

数字信号处理

Digital Signal Processing

第5章 FIR数字滤波器设计和实现

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch5.1 引言

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

IIR数字滤波器

- 优点：可利用模拟滤波器设计的结果
有大量的图表可查（方便简单）
- 缺点：相位的非线性（可用全通网络进行相位修正）

图像处理以及数据传输却要求信道具有线性相位：

FIR数字滤波器

- 优点：
 - ①可以具有严格的线性相位
 - ②一定稳定（极点在0处）
 - ③能用因果系统实现
 - ④可用FFT运算，提高运算效率
- 缺点：阶次比IIR滤波器高

Copyright © ZJU XuYX

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch5.2 线性相位FIR滤波器的 条件和特性

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

FIR滤波器的单位冲激响应 $h(n)$, $0 \leq n \leq N-1$ $H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k}$

在有限 Z 平面($0 < |Z| < \infty$)有 $N-1$ 个零点, $Z=0$ 处有 $N-1$ 阶极点

一、线性相位条件

$$\begin{aligned} 1、 \quad H(e^{j\omega}) &= DTFT[h(n)] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-j\omega n} \\ &= \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)} \\ &= H(\omega) e^{j\theta(\omega)} \end{aligned}$$

不是幅度响应

其中: $H(\omega)$, 幅度函数, 可正可负
 $\theta(\omega)$, 相位函数, 取值 $-\infty \sim +\infty$

不是相位响应

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{j\theta(\omega)}$$

相延时 $\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega}$ ，群延时 $\tau = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega}$ ：为常数

因此，线性相位FIR的相位函数有两种情况：

(a) $\theta(\omega) = -\tau\omega$

(b) $\theta(\omega) = \beta - \tau\omega$

其中 $\tau > 0$

相延时，群延时都恒定
群延时恒定

$$\therefore H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j(\omega\tau - \beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (b)$$

2、令(a)式
$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\omega\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

两端实部虚部相等，得

$$\pm |H(e^{j\omega})| \cos(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)$$

$$\pm |H(e^{j\omega})| \sin(\omega\tau) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)$$

两式相除，得

$$\tan(\omega\tau) = \frac{\sin(\omega\tau)}{\cos(\omega\tau)} = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega\tau) \cos(\omega n) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega\tau) \sin(\omega n) = 0$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\tau - n)\omega] = 0 \quad \forall \omega \text{ 成立}$$

充要

$$\begin{cases} \tau = \frac{N-1}{2} \\ h(n) = h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

充要

$$\theta(\omega) = -\tau\omega$$

相延时，群延时都恒定

3、同理对(b)式求解

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j(\omega\tau - \beta)} = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

则：

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\tau - n)\omega - \beta] = 0 \quad \forall \omega \text{ 成立}$$

充要

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau = \frac{N-1}{2} \\ \beta = \pm \frac{\pi}{2} \\ h(n) = -h(N-1-n), 0 \leq n \leq N-1 \end{array} \right.$$

充要

$$\theta(\omega) = \beta - \tau\omega$$

群延时恒定

二、线性相位FIR滤波器频率响应的特点

对于线性相位FIR滤波器，有：

$$h(n) = \pm h(N-1-n) \begin{cases} + \text{偶对称} \\ - \text{奇对称} \end{cases}, \quad \text{以 } \frac{N-1}{2} \text{ 为中心}$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \pm h(N-1-n) z^{-n} \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \pm h(m) z^{-(N-1-m)} \\ &= \pm z^{-(N-1)} \sum_{m=0}^{N-1} h(m) z^m \end{aligned}$$

Copyright © Zju XuYx

$$\begin{aligned}
\therefore H(z) &= \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \\
&= \frac{1}{2} \left[H(z) \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[z^{-n} \pm z^{-(N-1)} z^n \right] \\
&= z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} \pm z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]
\end{aligned}$$

其中：“+” $h(n)$ 满足偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$
“-” $h(n)$ 满足奇对称 $h(n) = -h(N-1-n)$

1. $h(n)$ 偶对称 $h(n) = h(N-1-n)$

由上式

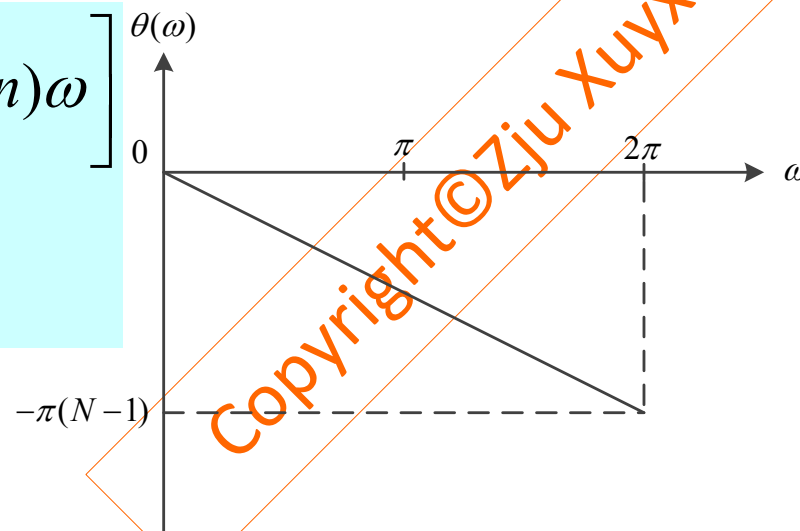
$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} + z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]$$

可得:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\left(-\frac{N-1}{2}\right)\omega} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= e^{j\theta(\omega)} H(\omega) \end{aligned}$$

∴ 幅度函数 $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$

相位函数 $\theta(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega$



2. $h(n)$ 奇对称

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

由上式

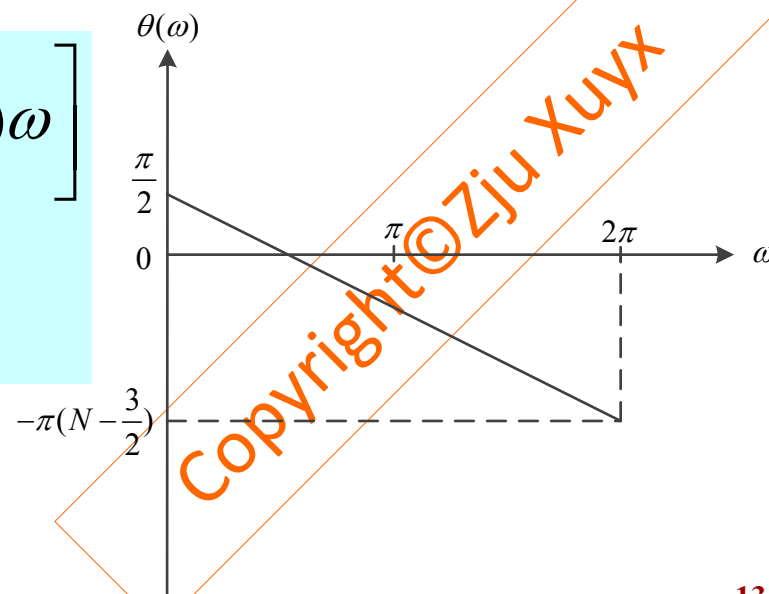
$$H(z) = z^{-\left(\frac{N-1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \left[\frac{z^{\left(\frac{N-1}{2}-n\right)} - z^{-\left(\frac{N-1}{2}-n\right)}}{2} \right]$$

可得:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = e^{j\left[-\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega + \frac{\pi}{2}\right]} \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right] \\ &= e^{j\theta(\omega)} H(\omega) \end{aligned}$$

∴ 幅度函数 $H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2}-n\right)\omega\right]$

相位函数 $\theta(\omega) = -\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega + \frac{\pi}{2}$



三、幅度函数 $H(\omega)$ 的特点

1. $h(n)$ 偶对称, N 为奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

式中, $h(n)$ 对于 $(N-1)/2$ 偶对称, $h(n) = h(N-1-n)$

又 $\cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 也对 $\frac{N-1}{2}$ 呈偶对称

Copyright©Zju XuYx

i.e. Σ 各项中第 n 项与第 $(N-1-n)$ 项相等，可以合并

$$H(\omega) = h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \cos\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right]$$

$$= h\left(\frac{N-1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(m\omega)$$

$$\triangleq \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(n\omega)$$

其中

$$a(0) = h\left(\frac{N-1}{2}\right)$$

$$a(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right), \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$h(n)$ 偶对称, N 为奇数:

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos(n\omega)$$

i.e. $\cos(n\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

$H(\omega)$ 特点:

$\therefore H(\omega)$ 对 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 呈偶对称

2. $h(n)$ 偶对称, N 为偶数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \cos \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \cos \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \\ &\triangleq \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \end{aligned}$$

其中 $b(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right), \quad n = 1, \dots, \frac{N}{2}$

Copyright © Zju XuYx

$h(n)$ 偶对称, N 为偶数:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$H(\omega)$ 特点:

$$\textcircled{1} \quad \omega = \pi \text{ 时} \quad \cos \left[\omega \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \left[\pi \left(n - \frac{1}{2} \right) \right] = 0$$

则 $H(\pi) = 0$ i.e. $H(z)$ 在 $z = -1$ 有一零点

$$\textcircled{2} \quad \because \cos \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \text{对 } \omega = \pi \text{ 奇对称}$$

$\therefore H(\omega)$ 对 $\omega = \pi$ 奇对称, 对 $0, 2\pi$ 偶对称

Copyright©Zju XuYX

3. $h(n)$ 奇对称, N 为奇数

$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$$

式中, $h(n) = -h(N-1-n)$, 对 $\frac{N-1}{2}$ 呈奇对称, 且 $h((N-1)/2) = 0$

$\sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right]$ 也对 $\frac{N-1}{2}$ 呈奇对称

i.e. Σ 各项中第 n 项与第 $(N-1-n)$ 项相等, 可以合并

$$h(n) \text{ 奇对称且 } N \text{ 为奇数} \quad \therefore h\left(\frac{N-1}{2}\right) = 0$$

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-3}{2}} 2h(n) \sin\left[\left(\frac{N-1}{2} - n\right)\omega\right] \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N-1}{2}} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \sin(m\omega) \\ &\triangleq \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(n\omega) \end{aligned}$$

其中：

$$c(n) = 2h\left(\frac{N-1}{2} - n\right) \quad n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$h(n)$ 奇对称, N 为奇数:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} c(n) \sin(n\omega)$$

$H(\omega)$ 特点:

- ① $\because \sin(n\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处为0
 $\therefore H(\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处为0, i.e. $H(z)$ 在 $z = \pm 1$ 处有零点
- ② $\because \sin(n\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处奇对称

$\therefore H(\omega)$ 在 $\omega = 0, \pi, 2\pi$ 处也奇对称

4. $h(n)$ 奇对称, N 为偶数

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} 2h(n) \sin \left[\left(\frac{N-1}{2} - n \right) \omega \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\frac{N}{2}} 2h \left(\frac{N}{2} - m \right) \sin \left[\left(m - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \\ &\triangleq \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right] \end{aligned}$$

其中:

$$d(n) = 2h \left(\frac{N}{2} - n \right)$$

$$n = 1, \dots, \frac{N-1}{2}$$

$h(n)$ 奇对称, N 为偶数:

$$H(\omega) = \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}} d(n) \sin \left[\left(n - \frac{1}{2} \right) \omega \right]$$

$H(\omega)$ 特点:

- ① $\because \sin[(n-1/2)\omega]$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处为0
 $\therefore H(\omega)$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处为0, i.e. $H(z)$ 在 $z = 1$ 处有零点
- ② $\because \sin [(n-1/2)\omega]$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处呈奇对称, π 处呈偶对称

$\therefore H(\omega)$ 在 $\omega = 0, 2\pi$ 处也呈奇对称, π 处呈偶对称

四、线性相位FIR系统的零点位置

对于线性相位FIR，由前面可知：

$$H(z) = \pm z^{-(N-1)} H(z^{-1})$$

$H(z)$ 或 $H(z^{-1})$ 是 z 或 z^{-1} 的多项式，两者相差 $\pm z^{-(N-1)}$

①若 $z = z_i$ 为 $H(z)$ 的零点，则 z_i^{-1} 也一定是 $H(z)$ 的零点

② $\because h(n)$ 为实数， $H(z)$ 的零点是共轭成对

$\therefore z_i^*$ ， z_i^{-1*} 也是 $H(z)$ 的零点

因此，线性相位FIR滤波器的零点必呈共轭镜像对称，或者互为倒数的共轭对。

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch5.3 窗函数法

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

Copyright©Zju Xuyx

思路：

理想数字滤波器

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n)e^{-jn\omega}$$

$h_d(n)$ 无限长，且非因果

频域上： 抽样
Ch5.4 频率抽样法

时域上： 截断 i.e. 加窗
Ch5.3 窗函数法

设计的 FIR 数字滤波器

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)e^{-jn\omega}$$

$h(n)$ 有限长，且因果

逼近

要求： 线性相位

尽可能降低逼近误差

Copyright©Zju XuYx

一、加窗原理

- 设所要求的 **DF** 的频率响应是 $H_d(e^{j\omega})$ ，**需要注意：它可能是低通、高通、带通和带阻 FIR DF，没有特指某种类型的数字滤波器。**
- 不管是何种 **FIR DF**，它的频率响应是频域中的周期函数，周期为 2π ，所以它可以展开为傅氏级数形式：

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_d(n) e^{-jn\omega}$$

式中 $h_d(n)$ 是傅里叶系数，也是单位取样响应序列。

由傅里叶级数理论可得：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{j\omega}) e^{jn\omega} d\omega$$

or IDTFT

举例：假设 $H_d(e^{j\omega})$

为截止频率 ω_c 的线性相位理想矩形幅度特性的LPF

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi}$$

中心点在 τ 处的偶对称无限长非因果序列

■ 时域上将 $\mathbf{h_d(n)}$ 截短:

$$\mathbf{h(n)} = \begin{cases} \mathbf{h_d(n)}, & 0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{N-1} \\ 0, & \mathbf{other} \end{cases}$$

