

建模估计退化函数

- 例：匀速直线运动的模糊恢复
- 若景物与照相机作相对运动，快门时间为 T ，则成像是 T 时间内曝光累积的结果：

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

- $x_0(t)$ 及 $y_0(t)$ 是在 x , y 方向上运动的时变分量

建模估计退化函数

- 对上式作 Fourier变换

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\ &= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \right\} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt \end{aligned}$$

- 定义 $H(u, v) = \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt$

它就是运动模糊的转移函数，于是：

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$

- 若只考虑作x方向上匀速直线运动：

$$x_0(t) = \frac{at}{T}, \quad y_0(t) = 0$$

- 则
$$H(u, v) = \int_0^T \exp\left[-j2\pi u \frac{at}{T}\right] dt = T \frac{\sin(\pi ua)}{\pi ua} \exp[-j\pi ua]$$

- 对整数n，在 $u=n/a$ 处为零

- $\exp[-j\pi ua]$ 是相位项

- 若用 $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ 作为积分区间，则相位为0

- 由于 $t=T$ 时， $x_0(T) = a$ ，故 a 是在 T 时间内的模糊运动距离
- 若允许 y 方向同时以速度 b 运动，则

$$H(u, v) = T \frac{\sin[\pi(ua + vb)]}{\pi(ua + vb)} \exp[-j\pi(ua + vb)]$$



a b

FIGURE 5.26

(a) Original image.

(b) Result of blurring using the function in Eq. (5.6-11) with $a = b = 0.1$ and $T = 1$.

此处**0.1**指相对全图尺寸归一化后的速度



(a) 模糊图像



(b) 恢复图像

水平运动模糊恢复示例(运动距离为20像素)

逆滤波及其病态性质

- 图像模糊的频域表示

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

- 已知 $H(u, v)$ 时 $\hat{F}(u, v) = \frac{G(u, v)}{H(u, v)} = F(u, v) + \frac{N(u, v)}{H(u, v)}$

结果为原图 F 加一噪声项，在 $H(u, v)$ 接近于零时，噪声项会很大，使图像淹没在噪声中——病态性质

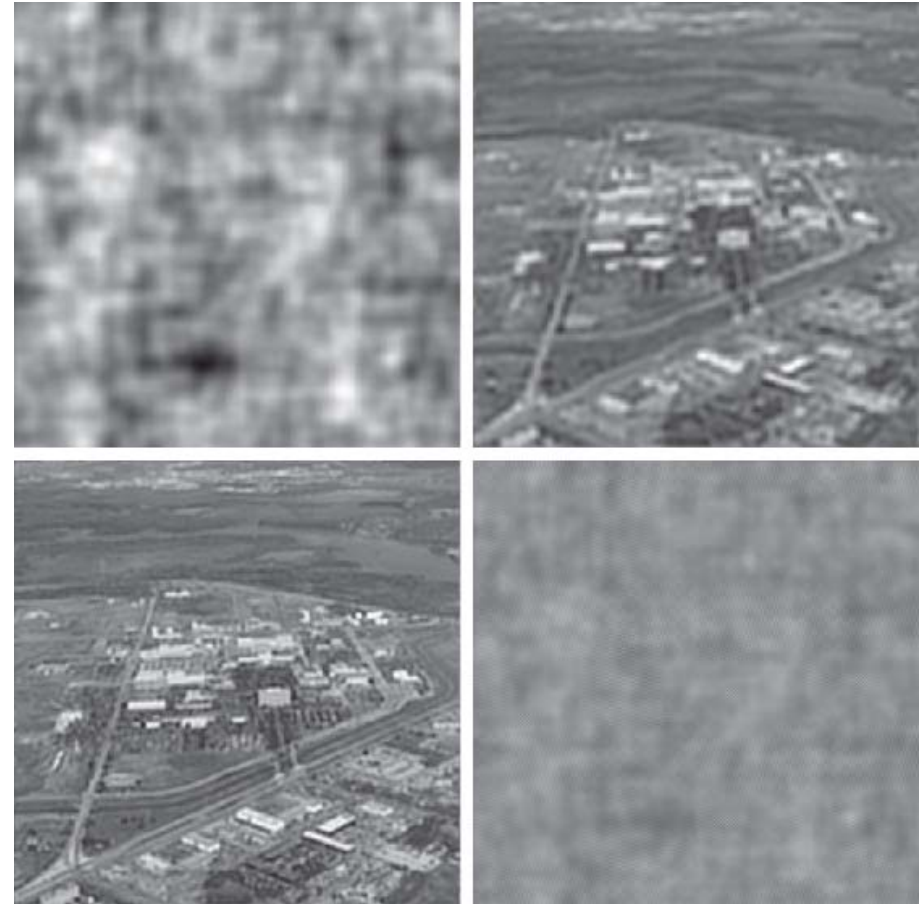
- 图像恢复一般都会遇到病态性
 - 图像恢复要重点考虑如何控制噪声的干扰,即控制病态性

逆滤波示例

- 解决病态问题的一种方法是将限制滤波的频率，**将频率限制在零点附近**，降低遇到零值的概率。
- 直接逆滤波和在原点附近滤波的效果比较（巴特沃斯低通滤波半径分别为40,70,85）
- **半径越大越接近于直接逆滤波**

a b
c d

FIGURE 5.27
Restoring
Fig. 5.25(b)
using Eq. (5-78).
(a) Result of using
the full filter.
(b) Result with H
cut off outside a
radius of 40.
(c) Result with H
cut off outside a
radius of 70.
(d) Result with H
cut off outside a
radius of 85.



最小均方误差（维纳，Wiener）滤波

- 是一种频域方法，考虑了既有退化又有噪声的情况
 - 可用原图 $f(x, y)$ 与恢复图 $\hat{f}(x, y)$ 间的均方误差 e^2 最小为准则来恢复图像

$$e^2 = \min E \left\{ \left[f(x, y) - \hat{f}(x, y) \right]^2 \right\}$$

- 找一点扩展函数 $h_w(x, y)$ ，它与图像卷积的结果为恢复图像

$$\hat{f}(x, y) = h_w(x, y) * g(x, y)$$

——Wiener滤波，也叫最小均方误差滤波

维纳 (Wiener) 滤波

- 导出满足要求的转移函数

$$H_w(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}}$$

——Wiener滤波器的转移函数

- S_n 和 S_f 分别为噪声和未退化图像信号的功率谱；

$$\frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)} = \left| \frac{N(u, v)}{F(u, v)} \right|^2 \text{ 为}(u, v)\text{频点的噪信比,}$$

- 若引入参数 γ , $H_w(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma \frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}}$

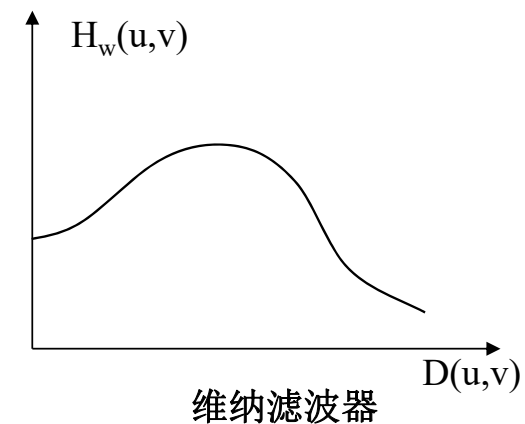
称为参数化维纳滤波器

- 它对噪声放大有自动抑制作用
- 在信噪比高的频点（如信号的低频部分）， $\frac{S_n(u, v)}{S_f(u, v)}$ 小，则 $H_w(u, v) \rightarrow \frac{1}{H(u, v)}$

维纳 (Wiener) 滤波

- 如果没有关于 $\frac{S_n(u,v)}{S_f(u,v)}$ 的信息, 可假设其为一个常数 K
 - 这时, Wiener 滤波器可用近似式

$$H_w(u,v) = \frac{H^*(u,v)}{|H(u,v)|^2 + K}$$



- 信号在低频处的能量较大, $\frac{S_n(u,v)}{S_f(u,v)}$ 可用一个随频率增加而增大的函数代替

关于维纳滤波的讨论

- 利用 $\frac{S_n(u,v)}{S_f(u,v)}$ 时可能的问题
 - 对实际图像，不同区域的信号功率谱是不同的:即有的地方亮，有的地方暗，有的地方相关大，有的地方相关小，若用全局的 K :
 - 局部信号功率谱较总体平均大(较亮处):用总体的信号功率谱会偏小，噪信比偏大，会使滤波增益降低,使空间频率丰富的结构不能很好恢复
 - 局部信号功率谱较总体平均小(较暗处):滤波增益太大，可能会放大噪声
 - 实际上，只要比值不超过2:1，滤波器的响应不会造成可察觉的变化

逆滤波与维纳滤波器的比较



a b c

FIGURE 5.28 Comparison of inverse and Wiener filtering. (a) Result of full inverse filtering of Fig. 5.25(b). (b) Radially limited inverse filter result. (c) Wiener filter result.

