

数字信号处理

Digital Signal Processing

第4章

IIR数字滤波器设计和实现

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.1 概述

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

1、LSI数字滤波器的设计和实现过程

- ① 确定滤波器的性能要求
- ② 采用因果稳定的离散LSI(IIR/FIR)的系统函数 $H(z)$ 去逼近
- ③ 采用合理的结构形式和有限精度方案

第6章内容

运算结构

合适的字长 $\left\{ \begin{array}{l} \text{系数量化} \\ \text{输入、中间、输出变量量化} \end{array} \right.$

有效的数字处理 $\left\{ \begin{array}{l} \text{舍入} \\ \text{截短} \end{array} \right.$

- ④ 实际的技术实现

软件

硬件

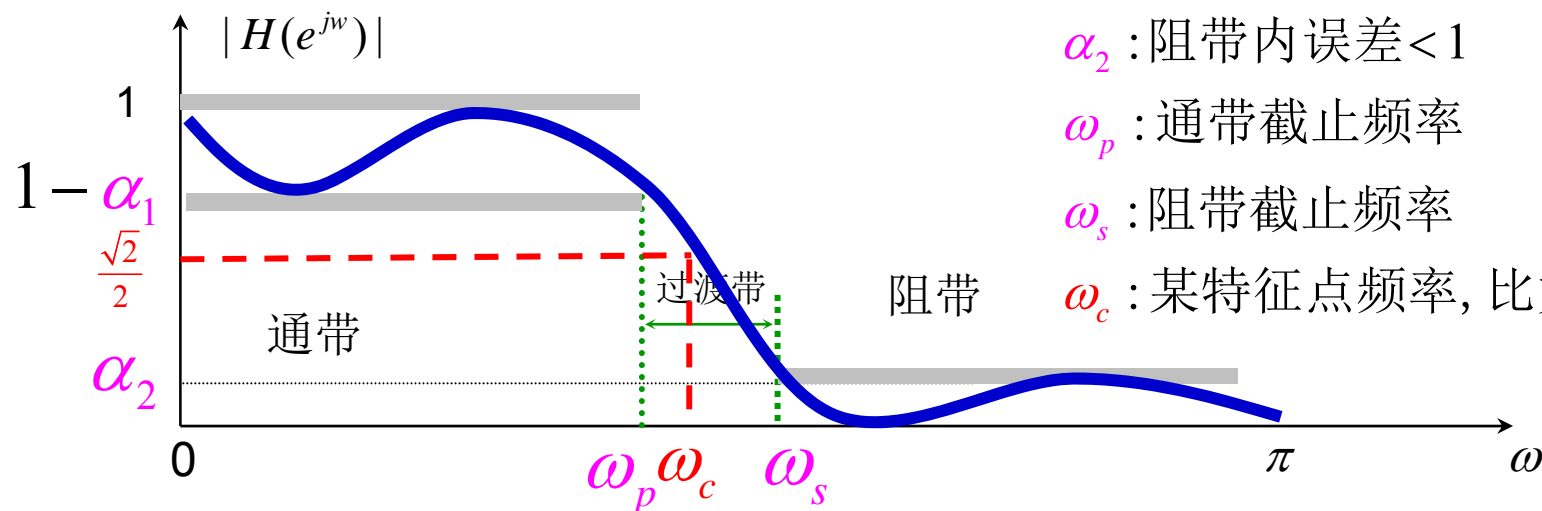
$\left\{ \begin{array}{l} \text{专用} \text{DSP} \text{器件} \\ \text{通用} \text{DSP} \text{器件} \end{array} \right.$

2、滤波器的性能要求逼近

(1)、一般采用频率响应的幅度特性的允许误差来表征

abbr.幅度响应

e.g.低通滤波器



α_1 : 通带内误差 < 1

α_2 : 阻带内误差 < 1

ω_p : 通带截止频率

ω_s : 阻带截止频率

ω_c : 某特征点频率, 比如3dB频率点

使信号通过的频带—**通带**内:

$$1 - \alpha_1 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, |\omega| \leq \omega_p$$

抑制信号的频带—**阻带**内:

$$|H(e^{j\omega})| \leq \alpha_2, \omega_s \leq |\omega| \leq \pi$$

通带到阻带之间的频带—**过渡带**内: $|H(e^{j\omega})|$ 平滑下降

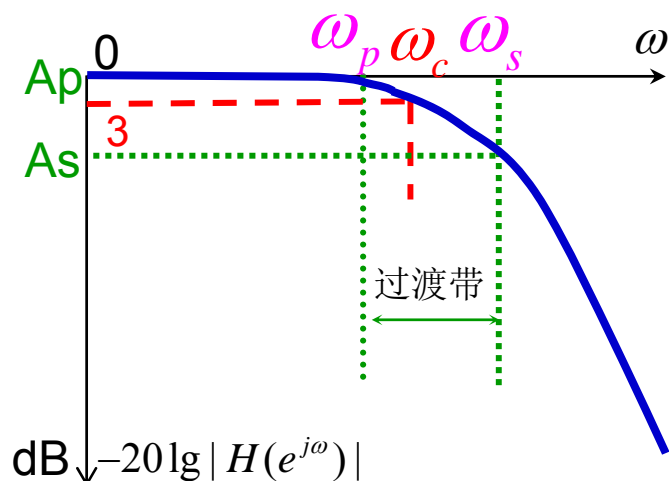
幅度响应常用分贝(**dB**)为单位, 设 $|H(e^{j\omega})|$ 归一化到 1

A_p : 通带内最大波纹 (最大衰减):

$$A_p = -20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_p})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_p})| = -20 \lg(1 - \alpha_1) \quad (\text{dB})$$

A_s : 阻带内最小衰减:

$$A_s = -20 \lg \frac{|H(e^{j0})|}{|H(e^{j\omega_s})|} = -20 \lg |H(e^{j\omega_s})| = -20 \lg \alpha_2 \quad (\text{dB})$$



e.g. $|H(e^{j\omega})| = 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $A_p = 3 \text{ dB}$

$|H(e^{j\omega})| = 0.001$, $A_s = 60 \text{ dB}$

(2)、也可以用相位响应或时域冲激响应的逼近要求来设计性能

(3)、数字滤波器按频率特性进行分类

如果处理对象为模拟信号，数字滤波器的设计还必须给出抽样频率。

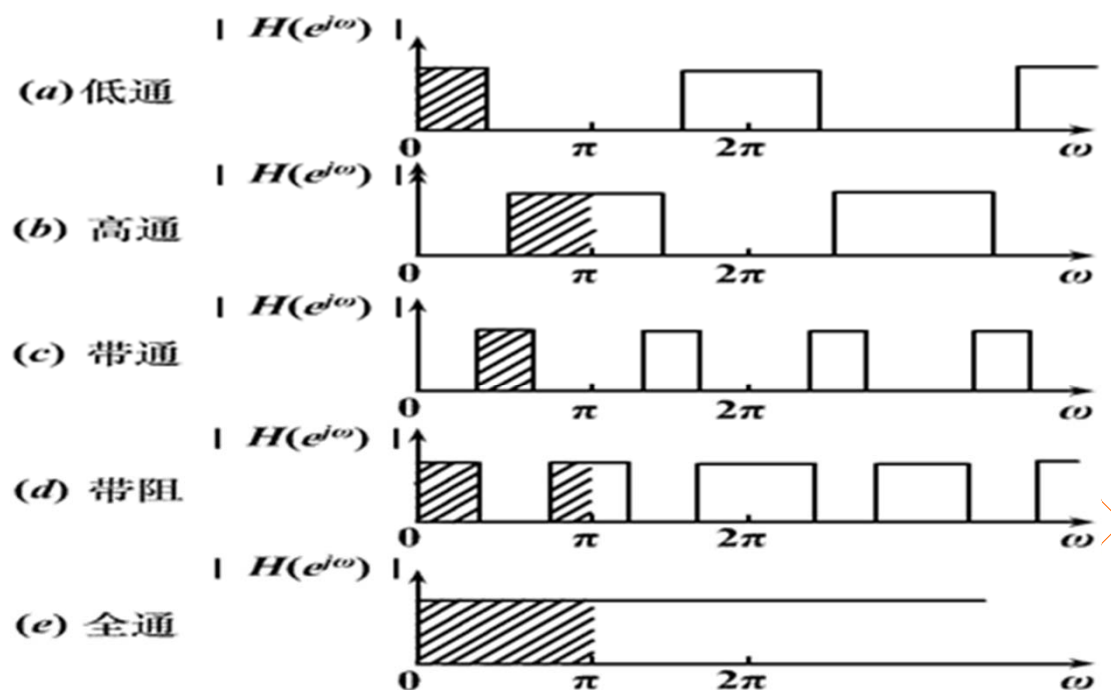
数字频率 ω ：

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$$

Ω ：模拟角频率， f ：模拟频率

T ：抽样间隔， f_s ：抽样频率

由抽样定理：频率特性只能限于 $f_s/2$ 以下，即 $|\omega| < \pi$



各种数字滤波器的理想幅度频率响应

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.2 模拟滤波器设计

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

先设计一个满足技术指标的模拟原型滤波器

冲激响应不变法



双线性变换法

数字滤波器

低通模拟原型滤波器的逼近

一般可用幅度平方函数来逼近

巴特沃兹型(Butterworth)

切比雪夫型(Chebyshev)

椭圆函数型(Ellipse)或考尔型(Cauer)

贝塞尔型(Bessel), 具有较好的线性相位

变量变换法

可设计高通、带通、带阻

Copyright © ZJU XuYX

一、由幅度平方函数确定系统函数

从幅度响应提出滤波器要求，令 $h(t)$ 为实函数，则其幅度平方函数为：

$$\begin{aligned} |H_a(j\Omega)|^2 &= H_a(j\Omega)H_a^*(j\Omega) \\ &= H_a(j\Omega)H_a(-j\Omega) \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \because h(t) \text{ 为实函数} \\ \text{共轭对称 } H_a(-j\Omega) = H_a^*(j\Omega) \end{array}$$
$$= H_a(s)H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega}$$

如何由 $|H_a(j\Omega)|^2$ 求 $H_a(s)$?

$$|H_a(j\Omega)|^2 \xrightarrow{\text{得到}} H_a(s)H_a(-s) \xrightarrow{\text{得到}} H_a(s)$$

复合系统函数

∴ 由 $|H_a(j\Omega)|^2$ $\xrightarrow{\text{求}}$ $H_a(s)$ 的方法:

解析法

① 令 $\Omega^2 = -s^2$ 或者 $\Omega = \frac{s}{j}$ 代入 $|H_a(j\Omega)|^2$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega^2 = -s^2 \text{ or } \Omega = \frac{s}{j}}$$

② $H_a(s)H_a(-s)$ 因式分解, 得到零、极点按如下分配:

将左半平面的极点归于 $H_a(s)$, 任一半(需共轭成对)零点归于 $H_a(s)$
若要求最小相位延时特性, 则取左半平面零点作为 $H_a(s)$ 的零点,
 $j\Omega$ 轴上零点一半属于 $H_a(s)$

③ 由 $H_a(j\Omega)$ v.s. $H_a(s)$ 的低频/高频特性的对比, 可确定增益常数

二、巴特沃兹低通滤波器——最平幅度逼近

1、巴特沃兹低通滤波器幅度平方函数：

定义：

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

N 为滤波器阶次(正整数)

$$\text{对于 } \forall N: |H_a(j\Omega)|^2_{\Omega=\Omega_c} = \frac{1}{2}$$

$$\text{i.e. } A_c = 10 \lg \left| \frac{H_a(j0)}{H_a(j\Omega_c)} \right|^2 = 3 \text{dB}$$

