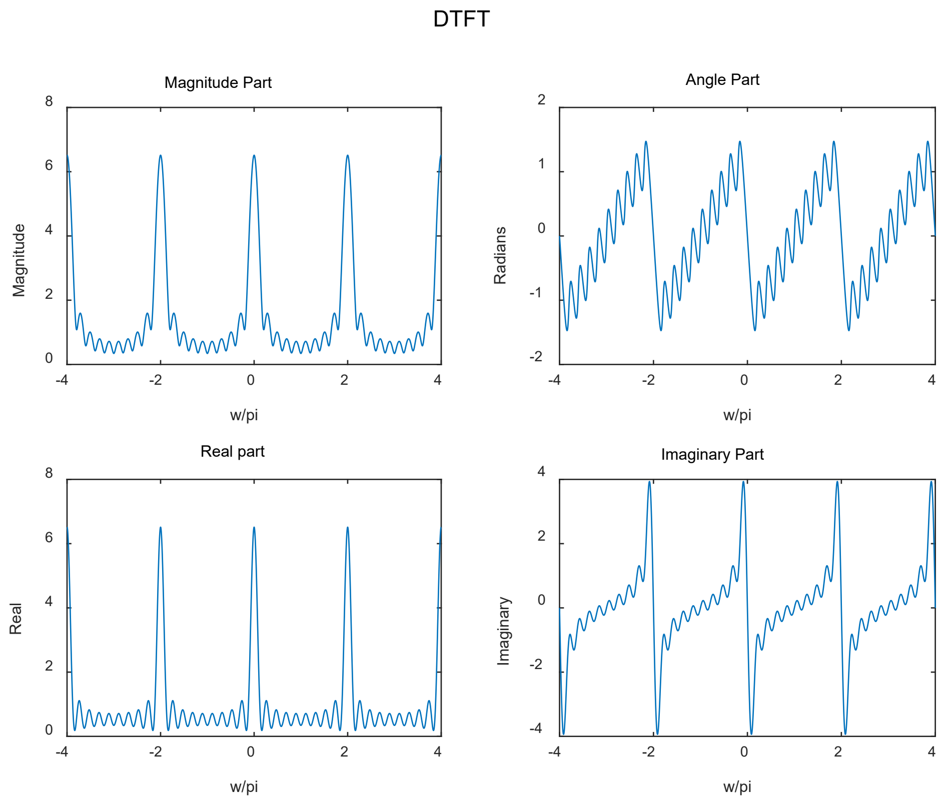

x1
real part
imaginary part
magnitude part
phase part

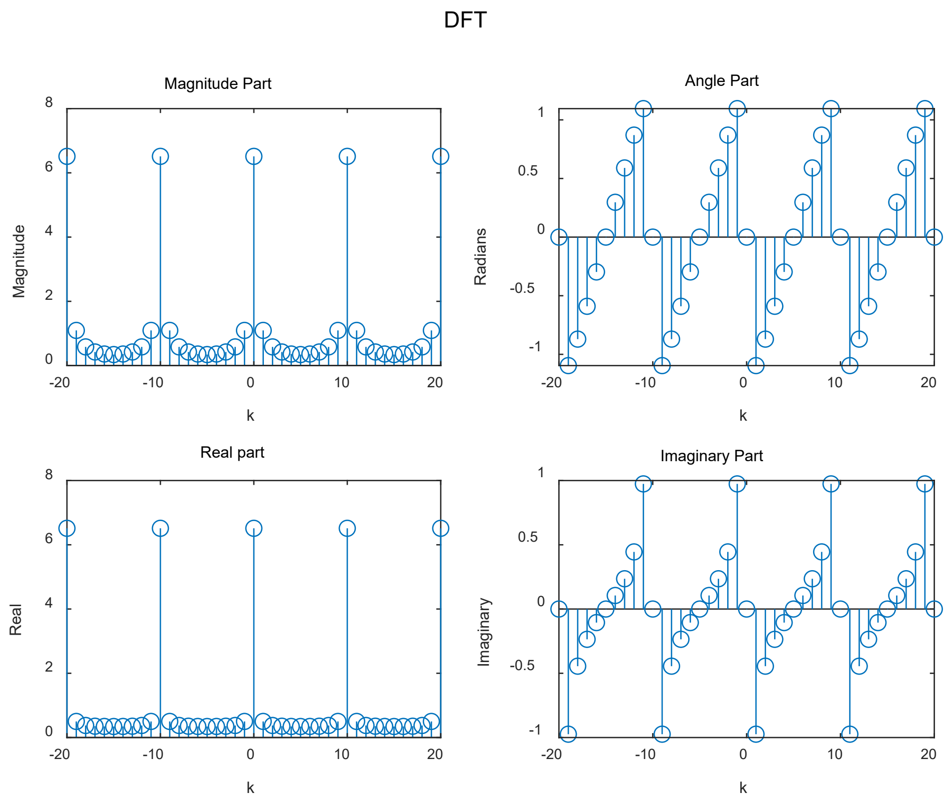

DTFT
Magnitude Part
Angle Part
Real part
Imaginary Part
Magnitude
Radians
Real
Imaginary
w/pi



