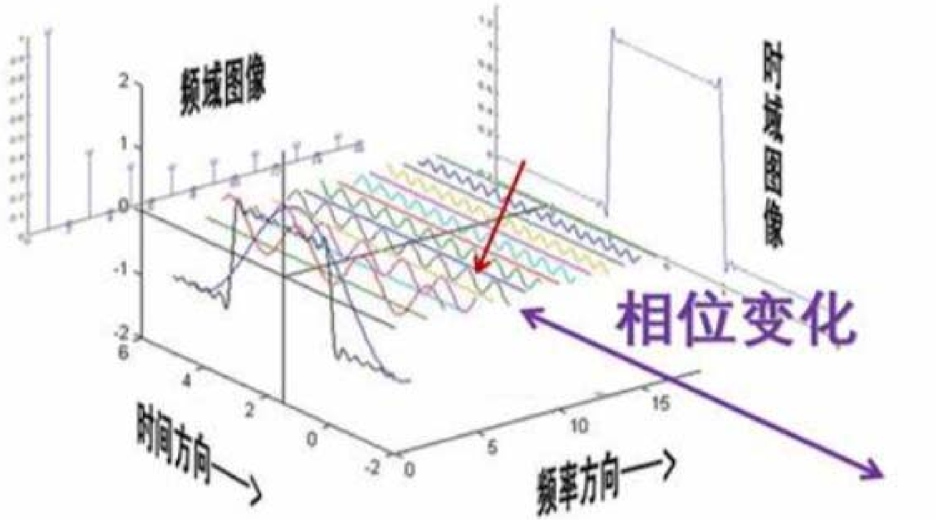
# 第4章 频率域滤波

换个角度看问题，生命会展现出另一种美。生活中不是缺少美，而是缺少发现。

——罗丹

# 内容提纲

- 基本概念
- 取样和取样函数的傅里叶变换
- 离散傅里叶变换
- 频率域滤波基础
- 利用频率域滤波平滑和锐化图像
- 实现



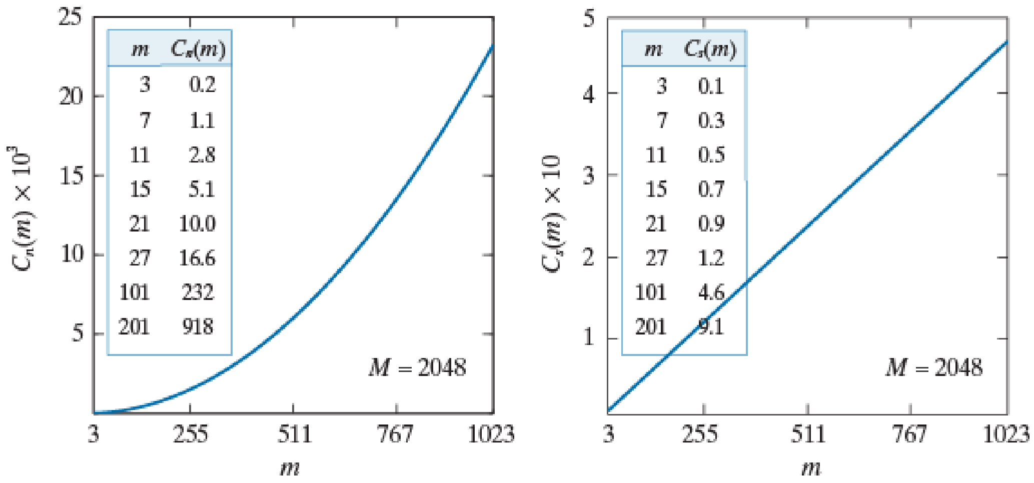
# 频率域与空域滤波的效率对比

- 采用不可分离模板时，采用FFT滤波相比空域滤波的计算优势为：

$$C_n(m) = \frac{M^2 m^2}{2M^2 \log_2 M^2} = \frac{m^2}{4\log_2 M}$$

- 采用可分离模板时，采用FFT滤波相比空域滤波的计算优势为：

$$C_s(m) = \frac{2M^2 m}{2M^2 \log_2 M^2} = \frac{m}{2\log_2 M}$$




- 不可分离模板（左）与可分离模板（右）

# 傅里叶级数和傅里叶变换

- 傅里叶级数：任何(无限)周期函数可以表示为不同频率的正弦和/或余弦之和的形式；
- 傅里叶变换：非周期函数也可以用正弦和/或余弦乘以加权函数的积分来表示；
- 最重要的性质：用傅里叶变换表示的函数特征完全可以通过傅里叶反变换来重建，而不会丢失任何信息。