$\therefore \Omega_c$ 为3dB截止频率，也称为巴特沃兹滤波器的3dB带宽

Ω_c 不一定是 Ω_p

2、巴特沃兹低通滤波器的特点：

① $\Omega = 0$ 处： $|H_a(j0)|^2 = 1$

② $\Omega = \Omega_c$ 处： $|H_a(j\Omega_c)|^2 = \frac{1}{2}$, 衰减=3dB

$\forall N$, 所有特性曲线都通过-3dB点——3dB不变性

③ $\Omega=0$ 处, $|H_a(j\Omega)|^2_{\Omega=0}$ 的 $(2N-1)$ 阶导数为0

$\therefore \Omega \rightarrow 0$ 的**通带内** $|H_a(j\Omega)|^2$ 有**最大平坦的幅度特性**

当 $\Omega \rightarrow \Omega_c$, $|H_a(j\Omega)|^2$ 单调减小, $N \uparrow$, 减小越慢

④ 当 $\Omega > \Omega_c$, (过渡带及阻带中), $|H_a(j\Omega)|^2$ 随 Ω 增加而单调减小
(比通带内衰减的速度要快得多), $N \uparrow$, 衰减速度越快

当 $\Omega = \Omega_s$, 阻带截止频率, $A_s = 20 \lg |H_a(j\Omega_s)|$ (阻带最小衰减)

⑤ 由 $A_p, A_s, \Omega_p, \Omega_s$ $\xrightarrow{\text{求}}$ 幅度平方函数 $\xrightarrow{\text{求}}$ N, Ω_c 两参数

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\Omega}{\Omega_c}\right)^{2N}}$$

解析法
零极点分配

$H_a(s)$

i.e.

$$\begin{cases} A_p = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \\ A_s = 10 \lg \left[1 + \left(\frac{\Omega_s}{\Omega_c} \right)^{2N} \right] \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{解方程}}$ 求 N, Ω_c

Copyright © ZJU XuYx

I、 $\because N$ 还需为正整数， \therefore 需先求 N

由两式得到：
$$\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^{2N} = \frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}$$

$$\therefore N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right)}$$

取整数

对模拟频率归一化： $\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_c}$ 有： $\lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_c}$, $\lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_c}$

II、求 Ω_c ：

将 N 代入 Ω_p 式： $\Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_p} - 1}}$ ，则 Ω_s 处更满足要求

或将 N 代入 Ω_s 式： $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1A_s} - 1}}$ ，则 Ω_p 处更满足要求

\because 一般有 $\Omega_p \leq \Omega_c \leq \Omega_s$

3、求 $H_a(s)$

i.e. 由 $|H_a(j\Omega)|^2 \xrightarrow{\text{求}} H_a(s)$

解析法

令 $\Omega = \frac{s}{j}$, 即 $\Omega^2 = -s^2$

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{s}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

\therefore 有限S平面只有极点, i.e. 属于全极点型滤波器
而且零点全部位于 $s = \infty$ 处

$H_a(s)H_a(-s)$ 极点:

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j[\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi]}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j[\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi]}, k = 1, 2 \cdots 2N$$

$H_a(s)H_a(-s)$ 极点分布特点:

- ①象限对称, 分布在半径 Ω_c 圆(巴特沃兹圆)上, 共有 $2N$ 点
- ②极点间的角度间隔 $\frac{\pi}{N}$
- ③虚轴上无极点
- ④ N 为奇数时, 实轴上有极点
 N 为偶数时, 实轴上无极点

将 $H_a(s)H_a(-s)$ 左半平面 N 个极点归于 $H_a(s)$, 得到:

$$\therefore H_a(s) = \frac{\Omega_c^N}{\prod_{k=1}^N s - s_k},$$

$\because |H_a(0)| = 1$, 可求得分子系数 Ω_c^N

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j[\frac{\pi}{2} + \frac{2k-1}{2N}\pi]}, k = 1, 2 \cdots N$$

三、切比雪夫低通滤波器

1、切比雪夫滤波器特性

由于巴特沃兹滤波器的频率特性在通带、阻带都随频率而单调变化。

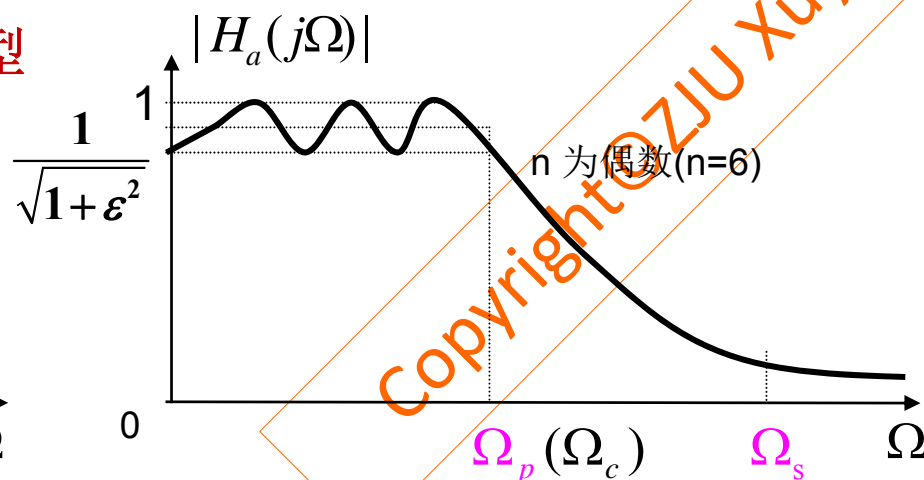
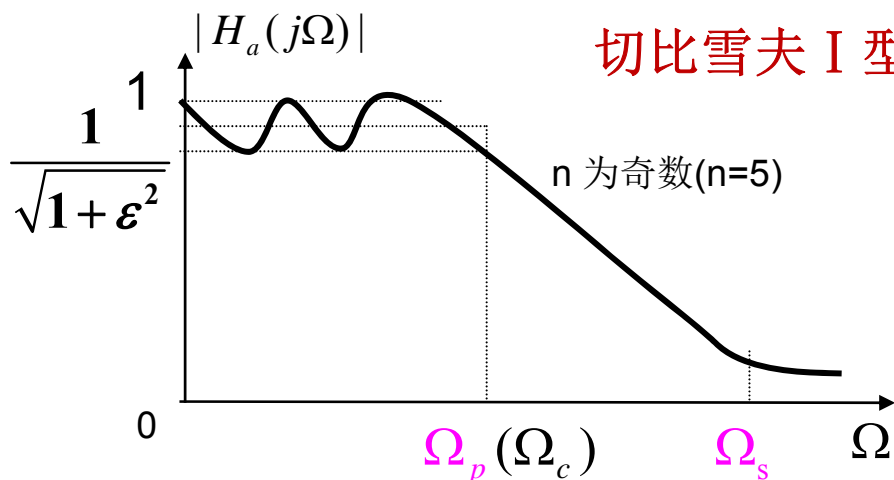
比如：在通带边缘截止频率 Ω_p 满足指标，则通带内将有富裕量。

一种有效的方法：将指标的精度均匀分布在通带/阻带内，设计出阶数低的滤波器。

切比雪夫滤波器的幅度特性在通带或阻带具有等波纹特性。

切比雪夫 I 型：通带等波纹，阻带单调

切比雪夫 II 型：通带单调，阻带等波纹



2、切比雪夫 I 型滤波器

幅度平方函数:

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

$$\Omega_c = \Omega_p$$

$\varepsilon < 1$ 正数, $\varepsilon \uparrow$ 波纹 \uparrow

Ω_p 通带截止频率(不一定为3dB带宽)

其中, $C_N(x)$ 为 N 阶切比雪夫多项式:

$$C_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} x), & |x| \leq 1 \\ ch(N ch^{-1} x), & |x| > 1 \end{cases}$$

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ 双曲余弦函数}$$

$$ch^{-1}x = \pm th \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}, \text{ 反双曲余弦函数}$$

$$thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$|x| \leq 1, |C_N(x)| \leq 1$ 具有等纹波幅度特性

$|x| > 1, C_N(x)$ 随 x 单调增加

p162图4.10不同N的切比雪夫多项式曲线

3、切比雪夫 I 型滤波器的幅度函数特点：

$$|H(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}}$$

① $\Omega=0$ 处, $\begin{cases} N \text{ 为偶数: } |H_a(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} \\ N \text{ 为奇数: } |H_a(j0)| = 1 \end{cases}$

② $\Omega=\Omega_p$ 处: $|H_a(j\Omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$, Ω_p 通带截止频率

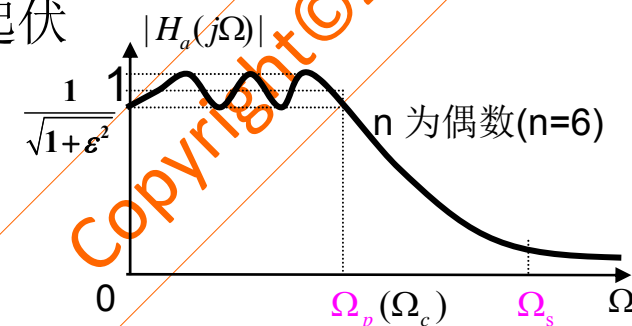
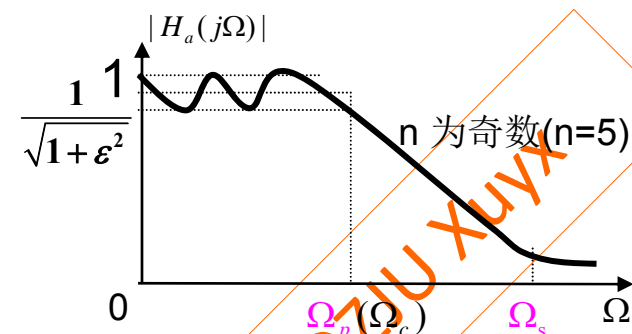
所有 N 阶滤波器都通过 Ω_p 的 $\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ 点

③ $\Omega < \Omega_p$ 通带内,

$\therefore \frac{\Omega}{\Omega_p} < 1, |H_a(j\Omega)|$ 在 $1 \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$ 之间等波纹起伏

④ $\Omega > \Omega_p$ 通带之外,

$\therefore \frac{\Omega}{\Omega_p} > 1, |H_a(j\Omega)|$ 迅速单调下降趋于 0



4、幅度平方函数的三个参数 ε 、 Ω_p 、 N 的确定

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$$

(1) Ω_p 通带宽度：一般可预先给定

(2) ε 由通带波纹(最大衰减)来求取：

$$A_p = 20 \lg \frac{|H_a(j\Omega)|_{\max}}{|H_a(j\Omega)|_{\min}} = 10 \lg(1 + \varepsilon^2)$$

$$\text{有 } \varepsilon^2 = 10^{\frac{A_p}{10}} - 1$$

$$\therefore \varepsilon = \sqrt{10^{0.1A_p} - 1}$$

Copyright©ZJU XuYx

(3) **N**: \because 所有 N , 在 Ω_p 处幅度都为 $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

$\therefore N$ 可由阻带衰减来确定

$$|H_a(j\Omega_s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)} \leq \frac{1}{10^{0.1A_s}}$$

$$\because \frac{\Omega_{st}}{\Omega_p} > 1, \therefore C_N\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right) = ch\left[Nch^{-1}\left(\frac{\Omega_{st}}{\Omega_p}\right)\right] \geq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}$$

$$\therefore N \geq \frac{ch^{-1}\left[\frac{1}{\varepsilon} \sqrt{10^{0.1A_s} - 1}\right]}{ch^{-1}\left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right]} = \frac{ch^{-1}\left[\frac{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}}{\sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right]}{ch^{-1}\left[\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right]} = \frac{ch^{-1}\left[\frac{\sqrt{10^{0.1A_s} - 1}}{\sqrt{10^{0.1A_p} - 1}}\right]}{ch^{-1}\left[\frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right]}$$