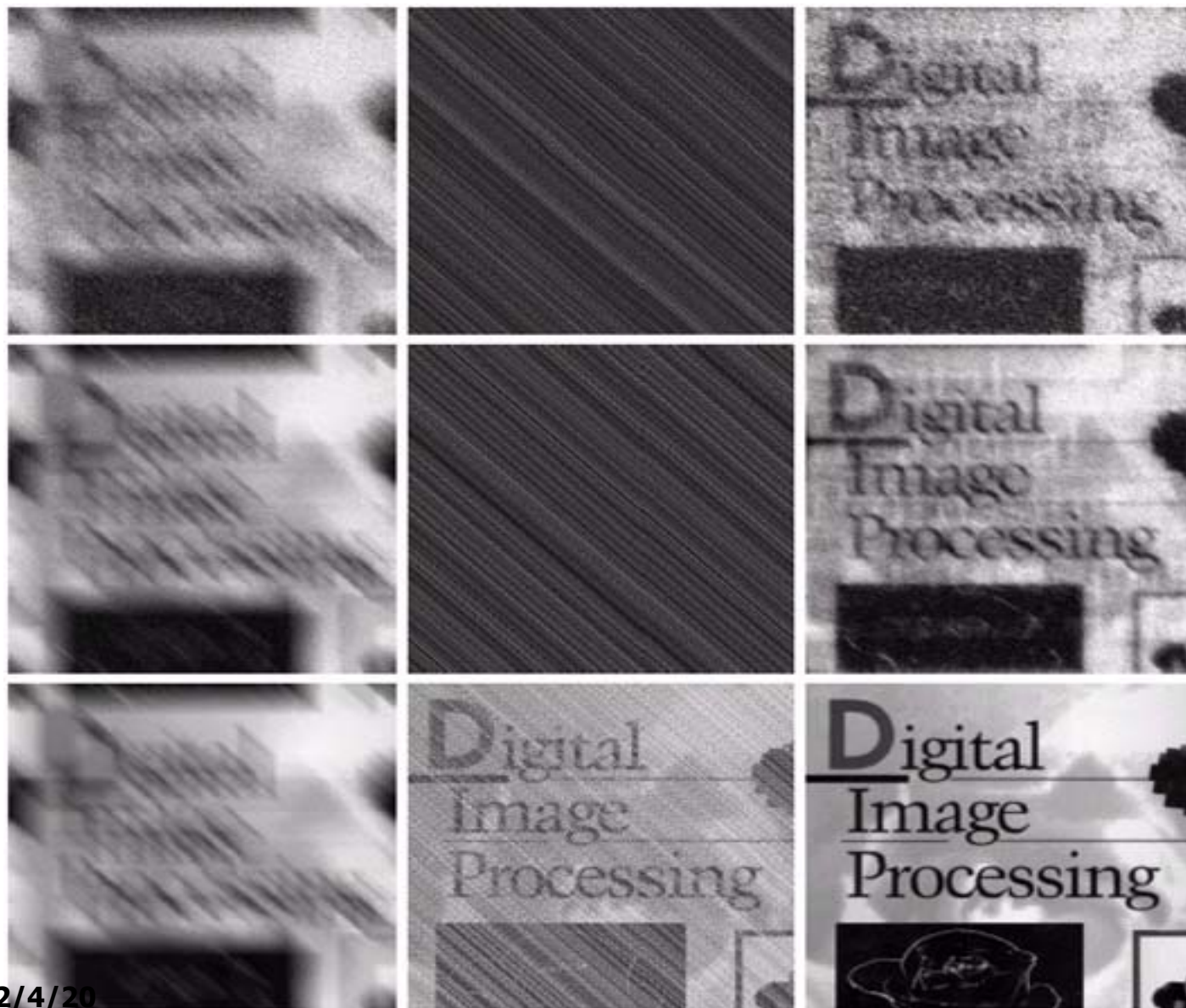
(a) 全逆滤波

(b) 半径受限的逆滤波器

(c) 维纳滤波器

(K值是通过人机交互选择了一个视觉效果最好的值)

原图退化函数 $H(u, v) = e^{-C[u^2 + v^2]^{5/6}}$



$\sigma^2=650$

对于运动模糊
和加性噪声污
染的图像（左
列）

逆滤波(中列)
与维纳滤波(右
列)在不同噪声
下的效果

$\sigma^2=65$

$\sigma^2=0.0065$

约束最小平方恢复

- 维纳滤波要求未退化图像和噪声的功率谱都是已知的；未知时用功率谱比的常数估计，未必总能得到合适解；
- 约束最小平方恢复只需要噪声方差和均值的知识，容易估计获得。
- 维纳滤波建立在最小化统计准则的基础上，在平均意义上最优，但未必每幅图像最优；而约束最小平方恢复对于每幅图像都能得到最优结果。

约束最小平方恢复

- 一般可假设图像有一定光滑性，若噪声被放大，则光滑性肯定变差，因此可利用光滑性测度来控制噪声
- 对于一维连续函数 $f(x)$ ，可用其二阶导数表征光滑程度

$$W = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad \text{——整体光滑性测度}$$

- 对于离散情况，用 $f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)$ 作光滑性近似
 - 可用 $\sum [f(i+1) - 2f(i) + f(i-1)]^2$ 作光滑性准则测度

约束最小平方恢复

- 对于二维图像连续信号 $f(x,y)$, 可用拉普拉斯算子表征光滑程度

$$\nabla^2 f(x, y) = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] f(x, y)$$

- 对于离散情况, 用离散拉普拉斯算子作光滑性测度

$$W = \sum \sum [f(i-1, k) + f(i, k-1) + f(i+1, k) + f(i, k+1) - 4f(i, k)]^2$$

- 计算方法: 将离散拉普拉斯算子作用于图像上每一点, 所得结果作平方和

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

约束最小平方恢复

- 写成矩阵形式，光滑性测度 $w(\hat{f}) = \|\mathbf{Q}\hat{f}\|^2$
 - Q就是根据拉普拉斯算子L构成的循环块矩阵
- 对于噪声，一般可得到其一些统计特性。如方差、均值
- 假定噪声的能量为一已知常数

- 则 $\|\vec{n}\|^2 = \sum \sum n^2(x, y) = \text{常数}$
 - 将其作为第二个约束条件，则 $\|\vec{g} - \mathbf{H}\vec{f}\|^2 = \|\vec{n}\|^2 = \text{常数}$

最终总的约束条件为: $w(\hat{f}) = \|\mathbf{Q}\hat{f}\|^2 + \lambda \left(\|\vec{g} - \mathbf{H}\vec{f}\|^2 - \|\vec{n}\|^2 \right)$

约束最小平方恢复

- 希望找到恢复图像 \hat{f} ，使上式最小，得

$$\hat{f} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma \mathbf{Q}^T \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{H}^T \vec{g}$$

- 对应频域的结果

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} \right] G(u, v)$$

- 其中 $P(u, v)$ 为用Q实现的高通滤波器的传递函数。
 - 对于拉普拉斯算子 $P(u, v) = 4\pi^2(u^2 + v^2)$

思考：与维纳滤波器的差别？ $P(u, v)$ 为高通，低频部分接近零，高频部分较大，效果类似于维纳滤波器中的噪信功率谱之比

约束最小平方恢复

- r 的取值（调整 r ，使得滤波结果满足噪声总能量约束）
 - 对于 $M \times N$ 图像，如果已知随机噪声的均值 m_n 和方差 σ_n^2 ，可以用下式进行估计：

$$\|\vec{n}\|^2 \approx MN \times (\sigma_n^2 + m_n^2)$$

- 这是因为： $\sigma_n^2 = E\{(n - m_n)^2\} = E\{n^2\} - m_n^2$

- 恢复后图像 $\hat{f}(x, y)$ 应该有残差 $E\{n^2\} \approx \frac{1}{MN} \sum_{i=1}^{MN} n_i^2 = \frac{1}{MN} \|\vec{n}\|^2$