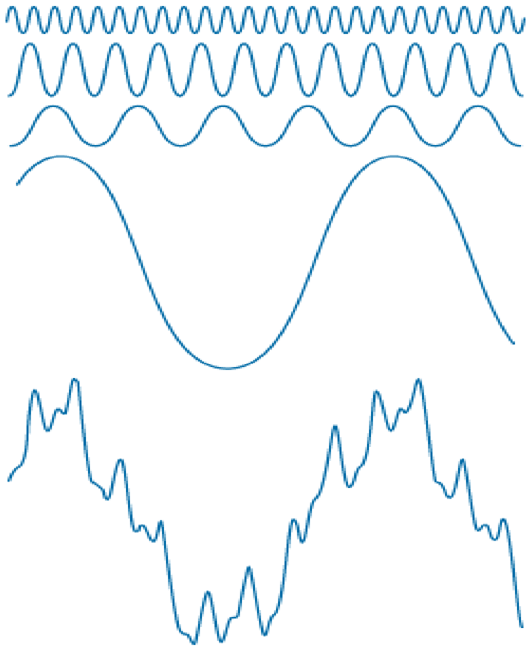


**FIGURE 4.1** The function at the bottom is the sum of the four functions above it. Fourier's idea in 1807 that periodic functions could be represented as a weighted sum of sines and cosines was met with skepticism.

# 复数

- 复数$C$定义为$C = R + jI$， 其中 $j = \sqrt{-1}$；
- 复数$C$共轭表示为 $C^* = R - jI$；
- 也可以用极坐标来表示复数：$C = |C|(\cos\theta + j\sin\theta)$
- 使用欧拉公式 $e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$ ， 其中$e$=2.71828…，则有极坐标下复数表示：

$$C = |C|e^{j\theta}$$

# 傅里叶级数

- 具有周期T的连续变量t的周期函数f(t)可以被描述为乘以适当系数的正弦和余弦和。

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\frac{2\pi n}{T}t}$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)e^{-j\frac{2\pi n}{T}t}dt, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

# 冲激及其取样特性

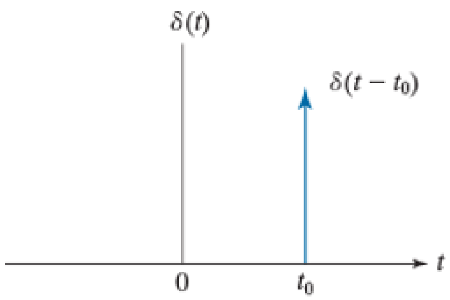
- 连续变量的单位冲激定义：
$$\delta(t)=\begin{cases}\infty, & t=0\\ 0, & t\neq 0\end{cases}$$

- 限制条件：
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

- 冲激具有的取样特性

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

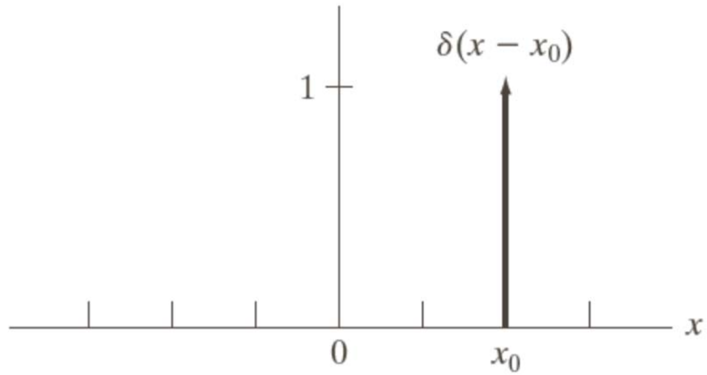
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$