对两个模拟频点归一化: $\lambda_p = \frac{\Omega_p}{\Omega_p} = 1, \lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$

5、求 $H_a(s)$ i.e.由 $|H_a(j\Omega)|^2 \xrightarrow{\text{求}} H_a(s)$

解析法

$$H_a(s)H_a(-s) = |H_a(j\Omega)|^2 \Big|_{\Omega=\frac{s}{j}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_p}\right)}$$

① 求其极点分布:

令上式分母: $1 + \varepsilon^2 C_N^2\left(\frac{s}{j\Omega_p}\right) = 0$

i.e. $C_N\left(\frac{s}{j\Omega_p}\right) = \pm j \frac{1}{\varepsilon}$

推导得到 $H_a(s)H_a(-s)$ 极点为

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k \quad k = 1, 2, \dots, 2N$$

$$\begin{cases} \sigma_k = \mp \Omega_p a \sin\left[\frac{2\pi}{N}(2k-1)\right] \\ \Omega_k = \Omega_p b \cos\left[\frac{2\pi}{N}(2k-1)\right] \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} a &= sh\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \\ b &= ch\left[\frac{1}{N} sh^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \end{aligned}$$

② $H_a(s)$: 取 $H_a(s)H_a(-s)$ 左半平面上极点:

$$H_a(s) = \frac{k}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)}$$

又 $\because |H_a(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 C_N^2 \left(\frac{s}{j\Omega_p}\right)^2}}$ 的 s_N 项系数为 $\frac{2^{N-1}}{\Omega_c^N}$

得到: $k = \frac{\Omega_p^N}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}}$

$$\therefore H_a(s) = \frac{\frac{1}{2^{N-1}} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \cdot \Omega_p^N}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)}$$

Copyright © ZJU XuYx

四、利用归一化原型滤波器查表法

将某 Ω_c 归一化为 $\Omega_{cr}=1$ ，形成归一化原型滤波器表格 $H_{an}(p)$

巴特沃兹型归一化中取 $\Omega_c=3\text{dB}$ 频率点

切比雪夫型归一化取 $\Omega_c = \Omega_p$ 通带截止频率

归一化原型滤波器(低通滤波器) $H_{an}(p)$ 多项式:

$$H_{an}(p) = \frac{d_0}{p^N + a_{N-1}p^{N-1} + \cdots + a_1p + a_0}$$

则:

$$H_a(s) = H_{an}(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}} = H_{an}\left(\frac{s}{\Omega_c}\right)$$

1、分母多项式(查表格)

巴特沃兹型: $N=1,2, \dots, 9$, p159表4.2

切比雪夫型: $N=1,2, \dots, 9$, p166表4.3,4.4,4.5

$$A_p=0.2,1,3 \text{ dB}$$

Note: (1) 分母多项式最高次项的系数为1, i.e. $a_N = 1$
(2) 表中还有极点位置数据

2、分子 d_0 确定

① 巴特沃兹型: 令 $|H_{an}(j0)| = 1, \therefore d_0 = a_0 = 1$

② 切比雪夫型:

N 为奇数: 令 $|H_{an}(j0)| = 1, \therefore d_0 = a_0$

N 为偶数: 令 $|H_{an}(j0)| = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}, \therefore d_0 = \frac{a_0}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.4 冲激响应不变法

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

Copyright©ZJU Xuyx

一、变换原理

1. 时域上进行逼近(冲激响应不变):

将 $h(n)$ $\xrightarrow{\text{逼近}}$ $h_a(t)$: 采用对 $h_a(t)$ 进行**抽样**的方式

$$h(n) = h_a(nT) \quad , \quad \text{设 } T \text{ 为采样周期}$$

2. 变换域上的对应关系:

设 $h_a(t) \xrightarrow{L} h_a(s)$ $h(n) \xrightarrow{Z} H(z)$: 系统函数

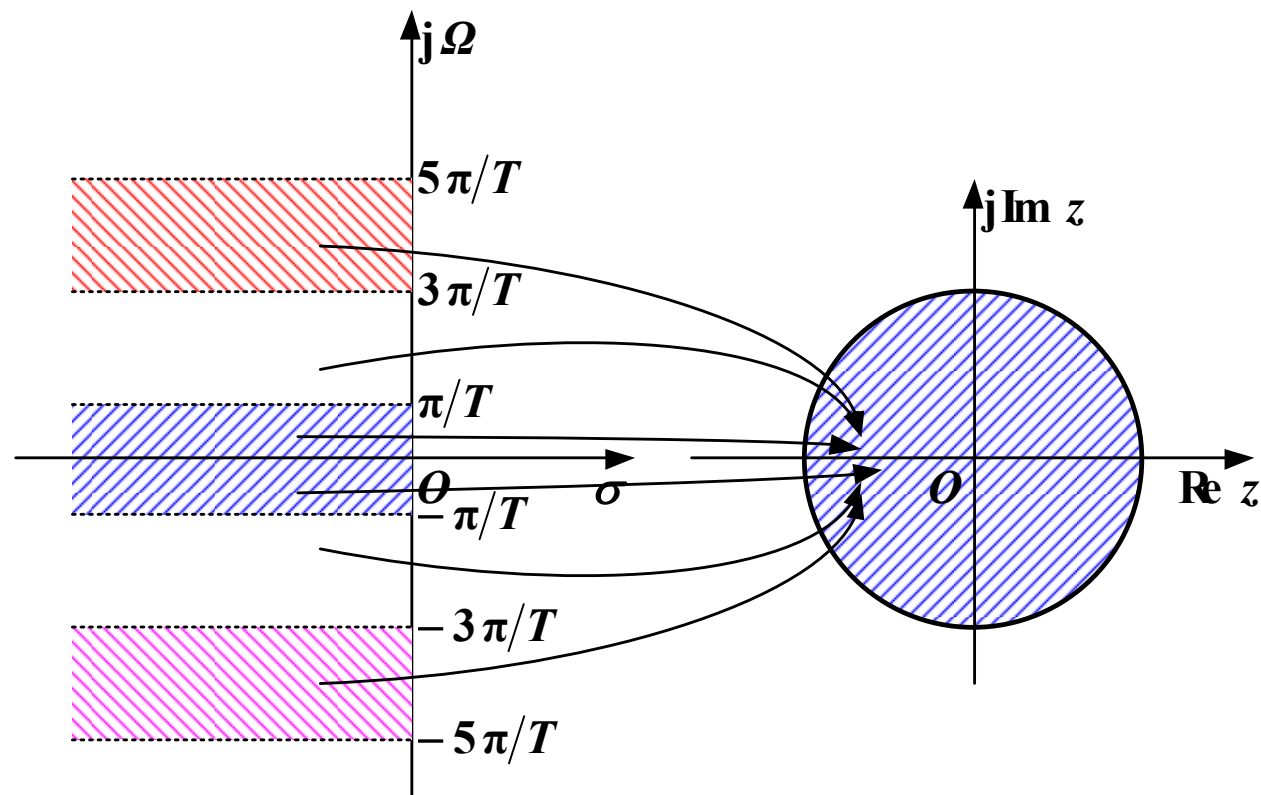
由Ch2.10得:

$$H(z) \big|_{z=e^{sT}} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right)$$

$s \longleftrightarrow z$:

$$z = e^{sT}$$

$$s = \frac{1}{T} \ln z$$



是多值映射，Ch2.10已进行了详细讨论

注：

① **S**左半平面对应**Z**单位圆内

② **S**右半平面对应**Z**单位圆外

③ **jΩ**轴对应**Z**单位圆

④ **S**平面每一横条重叠地映射到**Z**平面上，即 $H(z) \xleftrightarrow{z=e^{sT}} H_a(s)$

满足S→Z映射的两个要求

二、混叠失真

由 $z = e^{sT}$ 可得数字频率: $\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{f_s}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$$

即数字滤波器的频率是模拟滤波器频率响应的周期延拓
只有模拟滤波器的**频率响应是带限**时, 即 $H_a(j\Omega) = 0$,
才**不产生混叠失真**, 有:

$$|\Omega| \geq \frac{\pi}{T} = \frac{\Omega_s}{2}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} H_a(j\frac{\omega}{T}) \quad |\omega| < \pi$$

注:

- ① 实际上, 模拟滤波器不是严格带限的, 只要其频率响应在折叠频率 $\frac{\Omega_s}{2}$ 以上**衰减越大越快**, 变换后的混叠失真就越小
- ② f_s **越大**, 混叠失真越小

三、模拟滤波器的数字化方法(冲激响应不变法)

由 $H_a(s)$ $\xrightarrow{\text{求取}}$ $H(z)$

1. 最直接的方法

$$H(z) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a\left(s - j\frac{2\pi}{T}k\right) \Big|_{s=\frac{1}{T} \ln z}$$

得到的 $H(z)$ 为超越函数，**不可实现**

2. 由“变换原理”来求

$$H_a(s) \xrightarrow{L^{-1}} h_a(t) \xrightarrow{\text{抽样}} h(n) \xrightarrow{Z} H(z)$$

求取过程一般比较复杂

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \quad \xleftrightarrow{\text{V.S.}} \quad H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

两式比较，有：

① **S**平面的**单阶极点** $s = s_k \longrightarrow$ **Z**平面的单阶极点 $z = e^{s_k T}$ 。
但不是整个**S**平面到**Z**平面有此对应关系，e.g.零点位置

② $H_a(s), H(z)$ 部分分式的**系数相同**，都为 A_k 。

③ 模拟滤波器稳定因果 \longrightarrow 数字滤波器稳定因果

Copyright © ZJU XuYX

频响: $H(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$

T很小（即抽样频率太高）时，为了避免数字滤波器增益太高，且不随抽样频率而变化，需对系统函数求取进行修正：

$$h(n) = Th_a(nT)$$

有: $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j\frac{\omega - 2\pi k}{T})$

$$H(e^{j\omega}) \approx H_a(j\frac{\omega}{T}), |\omega| < \pi$$

≈是因为模拟滤波器 $H_a(j\Omega)$ 不是严格带限的

$$\therefore H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longrightarrow H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{TA_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

四、优缺点

优点：

- ① 时域逼近良好
- ② $\omega = \Omega T$ ，频率对应呈线性关系。有：
线性相位的模拟滤波器 \longrightarrow 线性相位的数字滤波器