相当于将 $\mathbf{h_d(n)}$ 与一矩形窗函数 $\mathbf{w(n)=R_N(n)}$ 相乘, 即

$$\mathbf{h(n)} = \mathbf{h_d(n)R_N(n)}$$

其中

$$\mathbf{R_N(n)} = \begin{cases} 1, & 0 \leq \mathbf{n} \leq \mathbf{N-1} \\ 0, & \mathbf{else} \end{cases}$$

Copyright©Zju XuYx

设计实际的FIR滤波器要求线性相位条件，所以：

$h(n)$ 也必须是偶对称， i.e. 对称中心在 $(N-1)/2$ 处

$$\therefore \tau = \frac{N-1}{2}$$

就有：

$$h(n) = \begin{cases} \frac{\sin[(n - \frac{N-1}{2})\omega_c]}{(n - \frac{N-1}{2})\pi}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & other \end{cases}$$

- 频域上分析：
时域相乘，频域上卷积，有：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} [H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})]$$

Copyright © Zju XuYX

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

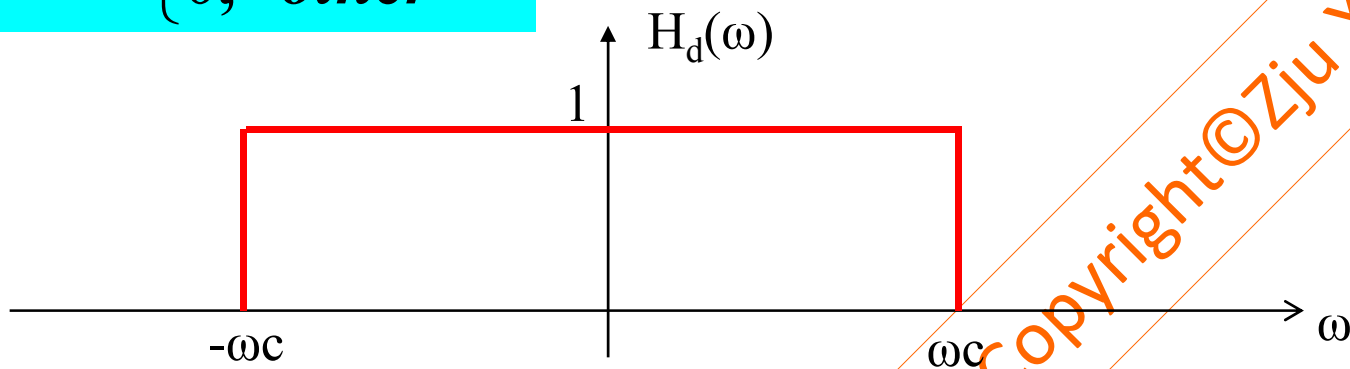
$$\triangleq H_d(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

其中幅度函数：

$$H_d(\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

相位函数：

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$



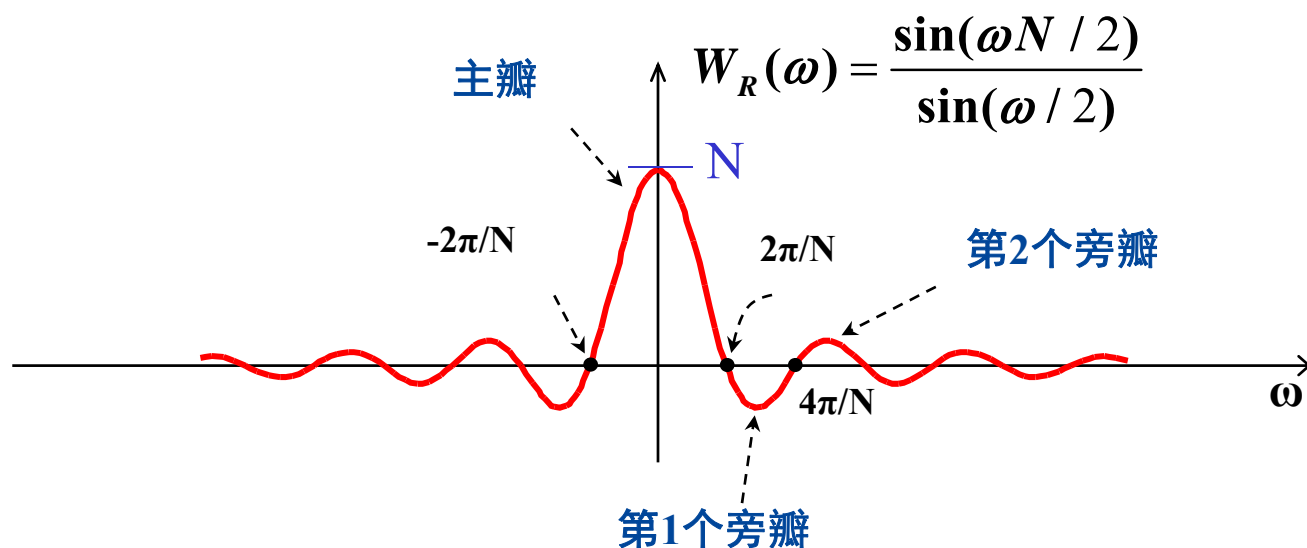
$$\begin{aligned}
 W_R(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_N(n)e^{-jn\omega} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-jn\omega} = \frac{1-e^{-j\omega N}}{1-e^{-j\omega}} = \frac{e^{-j\frac{\omega}{2}} e^{-j\omega\frac{(N-1)}{2}} \left(e^{j\omega\frac{N}{2}} - e^{-j\omega\frac{N}{2}} \right)}{e^{-j\frac{\omega}{2}} \left(e^{j\frac{\omega}{2}} - e^{-j\frac{\omega}{2}} \right)} \\
 &= \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \\
 &\triangleq W_R(\omega)e^{j\theta(\omega)}
 \end{aligned}$$

其中幅度函数：

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$$

相位函数：

$$\theta(\omega) = -\frac{N-1}{2}\omega$$



此矩形窗谱为一偶函数，在 $\omega = \pm 2\pi/N$ 之间为其主瓣，主瓣宽度 $\Delta\omega = 4\pi/N$ ，在主瓣两侧有无数幅度逐渐减小的旁瓣，见图所示。

Copyright © Zju Huix

因此，有：

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} [H_d(e^{j\omega}) * W_R(e^{j\omega})] \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) e^{-j\frac{N-1}{2}\theta} W_R(\omega - \theta) e^{-j\frac{N-1}{2}(\omega - \theta)} d\theta \\ &= e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta \\ &\triangleq H(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \end{aligned}$$

其中，FIR滤波器的幅度函数为：

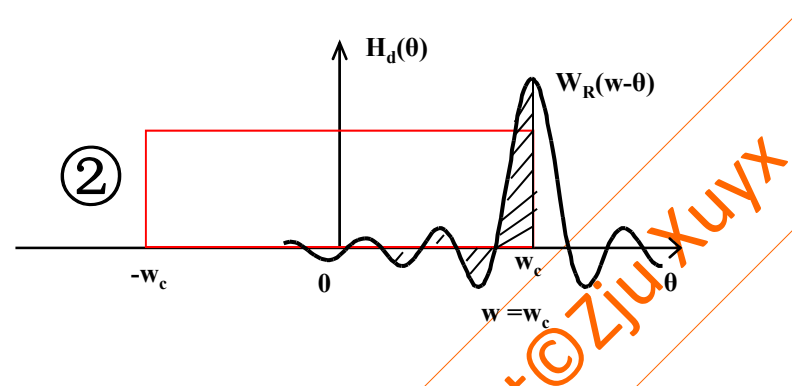
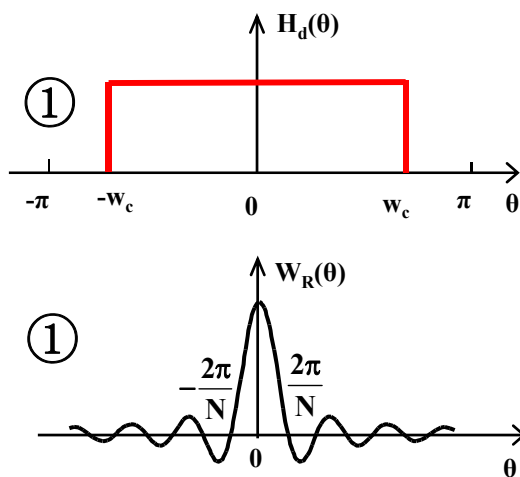
$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(\theta) W_R(\omega - \theta) d\theta$$

H(ω)的几个特殊频点的起伏现象

(1) $\omega = 0$ 时:

$$H(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_R(\theta) d\theta$$

由于一般情况下都满足 $\omega_c \gg 2\pi / N$, 因此, $H(0)$ 的值近似等于窗谱函数 $W_R(\theta)$ 与 θ 轴围出的整个面积。



(2) $\omega = \omega_c$ 时:

$$H(\omega_c) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} W_R(\omega_c - \theta) d\theta \approx \frac{H(0)}{2}$$

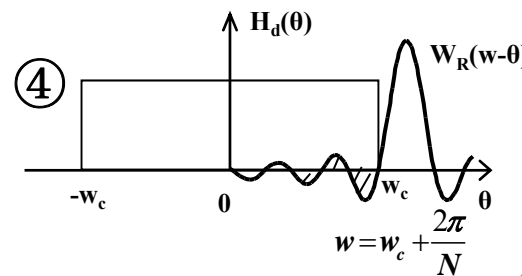
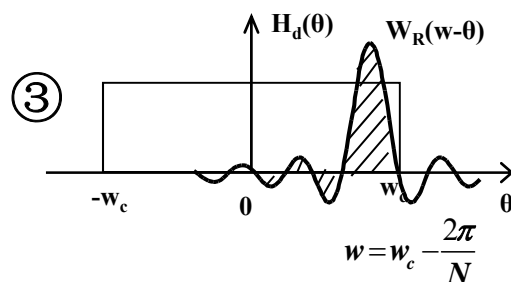
此时窗谱主瓣一半在积分区间内一半在区间外, 因此, 窗谱曲线围出的面积, 近似为 $\omega = 0$ 时所围面积的一半, 即 $H(\omega_c) \approx \frac{1}{2} H(0)$

(3) $\omega = \omega_c - 2\pi/N$ 时, 正肩峰

$$H(\omega_c - \frac{2\pi}{N}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} w_R(\omega_c - \frac{2\pi}{N} - \theta) d\theta = 1.0895 H(0) = \text{Max}$$

此时窗谱主瓣全部处于积分区间内, 而其中一个最大负瓣刚好移出积分区间, 这时得到最大值, 形成**正肩峰**。

随着 ω 值的不断减小, $H(\omega)$ 的值围绕 $H(0)$ 而上下波动, 形成通带内波动。随着 ω 值的不断增大, $H(\omega)$ 的值迅速减小, 此时进入滤波器过渡带。



(4) $\omega = \omega_c + 2\pi/N$ 时, 负肩峰

$$H(\omega_c + \frac{2\pi}{N}) = -0.0895 H(0) = \text{Min}$$

此时窗谱主瓣刚好全部移出积分区间, 而其中一个最大负瓣仍全部处于区间内, 因此得到最小值, 形成**负肩峰**。

随着 ω 值的继续增大, $H(\omega)$ 的值围绕零点上下振荡并不断减小, 形成滤波器阻带波动。

■ 加窗处理对理想矩形频率响应的影响：

① 理想滤波器的不连续点两侧出现正/负肩峰，峰间演化为过渡带

正负肩峰之间的频带宽度等于窗口频谱的主瓣宽度。

对于矩形窗 $W_R(\omega)$ ，此宽度为 $4\pi/N$ ，FIR 实际过渡带的宽度小于该值

② 通带与阻带内出现起伏波动

肩峰两侧形成起伏振荡，这是由窗函数的旁瓣引起的。振荡幅度取决于旁瓣的相对幅度，振荡多少取决于旁瓣的多少。

旁瓣越多，波动越快、越多。相对值越大，波动越厉害，肩峰越强。

③ (吉布斯)Gibbs 现象

$$W_R(\omega) = \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})} \approx \frac{\sin(\frac{\omega N}{2})}{\frac{\omega}{2}} = N \frac{\sin(x)}{x}, \quad \omega \rightarrow 0, \text{ 其中 } x = \frac{\omega N}{2}$$

改变窗长度 N ：（1）只能改变主瓣宽度、 ω 坐标的比例及窗函数 $W_R(\omega)$ 的绝对值大小；（2）不能改变主瓣与旁瓣的相对比例，因为当 N 较大时， $\sin(x)/x$ 的形状不变

i.e. 长度 N 增大，过渡带宽将减小，但肩峰相对值固定为 8.95%

二、常用窗函数

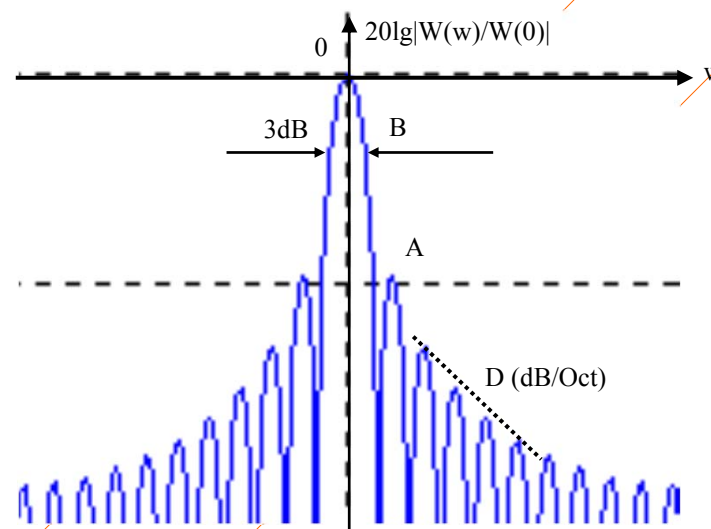
设计FIR DF时，窗函数不仅可以影响过渡带宽度，还能影响肩峰和波动的大小(阻带的衰减)，因此，选择窗函数应使其频谱：