# 单位离散冲激

- 类似地，定义单位离散冲激

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 0, & x\neq 0\end{cases}$$



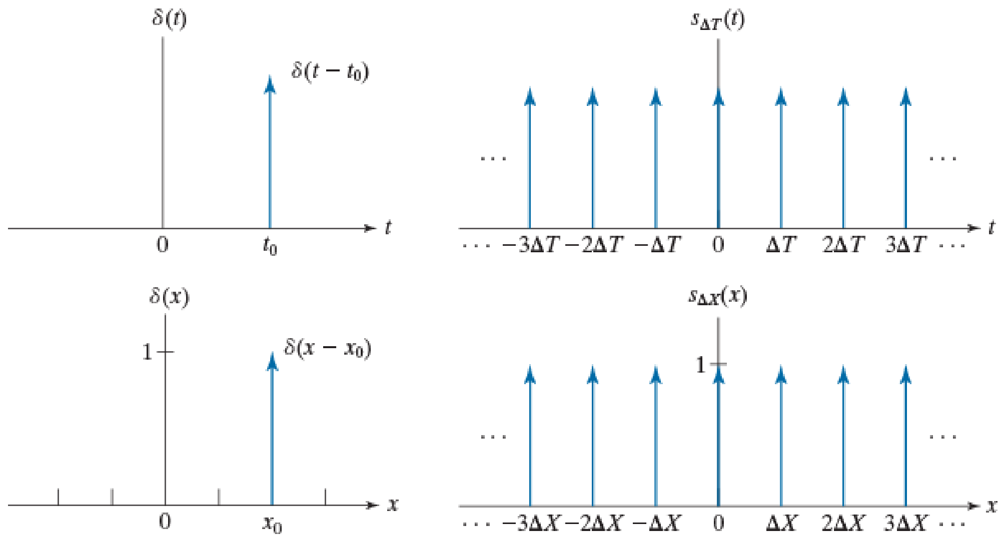

- 同样满足 $\sum_{x=-\infty}^{\infty}\delta(x)=1$

- 取样特性$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)=f(0)$，以及$\sum_{x=-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x\text{-}x_0)=f(x_0)$

# 冲激串

- 定义：
  - 无限多个分离的周期冲激单元之和

$$s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-n\Delta T)$$




上：连续单位冲激与连续单位冲激串
下：离散单位冲激与离散单位冲激串

# 连续变量函数的傅里叶变换

- 定义正变换

$$F(u) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j2\pi ut} \, dt$$

- 反变换

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ut} \, du$$

- 傅里叶变换域即频率域；
- 如果f(t)是实数，其变换通常是复数；
- *t* 可以表示任何连续变量，例如时域的“秒”，空域的“米”等。u呢？

# 简单窗函数的傅里叶变换

- F(u)的零值位置与“盒状”函数的宽度W成反比;
- F(u)旁瓣高度随距离原点的增大而减少;
- F(u)函数向横轴正负方向无限扩展

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,dt=\int_{-\mathrm{w}/2}^{\mathrm{w}/2} A\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,dt$$

$$=\frac{-A}{j2\pi u}\left[\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\right]_{-\mathrm{w}/2}^{\mathrm{w}/2}=AW\frac{\sin(\pi uW)}{\pi uW}$$

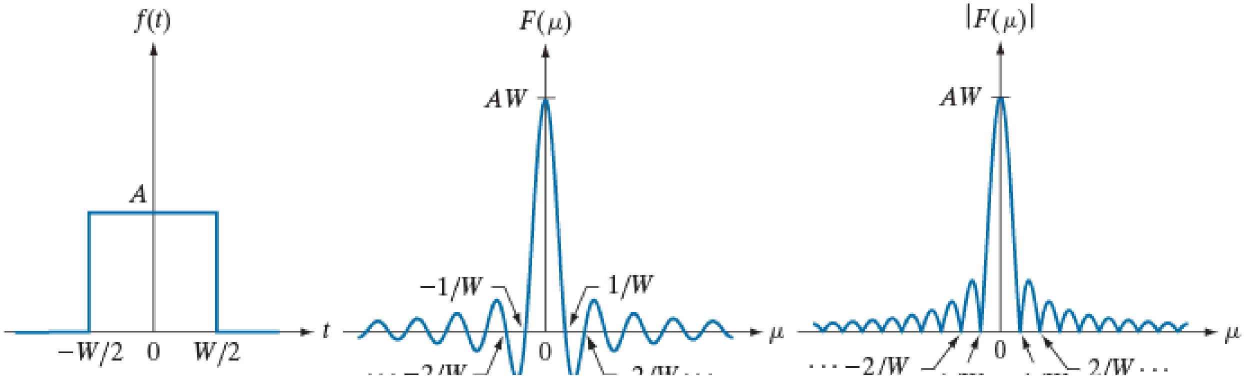



FIGURE 4.4 (a) A box function, (b) its Fourier transform, and (c) its spectrum. All functions extend to infinity in both directions. Note the inverse relationship between the width, $W$, of the function and the zeros of the transform.