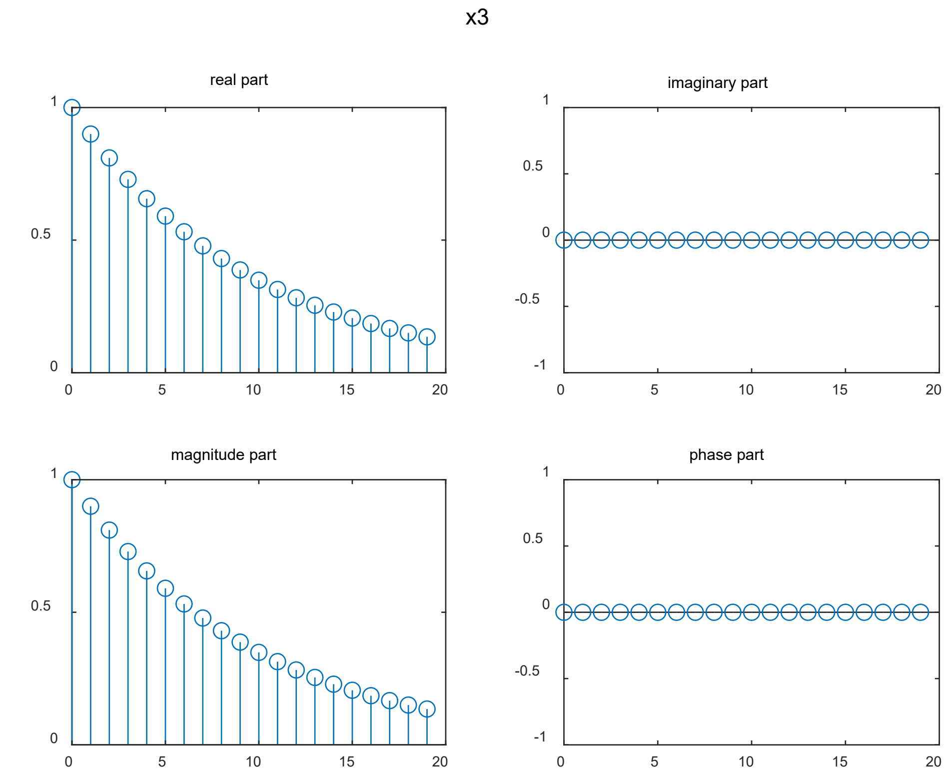
6-1-2 实指数序列 a=0.9，length=10 时域和频域图像如下：

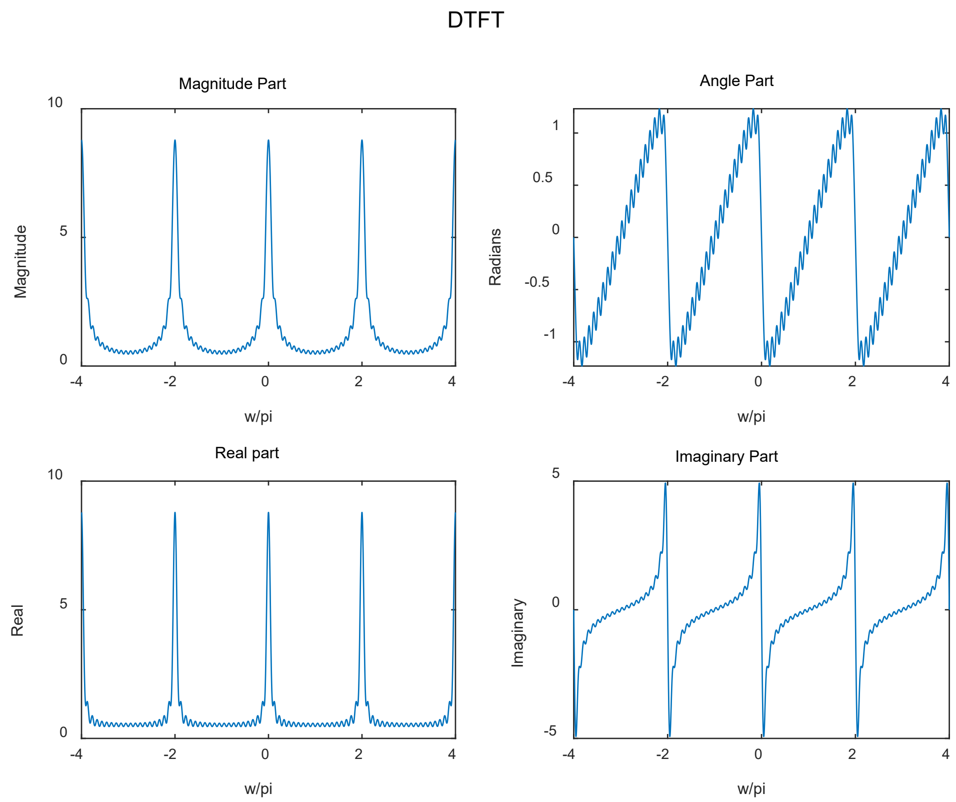


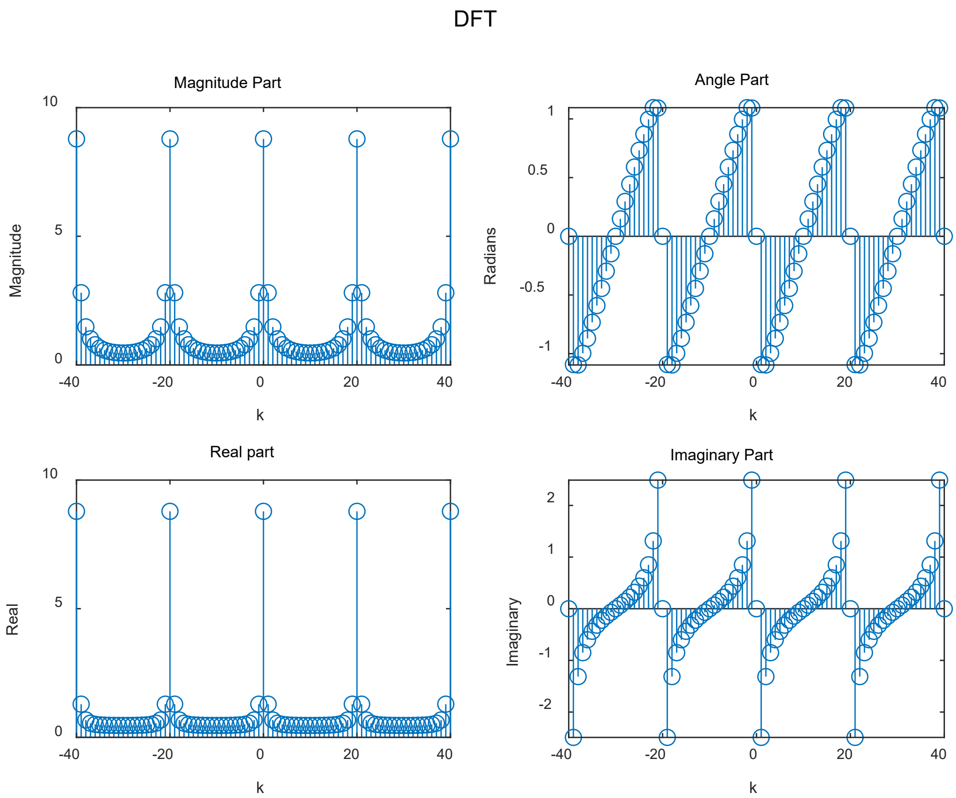




6-1-3 实指数序列 a=0.9，length=20 时域和频域图像如下：


x3
real part
imaginary part
magnitude part
phase part


DTFT
Magnitude Part
Magnitude
w/pi
Angle Part
Radians
w/pi
Real part
Real
w/pi
Imaginary Part
Imaginary
w/pi



分析：

1.以上三个信号均为实信号，时域上信号虚部和相位均为 0，实部等于幅度，呈指数关系递减，x1 在 n=9 时，近似为 0，x2 在 n=9 时，近似为 0.5，x3 在 n=19 时，接近为 0

2.频谱幅度和相位均以 2pi 为周期，符合离散时间信号傅里叶变换后以 2pi 为周期的事实

3.从频谱可以发现，三个信号频谱实部均为偶对成，虚部为奇对称；当 a 趋近于 1，频谱越集中在 0 处，即直流分量越多

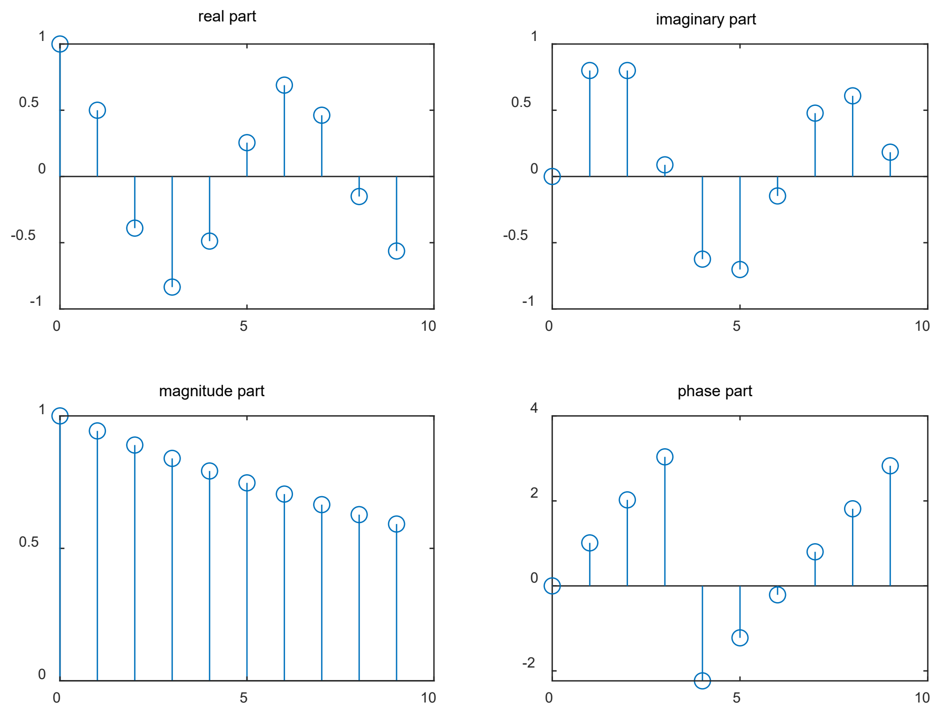
4.x1 频谱幅度在 pi 处取极小，0 和 2pi 处取极大。因为 n=9，近似为 0，可将原信号近似为：$x(n) = a^n u(n)$，故其 DTFT 表达式近似为：$X(e^{j\omega}) = 1/(1 - ae^{-j\omega})$，与所作图像相符