- ① 主瓣宽度尽量窄，以使过渡带尽量陡。
- ② 旁瓣相对于主瓣越小越好，这样可使肩峰和波动减小，即能量尽可能集中于主瓣内。

对于窗函数，这两个要求是相互矛盾的，要根据需要进行折衷的选择

■ 为了定量地比较各种窗函数的性能，给出三个频域指标：

- ① 3db 带宽 B ，单位为 $\Delta\omega = \frac{2\pi}{N}$ （最大可能的频率分辨力）
 - ② 最大旁瓣峰值 $A(\text{dB})$ ， A 越小，由旁瓣引起的谱失真越小
 - ③ 旁瓣谱峰渐进衰减速度 $D(\text{dB/oct})$
- ✧ 一个好的窗口，应该有最小的 B 、 A 及最大的 D 。



■ 以下介绍的窗函数

- ✧ 均为偶对称函数，都具有线性相位特性。
- ✧ 设窗的宽度为**N**，窗函数的对称中心点在**(N-1)/2**处。

■ 矩形窗

- ✧ 最简单的窗函数，从阻带衰减的角度看，其性能最差。

$$w(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

- ✧ 它的频率响应函数为：

$$W_R(e^{j\omega}) = e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

幅度函数



$$W_R(\omega) = \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

■ 其它窗函数

选择窗函数在边沿处($n=0$, $n=N-1$)附近比矩形窗变化要平滑而缓慢, 以减少由于陡峭的边缘引起的旁瓣分量, 使阻带衰减增大, 但过度带会变宽。

Copyright © Zju XuYX

■ 三角窗（或 巴特利特 Bartlett 窗）

- ✧ 由于矩形窗从 **0** 到 **1**（或 **1** 到 **0**）有一个突变的过渡带，这造成了吉布斯现象。**Bartlett** 提出了一种逐渐过渡的三角窗形式，它是两个矩形窗的卷积。

$$w(n) = \begin{cases} \frac{2n}{N}, & n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \\ w(N-n), & n = \frac{N}{2}, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$W(e^{j\omega}) = \frac{2}{N} \left(\frac{\sin\left(\frac{N\omega}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)} \right)^2 e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\omega}$$

- ✧ **B=1.28Δω**, **A=-27dB**, **D= -12dB/oct**，主瓣带宽 **8π/N**，**精确过渡带宽 6.1π/N**，**最小阻带衰减 25dB**。与矩形窗来比较，阻带衰减性能有所改善，但代价是过渡带的加宽。

■ 余弦窗

$$w(n) = \sin\left(\frac{n\pi}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

频率响应

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} e^{-j\frac{N}{2}\omega} \left[u\left(\omega - \frac{\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{\pi}{N-1}\right) \right]$$

其中

$$u(\omega) = e^{j\frac{\omega}{2}} \frac{\sin\left(\frac{N\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

✧ **B=1.2Δω, A=-23dB, D=-12dB/oct**。主瓣带宽 **8π/N**, 精确过渡带宽**6.5π/N**, 最小阻带衰减 **34dB**。

■ 升余弦窗函数

- ✧ 汉宁窗、汉明窗、布莱克曼窗都是升余弦窗的特例。它们都是频率为 $0 \sim 2\pi/(N-1)$ 和 $4\pi/(N-1)$ 的余弦序列的组合。升余弦窗的频率特性比矩形窗有很大改善。

$$w(n) = A - B \cos(n) + C \cos(2n)$$

- ✧ 其中 **A**、**B**、**C** 为常数。

- ① 当 **A = 0.5**, **B=0.5**, **C=0** 时, 为**汉宁 (Hanning)**窗。

Matlab 中, **w = hanning(n)**

- ② 当 **A = 0.54**, **B=0.46**, **C=0** 时, 为**汉明 (Hamming)** 窗。

Matlab 中, **w = hamming(n)**

- ③ 当 **A=0.42**, **B=0.5**, **C=0.08** 时, 为**布莱克曼 (Blackman)**窗。

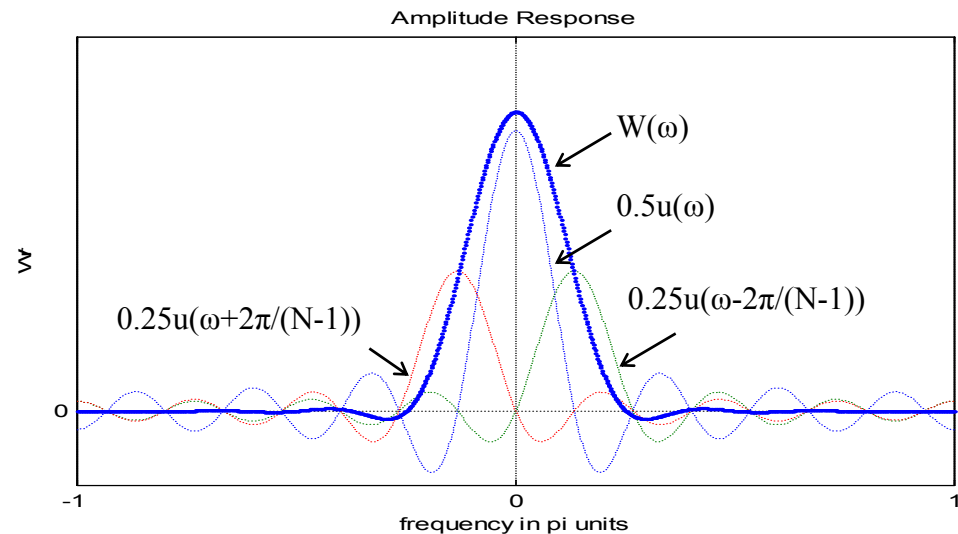
Matlab 中, **w = blackman(n)**

■ Hanning 窗（汉宁窗，升余弦窗）

$$w(n) = \sin^2\left(\frac{n\pi}{N-1}\right) = 0.5 - 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$W(\omega) = 0.5u(\omega) + 0.25\left[u\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)\right]$$

$B=1.44\Delta\omega$, $A=-32\text{db}$, $D=-18\text{db/oct}$, 主瓣带宽 **$8\pi/N$** , 精确过渡带宽 **$6.2\pi/N$** , 最小阻带衰减 **44dB** 。与矩形窗来比, 最小阻带衰减性能明显提高, 但过渡带也明显增大。



■ Hamming 窗（汉明窗，改进的升余弦窗）

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$W(\omega) = 0.54u(\omega) + 0.23u\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + 0.23u\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right)$$

B=1.3Δω, A=-43dB, D=-6dB/oct, 主瓣带宽 **8π/N**,
精确过渡带宽**6.6π/N**, 最小阻带衰减 **53dB**。通过这一系
数调整, 使能量的 **99.963%** 都集中在了窗谱的主瓣内。

■ Blackman 窗（布莱克曼窗，二阶升余弦窗）

$$w(n) = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{2\pi}{N-1} 2n\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

$$W(\omega) = 0.42u(\omega) + 0.25 \left[u\left(\omega - \frac{2\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{2\pi}{N-1}\right) \right] \\ + 0.04 \left[u\left(\omega - \frac{4\pi}{N-1}\right) + u\left(\omega + \frac{4\pi}{N-1}\right) \right]$$

B=1.68Δω, A=-58db, D=-18db/oct, 主瓣带宽 **12π/N**, 精确过渡带宽**11π/N**, 最小阻带衰减 **74dB**。通过增加余弦的二次谐波分量, 能够进一步抑制旁瓣, 但主瓣宽度却是矩形窗谱的主瓣宽度的三倍。

表5.2：常用窗函数的性能指标（p.260）

窗函数	旁瓣峰值衰减 (dB)	窗函数 主瓣宽度	加窗后滤波器 过渡带宽	加窗后滤波器 阻带最小衰减 (dB)
矩形窗	-13	$4\pi/N$	$1.8\pi/N$	-21
三角形窗	-25	$8\pi/N$	$6.1\pi/N$	-25
汉宁窗 (升余弦窗)	-31	$8\pi/N$	$6.2\pi/N$	-44
汉明窗 (改进升余弦窗)	-41	$8\pi/N$	$6.6\pi/N$	-53
布莱克曼窗 (二阶升余弦窗)	-57	$12\pi/N$	$11\pi/N$	-74

三、设计步骤

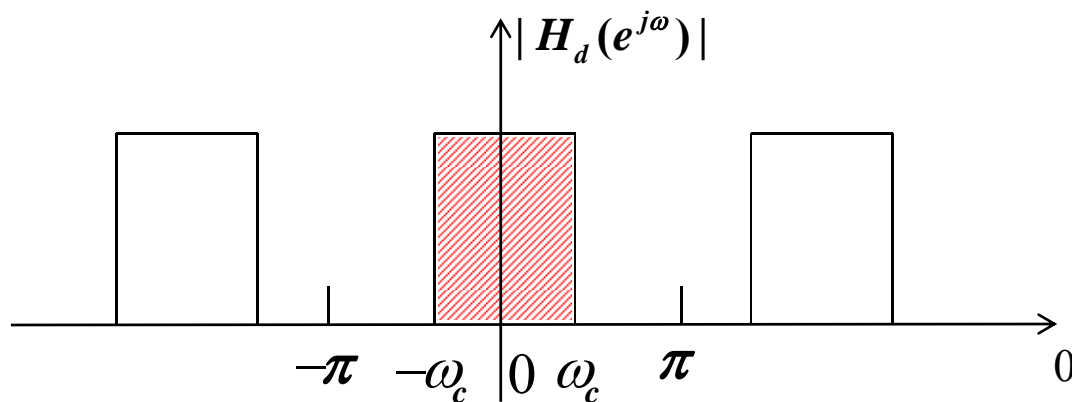
FIR DF 窗口法设计步骤

- 性能要求 $\rightarrow H_d(e^{j\omega})$
- 求得 $h_d(n) = \text{IDTFT}[H_d(e^{j\omega})]$;
- 按表5.2,5.3, 根据阻带最小衰减、过渡带宽的要求选定窗形状 $w(n)$ 、窗宽度 N , **一般 N 取奇数**

$$N = \left\lceil \frac{\text{对应窗函数的过度带宽}}{\text{滤波器要求的过渡带宽}} \right\rceil_{\text{上取整}}$$

- $h(n) = h_d(n)w(n)$; $0 \leq n \leq N-1$
- $H(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[h(n)]$, **检验**是否满足设计要求.

线性相位FIR LPF滤波器的设计



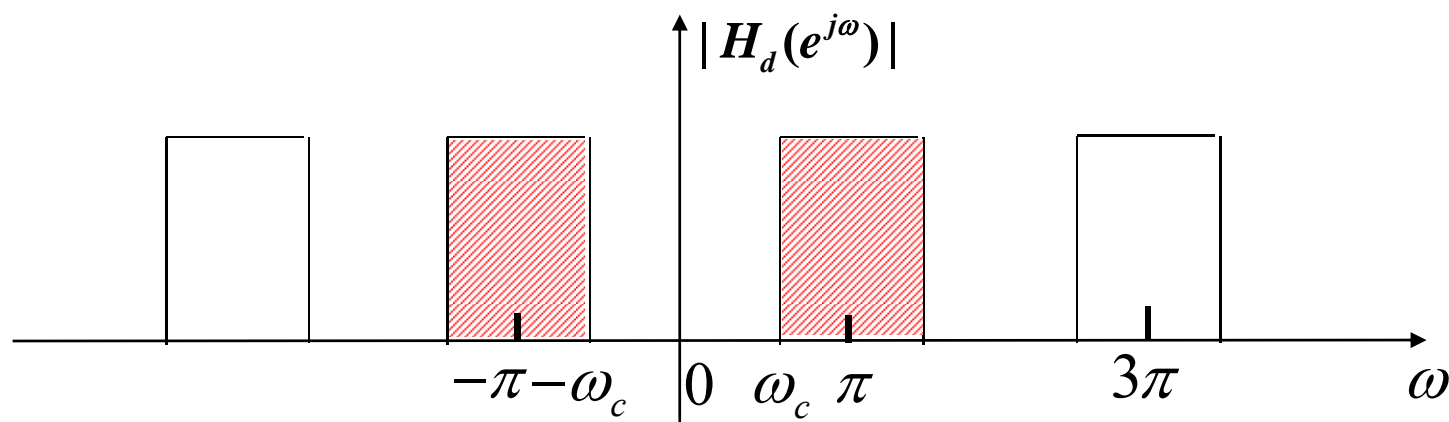
$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau}, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{-j\omega\tau} e^{j\omega n} d\omega$$

$$= \frac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi}$$

$$\tau = \frac{N-1}{2}$$

■ 数字高通滤波器(线性相位 FIR HPF)



令其时域右移 τ 位后的幅频特性为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_c \leq |\omega| \leq \pi \\ 0 & 0 \leq |\omega| < \omega_c \end{cases}$$

Copyright © Zju XuYX

则

$$\begin{aligned}h_d(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_c} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_c}^{\pi} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega \\&= \frac{1}{j2(n-\tau)\pi} \left[\left(e^{-j(n-\tau)\omega_c} - e^{-j(n-\tau)\pi} \right) + \left(e^{j(n-\tau)\pi} - e^{j(n-\tau)\omega_c} \right) \right] \\&= \frac{1}{j2(n-\tau)\pi} [\cos(n-\tau)\omega_c - j\sin(n-\tau)\omega_c - \cos(n-\tau)\pi \\&\quad + j\sin(n-\tau)\pi + \cos(n-\tau)\pi + j\sin(n-\tau)\pi - \cos(n-\tau)\omega_c \\&\quad - j\sin(n-\tau)\omega_c]\end{aligned}$$