# 冲激的傅里叶变换

- 位于空间域原点的冲激的傅里叶变换是一个常数。

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,\delta(t)dt=\mathrm{e}^{-j2\pi u0}=1$$

- 位于 $t = t_0$ 的一个冲激的傅里叶变换是：

$$F(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-j2\pi ut}\,\delta(t-t_0)dt$$

$$=\mathrm{e}^{-j2\pi ut_0}=\cos(2\pi ut_0)-\mathrm{j}\sin(2\pi ut_0)$$

空域平移对应于频域相移

# 变换对特性

- 由傅里叶反变换公式： $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\mathrm{e}^{j2\pi ut}\,du$

  有：
$$\int_{-\infty}^{\infty}F(u-a)\mathrm{e}^{j2\pi ut}\,du=\int_{-\infty}^{\infty}F(u-a)\mathrm{e}^{j2\pi(u-a)t}\mathrm{e}^{j2\pi at}\,d(u-a)$$
$$=\mathrm{e}^{j2\pi at}\int_{-\infty}^{\infty}F(u-a)\mathrm{e}^{j2\pi(u-a)t}\,d(u-a)$$
$$=\mathrm{e}^{j2\pi at}f(t)$$

- 即若 $f(t)\Leftrightarrow F(u)$，则有 $f(\mathrm{t})e^{j2\pi at}\Leftrightarrow F(u-a)$
- 同理，有：
$$\delta(t-t_0)\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-j2\pi ut_0}$$
$$\mathrm{e}^{j2\pi t_0}\Leftrightarrow \delta(u-t_0)$$

频域平移对应于空域相移

# 冲激串的傅里叶变换

- 冲激串的傅里叶级数表示 $s_{\Delta T}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}$
- 其傅里叶变换：

$$S(u)=F\{s_{\Delta T}(t)\}=F\left\{\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\}$$

$$=\frac{1}{\Delta T}F\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{j\frac{2\pi n}{\Delta T}t}\right\}=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\mathrm{u}-\frac{n}{\Delta T})$$

- 间隔为 $\Delta T$的冲激串的傅里叶变换还是冲激串，其间隔为 $\frac{1}{\Delta T}$

# 卷积定理

- 函数卷积定义

$$f(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(\mathrm{t}-\tau)d\tau$$