5.x2，x3 频谱图像不光滑，但总体趋势与 a=0.5 时的序列相近，原因是在 n=9 和 n=19 时，信号值与 0 有差距，原信号不能直接近似为$x(n) = a^n u(n)$，由 DTFT 表达式$X(e^{j\omega}) = \sum x(n) e^{-j\omega n}$，当 n 取越大，越接近$x(n) = a^n u(n)$

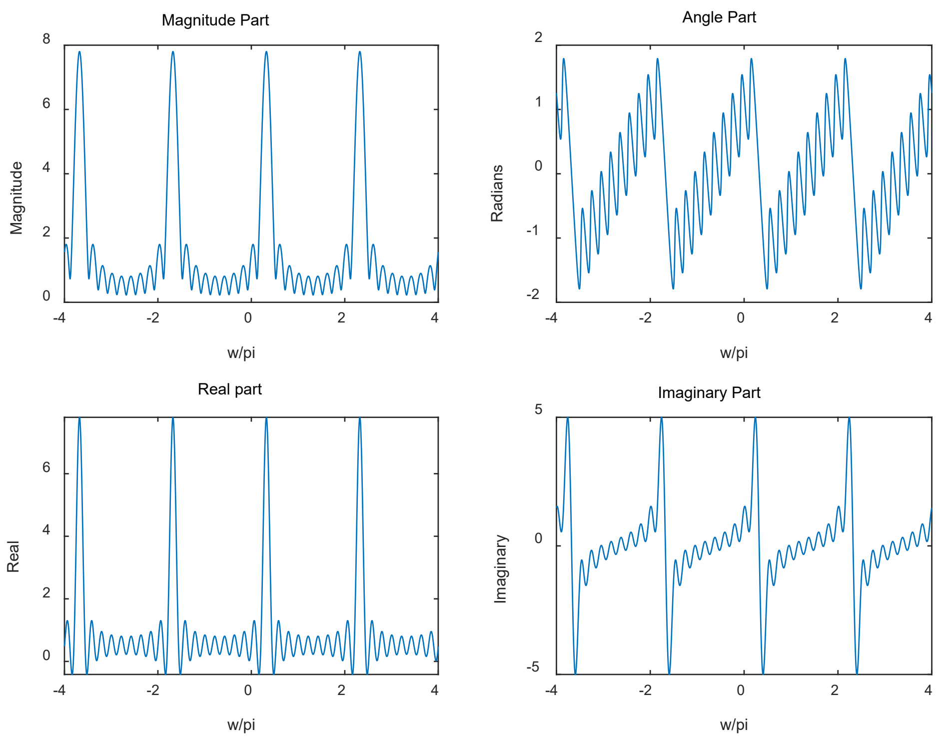
5.由图像可以看出，DFT 相当于对 DTFT 采样，周期采样数与序列长度相等

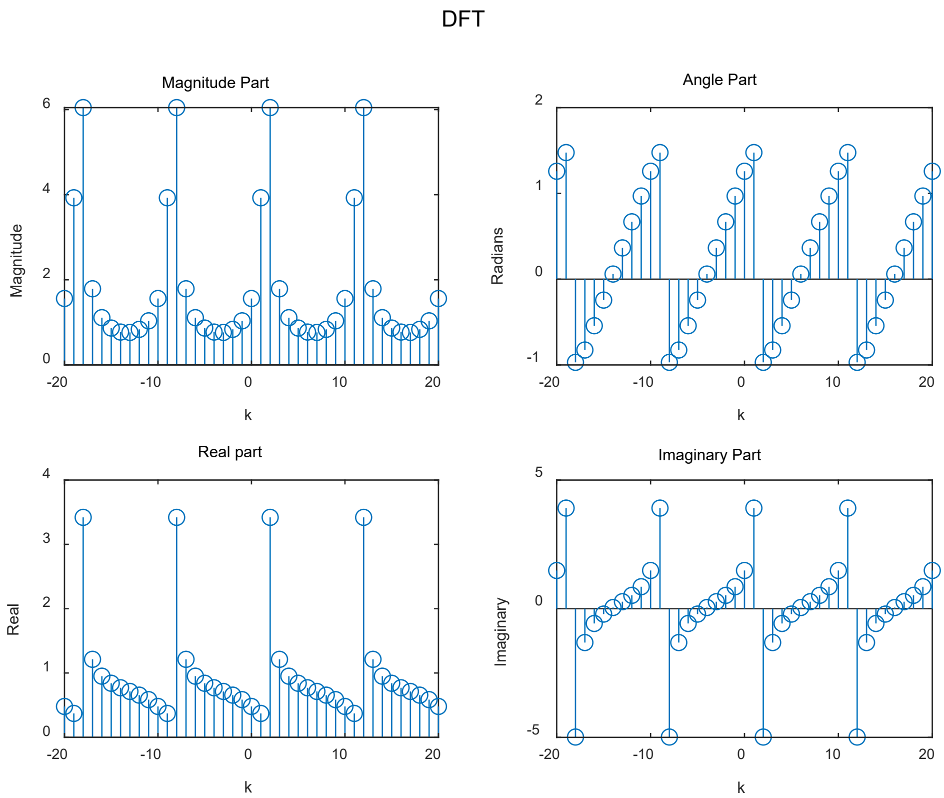
6-1-4 复指数序列，时域和频域图像如下：

x4


real part
imaginary part
magnitude part
phase part

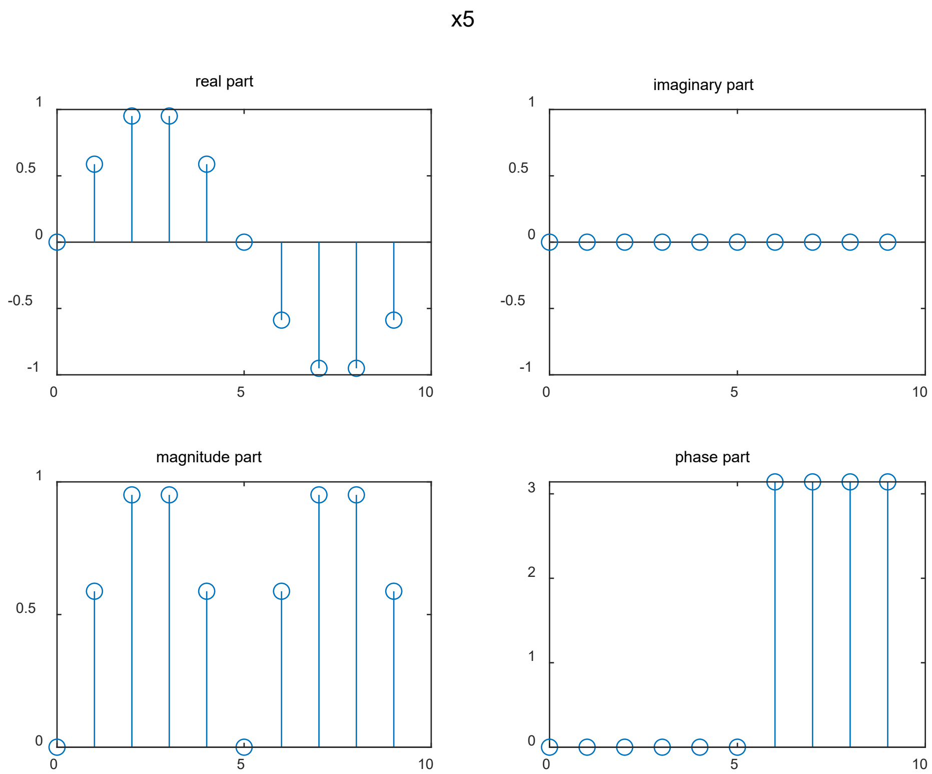
DTFT

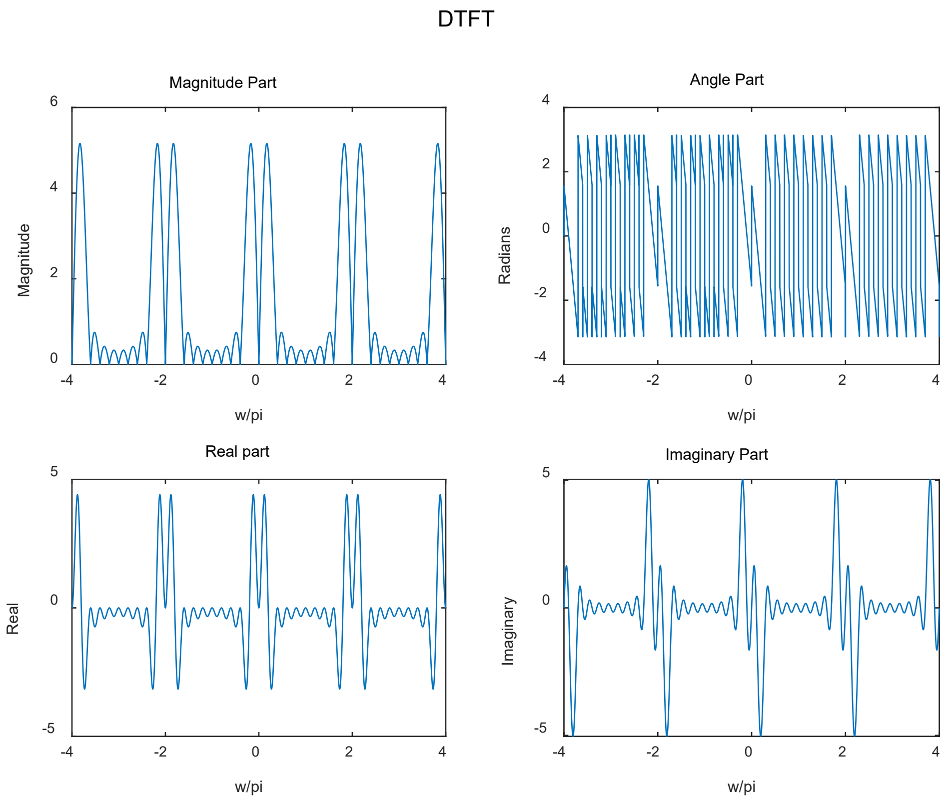

Magnitude Part
Magnitude
w/pi
Angle Part
Radians
w/pi
Real part
Real
w/pi
Imaginary Part
Imaginary
w/pi

