

- 欢迎大家报考电磁信息与电子集成研究所：
<http://eiei-zju.org>
- 欢迎大家直博和保研所内的老师：
<http://mypage.zju.edu.cn/ranhao>

信号的定义：

周期信号、能量信号、功率信号、奇偶信号。

基本的连续时间信号：

负指数信号、奇异信号、单位冲激信号、单位阶跃信号、冲激偶函数、斜波信号、抽样信号、方波脉冲信号、三角形脉冲信号、符号函数。

基本的连续时间信号：

单位冲激序列、单位阶跃序列、矩形序列、斜波序列、离散复指数序列。

信号的运算：

相加、相乘、微分、积分、累加、反褶、时移、尺度变换。

系统的描述:

连续LTI系统用微分方程来描述, 离散LTI系统用差分方程来描述。

系统的性质判别:

线性、时不变性、记忆性、因果性、可逆性、稳定性。

系统的连接:

串联、并联、反馈。

例题:

计算 $\int_{-\infty}^2 [\delta(t^2 - 2t - 8) + \delta(3t - 2)] dt$ 的值

卷积的定义和计算： $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) \cdot d\tau$

图示法：反转、平移、相乘、积分。

卷积的性质（用于求解的简化）：

交换律、结合律、分配率、积分与微分性质。

LTI系统的可逆性：

$$h[n] * h_1[n] = \delta[t]$$

LTI系统的稳定性：

充要条件： $\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)| \cdot d\tau < \infty$ $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$

LTI系统的因果性：

充要条件： $h(t) = 0, t < 0$ $h[n] = 0, n < 0$

LTI系统的单位阶跃响应:

$$s(t) = u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) \cdot d\tau \quad s[n] = u[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

LTI系统的微分、差分方程描述

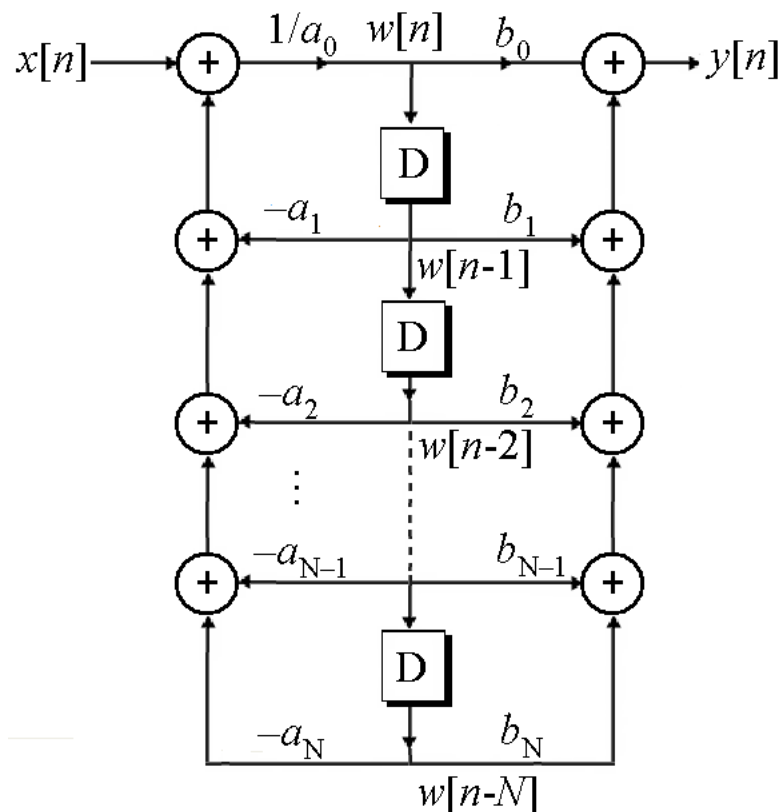
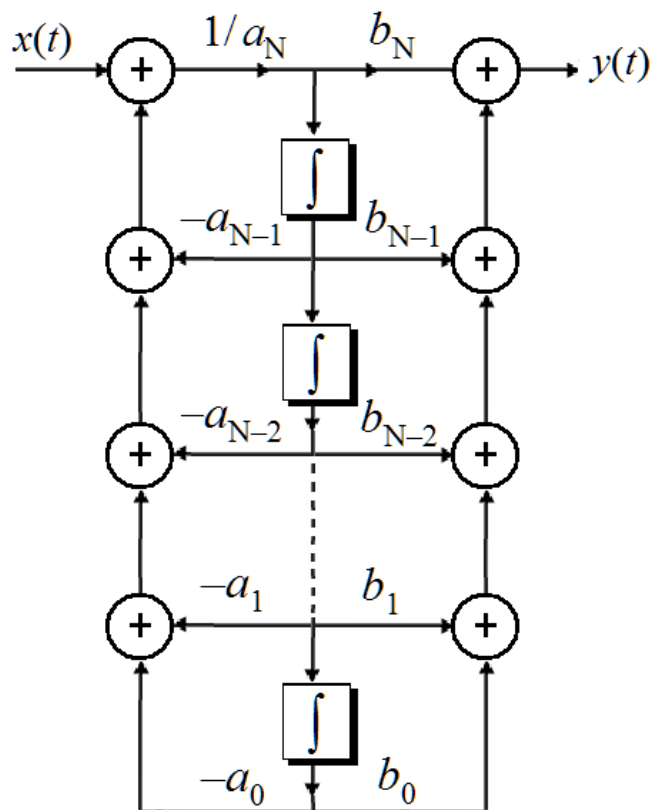
LTI系统的响应求解:

强迫响应与自由响应、零状态响应与零输入响应

LTI系统的框图表示:

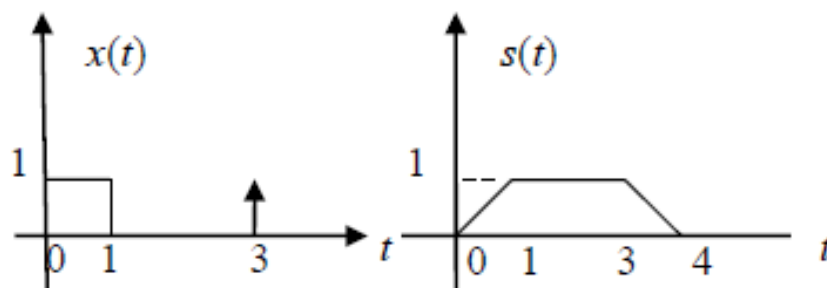
$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k], \quad a_0 \neq 0$$



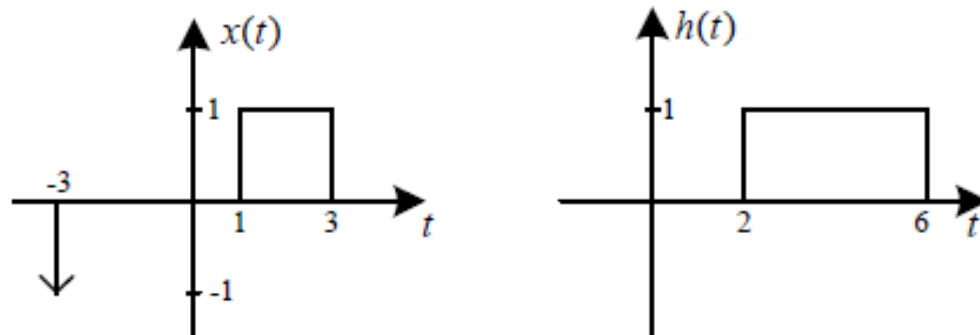
例题：

1. 已知某连续时间 LTI 系统，其单位阶跃响应为 $s(t)$, 如下图所示，求该系统对如下激励信号 $x(t)$ 的响应。

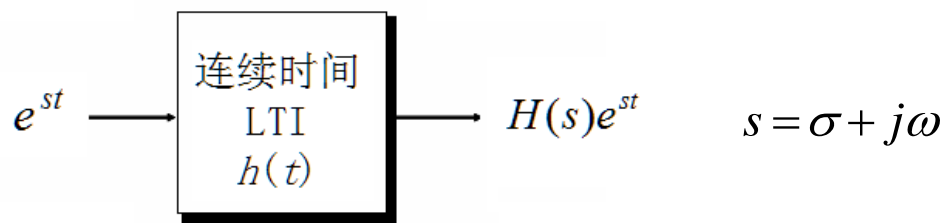


例题：

已知信号 $x(t)$, $h(t)$ 如下图所示，求卷积 $x(t-1) * h(t+2) * \delta(t+2)$ ，并画出计算结果。



连续时间LTI系统的特征函数：



连续周期时间傅里叶级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} \cdot dt$$

信号的傅里叶变换：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} \cdot d\omega \quad X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \cdot dt$$

典型信号的傅里叶级数表示:

表 3.1 典型信号的傅里叶级数表示

信 号	傅里叶级数	信 号	傅里叶级数
$\sin \omega_0 t$	$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$	对称周期三角信号	$\frac{E}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}^2\left(\frac{\pi}{2}k\right) e^{jk\omega_0 t}$
$\cos \omega_0 t$	$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$	周期半波余弦信号	$\frac{E}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{1-k^2} e^{jk\omega_0 t}$
对称周期方波	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) e^{jk\omega_0 t}$	冲激串 $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT)$	$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_0 t}$
周期锯齿信号	$\frac{E}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{j}{k} (-1)^k e^{jk\omega_0 t}$		

连续时间傅里叶级数性质:

性 质	周期信号	傅里叶级数系数
	$\left. \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \text{周期为 } T_0 \\ \text{基波频率为 } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \end{matrix}$	$\begin{matrix} a_k = \text{Re}\{a_k\} + j\text{Im}\{a_k\} = a_k e^{j\theta_k} \\ b_k = \text{Re}\{b_k\} + j\text{Im}\{b_k\} = b_k e^{j\varphi_k} \end{matrix}$
线性	$Ax(t) + By(t)$	$Aa_k + Bb_k$
时移	$x(t - t_0)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0}$
频移	$e^{jM\omega_0 t} x(t)$	a_{k-M}
共轭	$x^*(t)$	a_{-k}^*
时间反转	$x(-t)$	a_{-k}
时域尺度变换	$x(at), a > 0$ (周期为 $\frac{T}{a}$)	a_k
周期卷积	$\int_{T_0} x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$T_0 a_k b_k$
相乘	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$ (卷积和)
微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k$
积分	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$ (仅当 $a_0 = 0$ 时, 才为有限值且为周期的)	$\frac{1}{jk\omega_0} a_k$
实信号共轭	$x(t)$ 为实信号	$\begin{matrix} a_k = a_{-k}^* \\ \text{Re}\{a_k\} = \text{Re}\{a_{-k}\}, \text{Im}\{a_k\} = -\text{Im}\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} , \theta_k = -\theta_{-k} \end{matrix}$
实偶信号	$x(t)$ 为实值偶函数	a_k 为实值且为偶
实奇信号	$x(t)$ 为实值奇函数	a_k 为纯虚值且为奇
实信号奇偶分解	$\begin{matrix} x_e(t) = \varepsilon_v\{x(t)\} \\ x_o(t) = O_d\{x(t)\} \end{matrix}$	$\begin{matrix} \text{Re}\{a_k\} \\ j\text{Im}\{a_k\} \end{matrix}$
帕斯瓦尔定理	$\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k ^2$	

典型信号的傅里叶变换:

信 号	傅里叶变换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_0)$	a_k
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_0)$	$a_1 = 1$ $a_k = 0, \text{其余 } k$
$\cos\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2}$ $a_k = 0, \text{其余 } k$
$\sin\omega_0 t$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$	$a_1 = -a_{-1} = \frac{1}{2j}$ $a_k = 0, \text{其余 } k$
$x(t) = 1$	$2\pi \delta(\omega)$	$a_0 = 1, a_k = 0, k \neq 0$ (周期 $T = \infty$)
周期方波 $x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & T_1 < t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$ 和 $x(t+T) = x(t)$	$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$	$\frac{\omega_0 T_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_0 T}{\pi}\right) = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{T}\right)$	$a_k = \frac{1}{T}, \text{对全部 } k$
$x(t) = \begin{cases} 1, & t < T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$	$\frac{2\sin\omega T_1}{\omega} = 2T_1 \text{Sa}(\omega T_1)$	—
$\frac{\sin Wt}{\pi t}$	$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega < W \\ 0, & \omega > W \end{cases}$	—
$\delta(t)$	1	—
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$	—
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	—
$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$	—
$te^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^2}$	—
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$	—

傅里叶变换的性质:

性 质	非周期信号	傅里叶变换
	$x(t)$	$X(j\omega) = \text{Re}\{X(j\omega)\} + j\text{Im}\{X(j\omega)\} = X(j\omega) e^{j\theta(\omega)}$
	$y(t)$	$Y(j\omega) = \text{Re}\{Y(j\omega)\} + j\text{Im}\{Y(j\omega)\} = Y(j\omega) e^{j\varphi(\omega)}$
线性	$ax(t) + by(t)$	$aX(j\omega) + bY(j\omega)$
时移	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$
频移	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X[j(\omega - \omega_0)]$
共轭	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$
时间反转	$x(-t)$	$X(-j\omega)$
尺度变换	$x(at)$ $\frac{1}{ a } x\left(\frac{t}{a}\right)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$ $X(ja\omega)$
卷积性质	$x(t) * y(t)$	$X(j\omega)Y(j\omega)$
调制性质	$x(t) \cdot y(t)$	$\frac{1}{2\pi} X(j\omega) * Y(j\omega)$
时域微分	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(j\omega)$
积分	$\int_{-\infty}^t x(t) dt$	$\frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$
频域微分	$tx(t)$	$j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$
实信号的共轭对称性	$x(t)$ 为实数	$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$ $\text{Re}\{X(j\omega)\} = \text{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\text{Im}\{X(j\omega)\} = -\text{Im}\{X(-j\omega)\}$ $ X(j\omega) = X(-j\omega) , \theta(-\omega) = -\theta(\omega)$
实、偶信号对称性	$x(t)$ 为实、偶信号	$X(j\omega)$ 为实值偶函数
实、奇信号对称性	$x(t)$ 为实、奇信号	$X(j\omega)$ 纯虚值奇函数
实信号的奇偶分解	$x_e(t) = \varepsilon_v\{x(t)\}$ $x_o(t) = O_d\{x(t)\}$	$\text{Re}\{X(j\omega)\}$ $j\text{Im}\{X(j\omega)\}$
对偶性	$f(t) = X(j\omega) _{\omega=t}$	$2\pi x(-\omega)$
帕斯瓦尔定理	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) ^2 d\omega$	

连续时间LTI系统的频率响应:

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} \quad H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

零状态响应的频域求解

周期信号激励下的系统响应

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

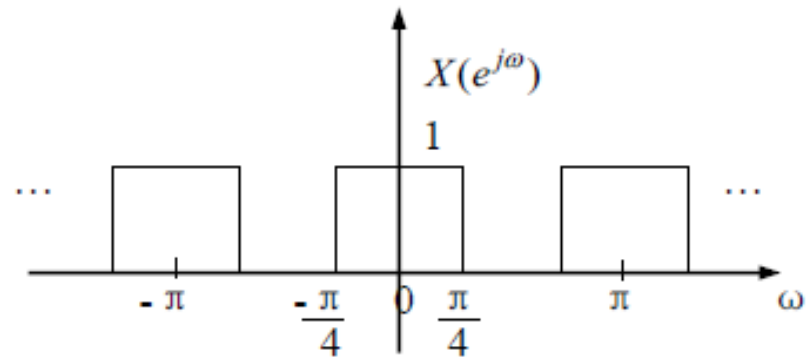
$$A \cos(\omega_0 t + \theta_0) \rightarrow A |H(j\omega_0)| \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \theta(\omega_0))$$

$$A \sin(\omega_0 t + \theta_0) \rightarrow A |H(j\omega_0)| \sin(\omega_0 t + \theta_0 + \theta(\omega_0))$$

信号的滤波与理想滤波器

例题：

已知离散时间信号的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 下图所示，求 $x[n]$ 。



例题：

（8分）考虑一 LTI 系统，其单位冲激响应为 $h(t) = \frac{\sin 3(t-1)}{\pi(t-1)}$ ，求系统对下列各输出的响应。

$$(1) \quad x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos(kt); \quad (2) \quad x(t) = 2 \left(1 + \frac{\sin t \cos(3t)}{\pi t} \right)$$

例题：

（15 分）某一因果 LTI 系统的微分方程 $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3x'(t) + x(t)$ 。

- （1）画出系统实现框图；
- （2）求系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ ；
- （3）求 $x(t) = 1 + e^{-\frac{t}{3}}u(t)$ 激励下的系统响应 $y(t)$ 。

例题:

已知实偶信号 $x(t) \xrightarrow{F} 2\pi G(\omega)$, 求频谱 $x(\omega - \omega_0) + x(\omega + \omega_0)$ 的反变换。

例题：

（15 分）已知一连续因果 LTI 系统 $y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = x'(t) + x(t)$.

$y(0^-) = 1, y'(0^-) = -1$, 输入 $x(t) = e^{-t}u(t)$, 试求：

- (1) 求该系统的频率响应 $H(j\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$;
- (2) 零输入响应和零状态响应;
- (3) 求该系统的框图。

离散时间LTI系统的特征函数：

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \longrightarrow y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

周期离散时间傅里叶级数：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \quad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

离散时间傅里叶变换：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \cdot d\omega \quad X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

典型信号的傅里叶级数:

表 4.1 典型信号的傅里叶级数

信 号	傅里叶级数系数
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$	a_k
$\cos\omega_0 n$ (为周期)	$\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$
$\sin\omega_0 n$ (为周期)	$\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$ $a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$
周期方波 $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq \frac{N}{2} \end{cases}$ 和 $x[n+N] = x[n]$	$a_k = \frac{\sin\left[(2\pi k/N)\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \sin\left[\frac{2\pi k}{N}\right]}$ $a_k = \frac{2N_1+1}{N}, k=0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[n-kN]$	$a_k = \frac{1}{N}, \text{对全部 } k$

离散时间傅里叶级数的性质：

表 4.2 离散时间傅里叶级数性质

性 质	周 期 信 号	傅 里 叶 级 数
	$\left. \begin{matrix} x[n] \\ y[n] \end{matrix} \right\}$ 周期为 N , 基本频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$\left. \begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix} \right\}$ 周期的, 周期为 N
线性	$Ax[n] + By[n]$	$Aa_k + Bb_k$
时移	$x[n - n_0]$	$a_k e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n_0}$
频移	$e^{jM(\frac{2\pi}{N})n} x[n]$	a_{k-M}
共轭	$x^*[n]$	a_{-k}^*
时间反转	$x[-n]$	a_{-k}
时域尺度变换	$x_{(m)}[n] = \begin{cases} x[n/m], & \text{若 } n \text{ 是 } m \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不是 } m \text{ 的倍数} \end{cases}$ (周期的, 周期为 mN)	$\frac{1}{m} a_k$ (看作周期的, 周期为 mN)
周期卷积	$\sum_{r=-\infty}^{\infty} x[r]y[n-r]$	$Na_k b_k$
相乘	$x[n]y[n]$	$\sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$
一阶差分	$x[n] - x[n-1]$	$[1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}] a_k$

离散时间傅里叶级数的性质：

续表

性 质	周 期 信 号	傅 里 叶 级 数
	$\left. \begin{array}{l} x[n] \\ y[x] \end{array} \right\}$ 周期为 N , 基本频率 $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}$	$\left. \begin{array}{l} a_k \\ b_k \end{array} \right\}$ 周期的, 周期为 N
求和	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$ (仅当 $a_0=0$ 才为有限值, 且为周期的)	$\frac{1}{1 - e^{-jk(\frac{2\pi}{N})}} a_k$
实信号的共轭对称性	$x[n]$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k}^* \\ \text{Re}[a_k] = \text{Re}[a_{-k}] \\ \text{Im}[a_k] = -\text{Im}[a_{-k}] \\ a_k = a_{-k} \\ \angle(a_k) = -\angle(a_{-k}) \text{ (相位)} \end{cases}$
实、偶信号	$x[n]$ 为实、偶信号	a_k 为实且偶
实、奇信号	$x[n]$ 为实、奇信号	a_k 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解	$x_e[n]$: 信号的偶部 $x_o[n]$: 信号的奇部	$\text{Re}[a_k]$ $j\text{Im}[a_k]$
周期信号的帕斯瓦尔定理	$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] ^2 = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k ^2$	