求得

$$\begin{aligned}h_d(n) &= \frac{\sin[(n-\tau)\pi] - \sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi} \\&= \frac{\sin[(n-\tau)\pi]}{(n-\tau)\pi} - \frac{\sin[(n-\tau)\omega_c]}{(n-\tau)\pi}\end{aligned}$$

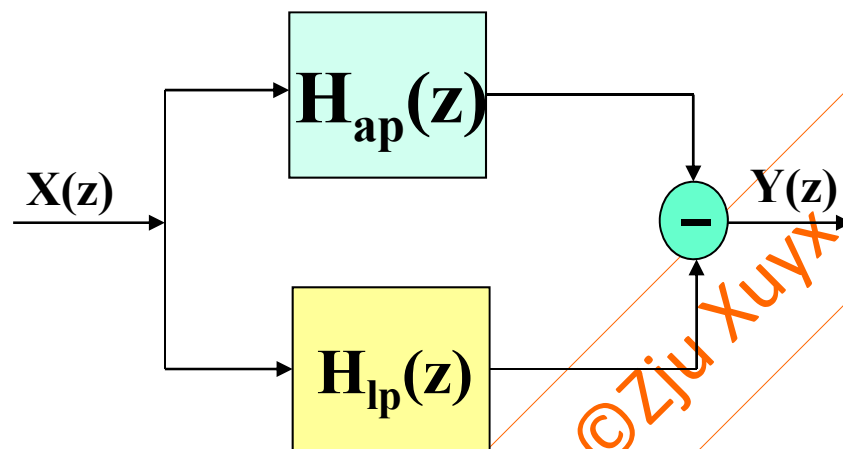
从这个结果可以看出：一个高通滤波器相当于用一个全通滤波器（即 $\omega_c = \pi$ ）减去一个低通滤波器。

传输函数：
$$H_{hp}(z) = H_{ap}(z) - H_{lp}(z)$$

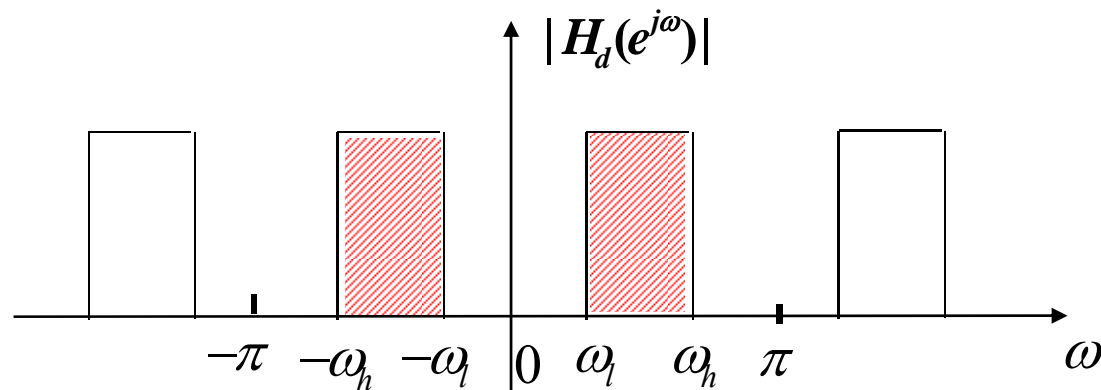
脉冲响应：
$$h_{hp}(n) = h_{ap}(n) - h_{lp}(n)$$

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\tau}, \quad |\omega| \leq \pi$$

$$h_{ap}(n) = \frac{\sin[(n-\tau)\pi]}{(n-\tau)\pi}$$



■ 数字带通滤波器(线性相位 FIR BPF)



令其幅频特性为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & \omega_l \leq |\omega| \leq \omega_h \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

则

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_h}^{-\omega_l} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_l}^{\omega_h} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega$$

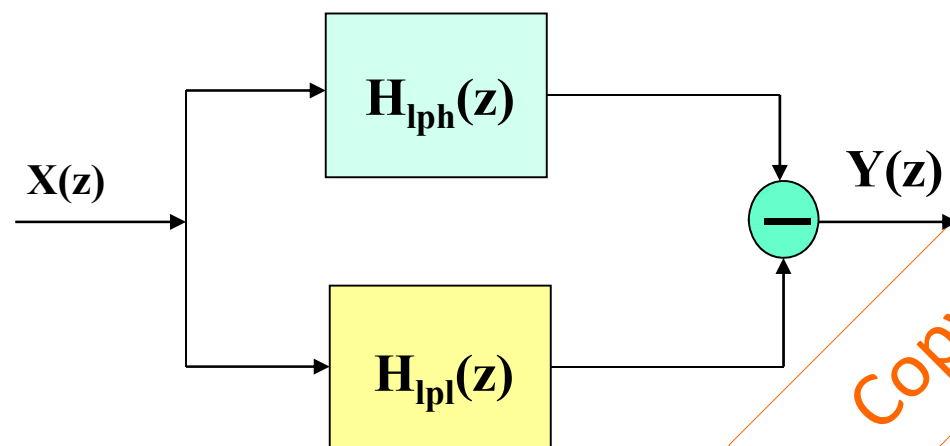
求得

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n - \tau)\omega_h] - \sin[(n - \tau)\omega_l]}{(n - \tau)\pi}$$

从这个结果可以看出：一个带通滤波器相当于两个低通滤波器相减，其中一个截止频率为 ω_h ，另一个为 ω_l 。

传输函数： $H_{bp}(z) = H_{lph}(z) - H_{lpl}(z)$

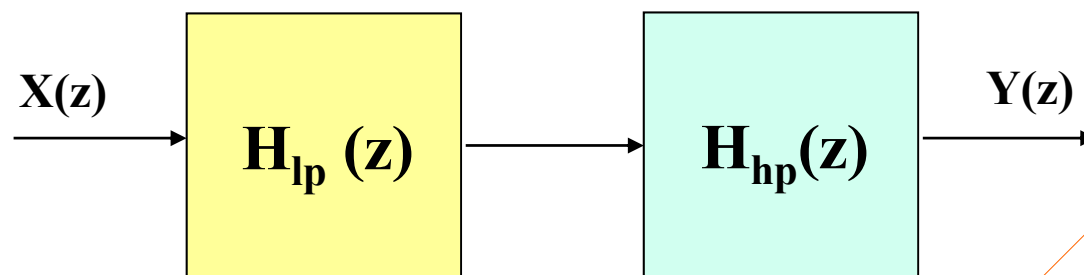
脉冲函数： $h_{bp}(n) = h_{lph}(n) - h_{lpl}(n)$



或者一个带通滤波器相当于一个低通滤波器和一个高通滤波器相乘，即先经过一个 **LP DF**，再经过一个 **HP DF**。

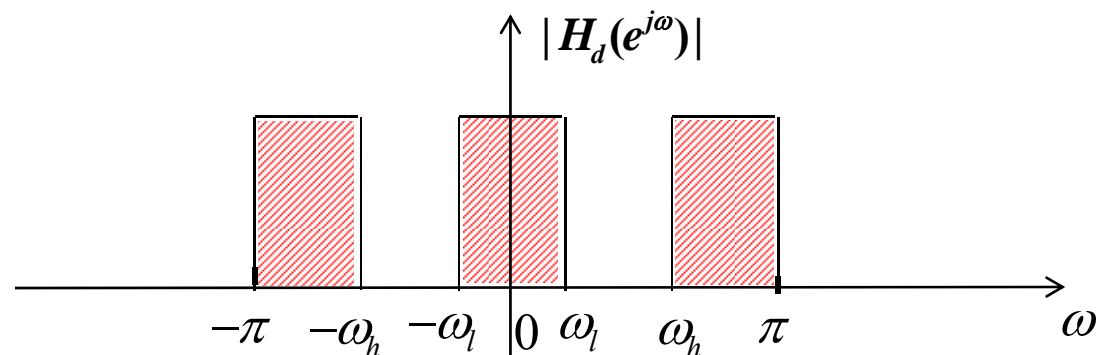
传输函数： $H_{bp}(z) = H_{lp}(z)H_{hp}(z)$

脉冲函数： $h_{bp}(n) = h_{lp}(n) * h_{hp}(n)$ （频域相乘，时域卷积）



Copyright © Zju XuYx

■ 数字带阻滤波器(线性相位 FIR BRF)



令其幅频特性为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega\tau} & |\omega| \leq \omega_l, \quad \omega_h \leq |\omega| \leq \pi, \quad -\pi \leq \omega \leq -\omega_h \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

则

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{-\omega_h} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_l}^{\omega_l} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_h}^{\pi} e^{j(n-\tau)\omega} d\omega$$

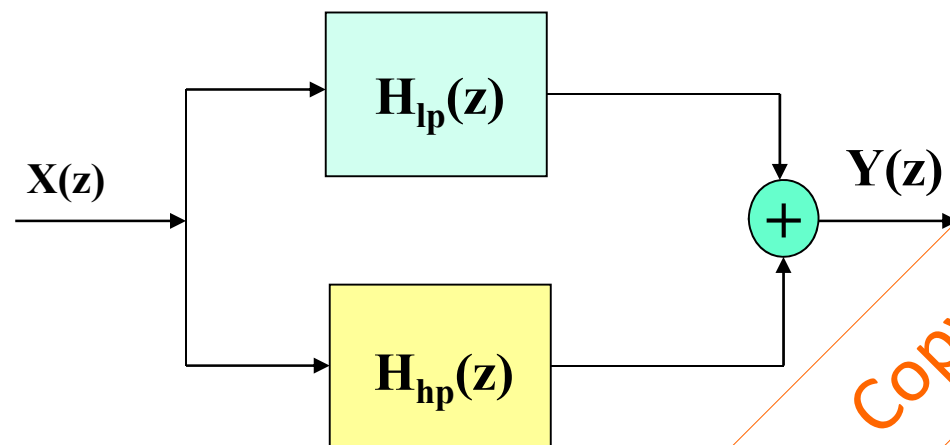
求得

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n-\tau)\omega_l] + \sin[(n-\tau)\pi] - \sin[(n-\tau)\omega_h]}{(n-\tau)\pi}$$

从这个结果可以看出：一个带阻滤波器相当于一个低通滤波器加上一个高通滤波器，低通滤波器的截止频率为 ω_l ，高通在 ω_h 。

传输函数： $H_{bp}(z) = H_{lp}(z) + H_{hp}(z)$

脉冲函数： $h_{bp}(n) = h_{lp}(n) + h_{hp}(n)$



【例5.4】 假设取样频率为 22kHz，设计一个线性相位 FIR 带通滤波器，中心频率为 4kHz，通带边缘在 3.5kHz 和 4.5kHz，过渡带宽为 500Hz，阻带衰减 50dB。

解：

过渡带宽：500Hz，转换为数字频率为：

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{\Delta f}{f_s} = \frac{2\pi \times 0.5}{22} = 0.0455\pi$$

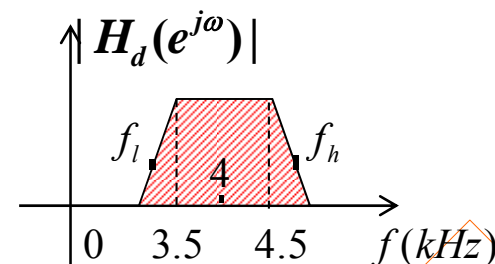
截止频率：

$$f_l = f_{lp} - 0.5 / 2 = 3.5 - 0.25 = 3.25\text{kHz}$$

$$f_h = f_{hp} + 0.5 / 2 = 4.5 + 0.25 = 4.75\text{kHz}$$

数字截止频率：

$$\omega_l = 2\pi \frac{f_l}{f_s} = 0.3045\pi \quad \omega_h = 2\pi \frac{f_h}{f_s} = 0.4318\pi$$



脉冲响应:

$$h_d(n) = \frac{\sin[(n - \tau)\omega_h] - \sin[(n - \tau)\omega_l]}{(n - \tau)\pi}$$

窗函数: 因为阻带衰减 50dB, 可以选择 **Hamming 窗**, 即

$$w(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2n\pi}{N-1}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

并且窗口长度为:

$$N = \left\lceil \frac{6.6\pi}{0.0455\pi} \right\rceil = 146$$

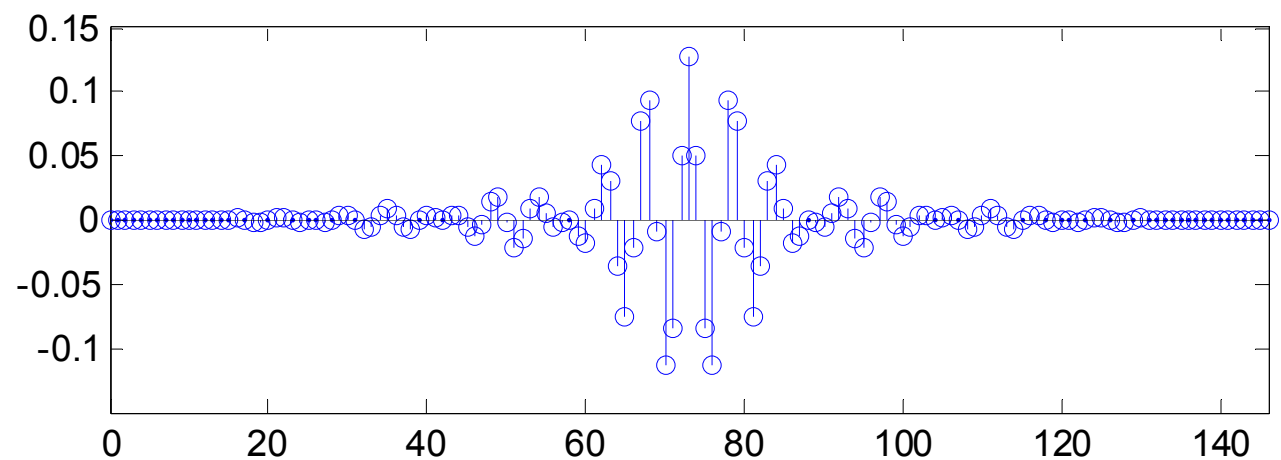
, 一般 N 取奇数, 因此 N=147, $\tau=73$

则此滤波器的脉冲响应为:

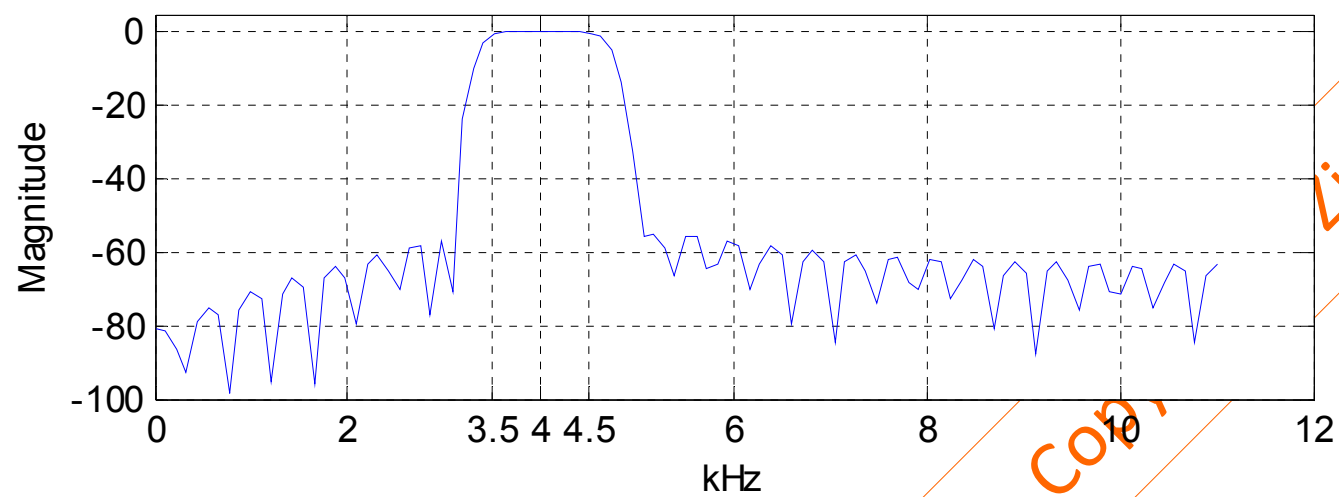
$$h(n) = \frac{\sin[(n - 73) \times 0.4318\pi] - \sin[(n - 73) \times 0.3045\pi]}{(n - 73)\pi} \times w(n)$$

计算得：

$$\begin{aligned}
 h(n) = & \begin{matrix} -0.0006 & -0.0000 & 0.0007 & 0.0006 & -0.0002 & -0.0007 & -0.0003 \\ 0.0003 & 0.0004 & 0.0001 & -0.0000 & 0.0002 & -0.0001 & -0.0008 \\ -0.0008 & 0.0007 & 0.0019 & 0.0008 & -0.0017 & -0.0024 & -0.0001 \\ 0.0023 & 0.0018 & -0.0006 & -0.0014 & -0.0004 & -0.0001 & -0.0011 \\ -0.0005 & 0.0027 & 0.0039 & -0.0007 & -0.0063 & -0.0048 & 0.0035 \end{matrix} \\
 & \dots\dots\dots \\
 & \begin{matrix} -0.0097 & 0.0930 & 0.0771 & -0.0210 & -0.0763 & -0.0368 & 0.0299 \\ 0.0439 & 0.0086 & -0.0184 & -0.0124 & 0.0004 & -0.0019 & -0.0058 \\ 0.0053 & 0.0175 & 0.0084 & -0.0145 & -0.0212 & -0.0022 & 0.0178 \\ 0.0149 & -0.0036 & -0.0129 & -0.0057 & 0.0037 & 0.0039 & 0.0003 \\ 0.0011 & 0.0033 & -0.0003 & -0.0064 & -0.0054 & 0.0031 & 0.0083 \\ 0.0035 & -0.0048 & -0.0063 & -0.0007 & 0.0039 & 0.0027 & -0.0005 \\ -0.0011 & -0.0001 & -0.0004 & -0.0014 & -0.0006 & 0.0018 & 0.0023 \\ -0.0001 & -0.0024 & -0.0017 & 0.0008 & 0.0019 & 0.0007 & -0.0008 \\ -0.0008 & -0.0001 & 0.0002 & -0.0000 & 0.0001 & 0.0004 & 0.0003 \\ -0.0003 & -0.0007 & -0.0002 & 0.0006 & 0.0007 & -0.0000 & -0.0006 \end{matrix}
 \end{aligned}$$



Magnitude Response



Liu XuYx

CONFIDENTIAL

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch5.4 频率抽样法

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

Copyright©Zju Xuyx

一、 $|H(e^{j\omega})|$ 对 $|H_d(e^{j\omega})|$ 的逼近

在频域上，对 $|H_d(e^{j\omega})|$ 进行等间隔抽样：

$$H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$$

令实际FIR滤波器的频率特性抽样值 $H(k)$ ：

$$H(k) = H_d(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$H(k)$ 为实际FIR滤波器 $h(n)$ 的DFT

p.84式(3.20):

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \underbrace{\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}_{\text{内插函数}} = \underbrace{\frac{1-z^{-N}}{N}}_{\text{梳状滤波器}} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}}_{\text{无耗并联谐振器}}$$

Copyright © Zju XuYX

Ch5.6将详细讲

p.84式(3.21):

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

其中频域插值函数: $\phi(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N \sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$

由此可知:

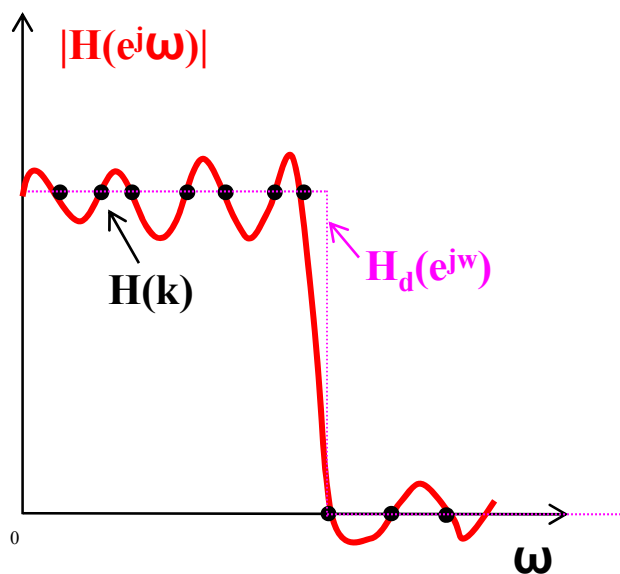
(1) 在这些抽样频率点上, 实际FIR滤波器与理想滤波器的频率响应严格相等:

$$H(k) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H_d(k) = H_d(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

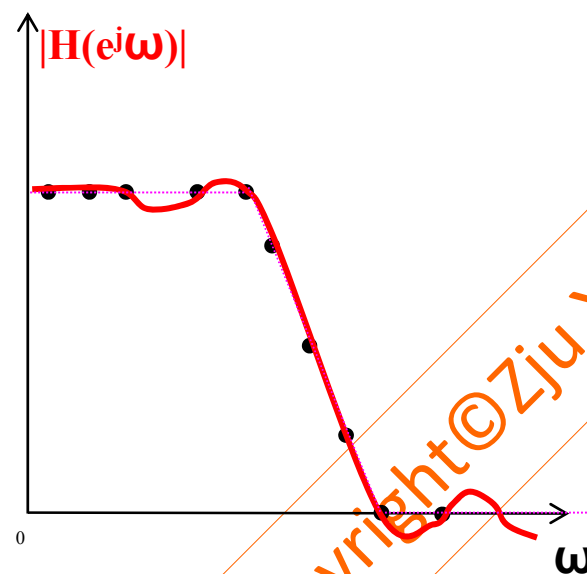
(2) 但在抽样频率点之间，则是各抽样点通过内插函数加权得到，因此，存在着逼近误差。

➤ 误差的大小取决于理想频率响应的曲线形状和抽样点数 N 的大小。

➤ 在函数的不连续点附近会产生肩峰和波动：理想频率响应的曲线变化越平坦、抽样点数 N 越大，逼近误差越小；反之，越大。



(a) 理想滤波器频响：矩形



(b) 理想滤波器频响：梯形

矩形的理想特性抽样后实际滤波器频响出现的肩峰和起伏比梯形要大得多

二、线性相位约束条件

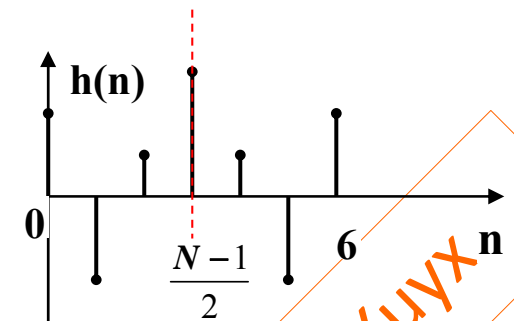
为了保证所设计的 **FIR DF** 是线性相位，必须对 **H(k)** 包括幅度和相位提出一些约束条件，而不能任意指定。

$$H(e^{j\omega}) = H(\omega)e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \quad \text{or} \quad = H(\omega)e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2}\omega)}$$

■ **Type I** 线性相位的 **FIR DF**: **h(n)** 是偶对称、**N** 为奇数

P242式(5.18):

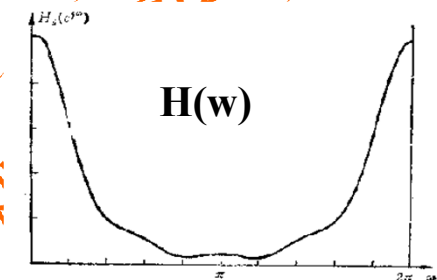
$$H(\omega) = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} a(n) \cos n\omega$$



h(n) 为偶对称，**N** 为奇数

所以 **H(ω)** 是 **ω=π** 的偶函数，且以 **2π** 为周期。即：

$$H(\omega) = H(-\omega) = H(2\pi - \omega)$$



令: $H(k) = H_k e^{j\theta_k}$ 其中 H_k 为幅值, θ_k 为相角

又因为: $H(k) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H(\omega) e^{-j\frac{N-1}{2}\omega} \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{-j\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}k}$

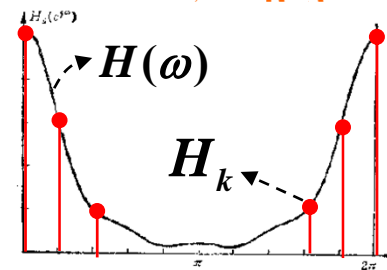
所以: $H_k = H(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H\left(\frac{2\pi}{N}k\right), \quad \theta_k = -\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi}{N}k = -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right)$

因为: $H(\omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k} = H(2\pi - \omega) \Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$

所以: $H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = H\left(2\pi - \frac{2\pi}{N}k\right) = H\left(\frac{2\pi}{N}N - \frac{2\pi}{N}k\right) = H\left[\frac{2\pi}{N}(N-k)\right]$

以 $N/2$ 为圆周偶对称

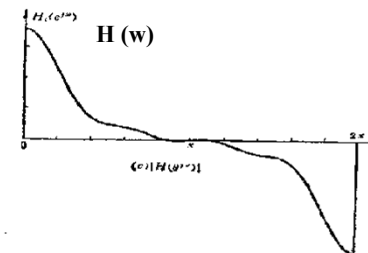
$$\rightarrow \begin{cases} H_k = H_{N-k} \\ \theta_k = -k\pi\left(1 - \frac{1}{N}\right) = -\frac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$



■ **Type II** 线性相位的 **FIR DF**: **$h(n)$** 是偶对称、 **N** 为偶数

其幅值函数 **$H(\omega)$** 是 **$\omega=\pi$** 奇对称的（见表5.1）：

$$H(\omega) = -H(2\pi - \omega)$$



以 $N/2$ 为圆周奇对称

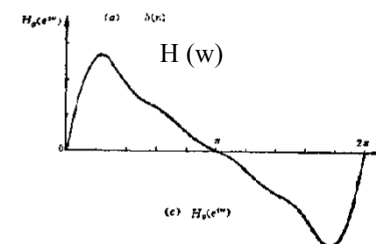
$$\begin{cases} H_k = -H_{N-k} \\ \theta_k = -k\pi(1 - \frac{1}{N}) = -\frac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$

Copyright©Zju XuYX

■ **Type III**线性相位 FIR DF, $h(n)$ 奇对称, N 为奇数的约束条件:

以 $N/2$ 为圆周奇对称

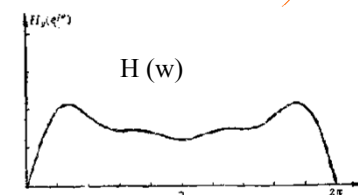
$$\begin{cases} H_k = -H_{N-k} \\ \theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$



■ **Type IV**线性相位 FIR DF, $h(n)$ 奇对称, N 为偶数的约束条件:

以 $N/2$ 为圆周偶对称

$$\begin{cases} H_k = H_{N-k} \\ \theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{(N-1)k\pi}{N} \end{cases}$$



XX

Copyright

三、过渡带抽样的优化设计

为了使逼近误差减小，可减少通带边缘逼近时由于抽样点陡然变化而引起的起伏振荡。

因此，可以在理想频率响应的不连续点边缘上加一些**过渡的抽样点**（**过渡点**），以减少频带边缘的突变。

好处：（1）减少了起伏振荡，（2）增大了阻带的最小衰减。

坏处：增加了过渡带带宽

一般过渡带取 **$m=1$ 、 2 、 3** 点过渡抽样点即可。

比如，低通滤波器(p.280例5.7，图5.46)