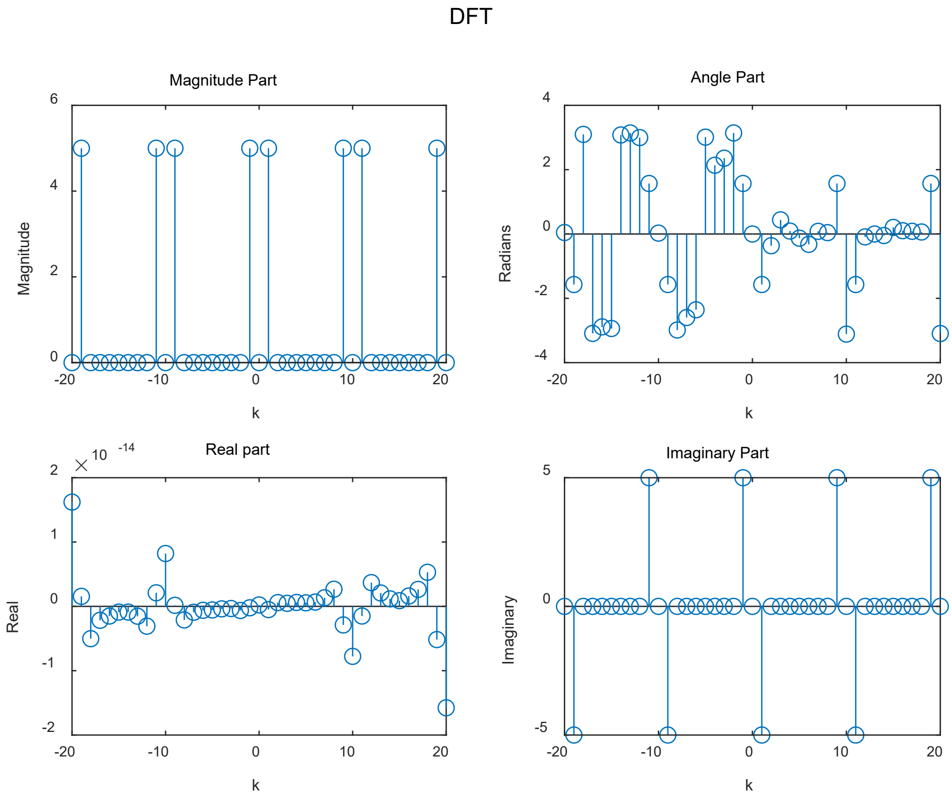


分析：1.复指数序列不具有对称性，时域幅度图呈指数递减

6-1-5 正弦信号时域和频域图像如下：

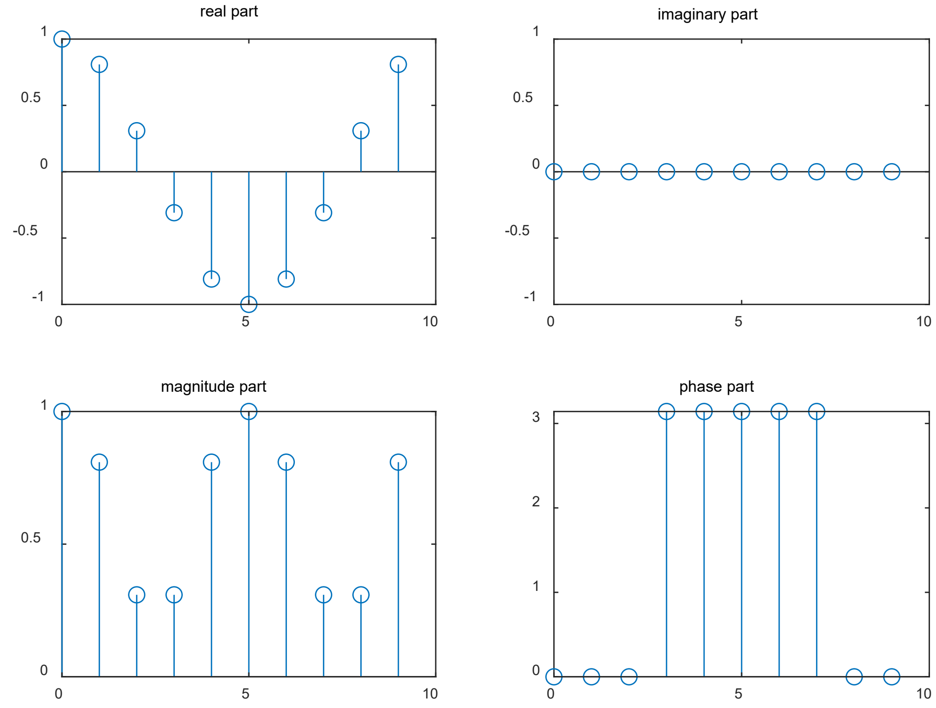




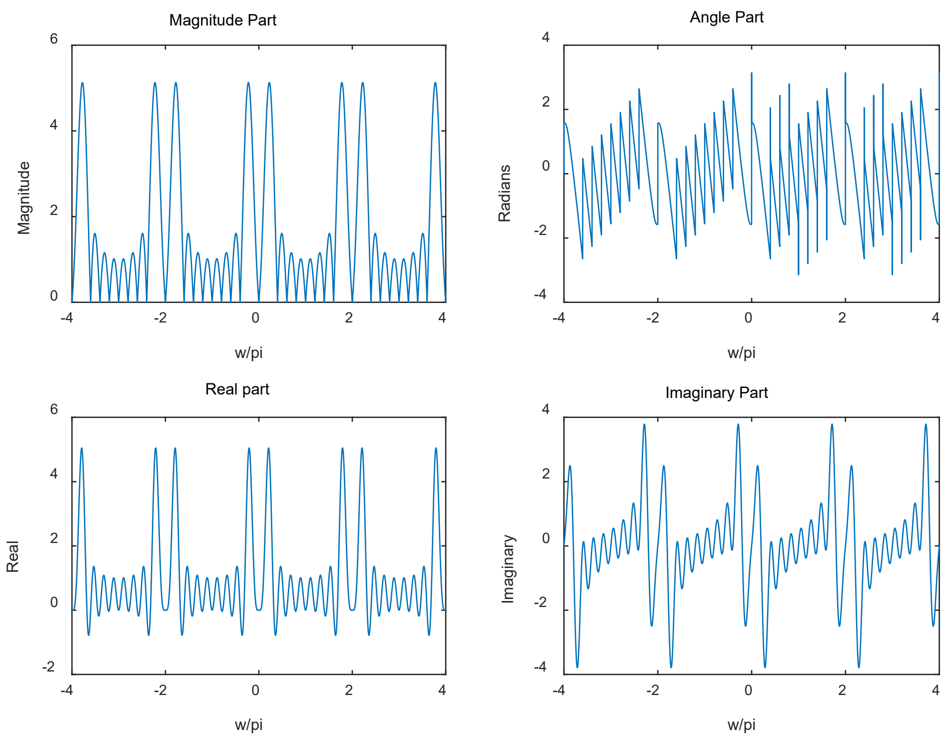


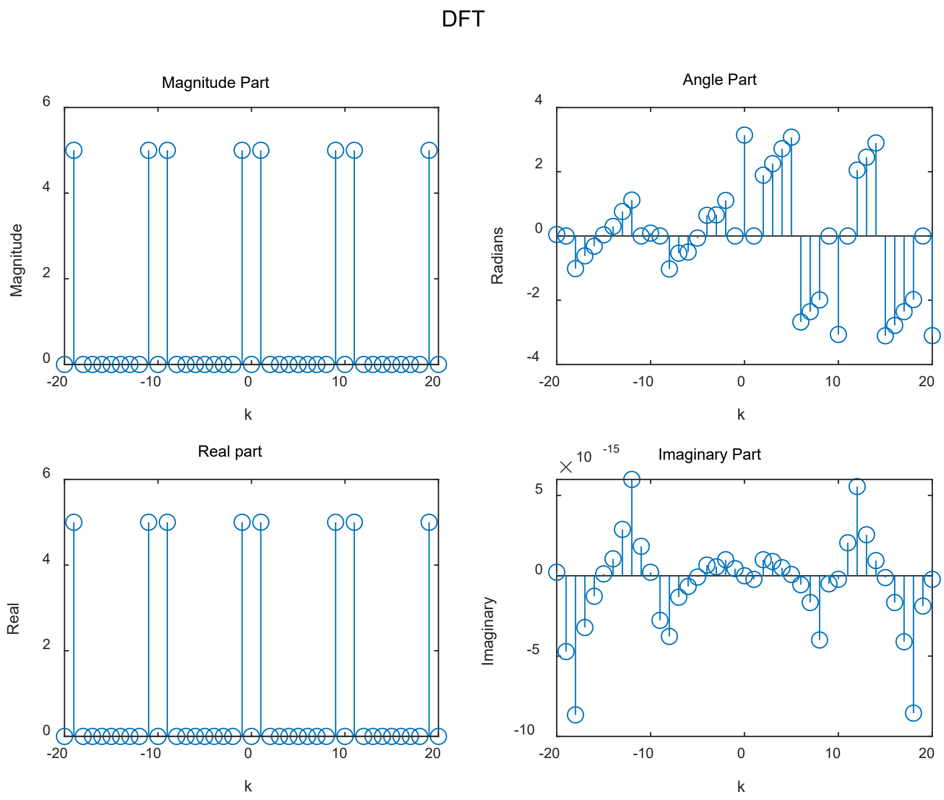
6-1-6 余弦信号时域和频域图像如下：

x6


real part
imaginary part
magnitude part
phase part

DTFT


Magnitude Part
Magnitude
w/pi
Angle Part
Radians
w/pi
Real part
Real
w/pi
Imaginary Part
Imaginary
w/pi