基本傅里叶变换对：

信 号	傅 里 叶 变 换	傅里叶级数系数(若为周期的)
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi k}{N})$	a_k
$e^{j\omega_0 n}$	$2\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$</p> <p>$a_k = \begin{cases} 1, & k = m, m \pm N, m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$</p> <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 为无理数 \Rightarrow 信号是非周期的</p>
$\cos \omega_0 n$	$\pi \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) + \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$</p> <p>$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm m, \pm m \pm N, \pm m \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$</p> <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 为无理数 \Rightarrow 信号是非周期的</p>
$\sin \omega_0 n$	$\frac{\pi}{j} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} [\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) - \delta(\omega + \omega_0 - 2\pi l)]$	<p>(a) $\omega_0 = \frac{2\pi r}{N}$</p> <p>$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = r, r \pm N, r \pm 2N, \dots \\ -\frac{1}{2j}, & k = -r, -r \pm N, -r \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$</p> <p>(b) $\frac{\omega_0}{2\pi}$ 为无理数 \Rightarrow 信号是非周期的</p>
$x[n] = 1$	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$	$a_k = \begin{cases} 1, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots \\ 0, & \text{其余 } k \end{cases}$

基本傅里叶变换对:

<p>周期方波</p> $x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & N_1 < n \leq N/2 \end{cases}$ <p>和 $x[n+N] = x[n]$</p>	$2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}\right)\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{N \sin\left[\frac{\pi k}{N}\right]}$ $a_k = \frac{2N_1 + 1}{N}, k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots$
$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$	$\frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$	$a_k = \frac{1}{N}, \text{对全部 } k$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$	—
$x[n] = \begin{cases} 1, & n \leq N_1 \\ 0, & n > N_1 \end{cases}$	$\frac{\sin\left[\omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$	—
$\frac{\sin Wn}{\pi n} = \frac{W}{\pi} \text{Sa}(Wn)$ $0 < W < \pi$	$X(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq W \\ 0, & W < \omega < \pi \end{cases}$ <p>$X(\omega)$ 周期的, 周期为 2π</p>	—
$\delta[n]$	1	—

傅里叶变换性质：

表 4.4 傅里叶变换性质

性 质	非 周 期 信 号	傅 里 叶 变 换
	$x[n]$ $y[n]$	$X(e^{j\omega})$ $Y(e^{j\omega})$ } 周期的, 周期为 2π
线性	$ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
时移	$x[n - n_0]$	$e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$
频移	$e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X[e^{j(\omega - \omega_0)}]$
共轭	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
时间反转	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
时域扩展	$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{若 } n \text{ 为 } k \text{ 的倍数} \\ 0, & \text{若 } n \text{ 不为 } k \text{ 的倍数} \end{cases}$	$X(e^{jk\omega})$
卷积	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
相乘	$x[n]y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\theta})Y[e^{j(\omega - \theta)}]d\theta$
时域差分	$x[n] - x[n-1]$	$(1 - e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$

+∞

傅里叶变换性质：

累加	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$
频域微分	$nx[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
实信号的共轭对称性	$x[n]$ 为实信号	$\begin{cases} X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega}) \\ \text{Re}[X(e^{j\omega})] = \text{Re}[X(e^{-j\omega})] \\ \text{Im}[X(e^{j\omega})] = -\text{Im}[X(e^{-j\omega})] \\ X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases}$
实、偶信号的对称性	$x[n]$ 为实、偶信号	$X(e^{j\omega})$ 实且为偶
实、奇信号的对称性	$x[n]$ 为实、奇信号	$X(e^{j\omega})$ 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解	$x_e[n]$ $x_o[n]$	$\text{Re}[X(e^{j\omega})]$ $j\text{Im}[X(e^{j\omega})]$
非周期信号的帕斯瓦尔定理	$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] ^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) ^2 d\omega$	

离散时间傅里叶级数的对偶性:

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & x[n] \xleftrightarrow{FS} a[k] \\ \text{则} \quad & a[n] \xleftrightarrow{FS} \frac{1}{N} x[-k] \end{aligned}$$

离散时间傅里叶变换和连续时间傅里叶级数的对偶性:

非周期

周期

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega}) \\ \text{则} \quad & X(e^{jt}) \xleftrightarrow{FS} x[-k] \end{aligned}$$

离散时间LTI系统的频域分析：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \quad H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}$$

其中 $H(e^{j\omega})$ 的模 $|H(e^{j\omega})|$ 称为系统的幅频特性，相位 $\theta(\omega)$ 称为系统的相频特性。

系统零状态响应的频域求解

周期信号激励下的系统响应：

$$A \cos[\omega_0 n + \theta_0] \rightarrow A |H(e^{j\omega_0})| \cos[\omega_0 n + \theta_0 + \theta(\omega_0)]$$

$$A \sin[\omega_0 n + \theta_0] \rightarrow A |H(e^{j\omega_0})| \sin[\omega_0 n + \theta_0 + \theta(\omega_0)]$$

离散时间信号的滤波与理想滤波器

例题：

求连续时间信号 $x(t) = \frac{1}{t - j/2}$ 的傅里叶变换。

例题：

(20 分) 已知描述离散时间系统的二阶差分方程为
 $y[n] + y[n-1] - 6y[n-2] = x[n]$ 。试求：

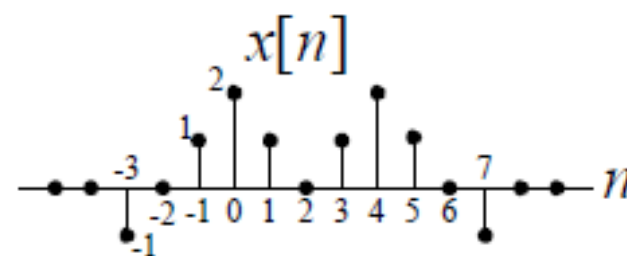
(1) 起始条件 $y[-1] = 0, y[-2] = 1$ ，输入为 $x[n] = 0.5^n u[n]$ 时的零输入响应和零状态响应，并指自由响应和强波出响应；

(2) 起始条件不变，输入 $x[n] = 0.5^n u[n-1]$ 时，求系统的响应；

(3) 若已知输入信号为 $x[n] = \sum_{k=0}^2 e^{jk\frac{\pi}{2}n}$ ，求系统的响应。

例题：

已知 $x[n]$ 如右图所示，请计 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) \cdot \cos(\omega) d\omega$



例题：

（10 分）已知一离散因果 LTI 系统的差分方程为： $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = \frac{1}{2}x[n]$ 。

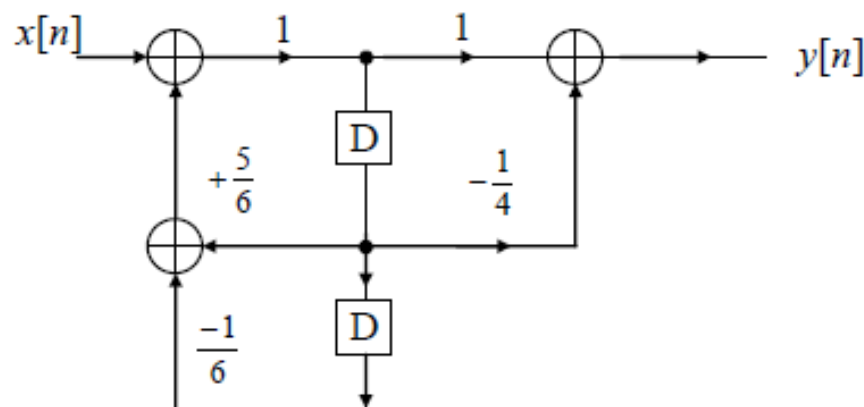
（1）若 $y[-1] = 4$ ， $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$ ，求系统的完全响应；

（2）若 $y[-1] = 4$ ， $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n] + u[n]$ ，求系统的完全响应。

例题：

（15 分）某一因果 LTI 系统方框图如图所示。

1. 求该系统的方程，判断系统的稳定性；
2. 已知 $y[-1] = -\frac{1}{4}$, $y[-2] = 0$, $x[n] = (\frac{1}{4})^n u[n]$, 求输出 $y(n)$ ；
3. 如初始条件不变，输入信号幅度增加 2 倍，求输出 $y(n)$ 。



连续时间信号的时域采样定理:

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT)$$
$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi k)/T)$$

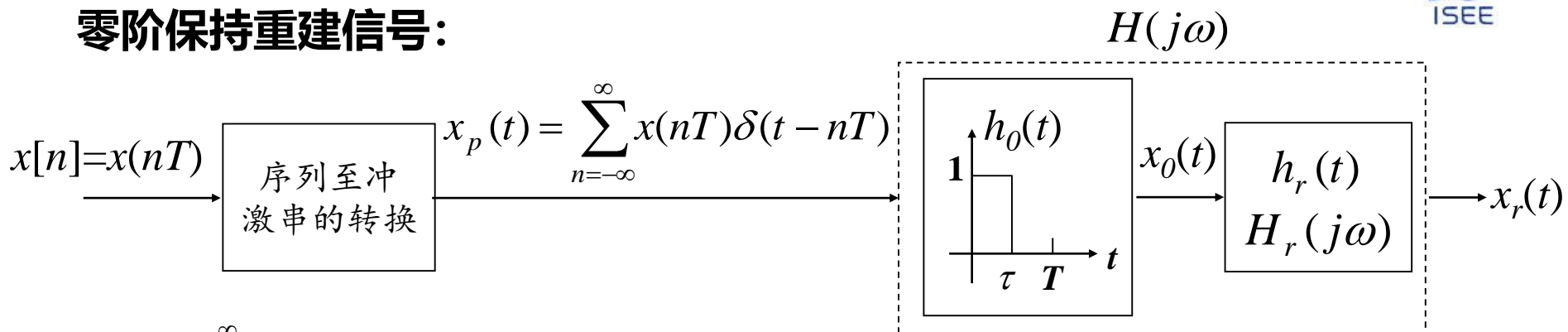
不发生频谱混叠的条件:

奈奎斯特采样定理。

根据抽样序列恢复原信号

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \text{Sa}(\omega_c(t - nT))$$

零阶保持重建信号:



$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h_0(t-nT)$$

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega\tau/2} \left[\frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega} \right]$$

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega\tau/2}}{\frac{2\sin(\omega\tau/2)}{\omega}} \cdot H(j\omega), \quad \text{if } \tau = T$$

信号的欠采样:

$\omega_s < 2\omega_M$, 在频域上将发生频谱混叠。频谱混叠两个结果: 将高频映射为低频信号; 相位倒置。

离散时间信号的时域采样定理:

$$x_p[n] = x[n] \cdot p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \delta[n - kN] = \begin{cases} x[n], & n = N \text{的整倍数} \\ 0, & \text{其余} n \end{cases}$$

$$X_p(e^{j\omega}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j(\omega - k\omega_s)})$$

$\omega_s > 2\omega_M$ 时, 频域中不发生频谱混叠。

恢复系统重建:

设恢复系统中的低通滤波器的单位脉冲响应为 $h[n]$ ，则重建信号 $x_r[n]$ 为

$$x_r[n] = x_p[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \cdot h[n - kN]$$

如 $h[n]$ 为理想低通滤波器， $h[n] = \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin\omega_c n}{\omega_c n}$ ，则重建信号可表示为

$$x_r[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN] \frac{N\omega_c}{\pi} \frac{\sin\omega_c (n - kN)}{\omega_c (n - kN)}$$

离散时间的抽取:

$$x_s[n] = x_p[nN] = x[nN]$$

$$X_s(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N})$$

离散时间的内插：

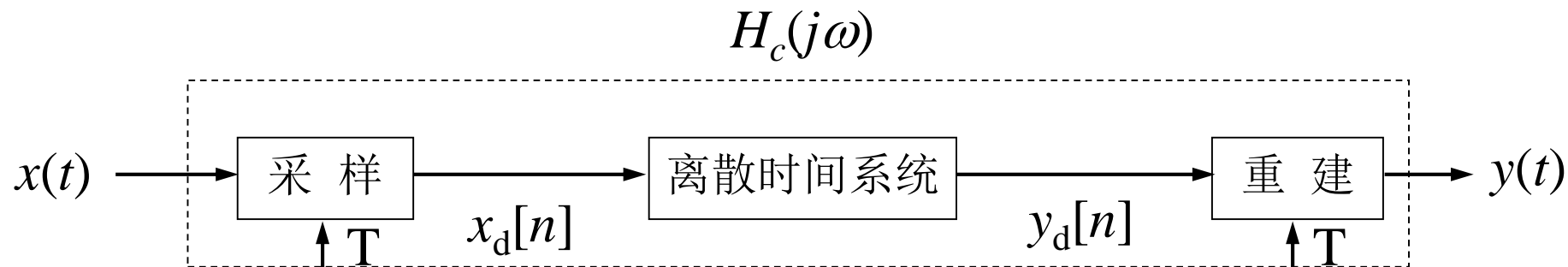
内插过程也称为增采样，内插的原理其实质就是脉冲串采样的恢复系统。对序列 $x_s[n]$ 内插 $N-1$ 个零点后，通过一个低通滤波器形成内插序列 $x_i[n]$ 的过程。在 $|\omega| \leq \pi$ 内，内插序列 $x[n]$ 的频谱是将 $x_s[n]$ 的频谱收缩 N 倍。

连续时间系统的离散时间实现：

连续时间信号 $x(t)$ 的频谱与其样值 $x[n]=x(nT)$ 频谱之间关系：

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - 2\pi k)/T) \text{ 等价于 } X(j\omega) = TX(e^{j\omega T}), \quad |\omega| < \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$$

连续时间信号离散时间处理的原理框图：



$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| \leq \frac{\omega_s}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

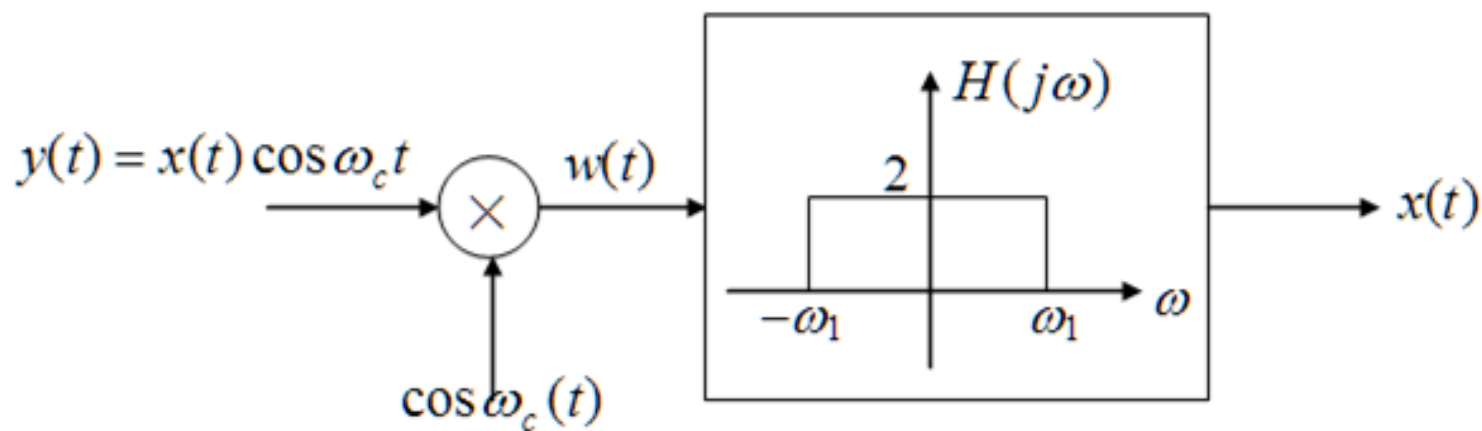
$H_c(j\omega)$ 和 $H_d(e^{j\omega T})$ 之间关系也可表示为 $H_d(e^{j\omega T}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_c(j(\omega - k\omega_s))$,
 可得 $h[n] = Th_c(nT)$ 。

正弦载波幅度调制：

$y(t) = x(t) \cdot \cos\omega_s t$, $\cos\omega_s t$ 信号与任意信号相乘具有频谱搬移功能，可以将有用信号搬移到适当的频段上。

同步解调的实现：

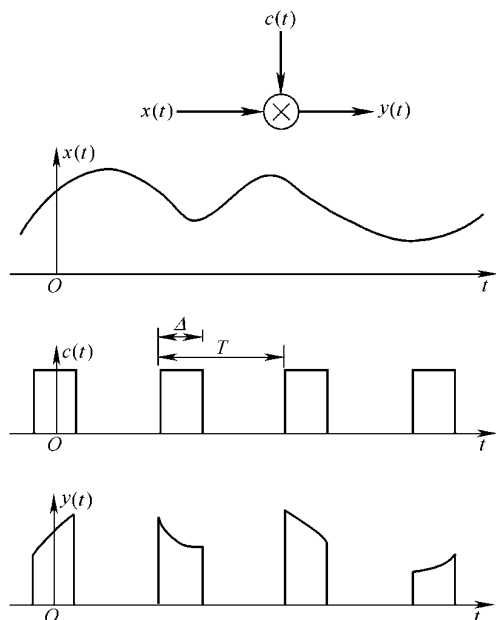
先对调制信号再做一次调制，然后进行低通滤波。



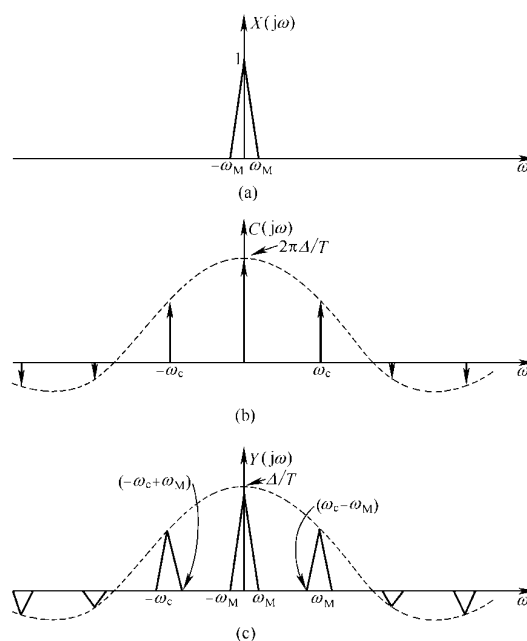
$$w(t) = x(t) \cos^2 \omega_c t = \frac{1}{2} x(t) + \frac{1}{2} x(t) \cos 2\omega_c t$$

脉冲幅度调制 (PAM) :

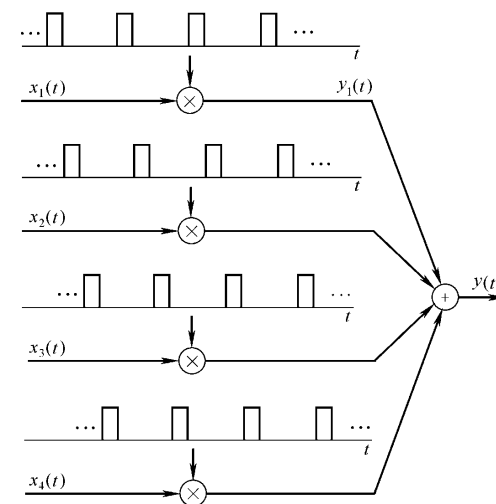
自然采样与时分复用 (TDM)