- $h(x, y)$ 是引起退化的冲激响应 $r(x, y) = g(x, y) - h(x, y) * \hat{f}(x, y)$

- 矢量形式 $\vec{r} = \vec{g} - \mathbf{H}\vec{f}$

约束最小平方恢复

- 希望这个残差与噪声有相同的统计特性：

$$\|\vec{r}\|^2 = \|\vec{n}\|^2 \approx MN \times (\sigma_n^2 + m_n^2)$$

- 令 $S = \|\vec{n}\|^2 = MN \times (\sigma_n^2 + m_n^2)$ 是固定和已知的

- 这样，可通过叠代得到：

- 1.选一个 γ 的初值
- 2.计算恢复图像 $\hat{f}(x, y)$
- 3.计算残差 $r(x, y)$
- 4.计算 $\varepsilon = \|\vec{r}\|^2$

- 可以证明 ε 是 γ 的单调递增函数，则

- 若 $\varepsilon > S + \theta$ ，则减少 γ ，重新迭代；
- 若 $\varepsilon < S - \theta$ ，则增大 γ ，再迭代。
- 直到满足 ε 和 S 的误差在一定范围内为止

$$\sigma^2=650$$



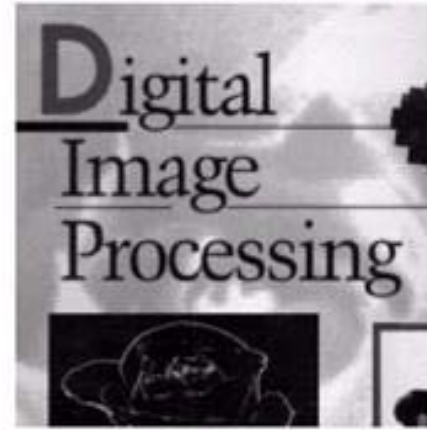
(a)

$$\sigma^2=65$$



(b)

$$\sigma^2=0.0065$$



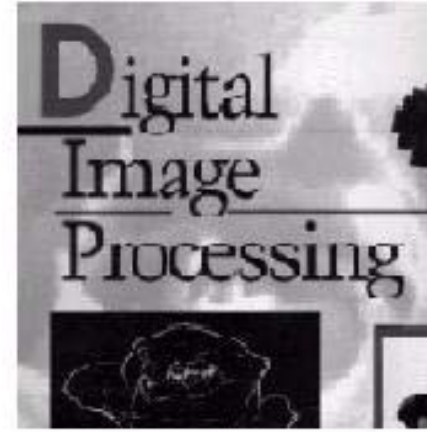
(c)



(d)



(e)



(f)

维纳滤波 (a)-(c) 与约束最小平方滤波 (d)-(f)

原图噪声: $\sigma^2=10^{-5}$, $m=0$

恢复参数: $\theta=0.25$, $\gamma=10^{-5}$



(a) 指定: $\sigma^2=10^{-5}$

(b) 指定: $\sigma^2=10^{-2}$

不同参数的约束最小平方滤波恢复

- 使用错误的噪声参数（过大），导致复原图像模糊

- 用图像的能量来代替平滑性
 - 使恢复图像的能量受限制，则其中噪声也一起受限制
 - 用图像的能量作平滑性 $W = \sum \sum \hat{f}^2(x, y) = \left\| \hat{\vec{f}} \right\|^2$
 - 相当于光滑性准则中 $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$
 - 得 $\hat{\vec{f}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \gamma)^{-1} \mathbf{H}^T \vec{g}$
 - 对应频域表达式为

$$\hat{F}(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma} \right] G(u, v)$$

几何均值滤波器(频域)

- 传递函数

$$H_G(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\alpha \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \beta S_n(u, v) / S_f(u, v)} \right]^{1-\alpha}$$

- 其中, α 和 β 为正的实常数。
- 这种滤波器是逆滤波器、维纳滤波器和功率谱滤波的一般形式:

几何均值滤波器(频域)

$$H_G(u, v) = \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2} \right]^\alpha \left[\frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma S_n(u, v) / S_f(u, v)} \right]^{1-\alpha}$$

- 若 $\alpha=1$ ，则成为去卷积滤波器，即逆滤波器；
- 若 $\alpha=1/2$ ，实际上是逆滤波器和参数化维纳滤波器的几何平均，故称为几何均值滤波器；
- 若 $\alpha=1/2$ ，且 $\gamma=1$ ，得到的滤波器称为功率谱均衡滤波器；
- 若 $\alpha=0$ ，则就是参数化维纳滤波器；
 - 若这时 $\gamma=0$ ，就成为逆滤波器； $\gamma=1$ ，标准维纳滤波器，一般可通过选择 γ 的数值来获得希望的维纳平滑效果。

由投影重建图像

20世纪20年代：图像的编码与重构技术-报纸业

20世纪60年代：图像增强和复原技术：改善图像质量-航天业

20世纪70年代：遥感卫星和医学

- 图像增强和图像识别

- 利用遥感图片，进行地质资源探测，农作物估产，水文气象监测 等

- 图像重构

- X光断层图像重构技术，英国G.N.Hounsfield 第一台脑断层摄影仪应用



CT (Computer Tomograph)

1972年英国EMI公司工程师Housfield发明了用于头颅诊断的X射线计算机断层摄影装置，也就是我们通常所说的CT (Computer Tomograph)。

1975年EMI公司又成功研制出全身用的CT装置，获得了人体各个部位鲜明清晰的断层图像。1979年，这项无损伤诊断技术获得了诺贝尔奖，说明它对人类作出了划时代的贡献。



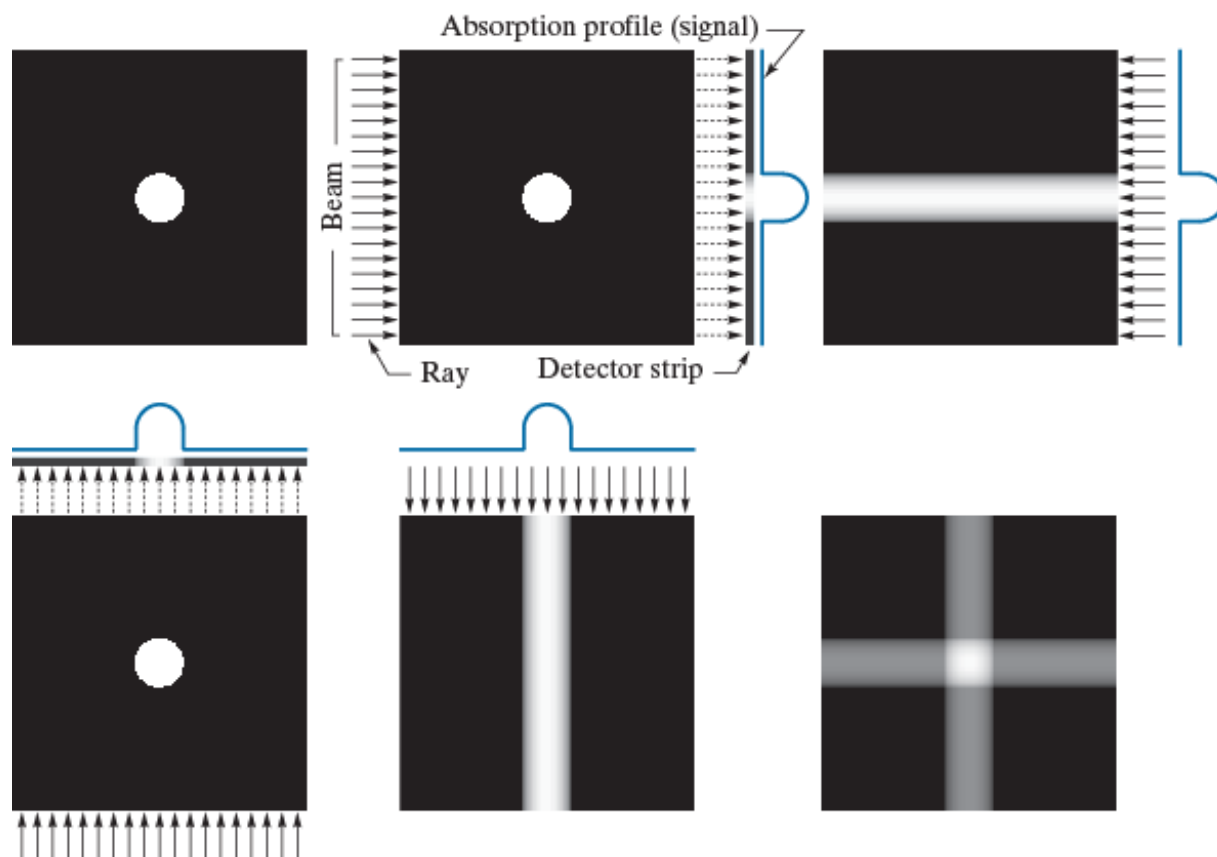
头部CT断层图

- 断层成像（CT）：
 - 它先对物体的一个截面进行投影扫描，从而重建这个截面的影像
- 根据发射源和接收器的放置方式不同，分为
 - 透射断层成像（transmission computed tomography, TCT,简称CT）
 - ——发射源和接收器在物体的两侧，射线通过物体后，由对侧的接收器接收.接收器接收到的射线强度,反映了物体对射线的吸收程度.