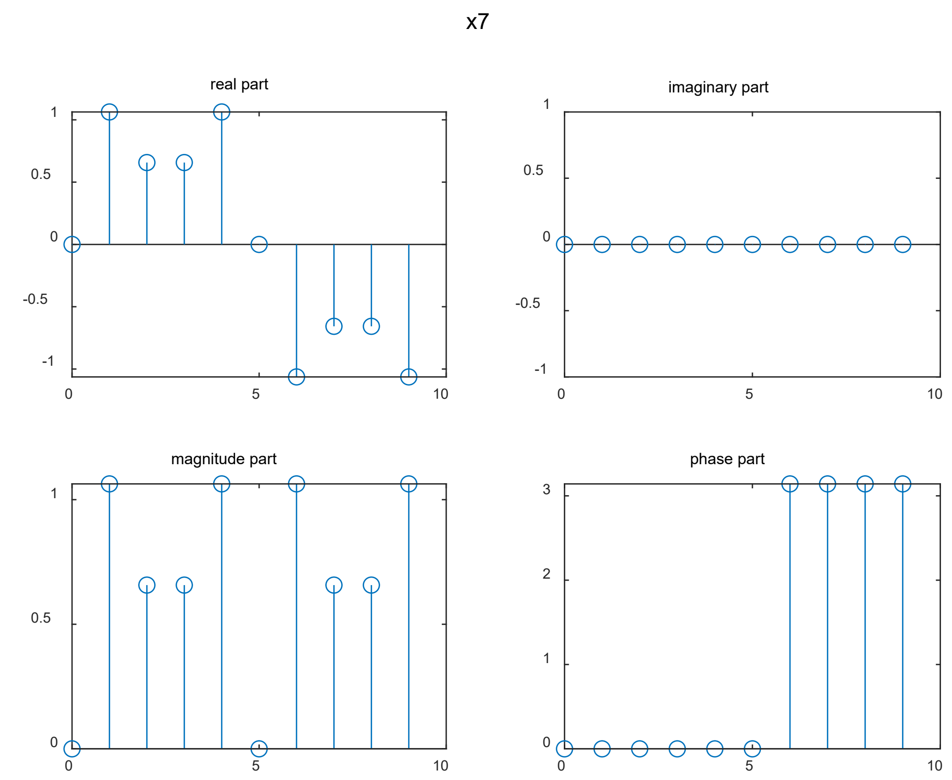


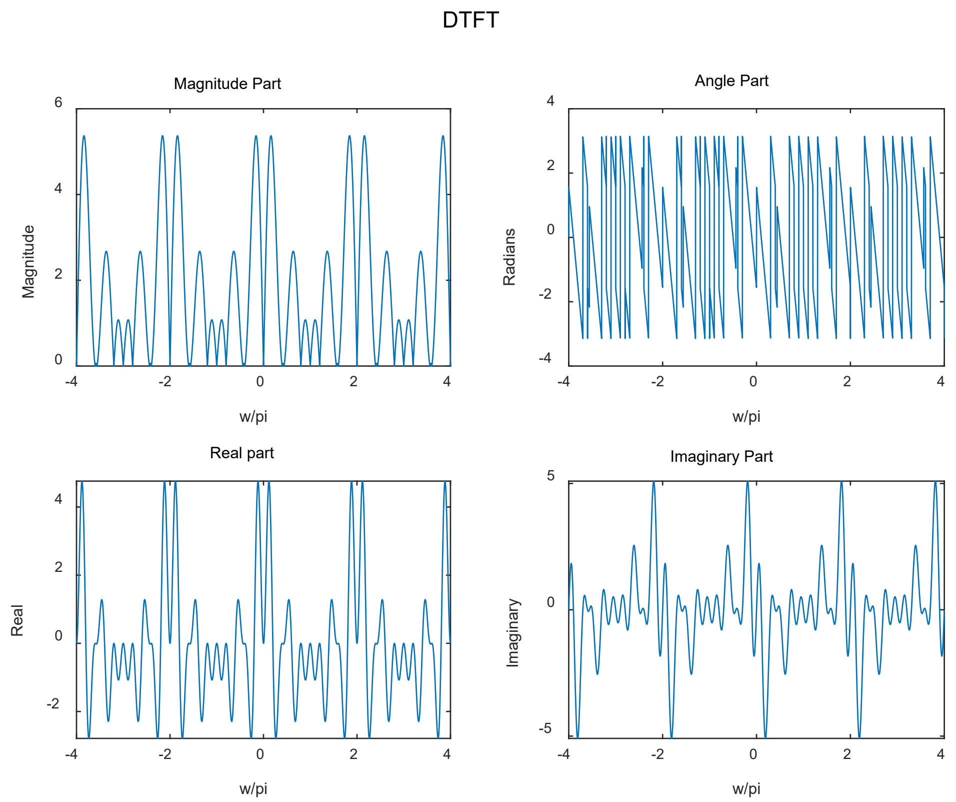
分析：

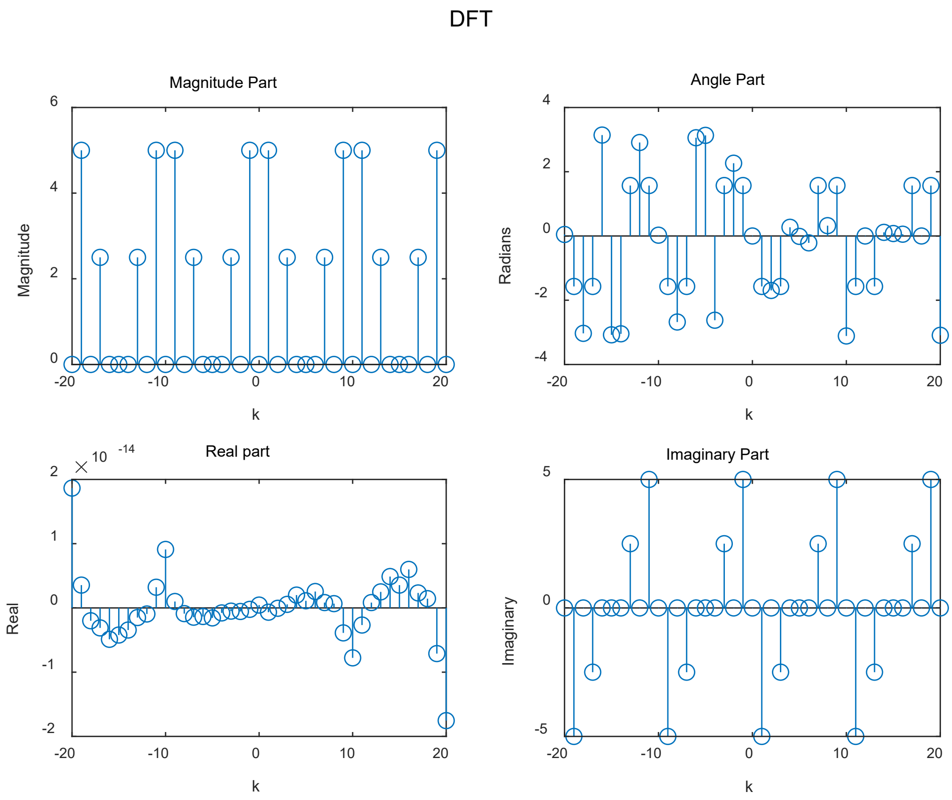
1.由时域图，x5 序列为实序列，奇对称，虚部为 0，相角在 x5 为正时为 0，为负时为 pi；x6 序列为实序列，偶对称，虚部为 0，相角在 x6 为正时为 0，为负时为 pi

2.由频谱，幅度和虚部符合预期，即仅在 k=±1 时有值，其余为 0，其中 x5 频谱虚部满足奇对称，x6 频谱实部满足偶对称，符合 DTF 变换后为冲击的事实；但实部不完全符合理论值 0，而是接近 0 的一系列值，这可能是因为 matlab 计算采用离散值，计算不完全精确