自然采样形式的
脉冲幅度调制



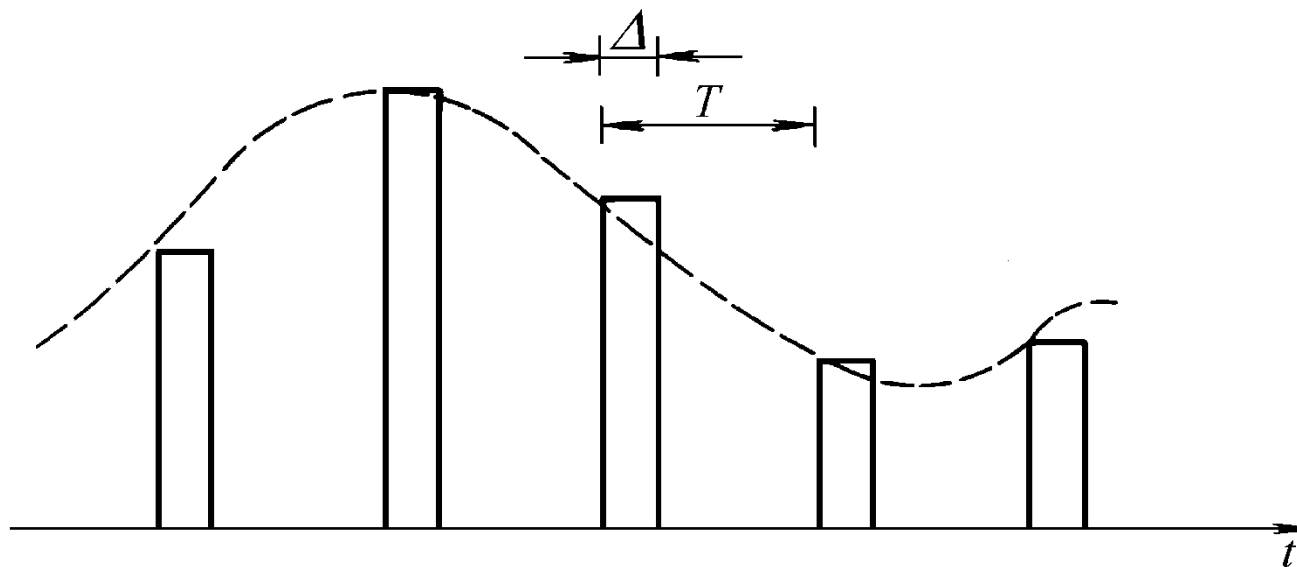
自然采样形式的脉
冲幅度调制的频谱
说明



时分复用

脉冲幅度调制 (PAM) :

平顶采样，该调制方式就是零阶保持采样。



对一路平顶采样形式传输的波形，图中虚线代表信号 $x(t)$

离散时间信号正弦幅度调制：

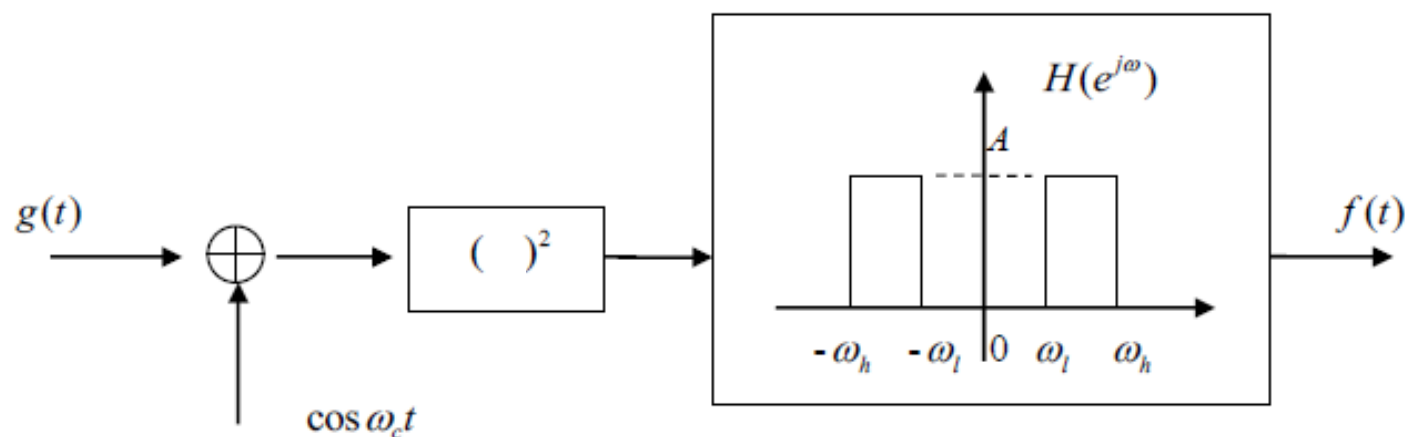
$$y[n] = x[n] \cdot \cos \omega_c n$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - \omega_c)}) + X(e^{j(\omega + \omega_c)})]$$

解调时，通过二次调制，利用低通滤波器，就可恢复原信号 $x[n]$ 。

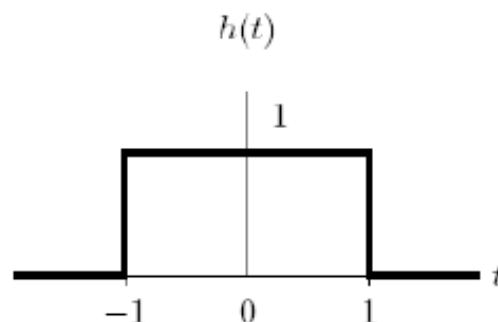
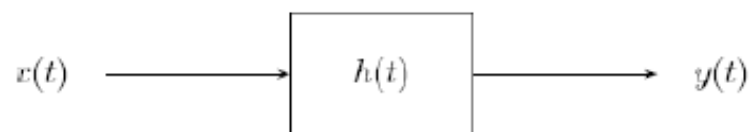
例题：

（7分）下图所示是一个幅度调制系统，该系统由两部分组成：先把调制信号与载波之和平方，然后通过带通滤波器获得已调信号，若 $g(t)$ 是带限信号，即 $|\omega| > \omega_M$ 时 $G(j\omega) = 0$ 。试确定带通滤波器的参数 A, ω_l, ω_h ，使得 $f(t) = g(t) \cos \omega_c t$ 。



例题：

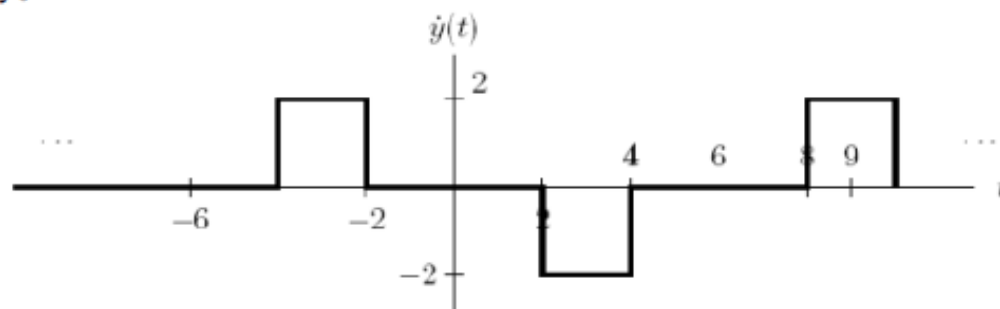
(10 分) 考虑某一 LTI 系统：



假设以下条件：

1. 输入信号 $x(t)$ 的直流量为零；
2. 该输入信号 $x(t)$ 对应的输出信号的微分如下图所示。

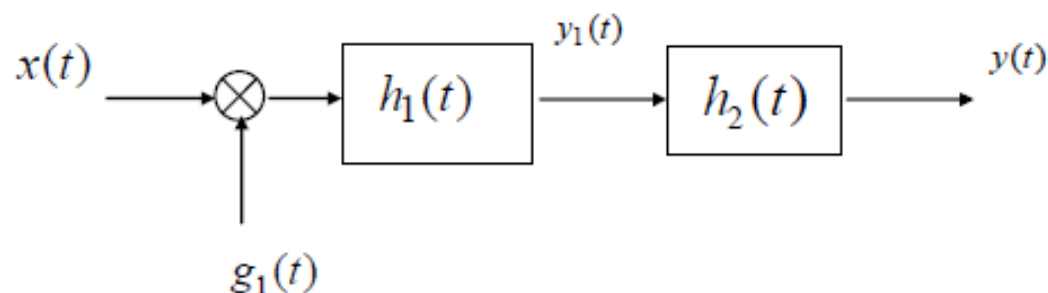
试求该输入信号，并画出该输入信号。



例题：

(10 分) 已知系统如图所示，其中 $g_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 0.5 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，子系统的单位冲激响应为

$$h_1(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2n), h_2(t) = \frac{\sin \frac{3}{2} \pi t}{\pi t}, \text{ 系统输入 } x(t) = \cos \pi t. \text{ 试求子系统输出 } y(t).$$



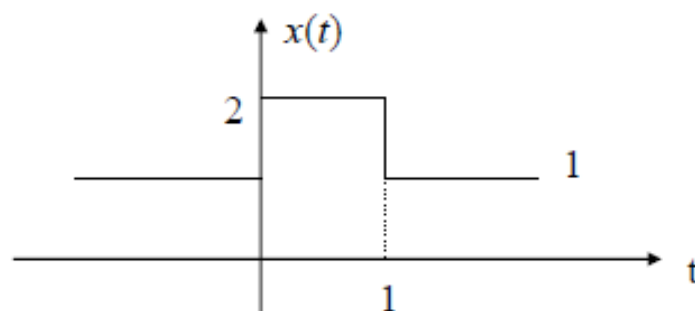
例题：

（5分）设信号 $x(t)$ 经抽样所得的样值离散信号为 $x[n]$ （抽样周期为 T ，满足采样定理。），已知 $h[n] = \frac{\sin \pi(n-0.5)}{\pi(n-0.5)}$ ， $y[n] = x[n] * h[n]$ ，试说明 $y[n]$ 与信号 $x(t)$ 之间的关系，并说明理由。

例题：

(10 分)考虑某一个因果 LTI 系统为 $y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = x'(t) + a \cdot x(t)$ ，已知该系统对直流信号的响应为零。试求：

1. 确定 a 值；
2. 设输入信号如图所示，求输出信号。



双边拉氏变换:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

单边拉氏变换:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$$

拉氏变换的收敛域:

能使信号 $x(t)$ 的拉氏变换存在的 s 值的范围称为信号 $x(t)$ 的收敛域，当收敛域包含 $j\omega$ 轴时，信号的傅里叶变换一定收敛。

对于有理拉氏变换，收敛域内不应包含任何极点。

若 $x(t)$ 是有限连续时间信号，而且是绝对可积的，其收敛域为整个 s 平面。

若 $x(t)$ 是右边信号，且 $X(s)$ 存在，则其收敛域在其最右边极点的右半边。

若 $x(t)$ 是左边信号，且 $X(s)$ 存在，则其收敛域在其最左边极点的左半边。

若 $x(t)$ 是双边信号，则其收敛域是由 s 平面的一条带状区域组成。

常用信号的拉氏变换对:

表 6.1 常用信号的拉氏变换

变换对	信号 $x(t)$	$h[x(t)]$	ROC
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} u(t)$	$\frac{1}{s^n}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
5	$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
6	$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
7	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
8	$\delta(t-T)$	e^{-Ts}	全部 s
9	$\cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
10	$\sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
11	$e^{-at} \cos\omega_0 t u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
12	$e^{-at} \sin\omega_0 t u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

双边、单边拉氏变换的主要性质：

线性 $L\{Ax_1(t) + Bx_2(t)\} = AX_1(s) + BX_2(s)$, ROC 至少: $R_1 \cap R_2$

时移 $L\{x(t - t_0)\} = e^{-st_0} X(s)$, $ROC = R$

s域平移 $L\{x(t)e^{at}\} = X(s - a)$, $ROC = R_1 = R + \text{Re}\{a\}$

尺度变换 $L\{x(at)\} = \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$, $ROC = R_1 = R \cdot a$

时域微分

双边 $\frac{dx(t)}{dt} = sX(s)$

单边 $uL\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = sX(s) - x(0)$ $uL\left\{\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right\} = s^2X(s) - sx(0) - x'(0)$

双边、单边拉氏变换的主要性质：

s域微分 $\frac{dX(s)}{ds} = \int_{-\infty}^{\infty} -t x(t) e^{-st} dt$

时域积分

双边 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$

单边 $uL \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{X(s)}{s} + \frac{x^{-1}(0^-)}{s}$

卷积性质 $L[x_1(t) * x_2(t)] = X_1(s)X_2(s)$

初值和终值定理 $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

在应用终值定理时，必须保证存在 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ ，这个条件就意味着在 $X(s)$ 的极点必定是在 s 平面的左半平面。

周期信号的拉氏变换：

若将第一个周期的时间函数用 $x_1(t)$ 表示，其拉氏变换用 $X_1(s)$ 表示，则有

$$X(s) = \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}} = X_1(s) \frac{e^{sT}}{e^{sT} - 1}, \quad \text{Re}\{s\} > 0$$

抽样信号的拉氏变换：

$$L[x_s(t)] = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \delta(t - nT) e^{-st} dt = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) (e^{-sT})^n$$

拉氏反变换：

分母多项式有 n 个互异实根；

分母多项式中包含有重根；

分母多项式中包含共轭复数极点。

连续时间LTI系统的复频域分析：

当 e^{st} 信号激励一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的系统时，它的响应为 $y(t) = H(s)e^{st}$

一个可实现的 N 阶连续时间LTI系统可用起始状态为零的线性常微分方程来表示，即

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{r=0}^M b_r \frac{d^r x(t)}{dt^r}$$

两边进行双边拉氏变换 $\sum_{k=0}^N a_k s^k Y(s) = \sum_{r=0}^M b_r s^r X(s)$

$$H(s) = \frac{Y_{zs}(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r s^r}{\sum_{k=0}^N a_k s^k} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

系统函数的零极点与系统的稳定性和因果性：

因果性：一个因果LTI系统，其收敛域为最右边极点的右半平面；如果系统是反因果的，收敛域为左半平面。相反的结论不一定都成立。

稳定性：稳定系统的冲激响应应该是绝对可积的： $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty$
这表明稳定系统的频率响应存在。从而稳定系统的 $H(s)$ 的收敛域应包含 $j\omega$ 轴。

因果稳定系统：同时满足因果性和稳定性的系统，称为因果稳定系统。一个因果稳定的有理系统函数，其全部极点都分布在 s 左半平面。

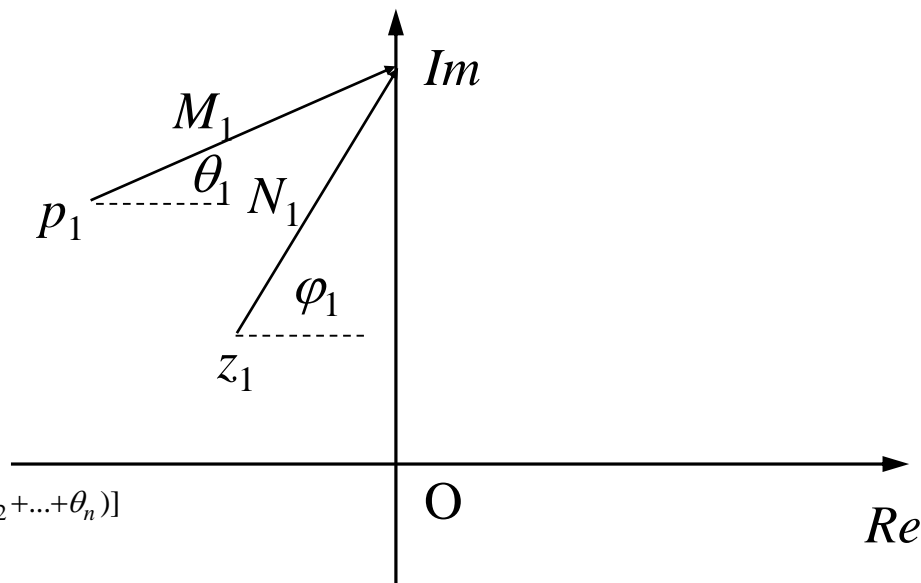
系统函数与系统的频率响应：

$$H(j\omega) = H_{\infty} \frac{\prod_{i=1}^M \overrightarrow{j\omega - z_i}}{\prod_{j=1}^N \overrightarrow{j\omega - p_j}}$$

$$H(j\omega) = H_{\infty} \frac{N_1 e^{j\phi_1} N_2 e^{j\phi_2} \dots N_m e^{j\phi_m}}{M_1 e^{j\theta_1} M_2 e^{j\theta_2} \dots M_n e^{j\theta_n}}$$

$$= H_{\infty} \frac{N_1 N_2 \dots N_m}{M_1 M_2 \dots M_n} e^{j[(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)]}$$

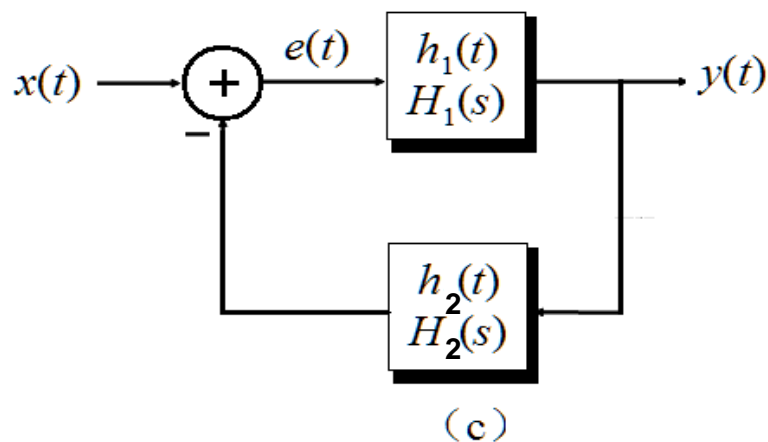
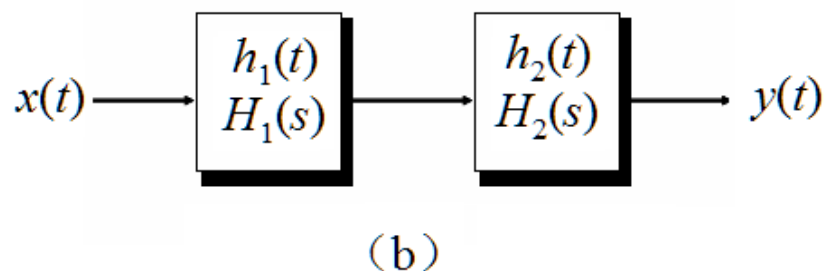
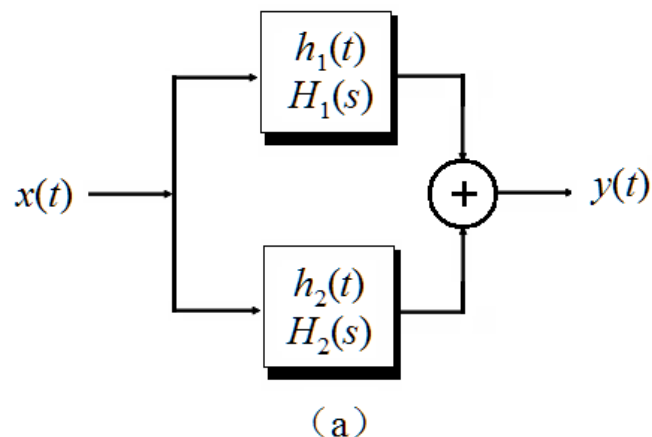
$$= |H(j\omega)| e^{j\psi(\omega)}$$



$$|H(j\omega)| = H_{\infty} \frac{N_1 N_2 \dots N_m}{M_1 M_2 \dots M_n} \quad \psi(\omega) = (\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_m) - (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)$$

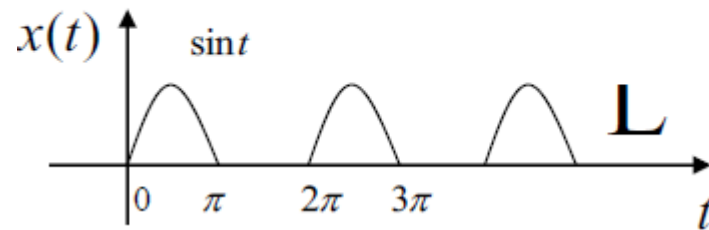
系统函数代数属性和方框图表示：

系统的基本连接方式有并联连接、串联连接、反馈连接。



例题：

求下图单边正弦半波整流信号的拉普拉斯变换。



例题：

(20 分) 已知某因果的 LTI 系统的微分方程为 $y'' + 4y' + 3y = 2x(t)$ ， $y(0^-) = 1$ ， $y'(0^-) = -1$ ，输入信号为 $u(t)$ 。试求：