缺点：

- ① 只适用于带限或近似带限的模拟滤波器，
高通带阻不宜用
- ② 对低通、带通需充分限带

Copyright©ZJU XuYx

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.5 双线性变换法

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

Copyright©ZJU Xuyx

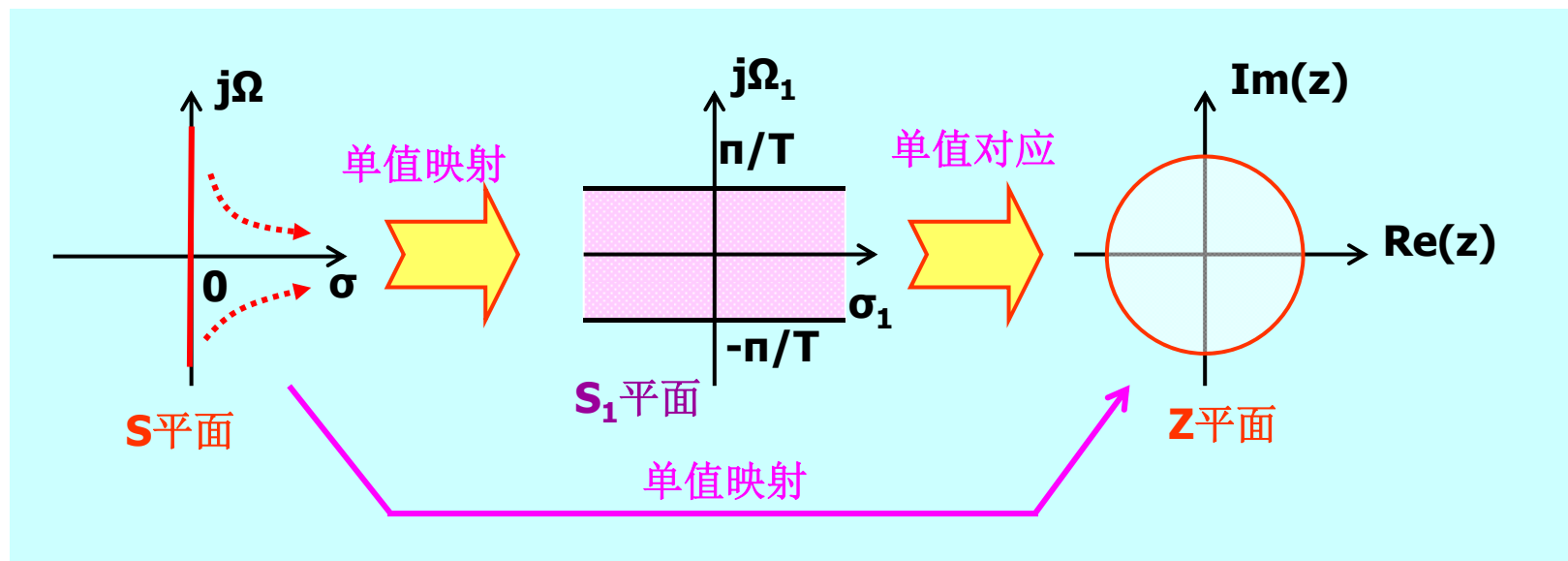
一、变换原理

$S \longrightarrow Z$ 平面为单值映射，过程如下：

① 原 S 平面 $\xrightarrow{\text{压缩}}$ S_1 平面的一条横带 $-\frac{\pi}{T} \sim \frac{\pi}{T}$

② S_1 平面 $\xrightarrow{z = e^{sT}}$ Z 平面

Copyright©ZJU XuYx



$$\textcircled{1} S \longrightarrow S_1$$

$$\text{对于 } j\Omega \text{ 轴: } \Omega = \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{有: } \Omega = \pm\infty &\rightarrow \Omega_1 = \pm\frac{\pi}{T} \\ \Omega = 0 &\rightarrow \Omega_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{又因 } j\Omega = \frac{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} - e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}{e^{j\frac{\Omega_1 T}{2}} + e^{-j\frac{\Omega_1 T}{2}}}$$

$$\text{双曲正切: } \operatorname{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\text{推广到 } S \text{ 平面: } s = \frac{e^{\frac{s_1 T}{2}} - e^{-\frac{s_1 T}{2}}}{e^{\frac{s_1 T}{2}} + e^{-\frac{s_1 T}{2}}} = \operatorname{th}\left(\frac{s_1 T}{2}\right) = \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

$$\textcircled{2} S_1 \longrightarrow Z \quad z = e^{s_1 T}$$

将①②合并所以有：

$$\begin{cases} s = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\ z = \frac{1 + s}{1 - s} \end{cases}$$

③为了使模拟滤波器的某一频率对应数字滤波器的某一频率，进行修正：

在①中 $S \rightarrow S_1$ 中引入待定常数 c ： $\Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right)$

有：

$$s = c \frac{1 - e^{-s_1 T}}{1 + e^{-s_1 T}}$$

因此，双线性变换：

单值映射

$$\begin{cases}$$

$$\begin{cases} s = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \\ z = \frac{c + s}{c - s} \end{cases}$$

有：

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

二、c的选择

不同的c选择:

- (1) 可以使模拟滤波器频率特性与数字滤波器频率特性在不同频率处有对应的关系
- (2) 可以调节频带之间的对应关系

Copyright©ZJU XuYx

在低频处有较确切的对应关系

i.e. 使 $\Omega \approx \Omega_1$

因为 $\Omega_1 \rightarrow 0: \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) = \frac{\Omega_1 T}{2}$

所以 $\Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\Omega_1 T}{2}\right) \approx \frac{\Omega_1 T}{2} \approx \Omega_1$

因此

$$c = \frac{2}{T}$$

也可以通过如下得到

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

令 $\omega = \Omega_1 T \approx \Omega T, \omega \rightarrow 0, \Omega \rightarrow 0$

又 $\because \Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \approx c \cdot \frac{\omega}{2}$

$\therefore \Omega \approx c \cdot \frac{\omega}{2} \approx c \cdot \frac{\Omega T}{2}$

因此: $c = \frac{2}{T}$

该方法: 模拟原型滤波器的低频特性 \approx 数字滤波器的低频特性

三、逼近的情况

S平面→Z平面的映射需满足两个条件：

1. 将式 $z = e^{j\omega}$ 代入变换式：

$$\begin{aligned} s &= c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega}} \\ &= c \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + e^{-j\omega}} \\ &= jc \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\ &= j\Omega \end{aligned}$$

所以有S平面 $j\Omega$ 虚轴 \longleftrightarrow Z平面的单位圆

$$\text{其中 } \Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

2. 将 $s = \sigma + j\Omega$ 代入

$$z = \frac{c + s}{c - s} \Big|_{s=\sigma+j\Omega}$$
$$= \frac{(c + \sigma) + j\Omega}{(c - \sigma) - j\Omega}$$

所以

$$|z| = \frac{\sqrt{(c + \sigma)^2 + \Omega^2}}{\sqrt{(c - \sigma)^2 + \Omega^2}}$$

$$\sigma < 0 \text{ 时, } |z| < 1$$

$$\sigma > 0 \text{ 时, } |z| > 1$$

所以S左半平面 \longleftrightarrow Z平面单位圆内

S右半平面 \longleftrightarrow Z平面单位圆外

模拟滤波器稳定因果 \longleftrightarrow 数字滤波器稳定因果

由此，双线性变换法也满足该两个要求

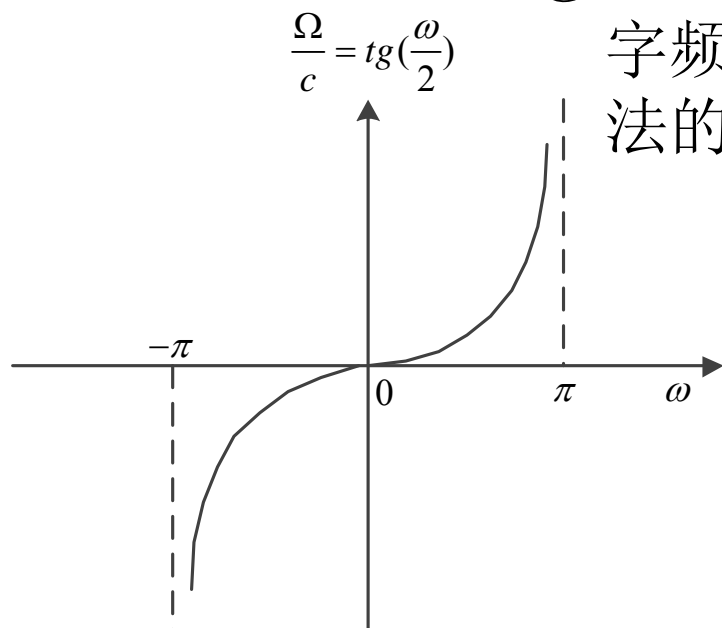
四、优缺点

1. 优点

$S \rightarrow Z$ 是单值映射，从而避免了频率响应的混叠现象

- ① 虚轴正半部分 \rightarrow 单位圆上半部分 $0 \sim \pi$
虚轴负半部分 \rightarrow 单位圆下半部分 $-\pi \sim 0$
- ② 频率轴 **单值映射**

- ③ $\Omega \rightarrow \infty, \omega \rightarrow \pi$ ，所以不会有高于折叠数字频率 π 的分量，从而**避免**了冲激响应不变法的频率响应**混叠**现象

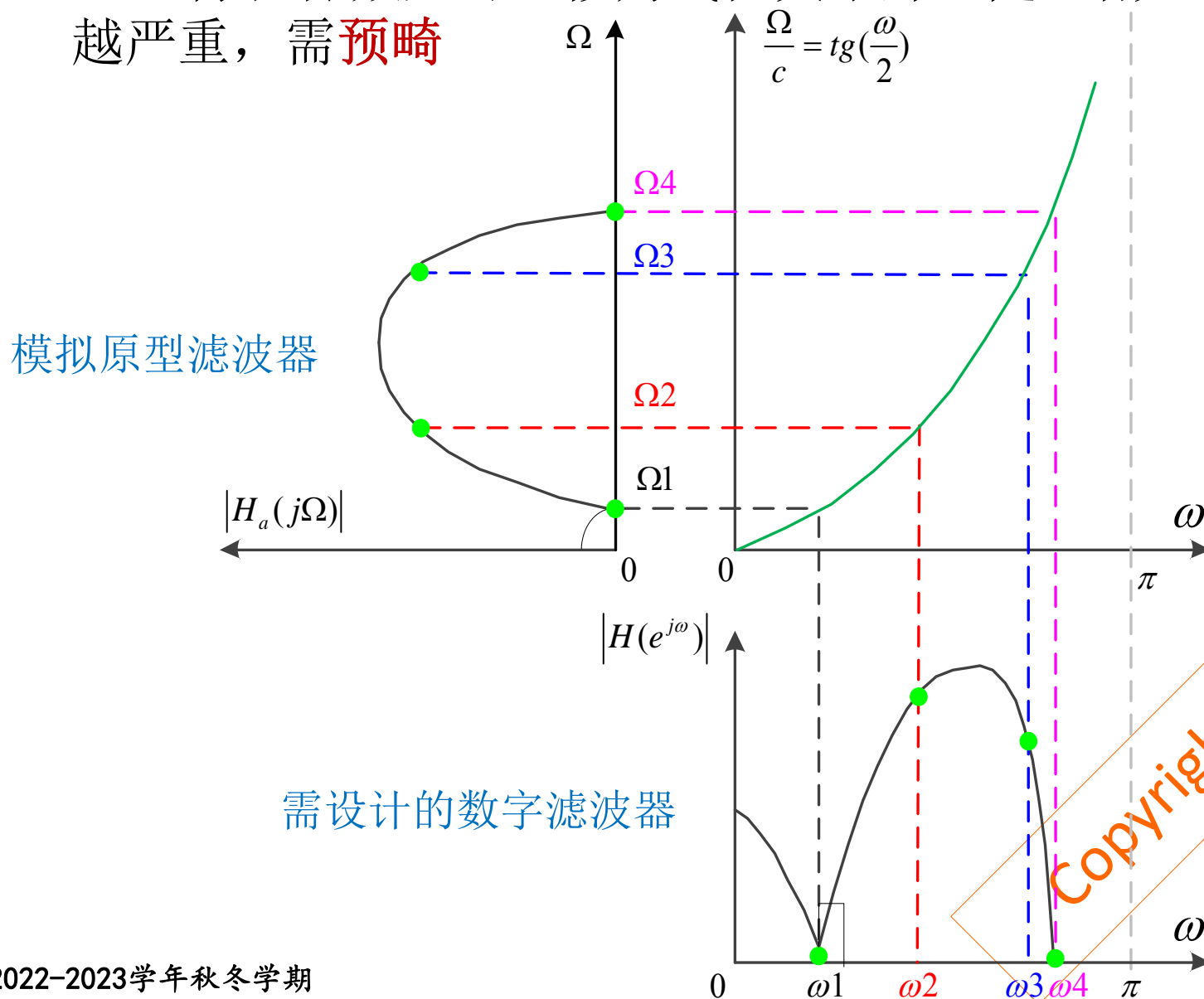


$$\Omega = \frac{2}{T} \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

2. 缺点

$$\Omega = c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$\Omega \rightarrow \omega$ 除在低频处可近似为线性关系外, 随 Ω 增大, 非线性越严重, 需预畸