- 发射断层成像(emission CT, ECT)——发射源在物体内部
 - PET(正电子发射断层成像, Positron Emission Tomography): 采用在衰减时放出正电子的放射性离子,放出的正电子与负电子相撞湮灭时产生一对以相反方向射出的 γ 光子.相对放置的检测器可同时接到这二个光子.
 - SPECT(单光子发射断层成像术, Single-Photon Emission Computed Tomography),可采用任何在衰减时放出 γ 光子的放射性物质.需要用准直器来定向采集光子.

- 反射断层成像(reflection CT, RCT)
 - ——发射源和接收器在同侧
 - 常见的RCT是雷达系统
- 磁共振成像 (magnetic resonance imaging, MRI) , 又称核磁共振成像
 - 氢的原子核等所有含奇数质子的原子核均在其自旋过程中产生自旋磁动量, 也称核磁矩, 它具有方向性和力的效应
 - 人体内的每一个氢质子可被视作为一个小磁体, 正常情况下, 这些小磁体自旋轴的分布和排列是杂乱无章的.一个适当强度和频率的共振场, 使这些小磁体的自旋轴按磁场磁力线的方向重新排列。若这时移除这个共振场, 则会以射频信号的形式放出能量, 这些释放出的进行了三维空间编码的射频信号被体外线圈接收。

平行透射投影成像基本概念



a b c
d e f

FIGURE 5.32
(a) Flat region with a single object. (b) Parallel beam, detector strip, and profile of sensed 1-D absorption signal. (c) Result of back-projecting the absorption profile. (d) Beam and detectors rotated by 90°. (e) Backprojection. (f) The sum of (c) and (e), intensity-scaled. The intensity where the backprojections intersect is twice the intensity of the individual back-projections.

平行透射投影重建基本概念

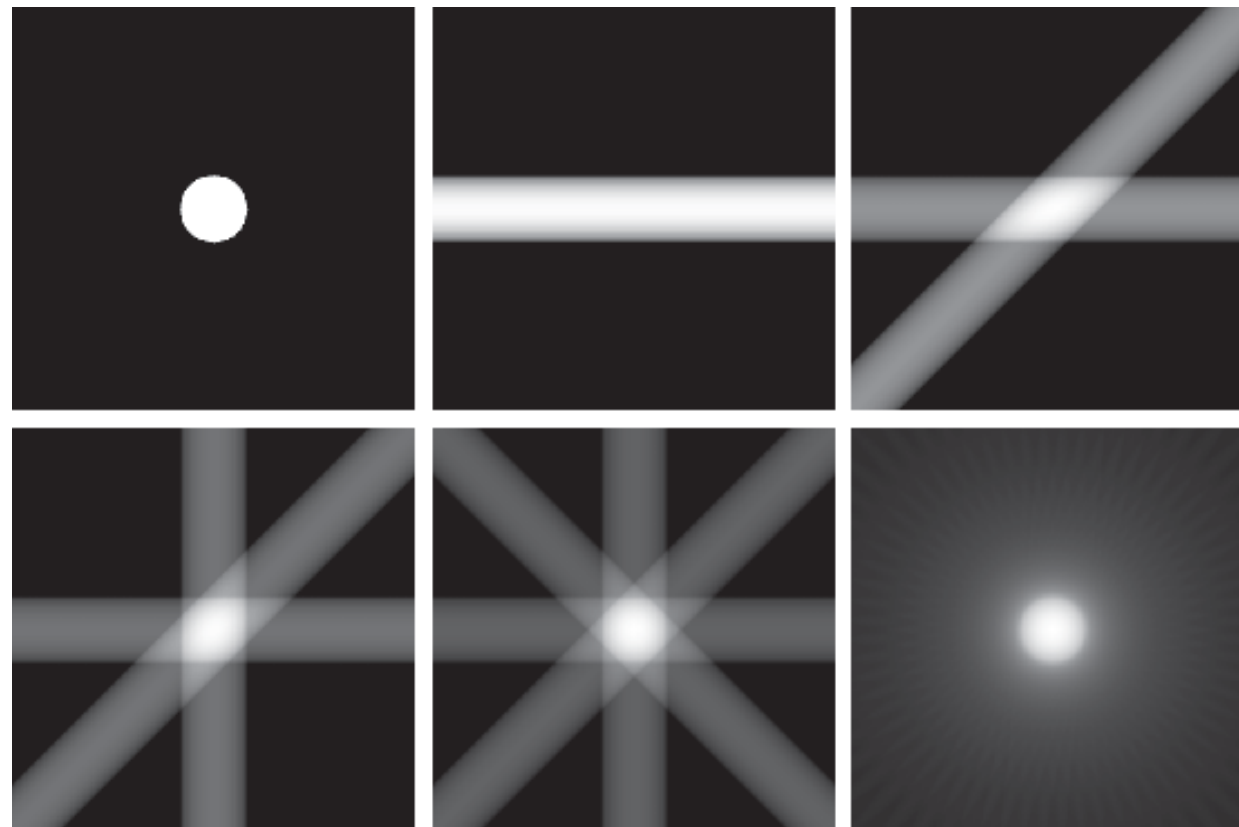
a b c
d e f

FIGURE 5.33

(a) Same as Fig. 5.32(a).

(b)-(e) Reconstruction using 1, 2, 3, and 4 backprojections 45° apart.

(f) Reconstruction with 32 backprojections 5.625° apart (note the blurring).



包含两个物体的情况

a	b	c
d	e	f

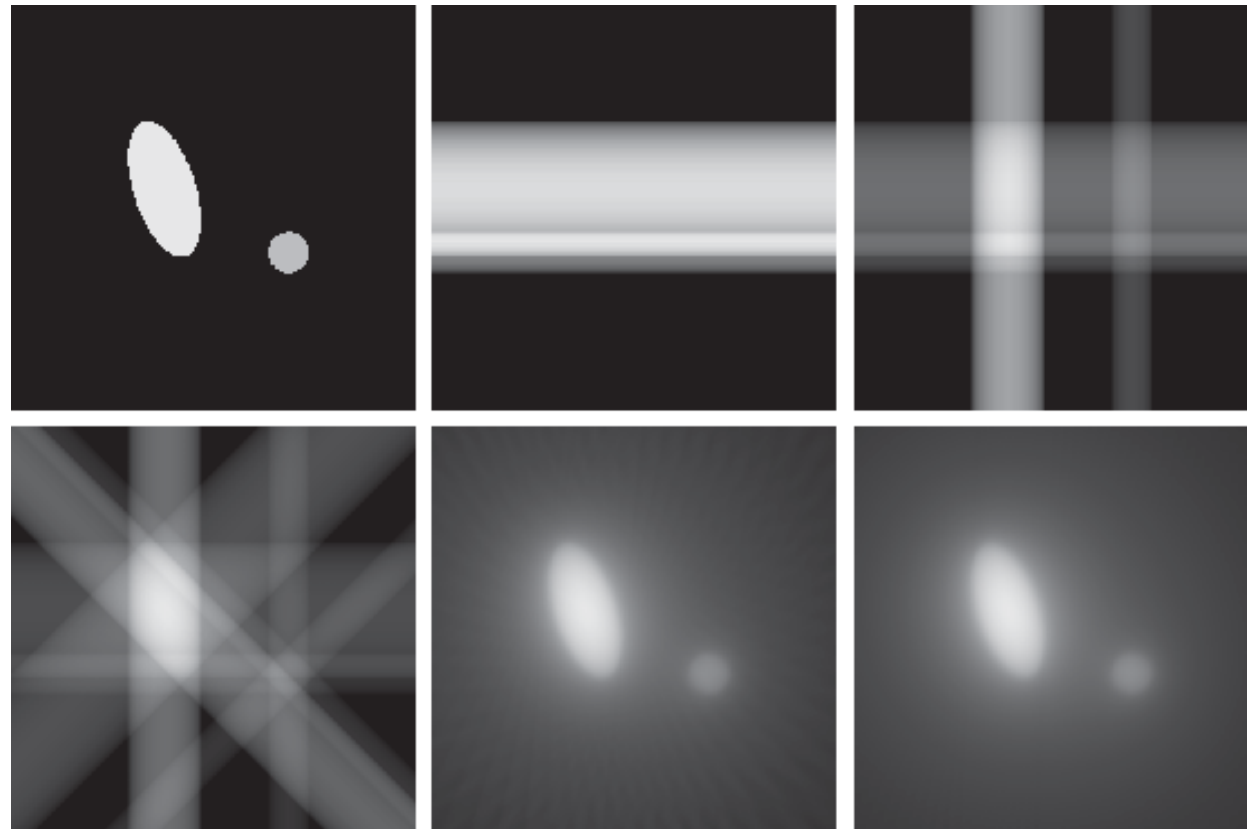
FIGURE 5.34

(a) Two objects with different absorption characteristics.