- (1) 求该系统的频率响应 $H(j\omega)$ 和单位冲激响应 $h(t)$ ；
- (2) 零输入响应和零状态响应；
- (3) 该系统的 s 域模拟框图。

Z变换定义 ($z = re^{j\omega}$) :

双边Z变换 $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

单边Z变换 $X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n}$

Z逆变换定义:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) \cdot z^{n-1} dz$$

Z逆变换求解方法:

围线积分法 (留数定理)、幂级数展开法、部分分式展开法

Z变换零极点图:

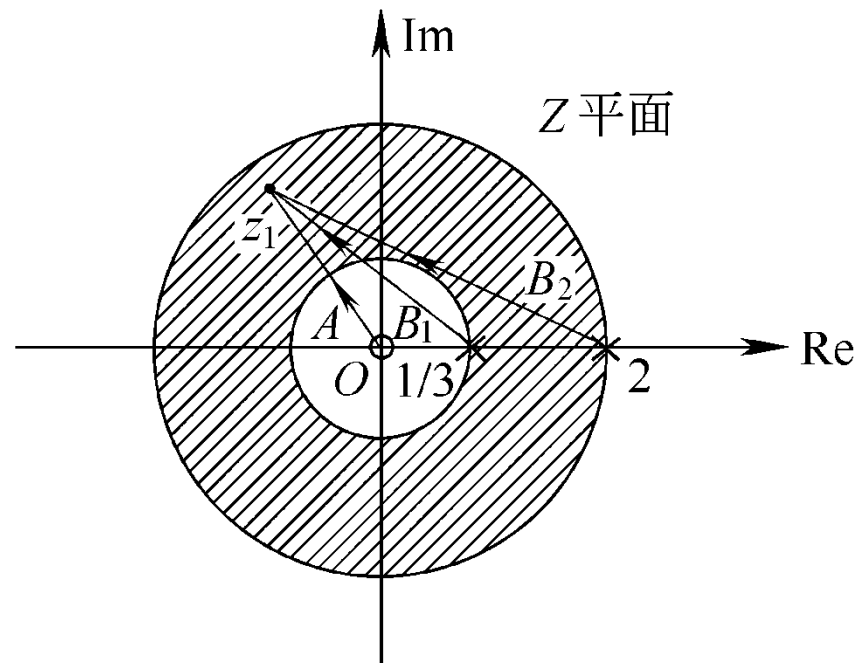
$X(z)$ 的值等于所有的零点矢量的乘积除以所有的极点矢量的乘积，并乘以一个常数因子。

零点矢量为 $\overrightarrow{z_1 - 0} = Ae^{j\theta}$

极点矢量为 $\overrightarrow{z_1 - 1/3} = B_1e^{j\phi_1}$

和 $\overrightarrow{z_1 - 2} = B_2e^{j\phi_2}$

$$X(z) = K \frac{A}{B_1 \cdot B_2} \cdot \frac{e^{j\theta}}{e^{j(\phi_1 + \phi_2)}}$$



当 z_1 位于z平面单位圆上，上式就是 $x[n]$ 频谱 $H(j\omega)$ 。

Z变换的收敛域:

表 7.1 收敛域的主要特性

信号 $x[n]$	$X(z)$ 的收敛域
有限长信号	收敛域是整个 z 平面,有时要除去 $z=0$ 和/或 $z=\infty$ (如果 $n<0$ 时 $x[n]=0$,则收敛域包含 $z=\infty$;如果 $n>0$ 时 $x[n]=0$,则收敛域包含 $z=0$)
右边信号	收敛域位于以最大极点的模为半径的圆外,可能不含 $z=\infty$
因果信号	收敛域位于以最大极点的模为半径的圆外,且包含 $z=\infty$
左边信号	收敛域位于以最小极点的模为半径的圆内,可能不含 $z=0$
反因果信号	收敛域位于以最小极点的模为半径的圆内,且包含 $z=0$
双边信号	收敛域是以两个极点的模为界的环形(收敛域内不含任何极点)

双边Z变换的性质:

表 7.2 双边 z 变换的性质

性 质	信 号	z 变 换
线性	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$
时移	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} X(z)$
时域反转	$x[-n]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
时域扩展	$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k], & n = rk \\ 0, & n \neq rk \end{cases}$	$X(z^k)$
z 域尺度变换	$a^n x[n]$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
z 域反转	$(-1)^n x[n]$	$X(-z)$
共轭	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$
z 域微分	$nx[n]$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$
求和	$\sum_{k=-\infty}^n x[k]$	$\frac{1}{1 - z^{-1}} X(z)$
时域卷积	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z) X_2(z)$
频域卷积	$x_1[n] x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi j} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) \frac{dv}{v}$

单边Z变换的性质:

表 7.3 单边 z 变换的特有性质

性 质	信 号	z 变 换
右 移	$x[n-1]$	$z^{-1}X(z) + x[-1]$
	$x[n-2]$	$z^{-2}X(z) + z^{-1}x[-1] + x[-2]$
	$x[n-m]$	$z^{-m}[X(z) + \sum_{k=-m}^{-1} x[k]z^{-k}]$
左 移	$x[n+1]$	$zX(z) - zx[0]$
	$x[n+2]$	$z^2X(z) - z^2x[0] - zx[1]$
	$x[n+m]$	$z^m[X(z) - \sum_{k=0}^{m-1} x[k]z^{-k}]$
单边周期	$x_p[n]u[n]$, 设 $x_1[n]$ 为 $x_p[n]$ 的第一个周期	$\frac{X_1(z)}{1-z^{-N}}$
初值定理	$x[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$	
终值定理	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)X(z)$	

常用信号的Z变换:

表 7.4 常见信号的 z 变换

信 号	z 变 换	收 敛 域
有限长信号		
$\delta[n]$	1	全部 z
$u[n] - u[n-N]$	$\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}$	$z \neq 0$
因果信号		
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ 或 $\frac{z}{z-1}$	$ z > 1$
$nu[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ 或 $\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ 或 $\frac{z}{z-a}$	$ z > a $
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ 或 $\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z > a $
$[\cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$ 或 $\frac{z^2 - z\cos\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$[\sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2\cos\omega_0]z^{-1} + z^{-2}}$ 或 $\frac{z\sin\omega_0}{z^2 - 2z\cos\omega_0 + 1}$	$ z > 1$
$[r^n \cos\omega_0 n]u[n]$	$\frac{1 - [r\cos\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ 或 $\frac{z^2 - rz\cos\omega_0}{z^2 - 2rz\cos\omega_0 + r^2}$	$ z > r$
$[r^n \sin\omega_0 n]u[n]$	$\frac{[r\sin\omega_0]z^{-1}}{1 - [2r\cos\omega_0]z^{-1} + r^2 z^{-2}}$ 或 $\frac{rz\sin\omega_0}{z^2 - 2rz\cos\omega_0 + r^2}$	$ z > r$

常用信号的Z变换:

反因果信号		
$-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$ 或 $\frac{z}{z-1}$	$ z < 1$
$-nu[-n-1]$	$\frac{1}{(1-z^{-1})^2}$ 或 $\frac{z}{(z-1)^2}$	$ z < 1$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$ 或 $\frac{z}{z-a}$	$ z < a $
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ 或 $\frac{az}{(z-a)^2}$	$ z < a $

LTI系统的Z域分析:

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) \quad Y(z) = X(z) \cdot H(z)$$

因果性：一个离散LTI系统是因果，当且仅当它的系统函数 $H(z)$ 的ROC是某一个圆的外部，且包含无限远点 $z=\infty$ 。

稳定性：一个离散时间LTI系统是稳定的，当且仅当它的系统函数 $H(z)$ 的ROC包含单位圆。

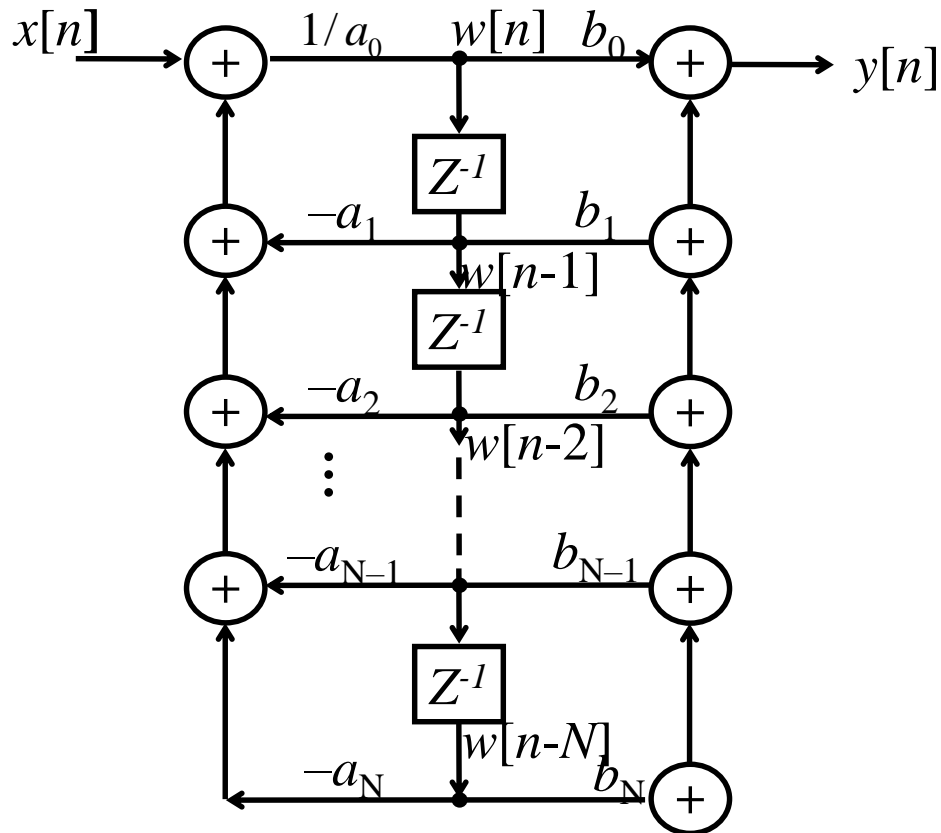
线性常系数差分方程的Z域分析：

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n \pm k] = \sum_{k=0}^M b_r x[n \pm k]$$