五、模拟滤波器数字化方法(双线性变换法)

$$H_a(s) \longrightarrow H(z)$$

1. 直接采用双线性变换代数关系

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = H_a\left(c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

2. 分式

(1) 将模拟系统分解成并联(相加)或串联(相乘)的子系统函数

(2) 每个子系统分别采用双线性变换

$$\text{例 } H_a(s) = \prod_{i=1}^m H_{a_i}(s) \longrightarrow H(z) = \prod_{i=1}^m H_i(z)$$

$$H_a(s) = \sum_{i=1}^m H_{a_i}(s) \longrightarrow H(z) = \sum_{i=1}^m H_i(z)$$

$$\text{其中 } H_i(z) = H_{a_i}(s) \Big|_{s=c \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Copyright © ZJU XuYX

六、总结：设计IIR数字低通滤波器的过程

(1) 确定IIR滤波器数字域的指标要求

如果题目给出要求是在模拟域上提出来的，比如：

$$T, f_p, f_s, A_p, A_s$$

则需转化为数字域上的指标要求。

根据抽样定理 $\omega = \Omega T = 2\pi \frac{f}{F_s}$

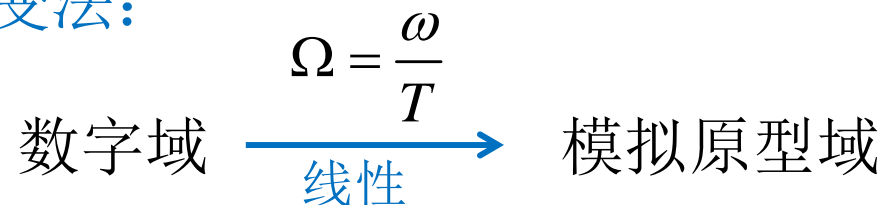
可以得到IIR滤波器数字域上的指标要求：

$$\begin{array}{ll} \omega_p = 2\pi f_p T & A_p \\ \omega_s = 2\pi f_s T & A_s \end{array}$$

Copyright©ZJU XuYx

(2) 模拟原型低通滤波器指标要求 $\Omega_p, \Omega_s, A_p, A_s$

I. 冲激响应不变法:

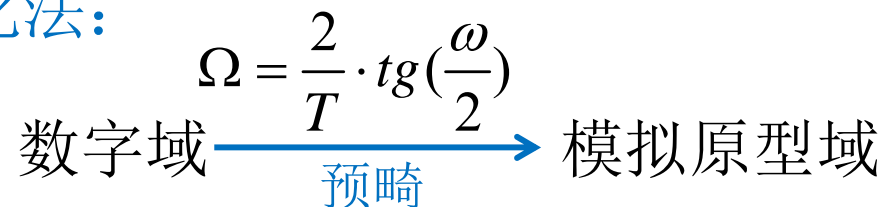


$$\Omega_p = \frac{\omega_p}{T}, \quad A_p$$

$$\Omega_s = \frac{\omega_s}{T}, \quad A_s$$

值与题目给定的 f_p 值相同，但意义不一样
 f_s

II. 双线性变化法:



$$\Omega_p = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}(\frac{\omega_p}{2}), \quad A_p$$

$$\Omega_s = \frac{2}{T} \cdot \text{tg}(\frac{\omega_s}{2}), \quad A_s$$

值与题目给定的 f_p 值不同，且意义也不一样
 f_s

(3) 求巴特沃兹/切比雪夫模拟原型滤波器幅度响应的参数

巴特沃兹: N, Ω_c

切比雪夫: ε, N

(4) 采用巴特沃兹/切比雪夫设计出模拟原型低通滤波器 $H_a(s)$

I. 解析法 $\longrightarrow H_a(s)$

II. 查表法 $\longrightarrow H_{an}(p)$
巴: P159 表4.2
切: P166-171 表4.3-4.5

N, ε

$$H_a(s) = H_{an}(p) \Big|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$$

(5) 模拟原型低通滤波器 $\xrightarrow[\text{双线性变换法}]{\text{冲激响应不变法}}$ 数字低通滤波器 $H(z)$

I. 冲激响应不变法:

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{s - s_k} \longrightarrow H(z) = T \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - e^{s_k T} z^{-1}}$$

II. 双线性变化法:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}}$$

Note:

① 尽管对于冲激响应不变法来说模拟原型低通滤波器的频率值与题目的模拟频率值相同，但过程中第(2)步是必须的；

② 对于双线性变换法设计巴特沃兹/切比雪夫数字滤波器的第(2)步的T可令为任意值，因为后续用到T的第(3)和(5)步骤中其可以被约掉。

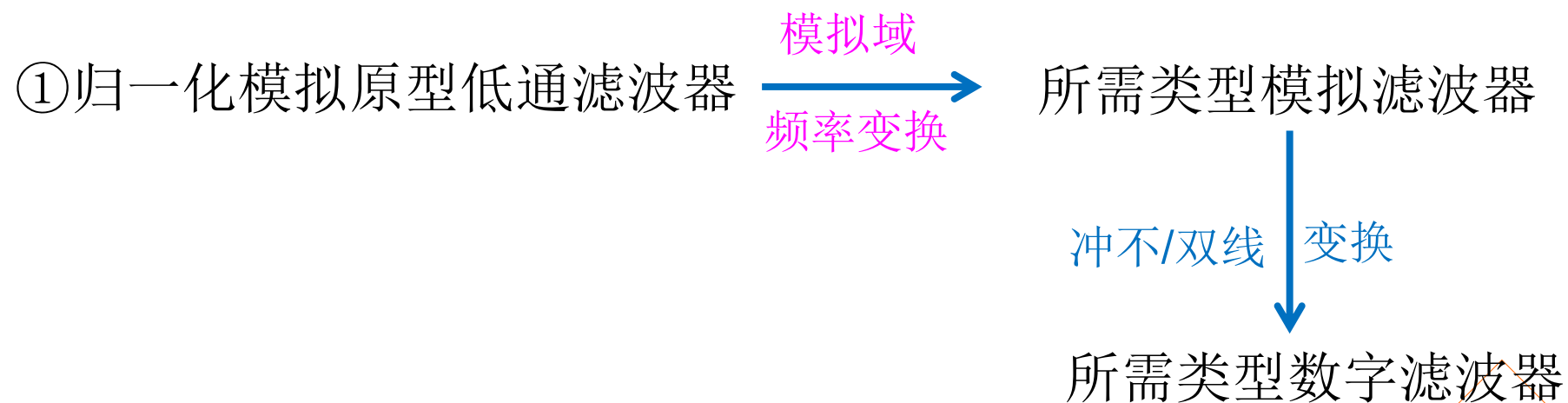
数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.6 高通、带通和带阻 IIR数字滤波器的设计

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

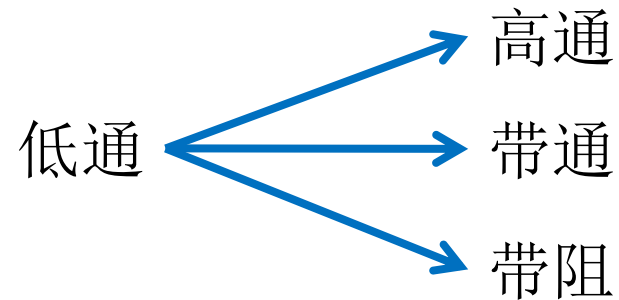
设计方法



Copyright © ZJU XuYX

Ch4.2.4 模拟滤波器的频率变换

1. 模拟域的频带变换



$$H_d(s) = H_{LP}(s') \big|_{s'=q(s)}$$

{ HP
BP
BR

Copyright©ZJU XuYx

$$H_d(s) = H_{LP}(s') \big|_{s'=q(s)}$$

要求:

① $q(s)$ 为有理函数

$\therefore H_{LP}(s')$ 为有理函数 $\longrightarrow H_d(s)$ 也为有理函数

HP
BP
BR

② s' 的 $j\Omega$ 轴 $\longrightarrow s$ 的 $j\Omega$ 轴

s' 左半平面 $\longrightarrow s$ 的左半平面

Copyright © ZJU XuYX

2. 变换公式

p173表4.6:

Ω_p : 所要求滤波器的通带截止频率
 Ω_{p2} 和 Ω_{p1} : 所要求滤波器的通带上下截止频率

Ω_s : 所要求滤波器的阻带起始频率
 Ω_{s2} 和 Ω_{s1} : 所要求滤波器的阻带上下截止频率

Ω_0 : 滤波器的通带中心频率

α : 取决于滤波器类型的归一化参数

B : 滤波器的通带带宽

α : 归一化参数: 取决于滤波器类型

$$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1}$$

$$a = \begin{cases} 1 & \text{巴特沃茨或切比雪夫滤波器} \\ \sqrt{\frac{\Omega_s}{\Omega_p}} & \text{低通椭圆滤波器} \\ \sqrt{\frac{\Omega_p}{\Omega_s}} & \text{高通椭圆滤波器} \\ \sqrt{\frac{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}} & \text{带通椭圆滤波器} \\ \sqrt{\frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}} & \text{带阻椭圆滤波器} \end{cases}$$

$$\Omega_0 = \sqrt{\Omega_{p1} \Omega_{p2}} = \sqrt{\Omega_{s1} \Omega_{s2}}$$

$$\Omega_0 < \frac{\Omega_{p1} + \Omega_{p2}}{2}, \Omega_0 < \frac{\Omega_{s1} + \Omega_{s2}}{2}$$

模拟滤波器的频率变换（修正）

滤波器类型	H _{LPn} (p)的指标要求		H _d (s)=H _{LPn} (p)	
	切, 巴(A _p =3dB)	巴(A _p ≠3dB)修正	切, 巴(A _p =3dB)	巴(A _p ≠3dB)修正
H _{LPn} (p) ↔ H _{LP} (s)	$\lambda_p = 1$ $\lambda_s = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$	$\frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \frac{\Omega_s}{\Omega_p}$	$p = \frac{s}{\Omega_p}$	注1 $p = \frac{s}{\Omega_c}$
H _{LPn} (p) ↔ H _{HP} (s)	$\lambda_p = 1$ $\lambda_s = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$	$\frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}$	$p = \frac{\Omega_p}{s}$	注2 $p = \frac{\Omega_c}{s}$
H _{LPn} (p) ↔ H _{BP} (s)	$\lambda_p = 1$ $\lambda_s = \frac{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}$	$\frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \frac{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}$	$p = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{Bs}$	注3 $p = \frac{s^2 + \Omega_0^2}{\Omega'_c s}$
H _{LPn} (p) ↔ H _{BR} (s)	$\lambda_p = 1$ $\lambda_s = \frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}$	$\frac{\lambda_s}{\lambda_p} = \frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}$	$p = \frac{Bs}{s^2 + \Omega_0^2}$	注4 $p = \frac{\Omega_0^2 s}{\Omega'_c (s^2 + \Omega_0^2)}$