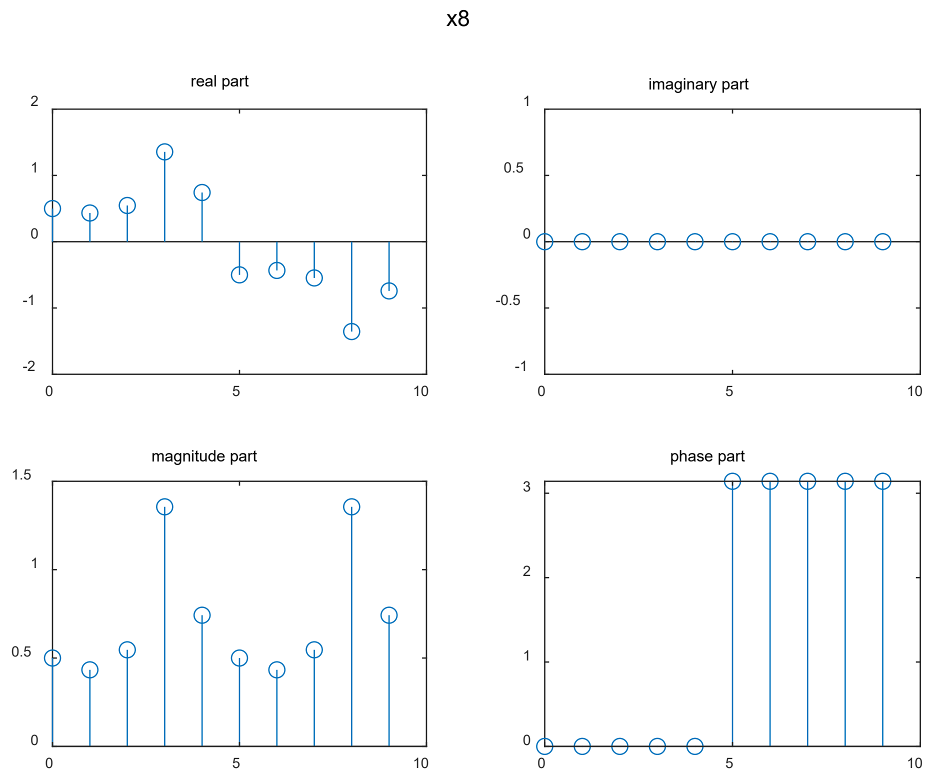
6-1-7 含两个频率分量的复合函数序列，phi=0 的时域和频域图像：

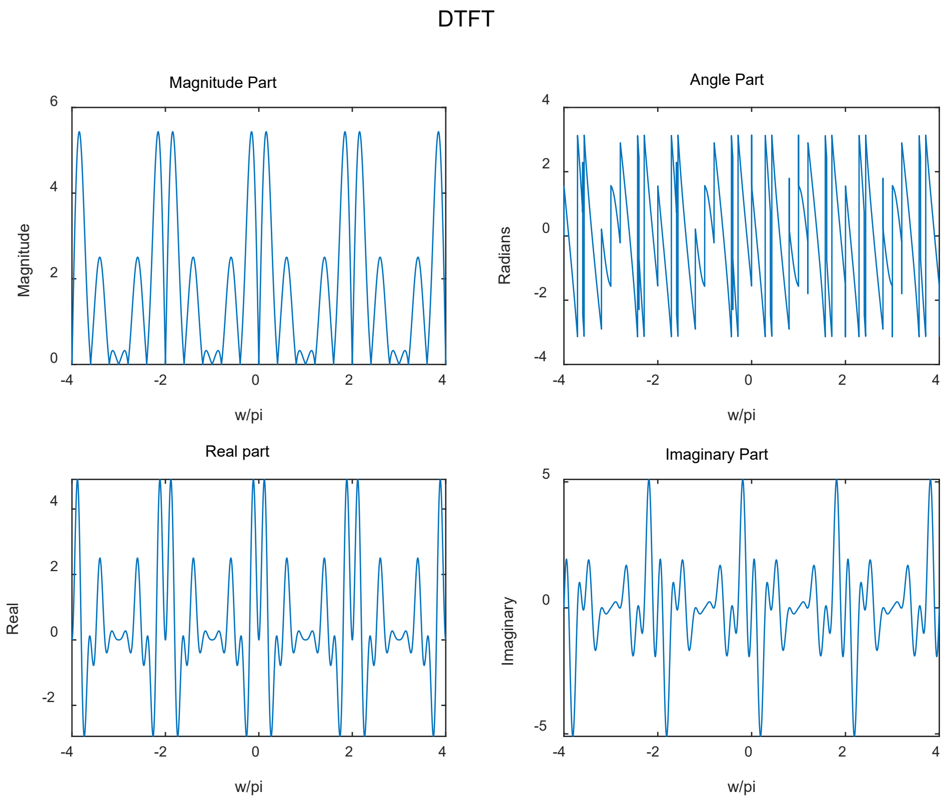

x7
real part
imaginary part
magnitude part
phase part

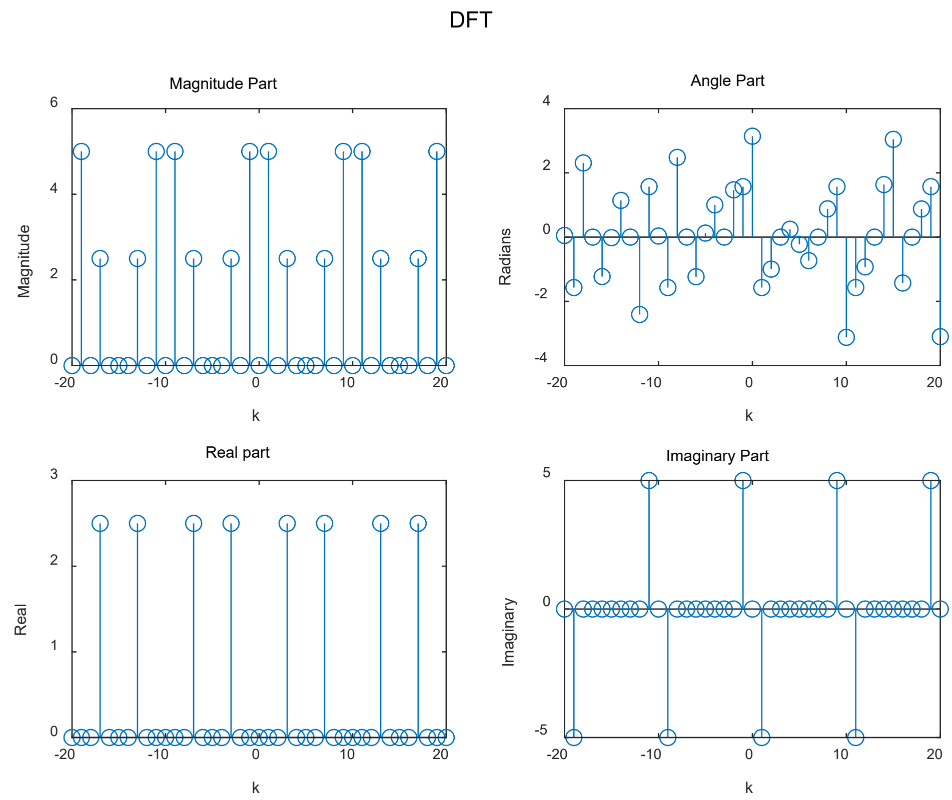

DTFT
Magnitude Part
Angle Part
Real part
Imaginary Part
Magnitude
Radians
Real
Imaginary
w/pi