不加过渡点(**$m=0$**)，阻带最小衰减为 **-20dB** ；

加**一点**过渡抽样点(**$m=1$**)，阻带最小衰减到 **$-40\text{dB}\sim-54\text{dB}$** ；

加**两点**过渡抽样点(**$m=2$**)，阻带最小衰减到 **$-60\text{dB}\sim-75\text{dB}$** ；

加**三点**过渡抽样点(**$m=3$**)，阻带最小衰减到 **$-80\text{dB}\sim-95\text{dB}$** 。

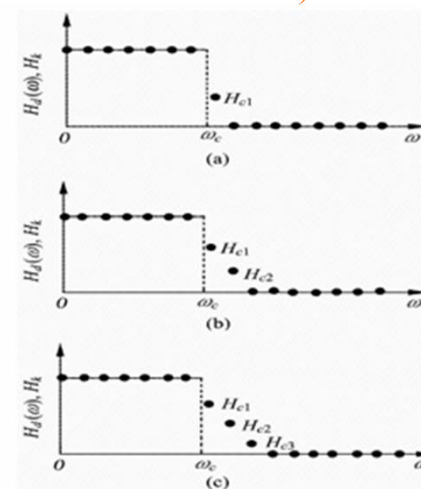


图 7-18 加过渡抽样点(过渡带)

(a) 一点过渡带；(b) 二点过渡带；(c) 三点过渡带

【例】利用频率抽样法，设计一个低通 FIR 数字滤波器，其理想频率特性为：

已知 $\omega_c = 0.5\pi$

$$|H_d(e^{j\omega})| = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

滤波器具有线性相位。

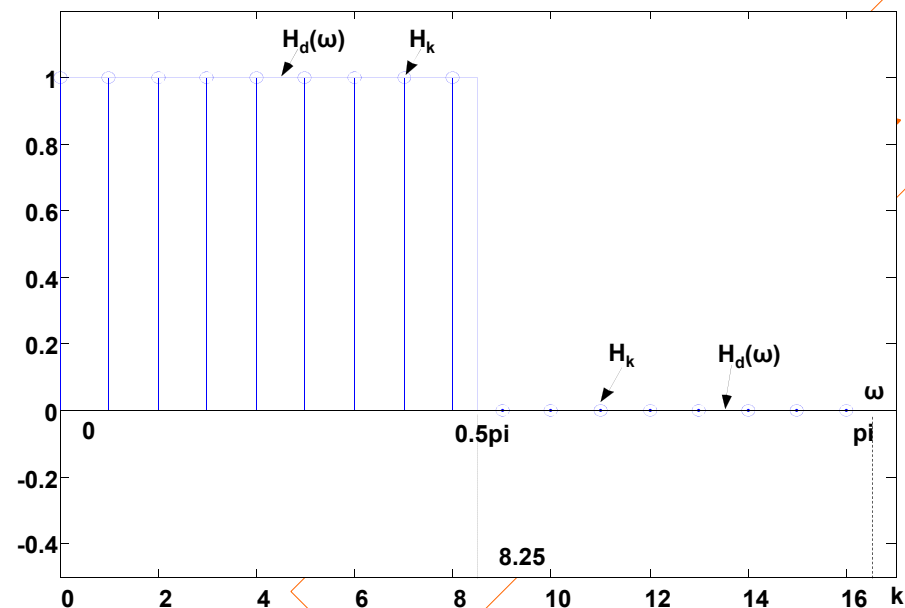
解：

根据指标，可画出频率取样后的 $H(k)$ 序列如下图。由于对称性，此处只画出了 $0 \leq k \leq 16$ 区间。 $N=33$ ，则

$$H_k = \begin{cases} 1 & , 0 \leq k \leq \text{Int}\left[\frac{N\omega_c}{2\pi}\right] = 8 \\ & \& 25 \leq k \leq 32 \\ 0 & , 9 \leq k \leq \frac{N-1}{2} = 16 \\ & \& 17 \leq k \leq 24 \end{cases}$$

$$\theta_k = -\frac{(N-1)k\pi}{N}$$

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k}, 0 \leq k \leq 32$$



将这些 $H(k)$ 值带入前面的 $H(z)$ 内插表达式，得：

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} \quad 0 \leq k \leq 32$$

$$H(k) = H_k e^{j\theta_k}, 0 \leq k \leq 32$$

将这些值带入 $H(e^{j\omega})$ 表达式，得：

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j16\omega} \left\{ \frac{\sin(\frac{33}{2}\omega)}{33 \sin(\frac{\omega}{2})} + \sum_{k=1}^8 \left[\frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right) \right]}{33 \sin \left(\frac{\omega}{2} - \frac{k\pi}{33} \right)} + \frac{\sin \left[33 \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N} \right) \right]}{33 \sin \left(\frac{\omega}{2} + \frac{k\pi}{N} \right)} \right] \right\}$$

按此式计算 $20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$ ，得到幅频特性，其过渡带宽为 $2\pi/33$ ，而最小阻带衰减则约为 -20dB 。性能一般。

为了改善性能，可在通带和阻带交界处安排一个或几个不等于 0 也不等于 1 的过渡点取样值。

在 $k=9$ 处取 $|H(9)|=0.5$ ，则过渡带宽变为 $2 \times 2\pi/33$ ，最小阻带衰减则约为 -40dB 。 $m=1$

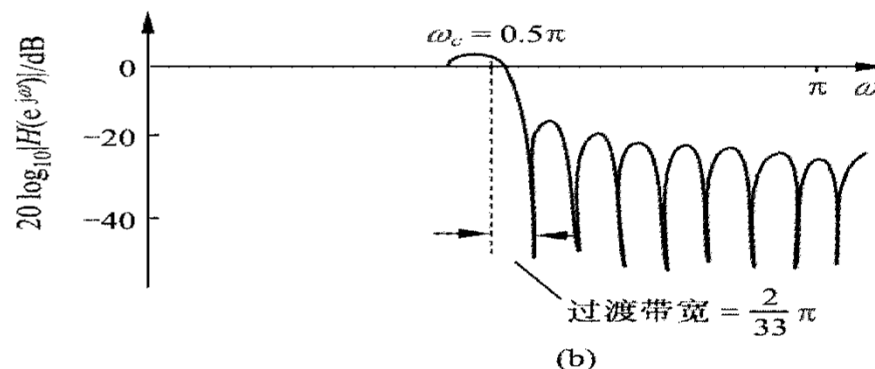
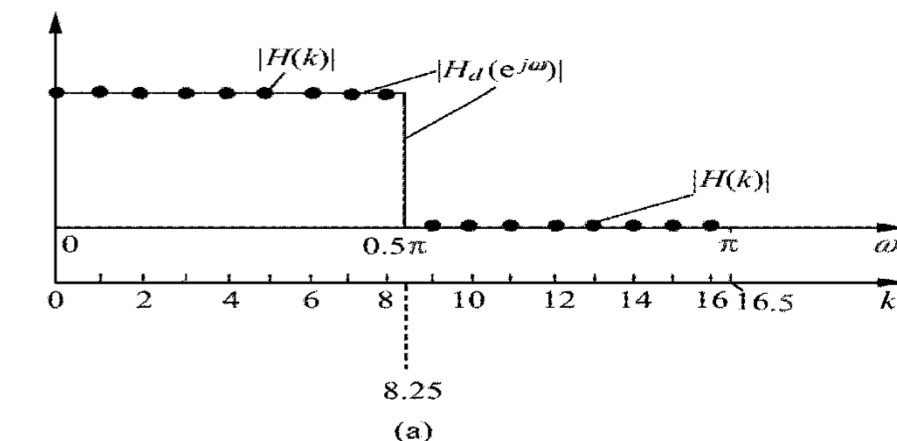


图 7-19 频率抽样法设计低通滤波器例子
(a) $|H_d(e^{j\omega})|$ 和 $|H(k)|$ ($N=33$)；(b) 设计结果

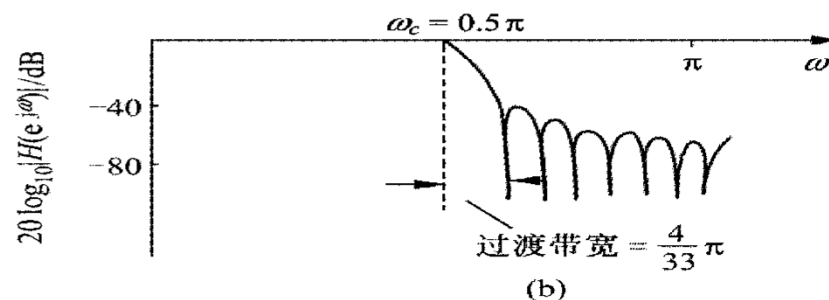
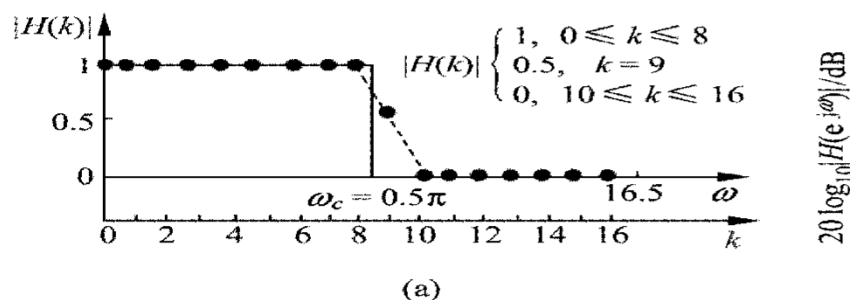


图 7-20 增加过渡带非零抽样值及其影响

四、频率抽样法设计步骤：

- 1) $H_d(e^{j\omega}) = H_d(\omega)e^{-j\omega\tau}$, 其中 $H_d(\omega)$ 是实函数
- 2) 根据阻带最小衰减 A_s 要求, 选择过渡的抽样点数 m
- 3) 根据过渡带宽 $\Delta\omega$ 确定滤波器长度 N (即频率抽样点数)

一般来说: $\Delta\omega \geq \frac{2\pi}{N}(m+1)$

$$\therefore N \geq \frac{2\pi}{\Delta\omega}(m+1)$$

4) 取样 $H(k) = H_d(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) = H_k e^{j\theta_k} \Rightarrow$

$$H_k = \pm H_{N-k} = H_d\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$$
$$\theta_k = -\frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi k}{N}, \theta_k = \frac{\pi}{2} - \frac{N-1}{2} \cdot \frac{2\pi k}{N}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

根据需要
选择是否加入过渡点

5) $\mathbf{h(n)=IDFT[H(k)]}$

6) 内插

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \phi(\omega - \frac{2\pi}{N}k), \quad \phi(\omega) = \frac{\sin \frac{N\omega}{2}}{N \sin \frac{\omega}{2}} e^{-j\omega(\frac{N-1}{2})}$$

检验设计出的滤波器频率响应是否满足要求，如果不满足，
则调整过渡带抽样点值、过渡点数目 m 或者抽样点总数 N 。

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch5.6 FIR数字滤波器的实现结构

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

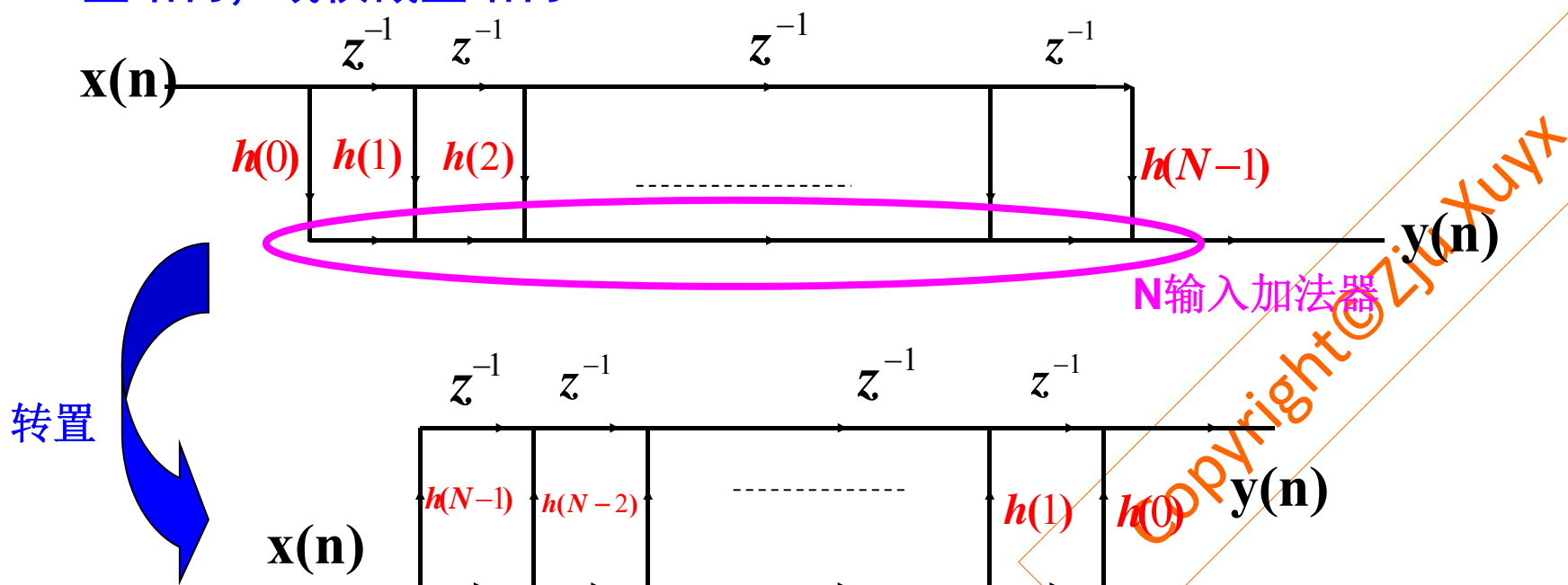
Copyright©Zju Xuyx

1. 直接型(横截型、卷积型)结构

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} b_m x(n-m) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) + \dots + b_{N-1} x(n-N+1)$$
$$= \sum_{m=0}^{N-1} h(m) x(n-m) = h(n) * x(n)$$

