傅里叶级数讲义

① 问题的提出：求解热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ f(x,0) = f(x) \end{cases}$$

ⓐ 当 $f(x) = B_0$ 时

$$f(x,t) = B_0$$

ⓑ 当 $f(x) = B\cos(wx)$ 时，

$$f(x,t) = B\cos(wx)e^{-Kw^2t}$$

ⓒ 当 $f(x) = C\sin(wx)$ 时，

$$f(x,t) = C\sin(wx)e^{-Kw^2t}$$

ⓓ 当 $f(x)$ 为常数，sin，cos 线性组合时，$f(x,t)$ 为相应线性组合。

例如：当 $f(x) = B_0 + B\cos(w_1x) + C\sin(w_2x)$ 时

$$f(x,t) = B_0 + B\cos(w_1x)e^{-Kw_1^2t} + C\sin(w_2x)e^{-Kw_2^2t}$$

② 傅里叶的解法

假设：

$$f(x) = \underbrace{B_0}_{\text{直流分量}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{B_k}_{k\text{次谐波分量}} \cos(k\underbrace{w_0}_{\text{基波频率}}x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{C_k}_{k\text{次谐波分量}} \sin(kw_0x)$$

$T_0 = \frac{2\pi}{w_0}$ 叫做基波周期

则有：

$$f(x,t) = B_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} B_k\cos(kw_0x)e^{-Kk^2w_0^2t} + \sum_{k=1}^{+\infty} C_k\sin(kw_0x)e^{-Kk^2w_0^2t}$$

运用书上 P84 – P85 页积分，可得：

$$\begin{cases} B_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(x)\,dx \\ B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(x)\cos(k w_0 x)\,dx \\ C_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(x)\sin(k w_0 x)\,dx \end{cases} \quad (3\text{-}19)$$

③ 傅里叶级数收敛性

狄里赫利三条件：

条件一、$x(t)$ 在一个周期内绝对可积

$$\int_0^{T_0} |x(t)|\,dt < +\infty$$

条件二、在一个周期内，$x(t)$ 最大值与最小值数目有限。即在一个周期内，$x(t)$ 具有有限个起伏变化。

条件三、在一个周期内，$x(t)$ 只有有限不连续点，而且在不连续点上，函数是有限的。

若 $x(t)$ 满足上述三个条件，则有：

$$x(t) = B_0 + \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} B_k\cos(kw_0 t) + \sum_{k=1}^{N} C_k\sin(kw_0 t)$$

其中
$$\begin{cases} B_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\,dt \\ B_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\cos(kw_0 t)\,dt \\ C_k = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} x(t)\sin(kw_0 t)\,dt \end{cases}$$

~~证明~~：我们在这里给出大致的证明，并不严格。较严格的证明请参看张筑生《数学分析新讲》第二十章。

引理一、若 $x(t)$ 满足狄里赫利三条件，则有：

$$\begin{cases} \lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^{T_0} x(t)\sin(Nt)\,dt = 0 \\ \lim\limits_{N\to+\infty}\int_0^{T_0} x(t)\cos(Nt)\,dt = 0 \end{cases}$$

证明：以下证明不严格，假设了 $x(t)$ 导函数有界

$$\lim_{N\to+\infty}\int_0^{T_0} x(t)\cos(Nt)\,dt$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\int_0^{T_0} x(t)\,d\sin(Nt)$$

$$=\lim_{N\to+\infty}\frac{1}{N}\quad x(t)\sin(Nt)\Big|_0^{T_0}-\frac{1}{N}\int_0^{T_0} x'(t)\sin(Nt)\,dt$$

$$=0$$

sin 情况类似。

引理二． $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi$

设 $I(a)=\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-at}dt$

当 $\frac{dI(a)}{da}=-\int_{0}^{+\infty}e^{-at}\sin t\,dt$

$$=\frac{-1}{2j}\int_{0}^{+\infty}e^{-at}[e^{jt}-e^{-jt}]dt$$

$$=\frac{1}{2j}\int_{0}^{+\infty}e^{-(a+j)t}-e^{-(a-j)t}dt$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{a+j}\left(1-e^{-(a+j)\cdot+\infty}\right)-\frac{1}{a-j}\left(1-e^{-(a-j)\cdot}\right.\right.$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\left[\frac{1}{a+j}-\frac{1}{a-j}\right]$$

$$=-\frac{1}{a^2+1}$$

因此 $I(a)=-\arctan(a)+C$

又因为 $I(+\infty)=\lim_{a\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-at}dt=0$

所以 $C=+\frac{\pi}{2}$

$$I(a)=-\arctan(a)+\frac{\pi}{2}$$

因此

$$I(0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt=-\arctan(0)+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

由于 $\frac{\sin t}{t}$ 为偶函数，所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = 2I(0) = \pi$$

引理三. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin Nt}{t} dt = \pi \quad (N>0)$

证明: 设 $Nt = t'$，则有:

$$上式 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t'}{\frac{t'}{N}} \cdot \frac{1}{N} dt'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t'}{t'} dt' = \pi$$

引理四: $\lim\limits_{N\to+\infty} \frac{\sin(Nt)}{t} = \pi \delta(t)$

证明: $\lim\limits_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \frac{\sin(Nt)}{t} dt$

$$= \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)-x(0)}{t} \sin(Nt) dt$$

$$+ x(0) \lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Nt)}{t} dt$$

设

$$f(t) = \begin{cases} \frac{x(t)-x(0)}{t} & t \neq 0 时, \\ x'(0) & t=0 时 \end{cases}$$