6-1-8 含两个频率分量的复合函数序列，phi=pi/2 的时域和频域图像：

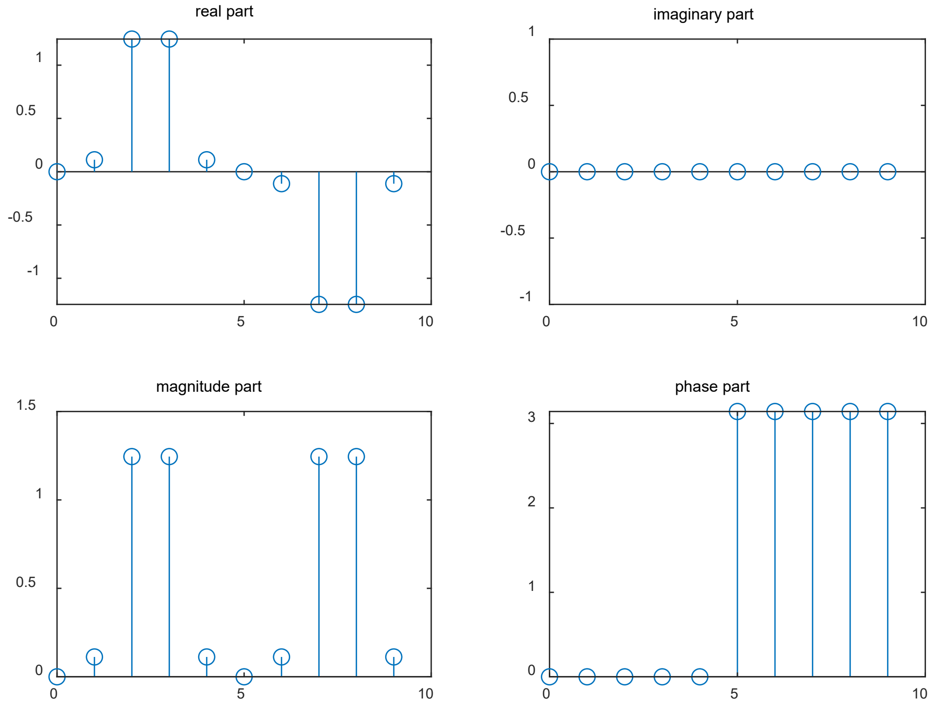




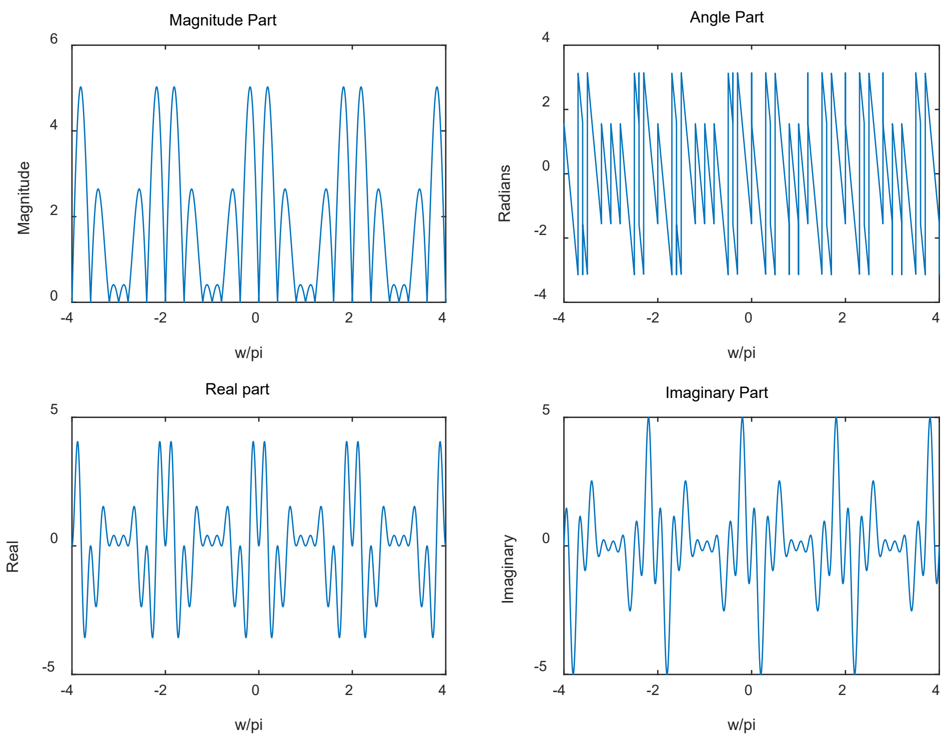


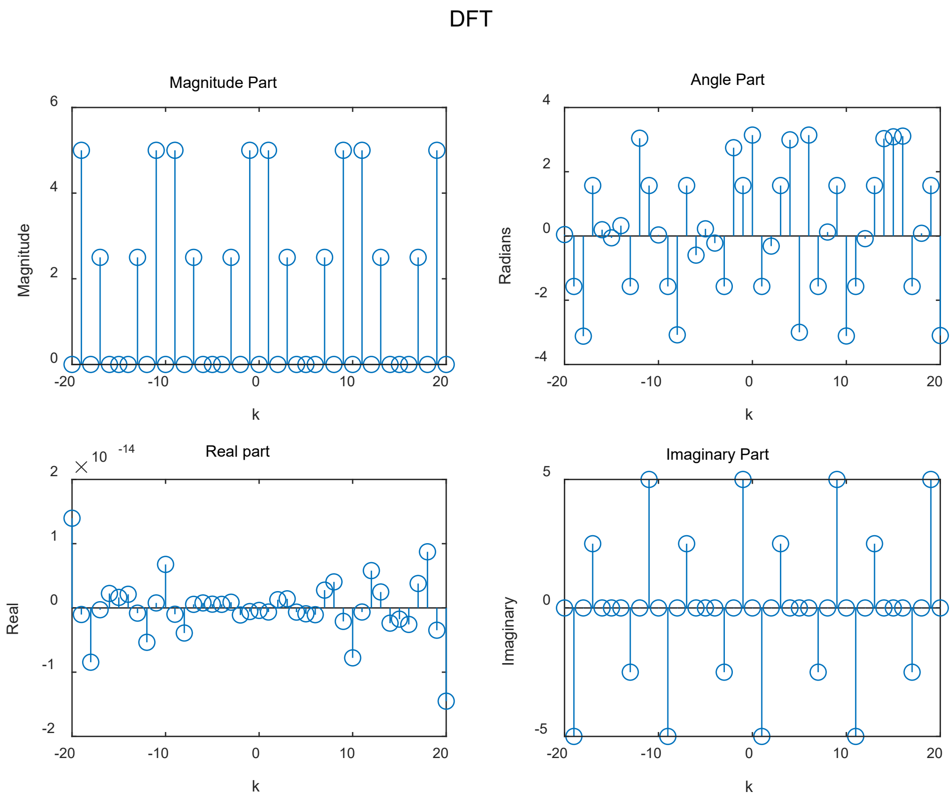
6-1-9 含两个频率分量的复合函数序列，phi=pi 的时域和频域图像：

x9


real part
imaginary part
magnitude part
phase part

DTFT


Magnitude Part
Magnitude
w/pi
Angle Part
Radians
w/pi
Real part
Real
w/pi
Imaginary Part
Imaginary
w/pi



分析：

1.由时域图，三个序列均为两个实正弦序列的结合，均为奇对称，虚部为 0，相角在序列值为正时为 0，为负时为 pi。

2.对两个正弦序列分别做 DFT 再相加，由 x5 和 x6 的结果可知，正弦频谱实部为 0，余弦频谱虚部为 0，故 x7，x9 频谱实部为一系列趋近于零的值，虚部为满足奇对称的冲击函数，符合结果；x8 为正弦序列和余弦序列的和，故频谱实部为偶对称冲击，虚部为奇对称冲击，符合预期。

6-2 DFT 物理意义。X(0)、X(1)和 X(N−1)的物理意义。

6-2-1 DFT 的物理意义

DFT 是序列傅里叶变换的等距采样，也是其 Z 变换在单位圆上的等角度采样。

6-2-2 X(0)、X(1)和 X(N−1)的物理意义。

$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$，即信号直流分量的频谱值。

$\mathrm{X}(1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}$，即信号在基频处的幅度与相位。

$X(N-1)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-jk\frac{2\pi}{N}n(N-1)}$，即信号在 N 次谐波处的幅度和相位。

6-3 DFT 的主要性质。

1.线性性质

$$
\begin{aligned}
y[n]=ax[n]+bw[n] &\xrightarrow{DFT} Y[k]=\sum_{n=0}^{N-1}(ax[n]+bw[n])W_N^{kn} \\
&=a\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn}+b\sum_{n=0}^{N-1}w[n]W_N^{kn} \\
&=aX[k]+bW[k]
\end{aligned}
$$

2.时移性质

$$
\begin{aligned}
x[n-n_0] &\xrightarrow{DFT} \sum_{n=0}^{N-1}x[<n-n_0>_N]e^{-j\frac{2\pi k}{N}n} \\
&\xrightarrow{m=n-n_0} \sum_{m=-n_0}^{N-n_0-1}x[<m>_N]e^{-j\frac{2\pi k}{N}(m+n_0)} \\
&=W_N^{kn_0}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]W_N^{km} \\
&=W_N^{kn_0}X[k]
\end{aligned}
$$

3. 频移性质

$$
W_N^{-k_0n}x[n]\xrightarrow{DFT}\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{(k-k_0)n}=X[<k-k_0>_N]
$$

4. 时域反转

$$
\begin{aligned}
x[<-n>_N] &\xrightarrow{DFT} \sum_{n=0}^{N-1}x[<-n>_N]W_N^{kn} \\