(b)–(d) Reconstruction using 1, 2, and 4 backprojections, 45° apart.

(e) Reconstruction with 32 backprojections, 5.625° apart.

(f) Reconstruction with 64 backprojections, 2.8125° apart.

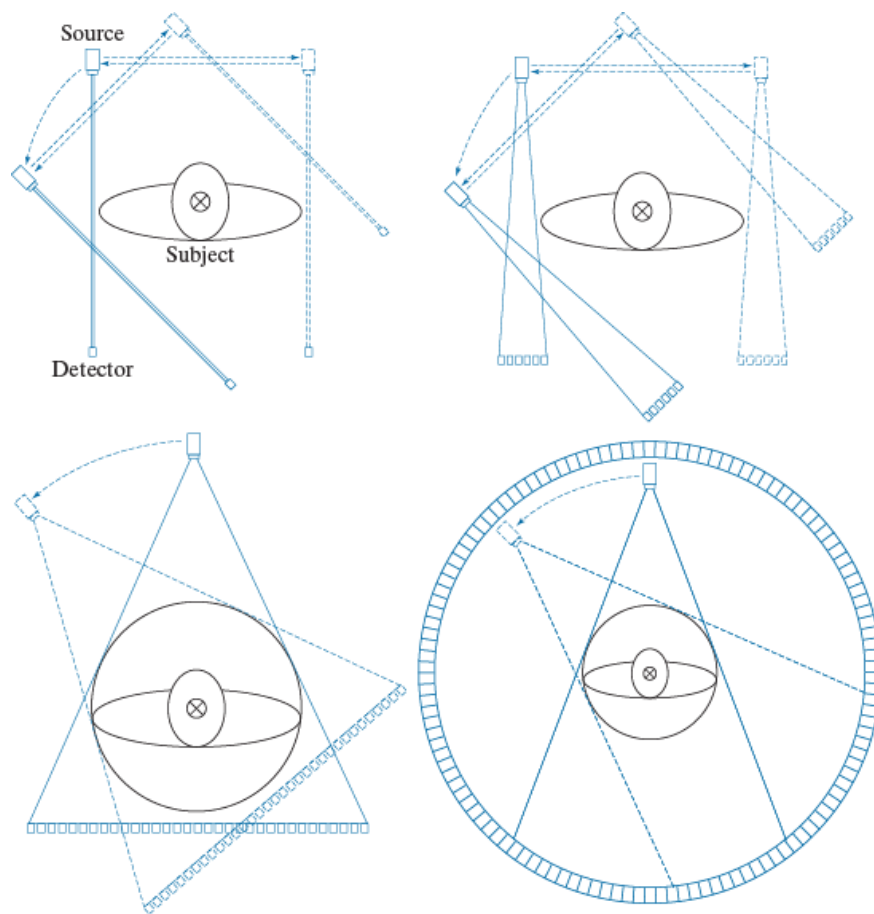


一到四代CT的基本原理

a b
c d

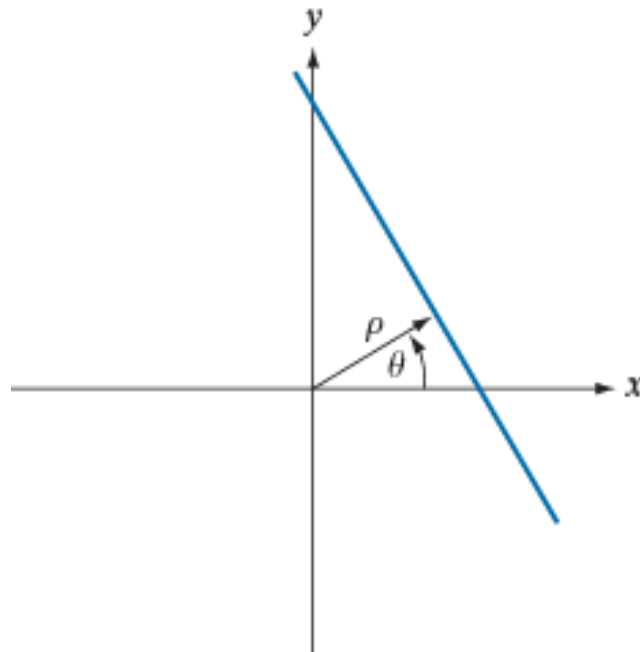
FIGURE 5.35

Four generations of CT scanners. The dotted arrow lines indicate incremental linear motion. The dotted arrow arcs indicate incremental rotation. The cross-mark on the subject's head indicates linear motion perpendicular to the plane of the paper. The double arrows in (a) and (b) indicate that the source/detector unit is translated and then brought back into its original position.



投影和雷登变换

- 直线的法线表示

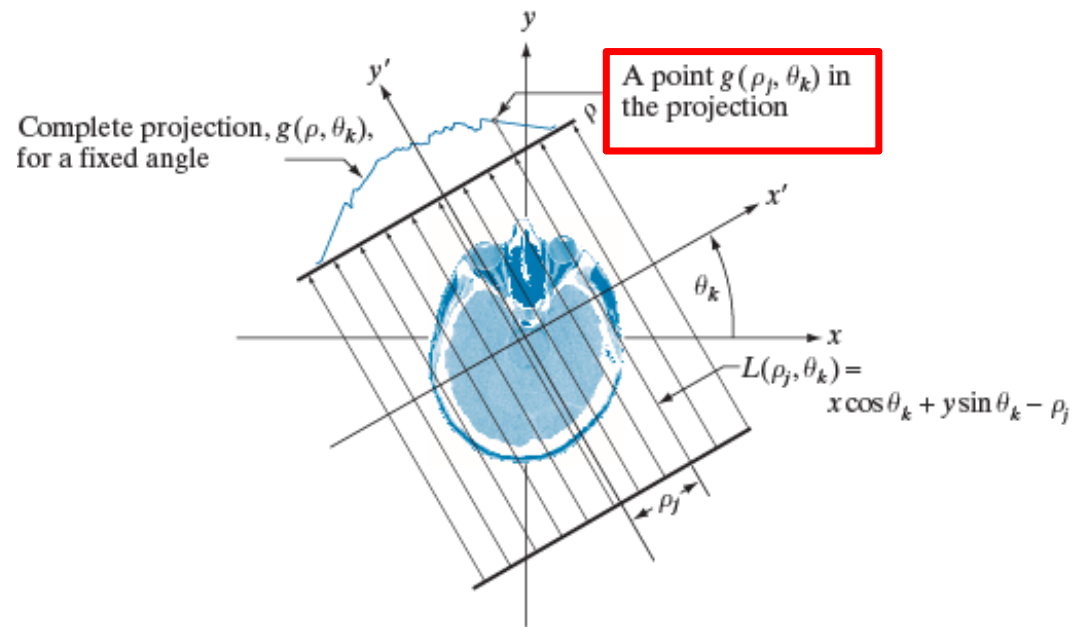


$$x \cos \theta + y \sin \theta = \rho$$

雷登变换

$$g(\rho_i, \theta_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta_k + y \sin \theta_k - \rho_i) dx dy$$

沿着给定的某条直线，
对在该直线上的图像中的
像素灰度进行求和



雷登变换

- 如果考虑 ρ 和 θ 的所有值, 则

$$g(\rho, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy$$

- 在离散情况下, 有

$$g(\rho, \theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho)$$

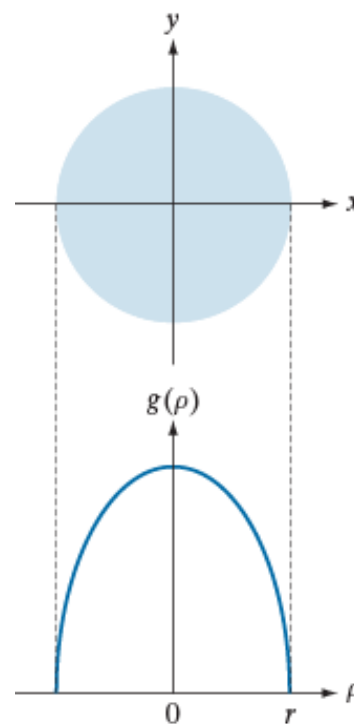
- 对 $f(x, y)$ 中所有坐标在由 ρ 和 θ 两个参数定义的直线上的像素求灰度值的和。