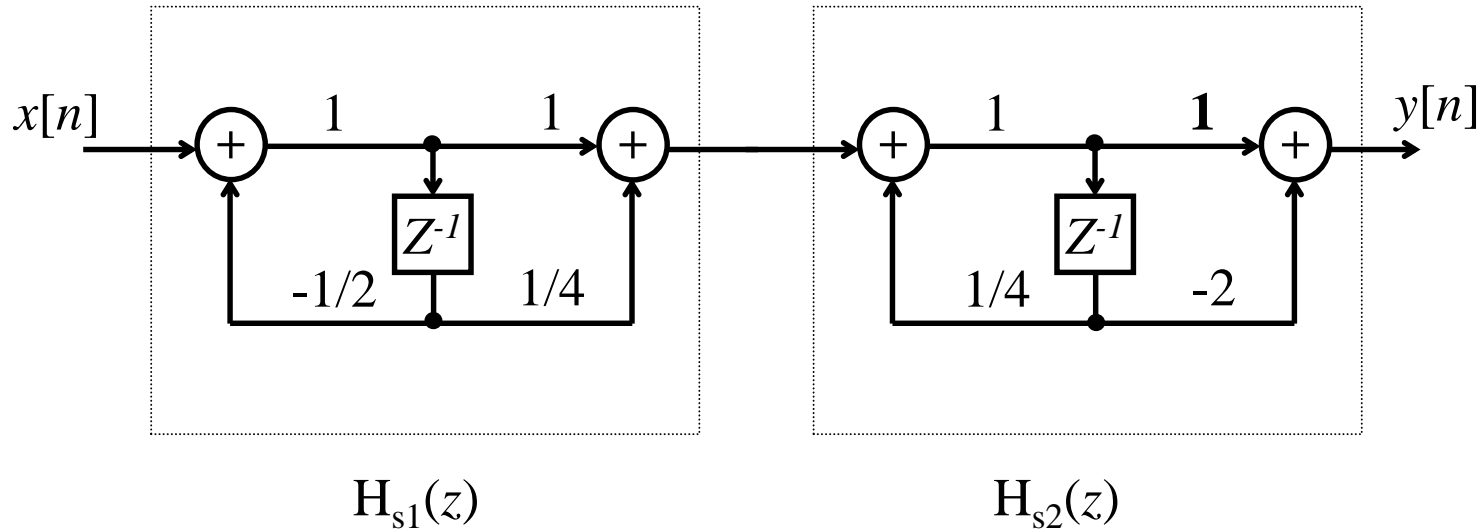
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_r z^{\pm k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{\pm k}} = \frac{b_M z^{\pm M} + b_{M-1} z^{\pm(M-1)} + \dots + b_1 z^{\pm 1} + b_0}{a_N z^{\pm N} + a_{N-1} z^{\pm(N-1)} + \dots + a_1 z^{\pm 1} + a_0}$$

系统函数的方框图表示（直接II型）：

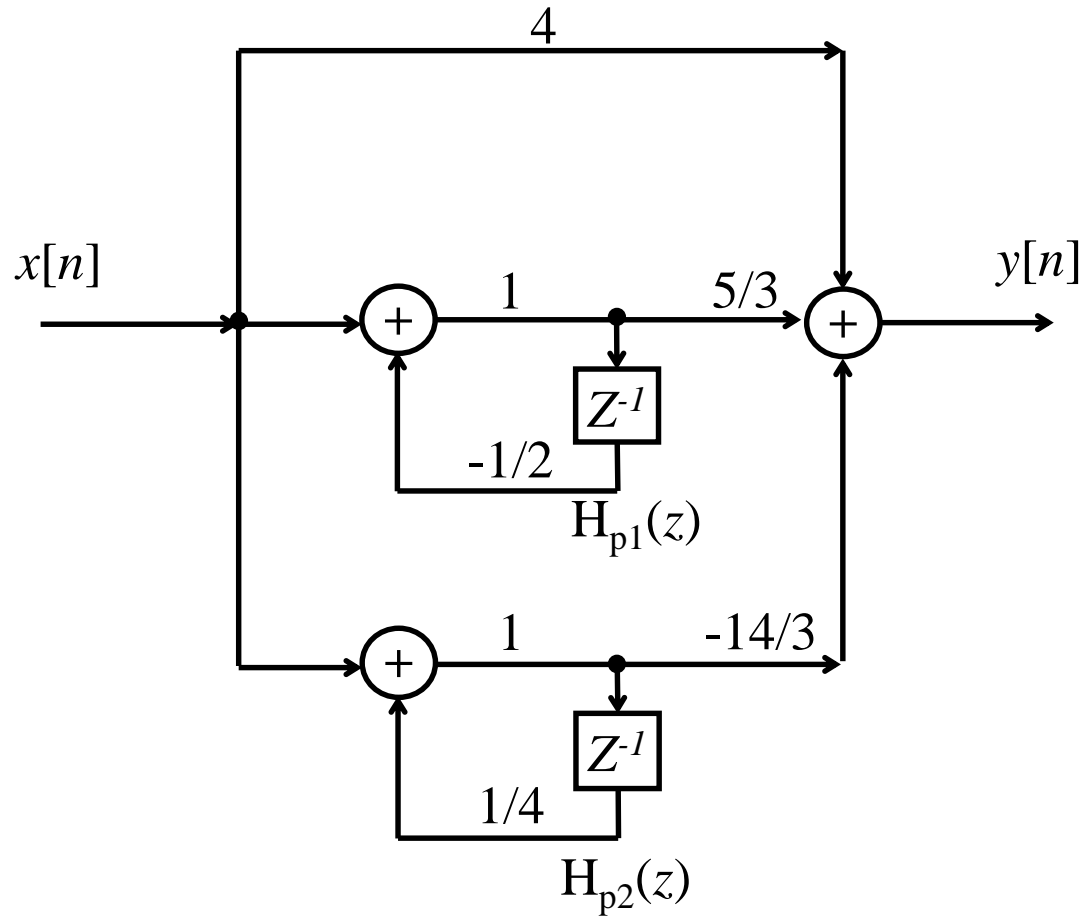
$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^N b_k x[n-k], \quad a_0 \neq 0$$



系统函数的方框图表示（级连型）：



系统函数的方框图表示（并联结构）：



例题：

已知 $X(z) = \ln(1 - \frac{z^{-1}}{3})$, $|z| > \frac{1}{3}$, 求 $x[n]$ 。

例题:

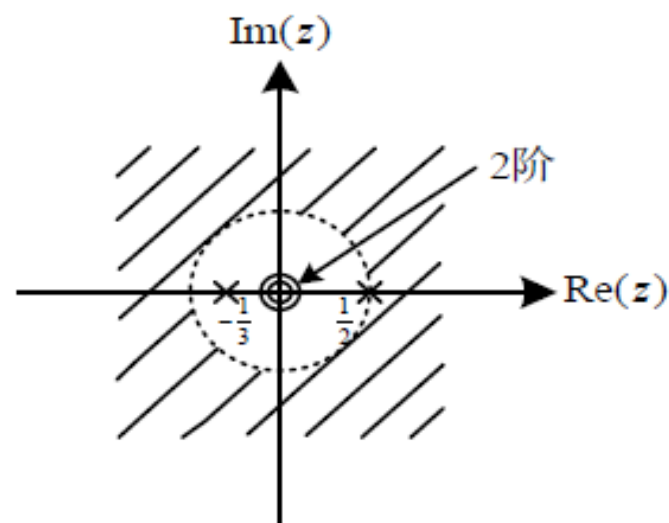
(15 分) 某因果离散时间 LTI 系统，其输入和输出有下列差分方程描述：

$$y[n-1] + 2y[n] = x[n]$$

1. 写出该系统的系统函数，并判断其稳定性；
2. 若 $y[-1]=1$, $x[n]=3(1/4)^n u[n]$, 求 $n \geq 0$ 时系统的输出 $y[n]$, 并指出零输入响应与零状态响应；
3. 若 $x[n] = \text{sgn}[n] + \delta[n]$, 求系统的输出 $y[n]$ 。

例题：

■ 某一因果离散 LTI 系统的零极图如图所示，已知其对信号 $x[n] = 0.5u[n] + 0.5u[n-2]$ 的响应 $s[n]$ 满足： $s[\infty] = 3$ ，试求该系统的单位样值响应。



例题：

（10 分）已知离散 LTI 系统的单位脉冲响应为 $h[n] = \frac{1}{6}(0.25^n + 0.5^n)u[n]$ 。

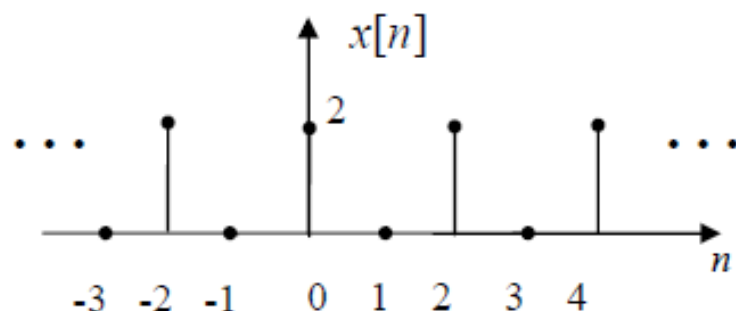
(1) 求该系统的系统函数 $H(z)$ ，并判断其稳定性；(2) 当输入等于 $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ 时，试求该系统的输出。

例题：

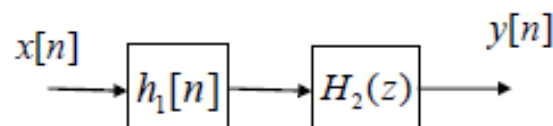
(10 分) 某一因果 LTI 系统如题图六(b)所示，已知： $h_1[n] = \frac{\sin \pi(n-0.25)}{\pi(n-0.25)}$ ，

$H_2(z) = \frac{0.75z^2}{(z-0.5)(z-0.25)}$ ，输入信号如题图六(a)所示。试问：

- (1) 系统 $h_1[n]$ 的频率响应？
- (2) 输出信号 $y[n]$ ？



题图六 (a)



题图六 (b)

题图六