备注:

$$1. \quad \Omega_c = \frac{\Omega_p}{\sqrt[2N]{10^{0.1Ap} - 1}} \quad \text{或} \quad \Omega_c = \frac{\Omega_s}{\sqrt[2N]{10^{0.1As} - 1}}$$

$$2. \quad \Omega_c = \Omega_p \sqrt[2N]{10^{0.1Ap} - 1} \quad \text{或} \quad \Omega_c = \Omega_s \sqrt[2N]{10^{0.1As} - 1}$$

$$3. \quad \Omega'_c = \frac{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}}{\sqrt[2N]{10^{0.1Ap} - 1}} \quad \text{或} \quad \Omega'_c = \frac{\Omega_{s2} - \Omega_{s1}}{\sqrt[2N]{10^{0.1As} - 1}}$$

$$4. \quad \Omega'_c = \frac{\Omega_0^2}{(\Omega_{p2} - \Omega_{p1}) \sqrt[2N]{10^{0.1Ap} - 1}} \quad \text{或} \quad \Omega'_c = \frac{\Omega_0^2}{(\Omega_{s2} - \Omega_{s1}) \sqrt[2N]{10^{0.1As} - 1}}$$

Copyright © JLU Xuyx

3. 当 Ω_0 不满足几何对称

(1) 带通滤波器:

需保持通带特性不变, 以通带中心频率 Ω_0 为基准,
(i.e. 保留通带截止频率) 在满足最小阻带衰减要求的情况下,
改变阻带截止频率中的一个, 使非对称带通滤波器变成几何
对称带通滤波器, 步骤如下:

① 计算通带的几何中心频率 $\Omega_0^2 = \Omega_{p1} \Omega_{p2}$

② 计算 $\bar{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{s2}}$

I. 如果 $\bar{\Omega}_{s1} > \Omega_{s1}$ 用 $\bar{\Omega}_{s1}$ 代替 Ω_{s1}

$\bar{\Omega}_{s1}$ 满足要求, 则 Ω_{s1} 更能满足阻带衰减要求

II. 如果 $\bar{\Omega}_{s1} \leq \Omega_{s1}$, 计算 $\bar{\Omega}_{s2} = \frac{\Omega_0^2}{\bar{\Omega}_{s1}}$ 并用 $\bar{\Omega}_{s2}$ 代替 Ω_{s2}

$\bar{\Omega}_{s2} \leq \Omega_{s2}$ $\bar{\Omega}_{s2}$ 满足要求, 则 Ω_{s2} 更能满足阻带衰减要求

③ 如果 $A_{s1} \neq A_{s2}$ 选择 $A_s = \max\{A_{s1}, A_{s2}\}$

(2) 带阻滤波器

以阻带中心频率 Ω_0 为基准 (i.e. 保留阻带截止频率)，在满足通带衰减要求的情况下，改变通带截止频率中的一个，使非对称带阻滤波器变成几何对称带阻滤波器，步骤如下：

① 计算阻带的几何中心频率 $\Omega_0^2 = \Omega_{s1} \Omega_{s2}$

② 计算 $\bar{\Omega}_{p1} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p2}}$

I. 如果 $\bar{\Omega}_{p1} > \Omega_{p1}$ 则用 $\bar{\Omega}_{p1}$ 代替 Ω_{p1}

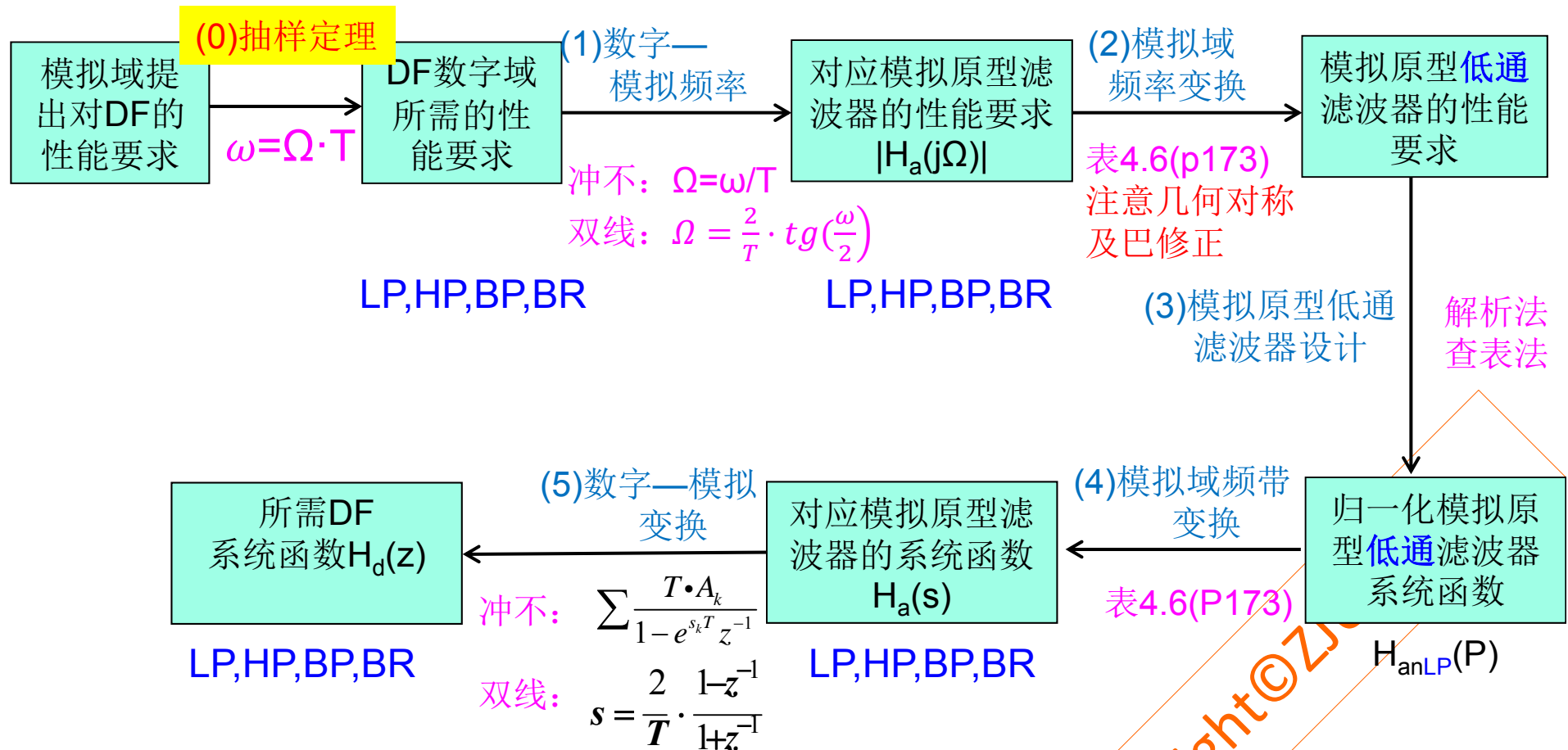
$\bar{\Omega}_{p1}$ 满足要求，则 Ω_{p1} 更能满足通带衰减要求

II. 如果 $\bar{\Omega}_{p1} \leq \Omega_{p1}$ 则计算 $\bar{\Omega}_{p2} = \frac{\Omega_0^2}{\Omega_{p1}}$ 用 $\bar{\Omega}_{p2}$ 代替 Ω_{p2}

$\bar{\Omega}_{p2} \leq \Omega_{p2}$ $\bar{\Omega}_{p2}$ 满足要求，则 Ω_{p2} 更能满足通带衰减要求

③ 如果 $A_{p1} \neq A_{p2}$ ，则选择 $A_p = \min\{A_{p1}, A_{p2}\}$

Ch4.6.3 利用模拟频域变换设计数字IIR滤波器



p197图4.23

步骤: (0)~(5)

【例4.13】

用双线性变换法设计一个数字巴特沃思带通滤波器，给定取样频率为 $f_s = 2000\text{Hz}$ ，通带范围 $300\text{Hz} \sim 400\text{Hz}$ ，通带内衰减不大于 3dB ，在 200Hz 以下和 500Hz 以上的阻带衰减大于 18dB 。

解： (0)数字DF的性能指标： $\omega = \Omega \cdot T = 2\pi f / f_s$

$$f_{p1}=300\text{Hz}, f_{p2}=400\text{Hz}, f_{s1}=200\text{Hz}, f_{s2}=500\text{Hz}$$

$$\omega_{p1} = 2\pi \times \frac{f_{p1}}{f_s} = 2\pi \times \frac{300}{2000} = 0.3\pi$$

$$\omega_{s1} = 2\pi \times \frac{f_{s1}}{f_s} = 2\pi \times \frac{200}{2000} = 0.2\pi \text{ 弧度}$$

$$\omega_{p2} = 2\pi \times \frac{f_{p2}}{f_s} = 2\pi \times \frac{400}{2000} = 0.4\pi$$

$$\omega_{s2} = 2\pi \times \frac{f_{s2}}{f_s} = 2\pi \times \frac{500}{2000} = 0.5\pi \text{ 弧度}$$

(1)模拟原型带通滤波器的性能指标 $\Omega = \frac{2}{T} \tan \frac{\omega}{2}$

$$\Omega_{p1} = 2f_s \tan \frac{\omega_{p1}}{2} = 2038.1$$

$$\Omega_{s1} = 2f_s \tan \frac{\omega_{s1}}{2} = 1299.7 \text{ 弧度/秒}$$

$$\Omega_{p2} = 2f_s \tan \frac{\omega_{p2}}{2} = 2906.2$$

$$\Omega_{s2} = 2f_s \tan \frac{\omega_{s2}}{2} = 4000.0 \text{ 弧度/秒}$$

$$B = \Omega_{p2} - \Omega_{p1} = 868.1 \text{ rad} / s$$

$$\Omega_0^2 = \Omega_{p1} \Omega_{p2} = 5923126.22$$

$$\Omega_{p1} \Omega_{p2} \neq \Omega_{s1} \Omega_{s2}$$

$$\bar{\Omega}_{s1} = \frac{\Omega_{p1} \Omega_{p2}}{\Omega_{s2}} = 1480.8 > \Omega_{s1}$$



用 $\bar{\Omega}_{s1}$ 值代替 Ω_{s1} 值

$$\therefore \text{令 } \Omega_{s1} = \bar{\Omega}_{s1} = 1480.8$$

Copyright©ZJU XuYx

(2)由表4.6 (P173) $\lambda_p = 1$
 归一化模拟原型低通 $\lambda_s = \frac{\Omega_{s2} - \bar{\Omega}_{s1}}{\Omega_{p2} - \Omega_{p1}} = 2.9020$

$$A_p = 3\text{dB}, A_s = 18\text{dB}$$

(3)由式4.8 (P156)

$$N \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1A_s} - 1}{10^{0.1A_p} - 1}\right)}{2\lg\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_p}\right)} = \frac{\lg\left(\frac{10^{0.1 \times 18} - 1}{10^{0.1 \times 3} - 1}\right)}{2\lg(2.9020)} = 1.9376$$

取 $N=2$

查表4.2 (P159)

$$H_{LP}(p) = \frac{1}{p^2 + 1.41421356p + 1}$$

Copyright©ZJU XuYx

(4)模拟带通滤波器的系统函数

$$H_{BP}(s) = H_{LP}(p) \bigg|_{p=\frac{s^2+\Omega_0^2}{Bs}} = \frac{7.5360 \times 10^5 s^2}{s^4 + 1.2277 \times 10^3 s^3 + 1.2600 \times 10^7 s^2 + 7.2717 \times 10^9 s + 3.5083 \times 10^{13}}$$

(5)数字带通滤波器的系统函数

$$H(z) = H_{BP}(s) \bigg|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{0.0213 - 0.0426z^{-2} + 0.0213z^{-4}}{1 - 1.6303z^{-1} + 2.2183z^{-2} - 1.2919z^{-3} + 0.6320z^{-4}}$$