雷登变换的例子

$$f(x, y) = \begin{cases} A, & x^2 + y^2 \leq r^2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$g(\rho, \theta) = g(\rho) = \begin{cases} 2A\sqrt{r^2 - \rho^2}, & |\rho| \leq r \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

原物体关于原点对称，所以该雷登变换结果与角度方向无关。

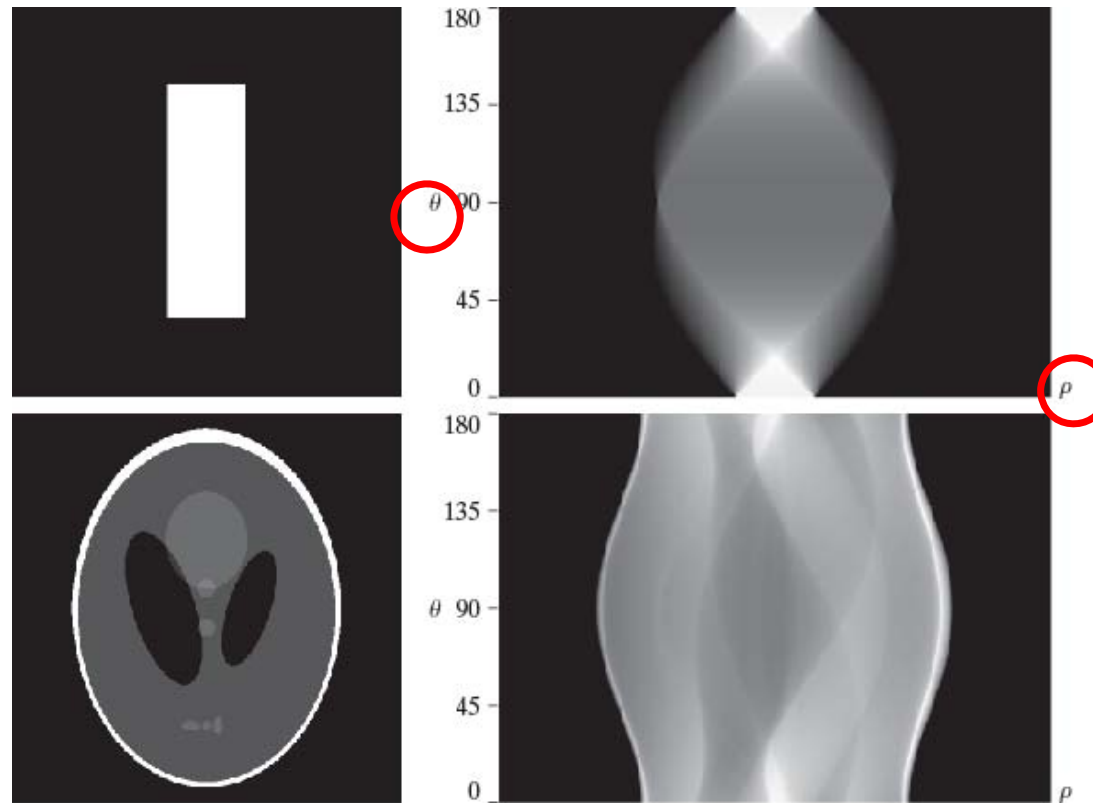


原图与正弦图（雷登变换）

a b
c d

FIGURE 5.39

Two images and their sinograms (Radon transforms). Each row of a sinogram is a projection along the corresponding angle on the vertical axis. (Note that the horizontal axis of the sinograms are values of ρ .) Image (c) is called the *Shepp-Logan phantom*. In its original form, the contrast of the phantom is quite low. It is shown enhanced here to facilitate viewing.



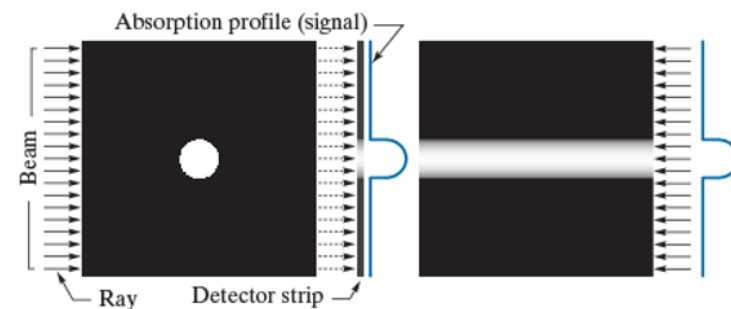
正弦图的解释有时很困难，并不直观。

反投影恢复方法 (从正弦图恢复原始图像)

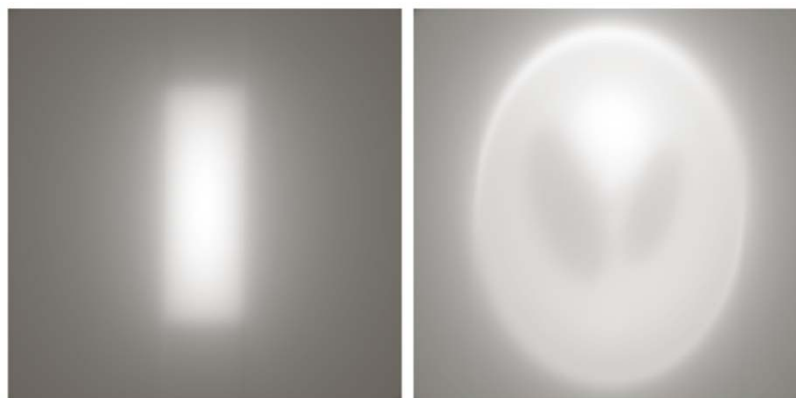
由于 $f_{\theta}(x, y) = g(\rho, \theta) = g(x \cos \theta + y \sin \theta, \theta)$

有
$$f(x, y) = \int_0^{\pi} f_{\theta}(x, y) d\theta$$

离散情况下
$$f(x, y) = \sum_0^{\pi} f_{\theta}(x, y)$$



- 用这种方法重构的图像会产生很严重的模糊。
- 该方法获得的仅仅是原始图像的一个近似。



傅里叶切片定理

- 设 $f(x,y)$ 的Fourier变换为 $F(u,v)$,则 $f(x,y)$ 在 x 轴上的投影

$$\begin{aligned}P_0(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv dy \\&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j2\pi vy) dy F(u, v) \exp(j2\pi ux) du dv\end{aligned}$$

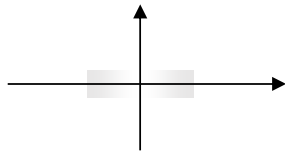
- 因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(j2\pi vy) dy = \delta(v)$ 相当与对 $\mathbf{f(y)=1}$ 进行傅里叶反变换

- 所以 $P_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) F(u, v) \exp(j2\pi ux) du dv$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(v) F(u, v) dv \exp(j2\pi ux) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(u, 0) \exp(j2\pi ux) du$$

——在 $\theta=0$ 时的投影定理



- 当 θ 为任意值时：
$$G(\omega, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) dx dy \right] e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x \cos \theta + y \sin \theta - \rho) e^{-j2\pi\omega\rho} d\rho \right] dx dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)} dx dy$$