由此式可以直接得到 **FIR DF** 的直接型结构。由于此结构实际上直接表达了上述的 **h(n)** 与 **x(n)** 之间的卷积关系，因此又称为卷积型结构，或横截型结构。



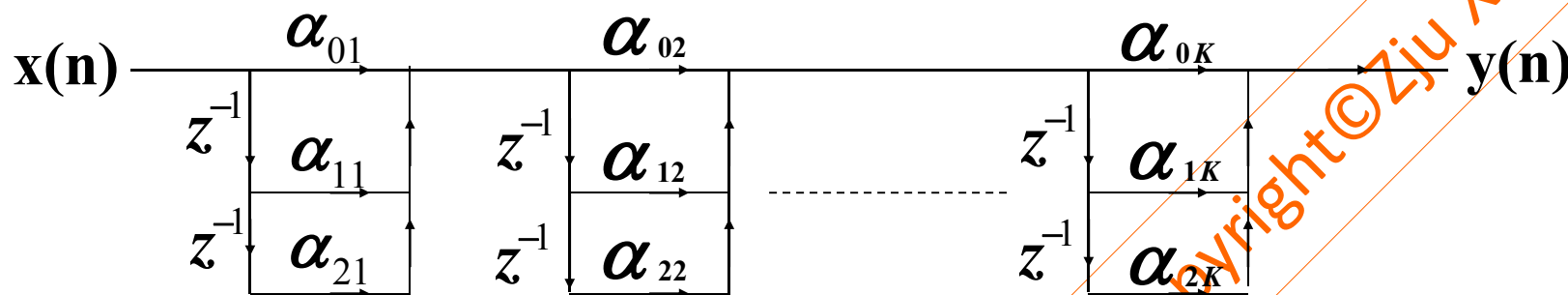
2. 级联型结构

系统函数 $H(z)$ 可写成按零点表示的二阶因式的形式

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \prod_{i=0}^K [\alpha_{0i} + \alpha_{1i}z^{-1} + \alpha_{2i}z^{-2}]$$

若 N 为偶数, 则 $K = N/2$;

若 N 为奇数, 则 $K = (N+1)/2$, 且其中有一个因式中的 $\alpha_{2i} = 0$ 。



级联型特点：

- (1) 每一个子网络控制一对零点，零点可独立调整，系统特性随零点变化的灵敏度优于直接型的。（优点）
- (2) 在级联结构中，抽头系数 a 的个数比直接型 $h(n)$ 多，因此，所需乘法器也多。（缺点）
- (3) 各节之间需注意增益控制，以防止后级溢出。

Copyright©Zju XuYx

3. 频率抽样型结构

前面的直接型、级联型结构也都是非递归型的，但也可以采用递归型结构来实现 **FIR DF**，这就是频率抽样型。

在前面第三章 DFT 和前面 FIR DF 的频率抽样法设计中，已经推导出得到 $h(n)$ 的 Z 变换：

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

设

$$H_c(z) = 1 - z^{-N}$$

$$H_k(z) = \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

则 $H(z)$ 可以写成：

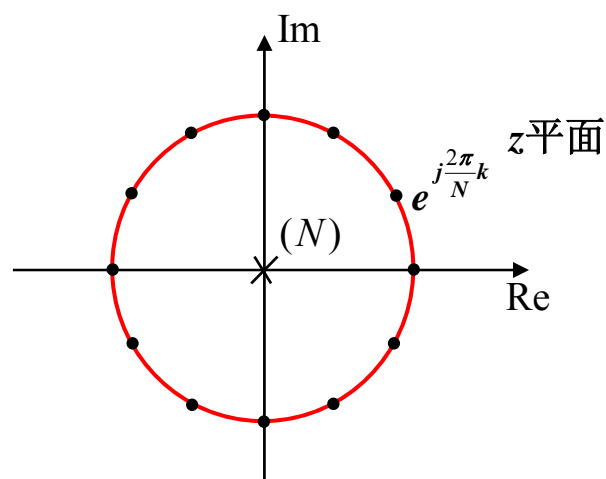
$$H(z) = \frac{1}{N} H_c(z) \left[\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) \right]$$

此式表明，此系统由 $H_c(z)$ 和 $\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z)$ 两个子网络级联而成。

- 第 1 个子网络: $H_c(z)$ 是 N 阶滤波器。

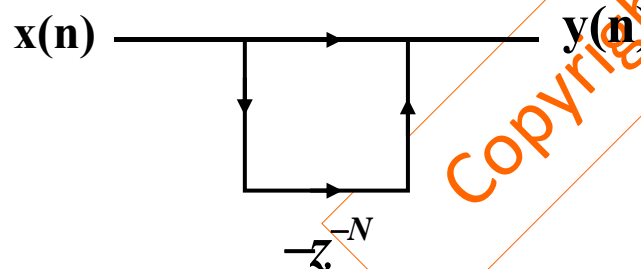
$$H_c(z) = 1 - z^{-N} = \frac{z^N - 1}{z^N}$$

所以, $H_c(z)$ 在 $z = 0$ 有 N 阶极点, 而零点是 1 的 N 次方根, 均匀的分布于单位圆上:



$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k}, k = 0, 1, \dots, N-1$$

其实现结构如图所示



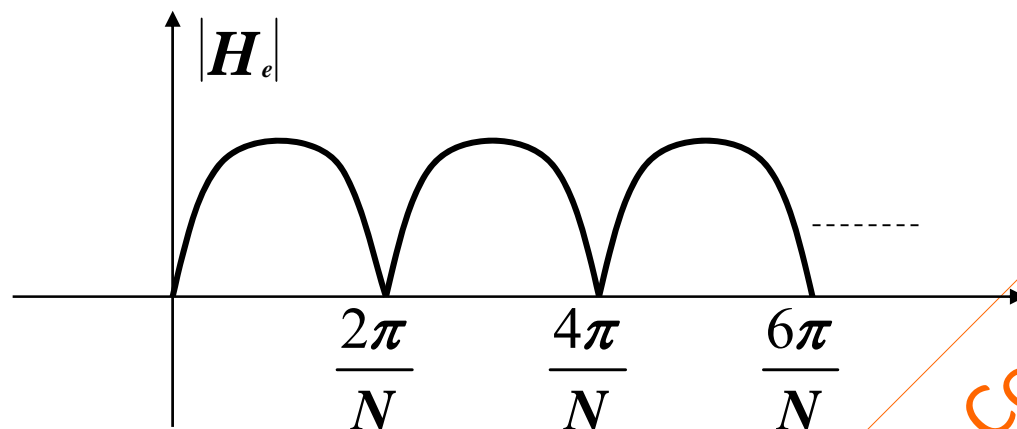
子网络 $H_c(z)$ 的频率响应为:

$$H_c(e^{j\omega}) = 1 - e^{-jN\omega}$$

故其幅频响应为:

$$|H_c(e^{j\omega})| = |1 - \cos N\omega + j \sin N\omega| = 2 \left| \sin\left(\frac{N\omega}{2}\right) \right|$$

具有这种幅频特性的滤波器通常被称为**梳状滤波器**。



$$\left| H_c(e^{j\omega}) \right|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} = 0$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1$$

■ 第 2 个子网络:

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

是 N 个一阶网络的并联。它在单位园上有 N 个极点:

$$z_k = e^{j\frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

另外, 由于

$$\sum_{k=0}^{N-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z \cdot H(k)}{z - W_N^{-k}} = z \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{z - W_N^{-k}}$$

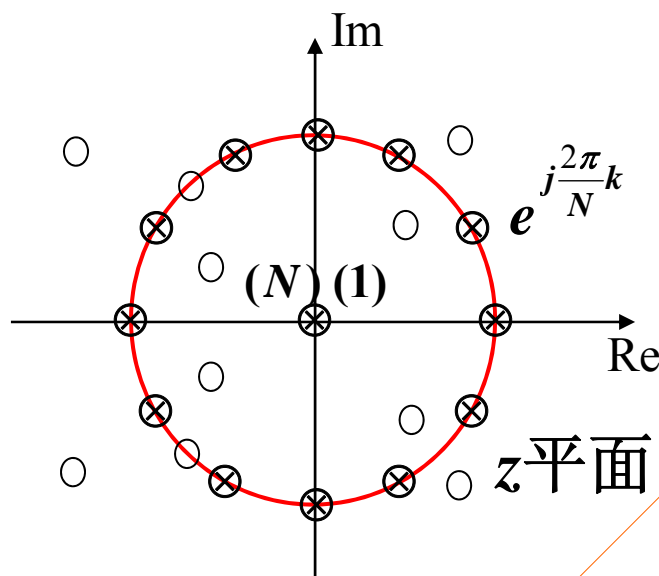
若对上式进行通分求和, 化为有理分式形式, 可知分子含有因子 z 和 z 的 $N-1$ 次多项式, 因此该并联网络在 $z = 0$ 有一阶零点, 在有限 z 平面上有 $N-1$ 个零点。

此并联网络在频率处 $\omega = \frac{2\pi}{N}k$ (极点) 的幅频响应为无穷大, 故此并联网络等效于一个无耗并联谐振器, 其谐振频率为 $\omega = \frac{2\pi}{N}k, k = 0, 1, \dots, N-1$ 。

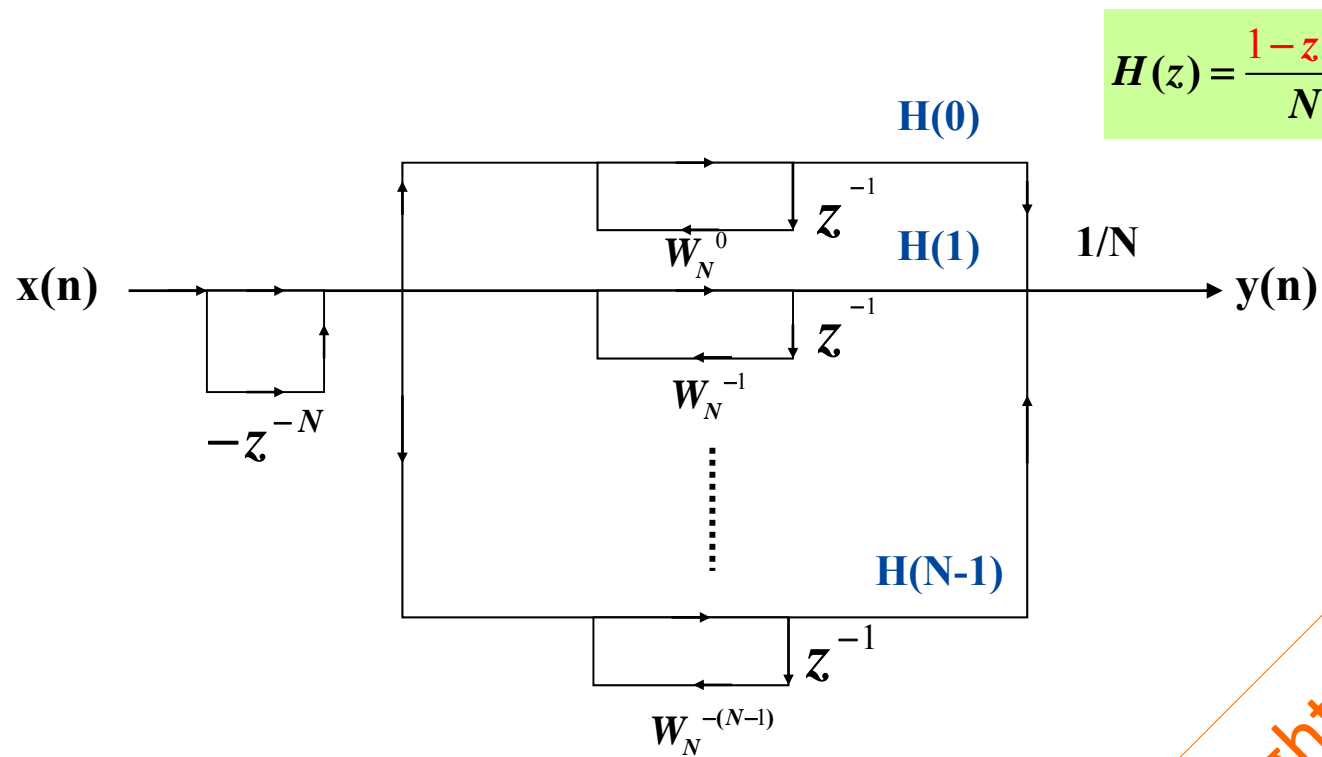
1) 单位圆上，并联谐振器极点各自正好抵消梳状滤波器一个零点。

2) 并联谐振器在 $z = 0$ 处的一阶零点抵消了梳状滤波器在 $z = 0$ 处的一个极点，这样在 $z=0$ 处的极点正好保留了 $(N-1)$ 个。

因此，因此，级联的结果保留了 FIR DF 原有的零极点，即在 $z = 0$ 的 $N-1$ 阶级点和有限 z 平面上的 $N-1$ 个零点。



Copyright©Zju XuYx



$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - W_N^{-k} z^{-1}}$$

Copyright©Zju XuYx

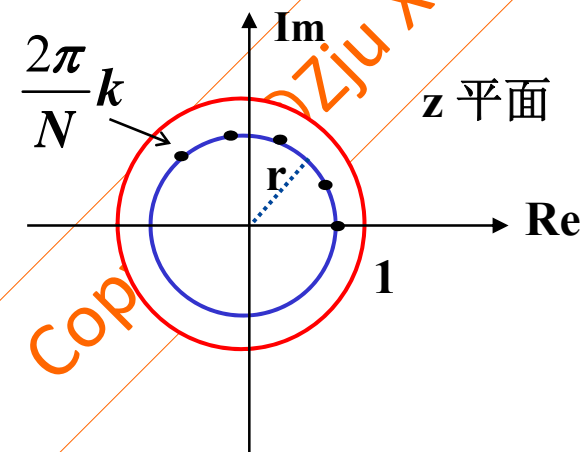
稳定性问题:

- ✧ 理论上, 频率抽样型结构在单位圆上的零极点恰好相互抵消。
- ✧ 但在实际中, 单位圆上的零极点抵消不完全。原因:
 - ⊕ 梳状滤波器 $H_c(z)$ 的零点能够靠延时来准确地实现;
 - ⊕ 并联谐振器在单位圆上的极点是靠复数乘法来实现的, 当系数量化时就不能准确实现。
 - ⊕ 结果: 零极点抵消不完全, 滤波器会出现不稳定现象, 因此, 应当对上面所述的网络结构进行修正。

■ 修正方法:

- ✧ 将单位圆上的零点和极点都移到半径 r 约小于 1 的圆上, 用 rz^{-1} 来代替 $H_c(z)$ 和 $H_k(z)$ 中的 z^{-1} , r 上取样 $H_r(k) \approx H(k)$, 得:

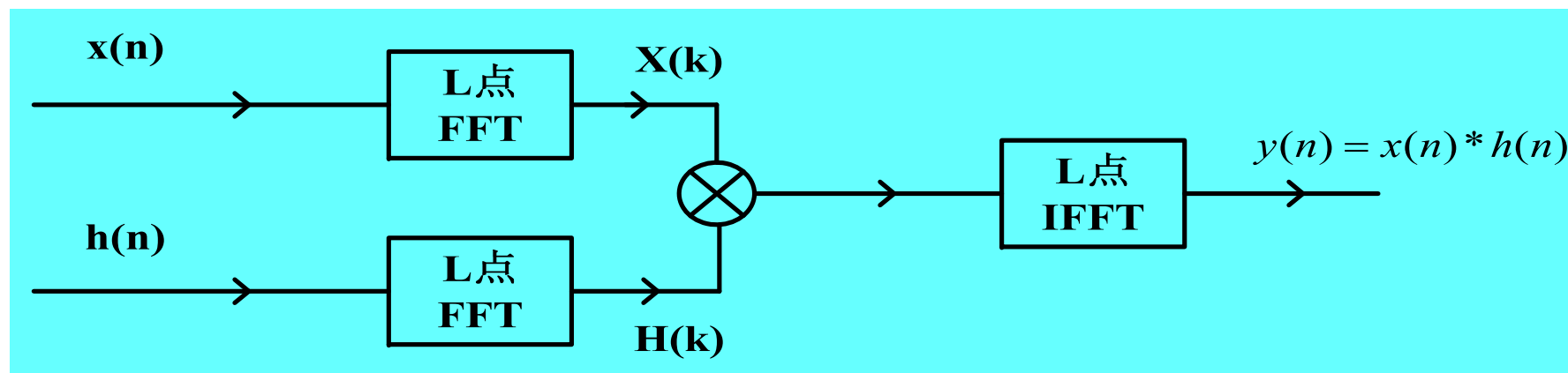
$$H(z) = \frac{(1-r^N z^{-N})}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H_r(k)}{1-W_N^{-k} r z^{-1}}$$
$$\approx \frac{1}{N} H_{cr}(z) \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-r W_N^{-k} z^{-1}}$$



4. 快速卷积型

由Ch3.3.3节(p.95)可知，将 N_1 点的 $x(n)$ 补0到 L 点， N_2 点的 $h(n)$ 也补0到 L 点，只要 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ ，则：

$$x(n) \textcircled{L} h(n) = x(n) * h(n)$$



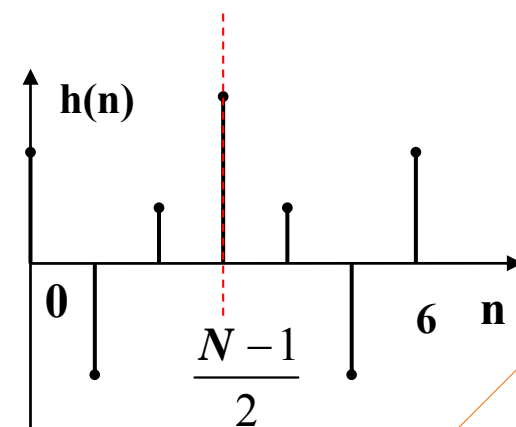
如果 $N_1 \gg N_2$ ，采用Ch3.3.4节的重叠相加法、重叠保留法

5. 线性相位 FIR DF 实现结构

线性相移 **FIR** 滤波器的冲激响应 **$h(n)$** 满足偶对称或奇对称，由对称性可将线性相位 **FIR** 数字滤波器的结构加以简化。

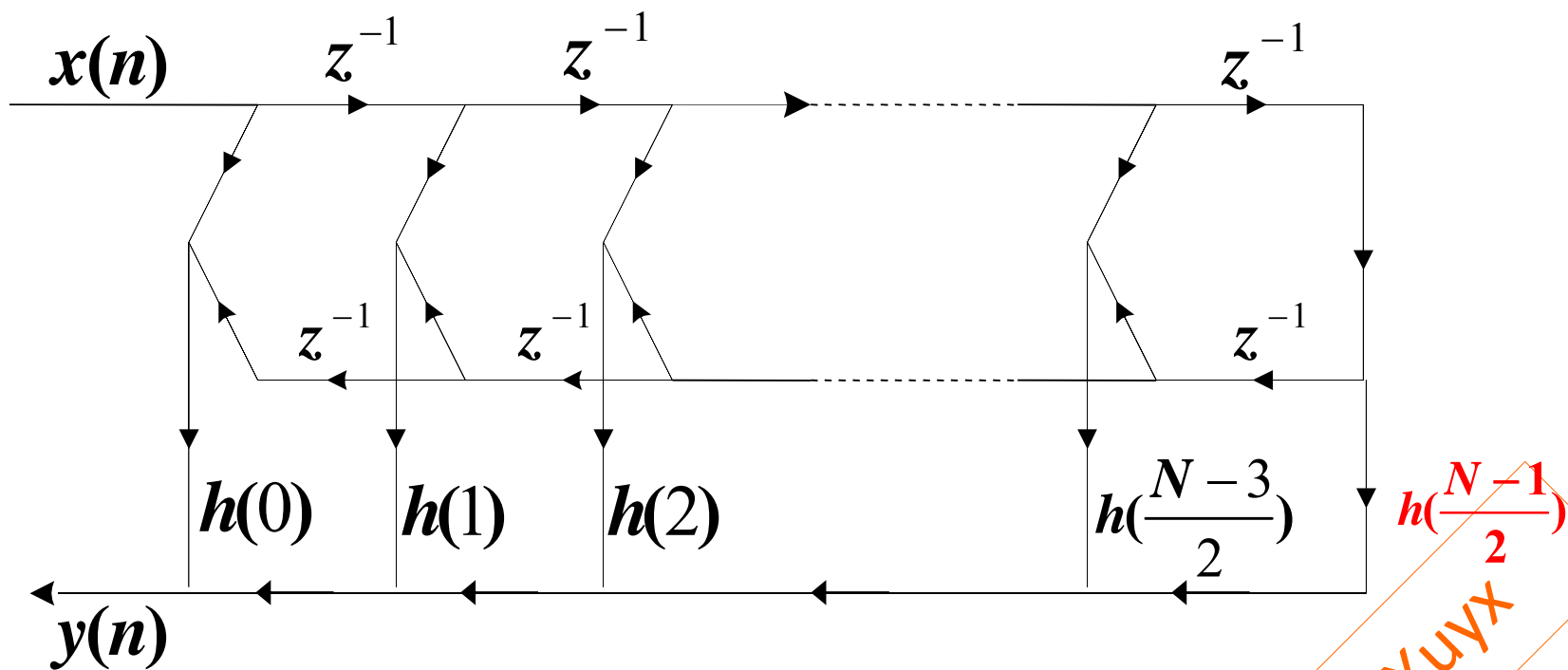
■ $h(n)$ 偶对称， N 为奇数

$$h(n) = h(N-1-n)$$



$h(n)$ 为偶对称， N 为奇数

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}+1}^{N-1} h(n)z^{-n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] + h\left(\frac{N-1}{2}\right)z^{-\frac{N-1}{2}} \end{aligned}$$

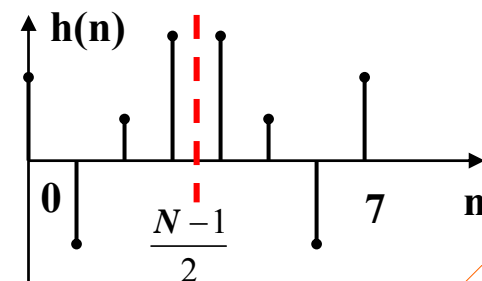


与直接型结构相比，乘法器少了一半

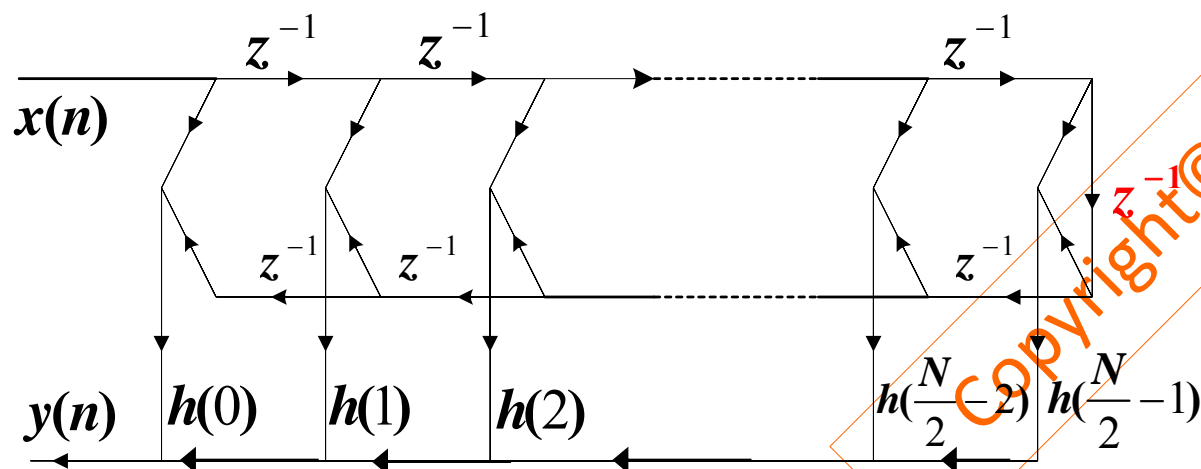
■ $h(n)$ 偶对称, N 为偶数

$$h(n) = h(N-1-n)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} + z^{-(N-1-n)}] \end{aligned}$$



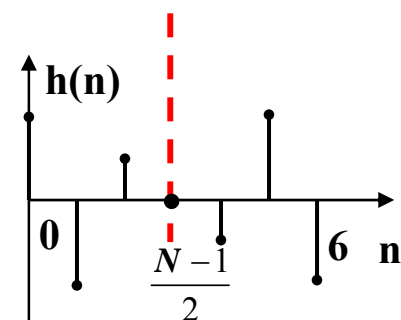
$h(n)$ 为偶对称, N 为偶数



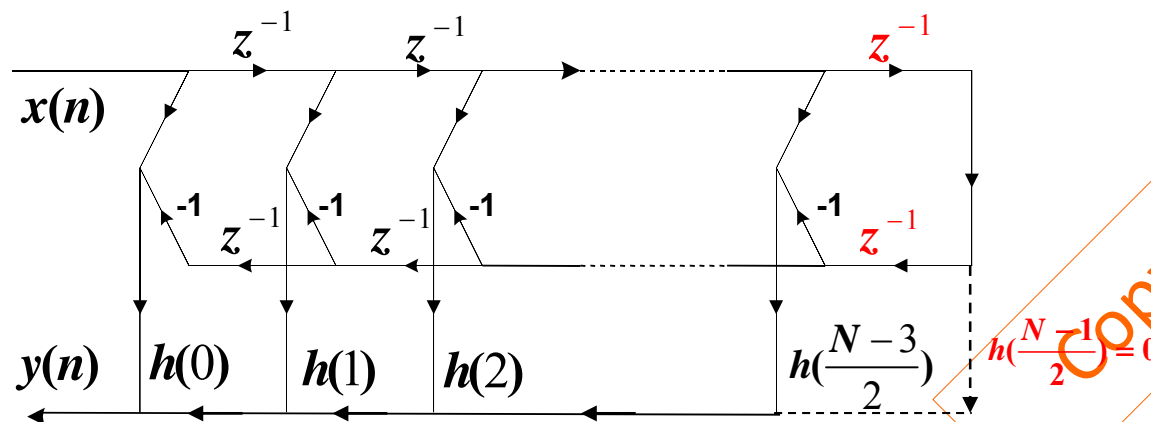
■ $h(n)$ 奇对称, N 为奇数

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=\frac{N-1}{2}}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}] \end{aligned}$$



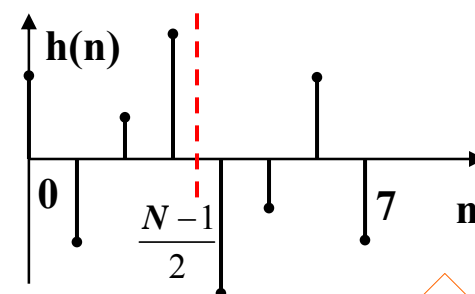
$h(n)$ 为奇对称, N 为奇数



■ $h(n)$ 奇对称, N 为偶数

$$h(n) = -h(N-1-n)$$

$$\begin{aligned} H(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} h(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=N/2}^{N-1} h(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)z^{-n} + \sum_{n=0}^{N/2-1} h(N-1-n)z^{-(N-1-n)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} h(n)[z^{-n} - z^{-(N-1-n)}] \end{aligned}$$



$h(n)$ 为奇对称, N 为偶数