则 $f(t)$ 在 $[-\infty, +\infty)$ 上处处连续可导, 根据引理一

有: $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(Nt) dt = 0$

因此有:

$$\lim_{N\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(t)-x(0)}{t} \sin(Nt) dt = 0$$

根据引理三, 有: $\lim\limits_{N\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(Nt)}{t} dt = \pi$

定理：若 $x(t)$ 满足狄利赫利三条件：①绝对可积 ②一个周期最大最小值个数有限；③有限不连续点，不连续点上函数值有限。

则有：

$$x_N(t) = B_0 + \sum_{k=1}^{N} B_k\cos(kw_0t) + C_k\sin(kw_0t)$$ 其中

$$B_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)\,dt \qquad B_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(kw_0t)\,dt$$

$$C_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\sin(kw_0t)\,dt$$

我们有：$$\lim_{N\to+\infty} x_N(t) = x(t)$$

证明：$$x_N(t) = \frac{2}{T_0}\left[\int_{T_0}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos(kw_0u)\cos(kw_0t) + \sin(kw_0u)\sin(kw_0t)\right]\right. x(u)\,du$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_{T_0}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{N}\cos[k\,w_0(u-t)]\right)x(u)\,du$$

$$= \frac{2}{T_0}\int_{T_0}\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})w_0(u-t)]}{2\sin[\frac{1}{2}w_0(u-t)]}x(u)\,du$$

这里用到一个重要公式

$$1+2\cos w_0+2\cos(2w_0)\cdots+2\cos(Nw_0) = \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})w_0]}{\sin(\frac{1}{2}w_0)}$$

设 $u' = w_0(u-t)$

则 $$x_N(t) = \frac{2}{w_0 T_0}\int_{-w_0 t}^{2\pi - w_0 t} x\left(\frac{u'}{w_0}+t\right)\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})u']}{2\sin[\frac{1}{2}u']}du'$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-w_0 t}^{2\pi - w_0 t} x\left(\frac{u'}{w_0}+t\right)\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})u']}{2\sin[\frac{1}{2}u']}du'$$

因为 $x(u')$ 是 T_0 为周期函数，

则 $x\left(\frac{u'}{w_0}+t\right)$ 是 $w_0 T_0 = 2\pi$ 为周期函数

而 $\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u'}{2\sin\frac{1}{2}u'}$ 也是 2π 为周期函数，所以上式积分限可变为：

$$x_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{u}{w_0}+t\right)\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})u]}{2\sin[\frac{1}{2}u]}du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{u}{w_0}+t\right)\left[\frac{1}{2\sin(\frac{1}{2}u)} - \frac{1}{u}\right]\sin(N+\frac{1}{2})u\,du$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{u}{w_0}+t\right)\frac{\sin(N+\frac{1}{2})u}{u}du$$

第一项为 0，第二项根据引理四，有：

$$x_N(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{u}{w_0}+t\right)\pi\delta(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\pi \quad x\left(\frac{0}{w}+t\right) = x(t)$$

命题得证。

④ 信号的正交分解。

傅里叶级数之所以能写成简单形式，是因为以下函数族 $\{1, \cos(w_0 x), \cos(2w_0 x), \cdots, \sin(w_0 x), \sin(2w_0 x) \cdots\}$ 任何两个相乘后，在 $[0, T_0)$ 上积分都为 0。

因此引入正交基的概念。

定义，若一组函数 $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ 满足

$\langle e_k, e_l \rangle = 0$　当 $\forall k \neq l$ 时

其中 $\langle \cdot \rangle$ 表示内积、

则称 $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ 这族函数为正交基函数

定义：若 $\langle \cdot \rangle$ 满足以下四个性质，则称为内积运算

ⓐ 交换律

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$ （—— 为共轭符号）

ⓑ $$\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$$

ⓒ $$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

ⓓ $\langle x, x \rangle \geq 0$，等号当且仅当 $x = 0$ 时成立。

思考题：积分和求和是内积运算，请证明。

定义：若一组正交基函数 $\{e_1, e_2, \cdots e_N\}$ 满足

$\langle e_k, e_k \rangle = 1$　$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}$，

则称这组函数为标准正交基。

有的书上对标准正交基函数这样定义：

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl}$$，其中

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & k = l \text{ 时} \\ 0 & k \neq l \text{ 时} \end{cases}$$

信号在标准正交基下的分解

假设某信号 x 可以写为一组标准正交基的分解形式

$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 \cdots + a_N e_N$ 其中 $\{e_1, e_2, \cdots, e_N\}$ 为标准正交基。则有：

$$\begin{aligned} \langle x, e_k \rangle &= \langle a_1 e_1 + a_2 e_2 \cdots + a_N e_N, e_k \rangle \\ &= a_1 \langle e_1, e_k \rangle + a_2 \langle e_2, e_k \rangle \cdots + a_N \langle e_N, e_k \rangle \\ &= a_k \end{aligned}$$

所以，待定的系数求法为：

$$a_k = \langle x, e_k \rangle \quad 其中\ k \in \{1, 2, \dots, N\}$$

当然，$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 \cdots + a_N e_N \cdots$ 的收敛性是需要证明的。