Copyright©ZJU XuYx

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch4.8 IIR数字滤波器的实现结构

徐元欣, xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

一、直接 I 型

IIR滤波器的有理系统函数为：

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$

也可表示为N阶差分方程：

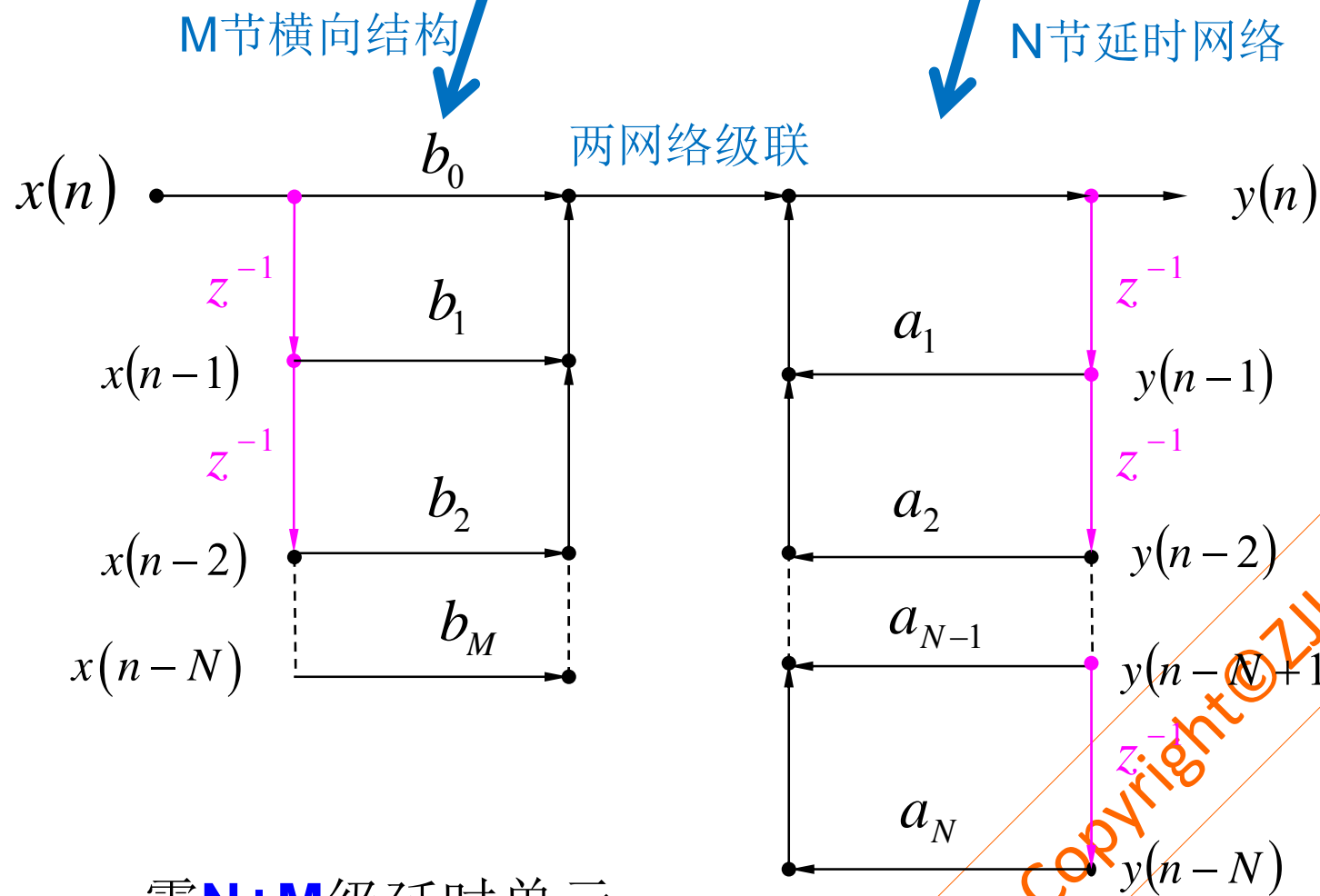
$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

M节横向结构

N节延时网络

两网络级联

$$y(n) = \sum_{m=0}^M b_m x(n-m) + \sum_{k=1}^N a_k y(n-k)$$

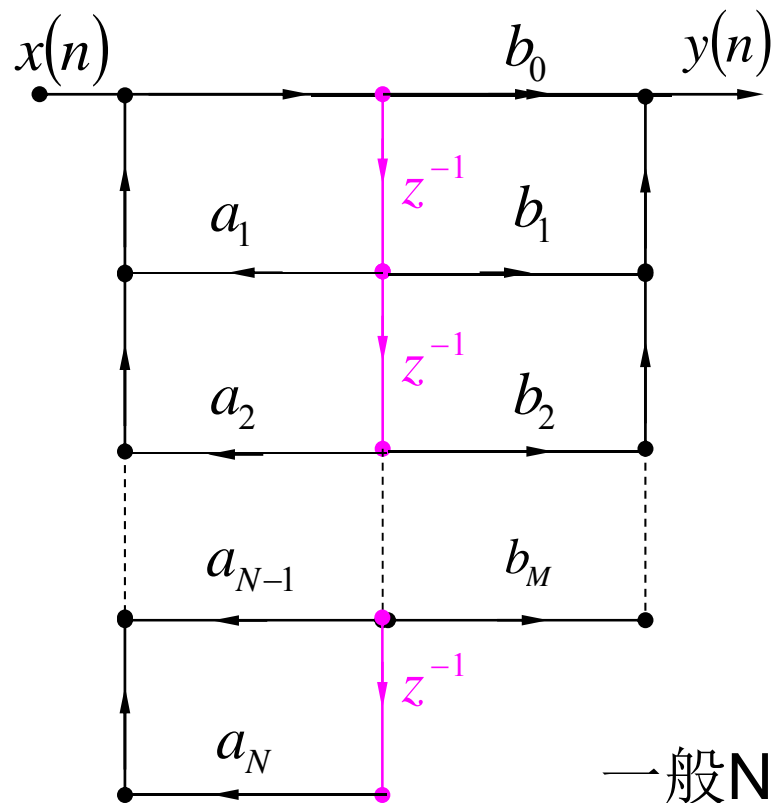


二、直接 II 型

两个LSI级联与次序无关，将直接 I 型的两个级联网络互换次序

Copyright©ZJU XuYX

直接 II 型是实现 N 阶滤波器使用最少延时单元的结构，因此直接 II 型又称为**典范型**。



一般 $N \geq M$ ，直接 II 型只需 N 个延时单元

直接 I, II 型缺点:

①系数 a_k , b_k 对滤波器的性能控制作用不明显

由Ch2.11.3 “频率响应的几何确定法”可知系统的频响 $H(e^{j\omega})$ 由其零极点决定。

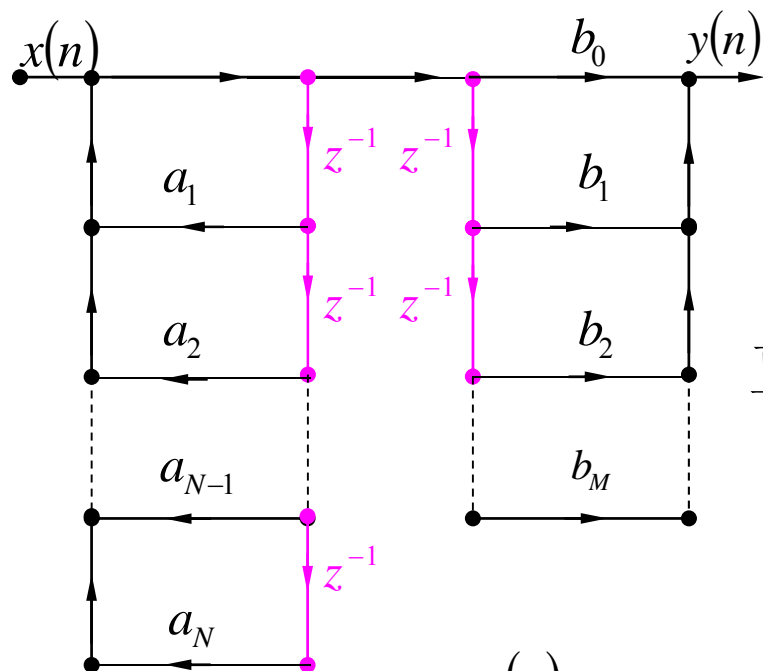
$\therefore a_k$ 、 b_k 与系统函数 $H(z)$ 的零点、极点关系不明显 \therefore 调整困难

②有限精度（有限字长）下， $H(z)$ 极点对系数变化过于灵敏，从而使系统 $H(e^{j\omega})$ 对 a_k , b_k 变化过于灵敏，易出现不稳定或产生大误差。

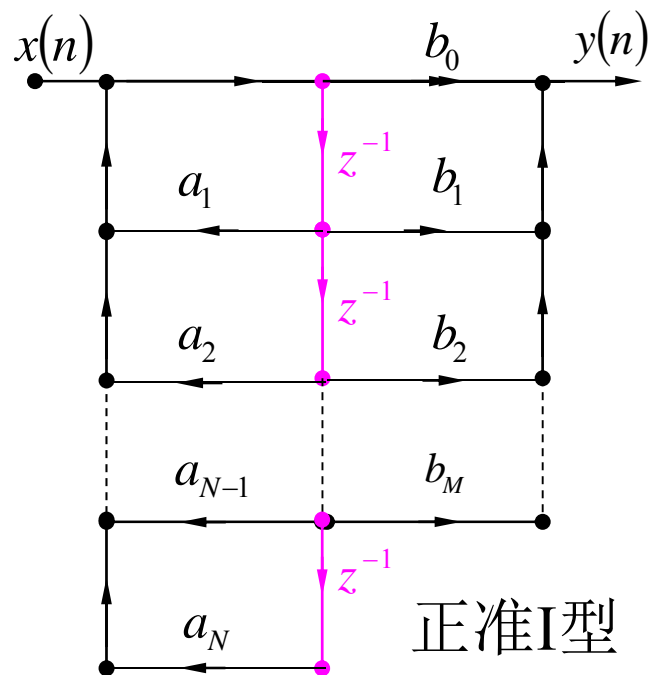
e.g.有限字长使极点挪到单位圆上，则系统不稳定

Copyright©ZJU XuYx

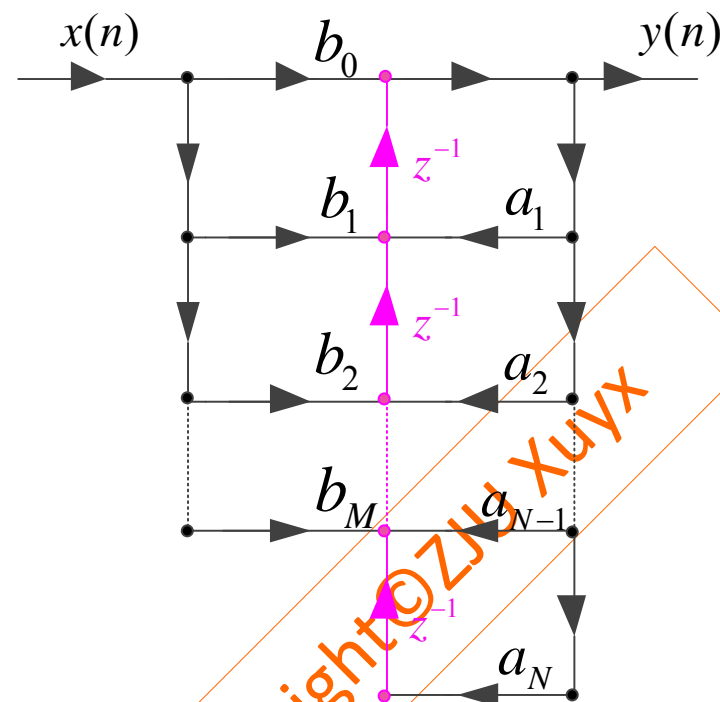
书对结构图的命名



直接II型
p204



正准I型
p205



转置

正准II型
p205

三、级联型

$\because a_k, b_k$ 为实数

一阶因式
 p_k 实零点, c_k 是实极点

二阶因式
 d_k, q_k^* 复共轭零点,
 d_k, d_k^* 复共轭极点

$$H(Z) \text{ 因式分解 } A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 - q_k z^{-1})(1 - q_k^* z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} \quad \begin{cases} M = M_1 + 2M_2 \\ N = N_1 + 2N_2 \end{cases}$$

$$= A \frac{\prod_{k=1}^{M_1} (1 - p_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{M_2} (1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2})}{\prod_{k=1}^{N_1} (1 - c_k z^{-1}) \prod_{k=1}^{N_2} (1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2})}$$