- 令 $u = \omega \cos \theta, v = \omega \sin \theta$

- 有： $G(\omega, \theta) = F(\omega \cos \theta, \omega \sin \theta)$

- 对于给定的 θ ，投影的Fourier变换就是Fourier变换在 θ 角方向的切片

傅里叶切片定理图示

- 一个图像某方向投影的傅里叶变换就是该图像的二维傅里叶变换在该方向的一个切片

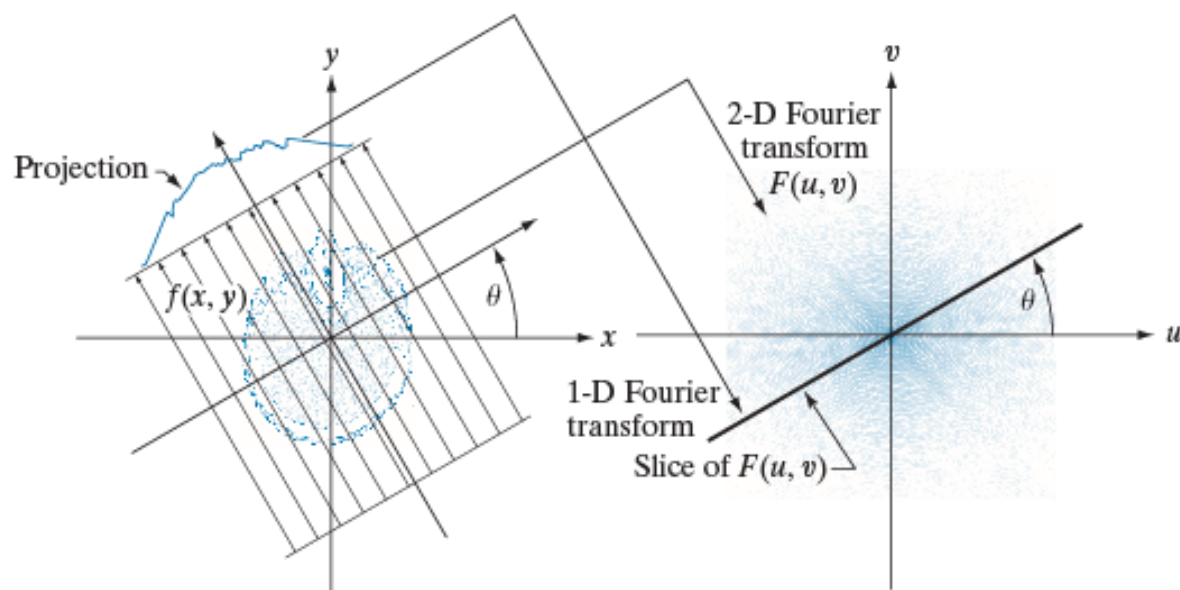
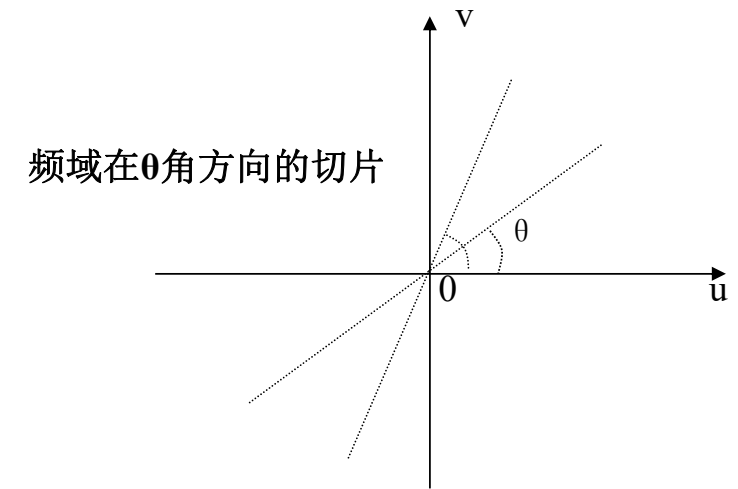


FIGURE 5.41
Illustration of the Fourier-slice theorem. The 1-D Fourier transform of a projection is a slice of the 2-D Fourier transform of the region from which the projection was obtained. Note the correspondence of the angle θ .

重建

- 直接傅里叶反变换重建
 - 在不同的 θ 角得到许多投影
 - 得到频域的许多切片
 - 得到信号的频域表示 $F(u,v)$
 - 恢复实际信号 $f(x,y)$
 - 应用时:
 - 对不同时刻和方向获得的投影 $P_\theta(t)$ ，进行离散Fourier变换，即得到 $F(\omega,\theta)$
 - 再通过内插产生 $F(u,v)$
 - 利用DFT得到二维图像阵列
 - 重建结果同样存在模糊



使用平行射线束滤波反投影重建

- 一.卷积逆投影公式
 - 二维Fourier逆变换公式为：

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy)] du dv$$

- 写成极坐标形式：

$$f(x, y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} G(\omega, \theta) \exp[j2\pi\omega(x \cos \theta + y \sin \theta)] \omega d\omega d\theta$$

- 考虑到 $\rho = x \cos \theta + y \sin \theta$ ，以及Fourier变换的共轭对称性

$$f(x, y) = \int_0^\pi \left[\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \theta) |\omega| \cdot \exp(j2\pi\omega\rho) d\omega \right] d\theta$$

- 令 $Q_{\theta}(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega, \theta) |\omega| \cdot \exp(j2\pi\omega\rho) d\omega$ 乘积的傅里叶反变换

- 则 $f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(\rho) d\theta = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$

- 进一步定义 $h(x) = F^{-1} [|\omega|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp(j2\pi\omega x) d\omega$

h(x)可积分吗?

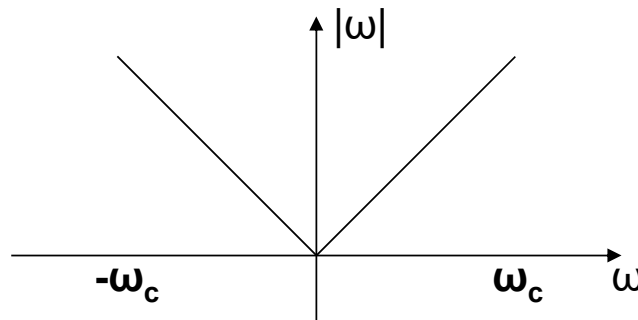
滤波反投影

$$h(x) = F^{-1} [|\omega|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |\omega| \exp(j2\pi\omega x) d\omega$$

- $|\omega|$ 无限增长，是不可积的，改为

$$h(x) = F^{-1} [|\omega|] = \int_{-\omega_c}^{+\omega_c} |\omega| \exp(j2\pi\omega x) d\omega$$

- **(实际上相当于加窗处理)**
- 只要 $G(\omega, \theta)$ 是有限带宽的，且带宽不超过 ω_c ，则不会引入误差



不同加窗处理的效果

- 对 $|\omega|$ 加汉明窗和矩形窗的比较

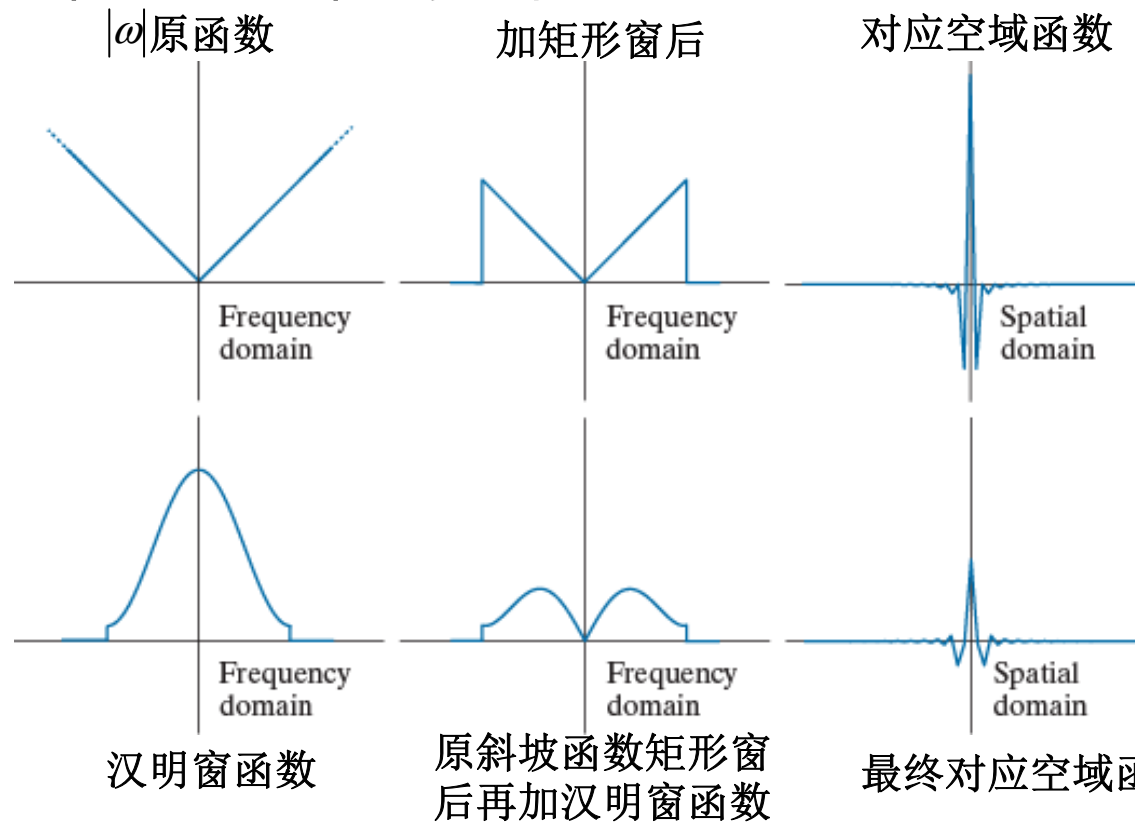


FIGURE 5.42
 (a) Frequency domain ramp filter transfer function. (b) Function after band-limiting it with a box filter. (c) Spatial domain representation. (d) Hamming windowing function. (e) Windowed ramp filter, formed as the product of (b) and (d). (f) Spatial representation of the product. (Note the decrease in ringing.)