- 卷积定理

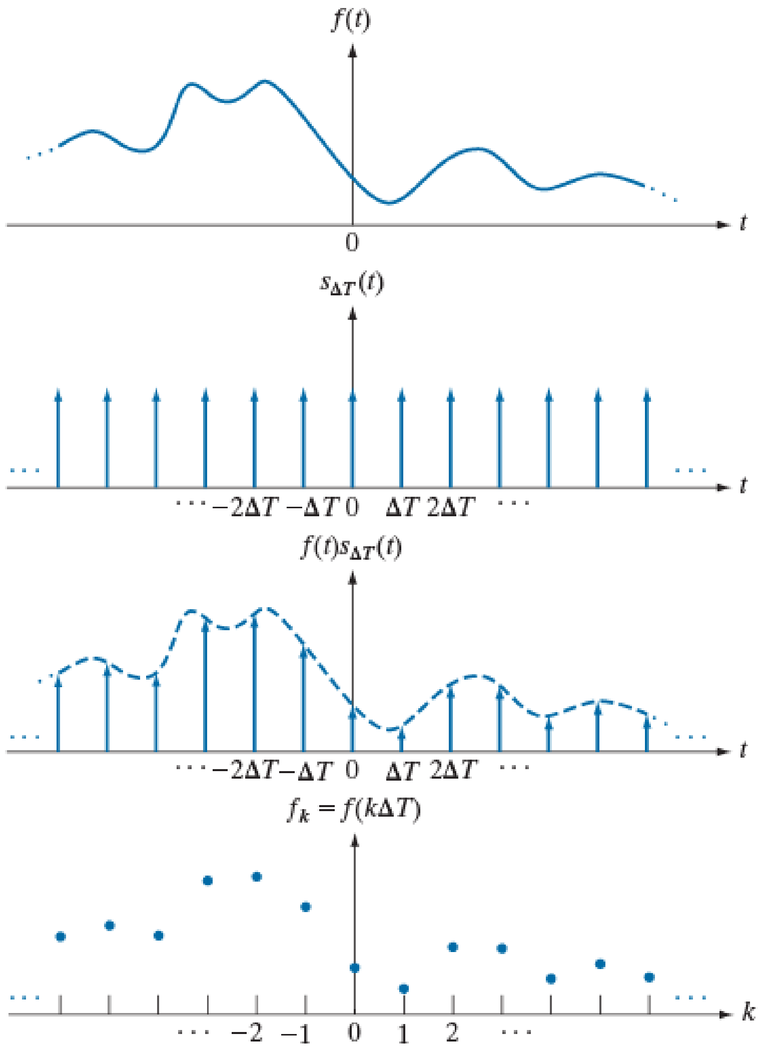
$$f(t)*h(t)\Leftrightarrow H(u)F(u)$$

$$f(t)h(t)\Leftrightarrow H(u)*F(u)$$

# 信号取样

- 取样后的函数

$$\tilde{f}(t) = f(t)s_{\Delta T}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - n\Delta T)$$



# 函数被取样后的傅里叶变换

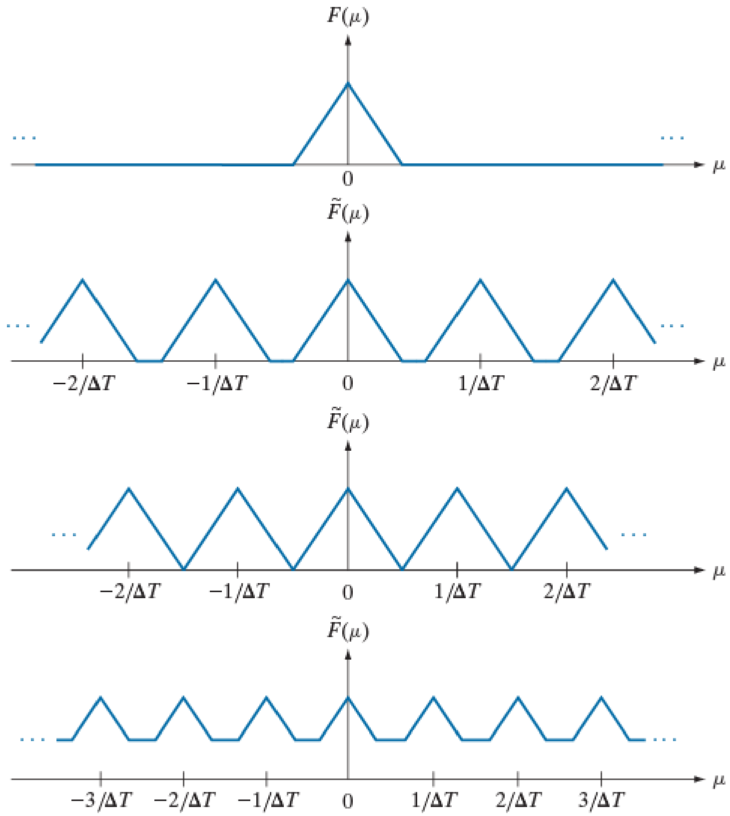
- 对应于各自傅里叶变换的卷积

$$\widetilde{F}(u)=F(u)*S(u)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)S(u-\tau)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{\Delta T}\int_{-\infty}^{\infty}F(\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(u-\tau-\frac{n}{\Delta T})d\tau$$

$$=\frac{1}{\Delta T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(u-\frac{n}{\Delta T})$$

- $\widetilde{F}(u)$是连续的，由原信号的周期拷贝构成（虽然$\widetilde{f}(t)$是离散的）



# 取样定理

- 对于以原点为中心的有限区间$[-u_{\max}, u_{\max}]$之外的频率值，其傅里叶变换为零的函数$f(t)$称为带限函数。
- 那奎斯特取样定理：$\dfrac{1}{\Delta T} > 2u_{\max}$
- 思考：1. $\dfrac{1}{\Delta T} = 2u_{\max}$ 可以吗？ 不可以。
- 2. 怎么样的函数是带限的？

f(t)必须从 $-\infty$ 到 $+\infty$