实系数
二阶因子

采用相同形式
的网络结构。
将两个一阶因
子组合成二阶
因子

$$= A \prod_k \frac{1 + \beta_{1k} z^{-1} + \beta_{2k} z^{-2}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

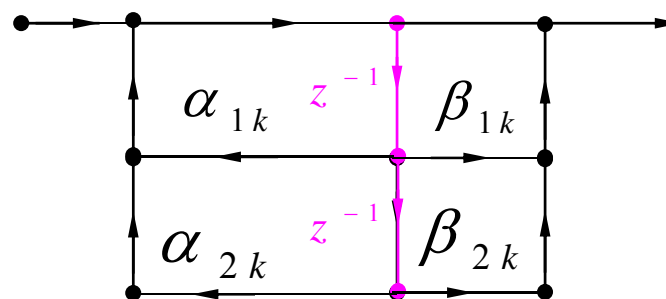
有利于时分复用

$$= A \prod_{k=1} H_k(z)$$

由 $H_k(z)$ 基本节级联而成

当 $M=N$ 时，共有 $[(N+1)/2]$ 个节，其中 $[(N+1)/2]$ 为整数

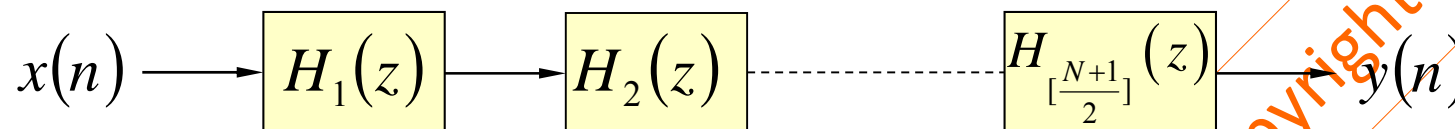
$H_k(z)$ 基本节 (采用典范型):

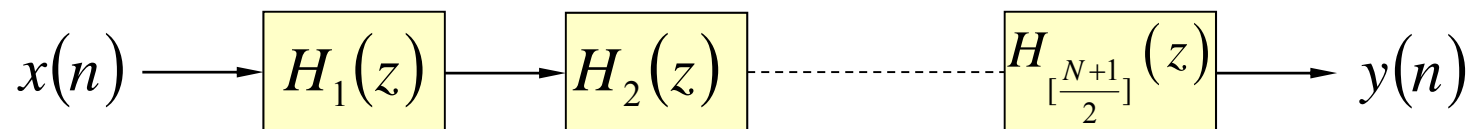


若有奇个实零点，则有一个 $\beta_{2k}=0$

若有奇个实极点，则有一个 $\alpha_{2k}=0$

$H(z)$ 为 $[(N+1)/2]$ 个节级联





级联型的特点:

- ①调整系数 β_{1k} 、 β_{2k} 可以单独调整滤波器第 k 对零点
调整系数 α_{1k} 、 α_{2k} 可以单独调整滤波器第 k 对极点
而不影响其它零点、极点。

∴该结构便于准确实现滤波器零极点，便于调整滤波器
频率响应性能

- ② α_{1k} 、 α_{2k} 与 β_{1k} 、 β_{2k} 的组合对应以及次序排列不同，可产生
不同实现方案，以减少有限字长带来的误差

$[(N+1)/2]!$ 个组合 ← 最优化问题

- ③各级级联之间要有电平的放大缩小（即增益控制），使
中间变量值不会太大（防止溢出）或太小（防止信噪比太小）

- ④时分复用具有最少的存储器

四、并联型

$\because a_k, b_k$ 为实数, $\therefore A_k, B_k, g_k, c_k, G_k$ 实数, d_k, d_k^* 共轭对

$$N_1 + 2N_2 = N$$

$$H(z) \text{ 部分分式展开 } \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{B_k (1 - g_k z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} + \sum_{k=0}^{M-N} G_k z^{-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_1} \frac{A_k}{1 - c_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}} + G_0$$

一般 $N \geq M$

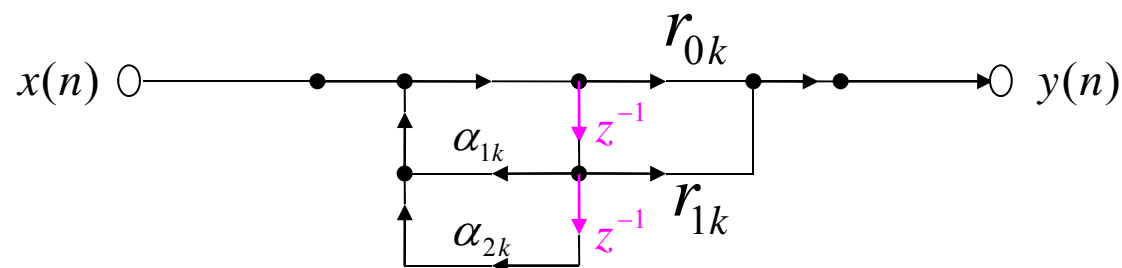
为了结构一致，
将两个一阶实极点
组合成二阶实多项式

$$= G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} \frac{r_{0k} + r_{1k} z^{-1}}{1 - \alpha_{1k} z^{-1} - \alpha_{2k} z^{-2}}$$

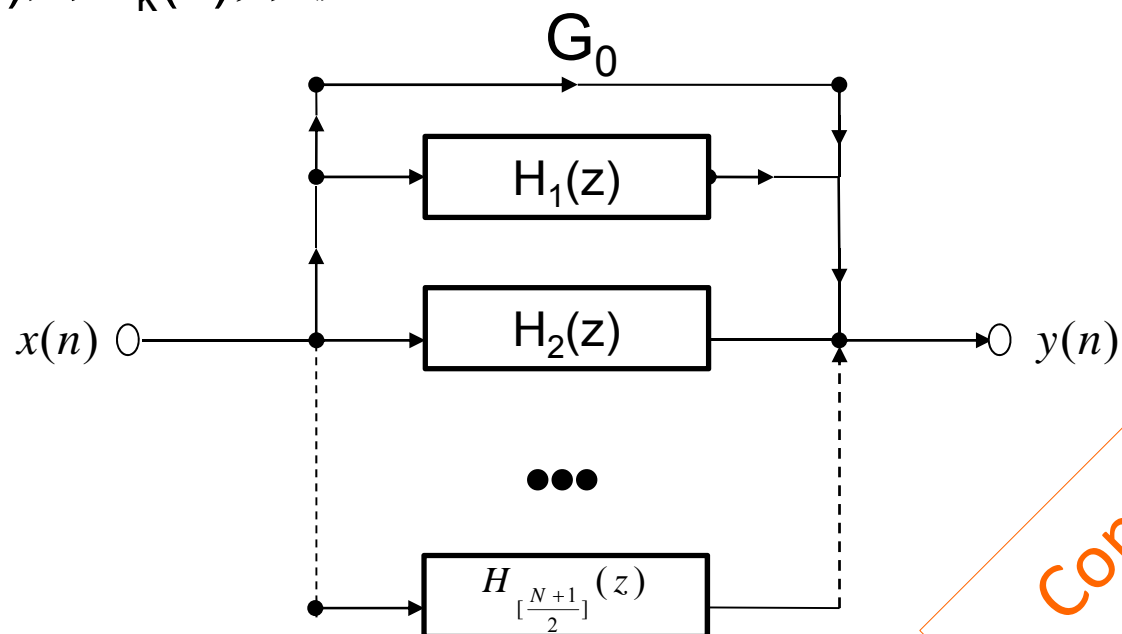
$$= G_0 + \sum_{k=1}^{\left[\frac{N+1}{2}\right]} H_k(z)$$

Note: 当 N 为奇时, 有一个 $\alpha_{2k} = r_{1k} = 0$, 即一阶节

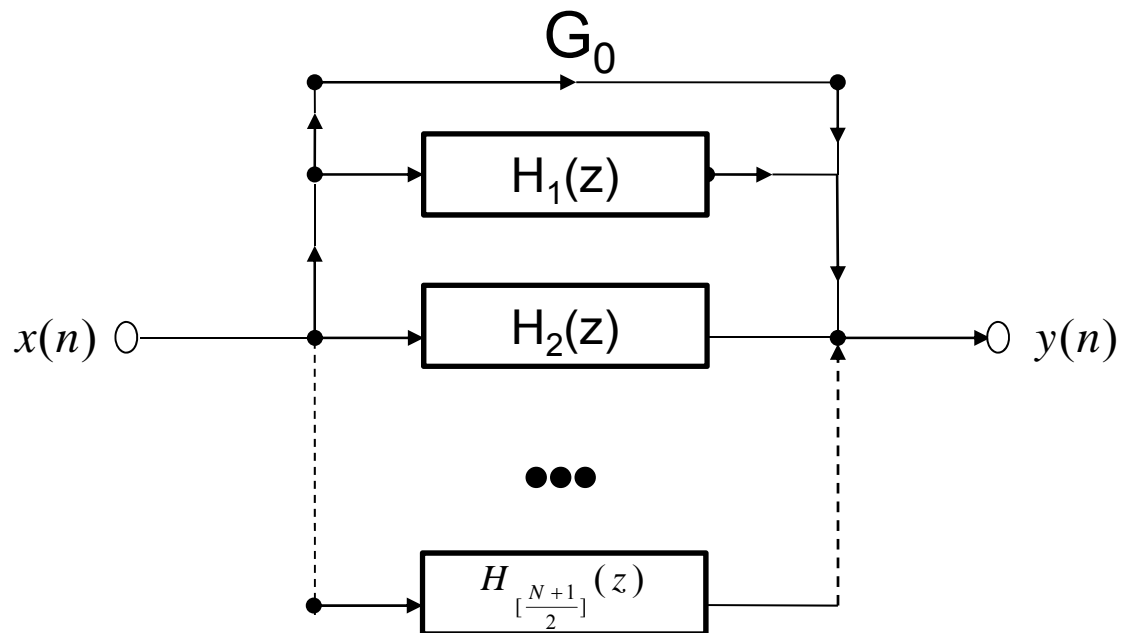
$H_k(z)$ 基本节:
$$H_k(z) = \frac{r_{0k} + r_{1k}z^{-1}}{1 - \alpha_{1k}z^{-1} - \alpha_{2k}z^{-2}}$$



$H(z)$ 为 $H_k(z)$ 并联



Copyright©ZJU XuYx



并联型的特点：

①可调整 a_{1k} 、 a_{2k} ，单独调整一对极点位置。

②不能单独调整零点的位置

∴在要准确地传输零点的场合下，宜采用级联结构

③各并联基本节的误差相互没有影响

∴一般比级联型的误差稍小，各节间无需增益控制