滤波反投影步骤

- (1)计算每个角度投影的一维傅里叶变换;
- (2)用滤波函数 $|\omega|$ 乘以每一个傅里叶变换, 并乘以一个合适的窗 $h(\omega)$ (汉明窗) ;
- (3)求每一个滤波后变换的一维反傅里叶变换;
- (4)对上一步骤得到的所有一维反变换, 进行角度方向的积分 (求和) 。

$$Q_{\theta}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta}(\omega) |\omega| h(\omega) \cdot \exp(j2\pi\omega t) d\omega$$

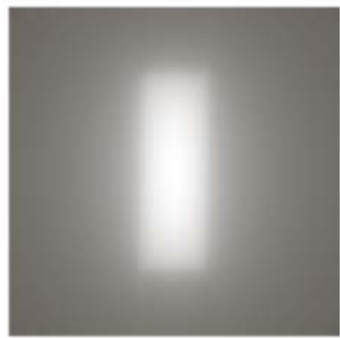
$$f(x, y) = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(t) d\theta = \int_0^{\pi} Q_{\theta}(x \cos \theta + y \sin \theta) d\theta$$

滤波反投影重建的取样率

- 两个取样需要考虑：
 - 所用的射线数量，决定了每个投影的取样数；
 - 旋转角度增量的数量，决定了重建图像的数量和质量。
 - 欠采样将产生混淆现象。

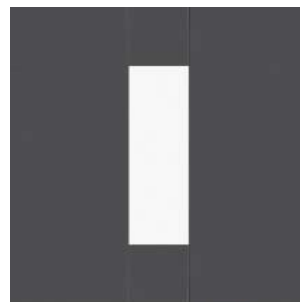
滤波反投影示例

- 使用斜坡滤波器的矩形滤波反投影
- 和使用汉明窗斜坡滤波器的矩形滤波反投影

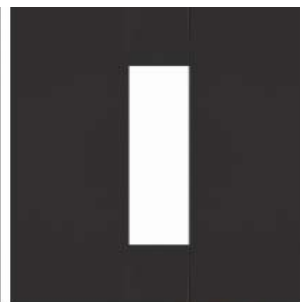


空域直接反投影积分

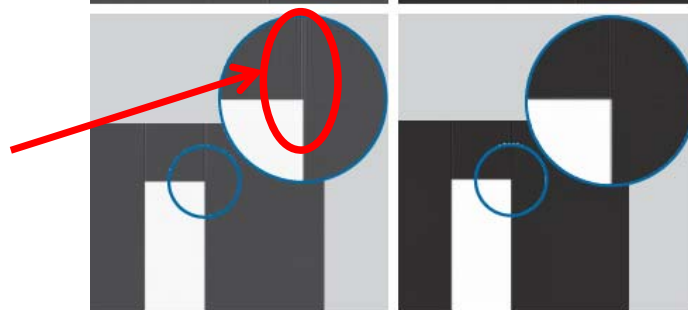
矩形滤波反投影



汉明窗斜坡滤波器的
矩形滤波反投影



振铃!



滤波反投影示例



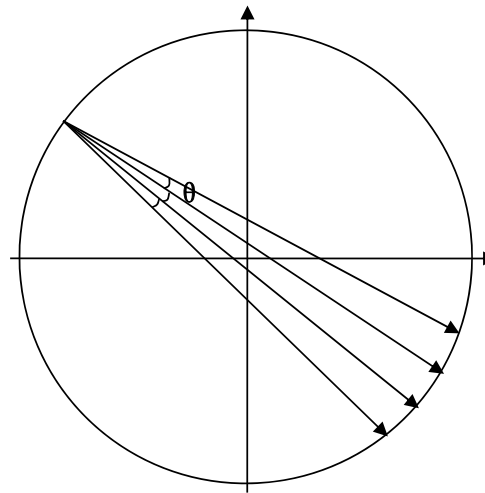
矩形窗斜坡



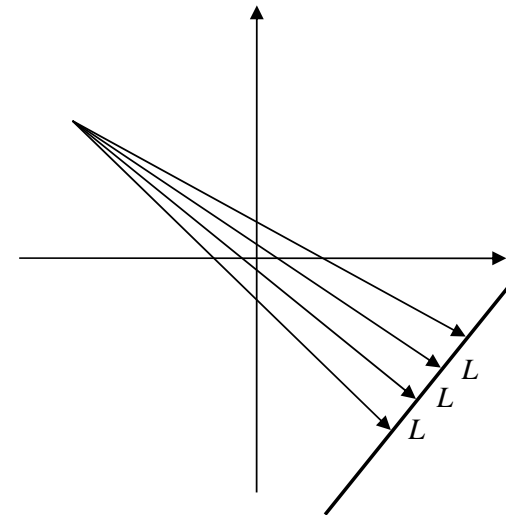
汉明窗斜坡

扇束投影重建的概念

- 在实际应用中需要缩短投影的时间
- 扇束投影有二种方式：
 - 一种是将检测器以等弧间距安装在以发射源为中心的圆弧上，这样的扇束由一组等角度间隔的射线组成；
 - 另一种则是将检测器以等间距安装在一条直线上



(a) 等角度间隔

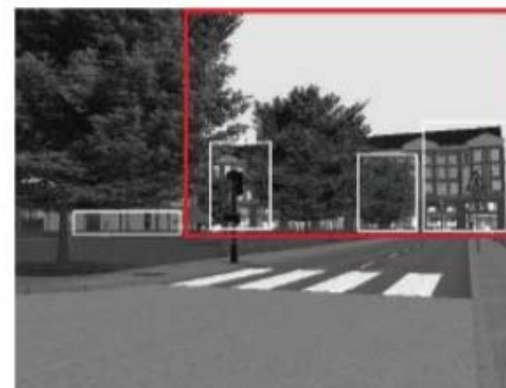


(b) 等间距

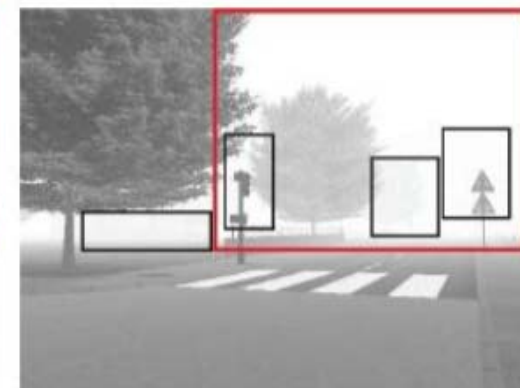
扇束投影示意图

课后文献阅读（建议）

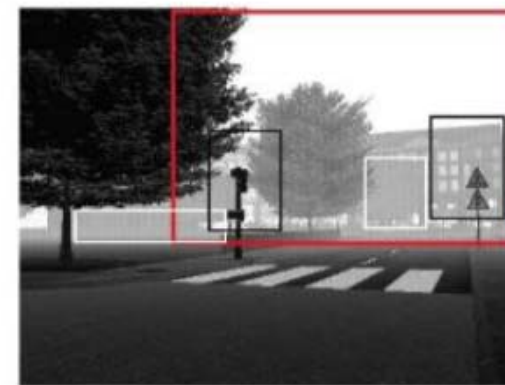
- 找近年来在CVPR, ICCV或者ECCV等TOP会议上发表的有关图像恢复，如去雨、去雾、去模糊等方面的论文进行阅读。
- 可以选择复现其中的方法，作为训练或者课程大作业。



(a)



(b)



(c)

作业

- 书面作业
 - 习题5.1, 5.11, 5.15, 5.19, 5.21 5.25,5.42;
- 上机作业：
 - 试生成一幅带噪声的运动模糊图像，并采用逆滤波或者维纳滤波进行恢复。