&\xrightarrow{m=-n} \sum_{m=-(N-1)}^{0}x[<m>_N]W_N^{-km} \\
&=\sum_{m=0}^{N-1}x[m]W_N^{-km} \\
&=X[<-k>_N]
\end{aligned}
$$

5. 时域共轭

$$
\begin{aligned}
x^*[n] &\xrightarrow{DFT} \textstyle\sum_{n=0}^{N-1}x^*[n]W_N^{kn} \\
&=\left(\textstyle\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{-kn}\right)^* \\
&=X^*[<-k>_N] \\
x^*[<-n>_N] &\xrightarrow{DFT} X^*[k]
\end{aligned}
$$

6. 对称性质

$$x_{cs}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[< -n >_N]) \xrightarrow{DFT} \frac{1}{2}(X[k] + X^*[k]) = X_{re}[k]$$

$$x_{ca}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[< -n >_N]) \xrightarrow{DFT} \frac{1}{2}(X[k] - X^*[k]) = jX_{im}[k]$$

$$x_{re}[n] = \frac{1}{2}(x[n] + x^*[n]) \xrightarrow{DFT} \frac{1}{2}(X[k] + X^*[< -k >_N]) = X_{cs}[k]$$

$$jx_{im}[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x^*[n]) \xrightarrow{DFT} \frac{1}{2}(X[k] - X^*[< -k >_N]) = X_{ca}[k]$$

7. 卷积性质（圆周卷积）

$$\begin{aligned}
x[n] \otimes w[n] &= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]w[< n - m >_N] \\
&\xrightarrow{DFT} \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]w[< n - m >_N]W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} W[r]W_N^{r(n-m)}W_N^{kn} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m] \sum_{r=0}^{N-1} W[r]W_N^{km} \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{k-r} \right) \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x[m]W_N^{km}W[k] \\
&= X[k]W[k]
\end{aligned}$$

8.parseval 定理

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N-1} x[n]y^*[n] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y[k]W_N^{-kn} \right)^* \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y^*[k] \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]Y^*[k]
\end{aligned}$$