# HOMEWORK 1

## 6.37 （总分6：2+1+1+1+1）

考察要点

- 特征函数$M_X(jv) \triangleq E\left[e^{jvX}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)e^{jvx}\,dx$ （$f_X(x)$的傅里叶变换) **6.3.8**
- $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$积分

1. 求特征函数

$$
\begin{aligned}
E\left\{e^{jvX_i^2}\right\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jvx^2}\frac{e^{-x^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(1/2\sigma^2 - jv)x^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dx \\
&= \left(1 - j2v\sigma^2\right)^{-1/2}
\end{aligned}
$$

   注意第二个等式中，形如$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$是超越积分，求定积分的技巧是先求$(\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx)^2 = A$，则原积分结果为$2\sqrt{A}$。而$(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx)^2 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx \int_0^{\infty} e^{-\alpha y^2}\,dy$，转换成极坐标$\int_0^{\infty} e^{-\alpha r^2}\,rdr\int_0^{\pi/2}\,d\theta$形式即可。

2. 将$\alpha = 2\sigma^2$代入。
3. 目标是求$\mathrm{var}\left[\left(X_i^2\right)^2\right] = E((X_i^2)^2) - E(E(X_i^2)^2)$，后项显然$\sigma^4$，前项利用

$$
E\left[X^n\right] = (-j)^n \frac{\partial^n M_X(jv)}{\partial v^n}\Bigg|_{v=0}
$$

   解得$\mathrm{var}\left[\left(X_i^2\right)^2\right] = 3\sigma^4 - \sigma^4 = 2\sigma^4$，因此$\mathrm{var}\,Y = 2N\sigma^4$。

4. $N$越大，二者pdf越接近。
5. 把2代入，即可

$$
p_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}
$$

## 6.41 （总分4： 1+1+1+1）

考察要点

- Q函数的概念 $Q(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$

$\Phi(\frac{15-10}{5}) - \Phi(\frac{-15-10}{5})$

$\mu = 10, \sigma = 5$

$1-Q(1) = 1-2Q(1)$

1. $P(|X| \leq 15) = Q(-1) - Q(1) = 0.6827$
2. $P(10 < X \leq 20) = Q(0) - Q(2) = 0.4772$
3. $P(5 < X \leq 25) = Q(-1) - Q(3) = 0.84$
4. $P(20 < X \leq 30) = Q(2) - Q(4) = 0.0227$

## 6.48 （总分5：1+1+1+1+1）

考察要点

- 两个独立正态分布随机变量的联合分布。
- 有限相互独立的正态随机变量组合仍然服从正态分布。

1. 随机变量$X, Y$的联合PDF
   $$p_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_Y\sqrt{1-p^2}}\exp\left\{-\frac{\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2}+\frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2}-\frac{2\rho(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}{2\left(1-\rho^2\right)}\right\}$$
   此题中相关系数$\rho = 0$。
2. $E(Z_1) = 3\mu_X + \mu_Y = 14$，$E(Z_2) = 3\mu_X - \mu_Y = 10$
3. $D(Z_1) = D(Z_2) = 9\sigma_X + \sigma_Y = 32$
4. $p_Z(z) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}}\exp\left\{-\frac{(z-14)^2}{64}\right\}$

### 7.3 (总分5：2+3)

考察要点

- 随机过程及其概率密度函数的求解（分布函数求导）
  $F_X\left(x_1; t_1\right) = P\left\{X\left(t_1\right) \leq x_1\right\}, \frac{\partial F_X(x_1;t_1)}{\partial x_1} = f_X\left(x_1, t_1\right)$

1. 时延$\tau$在$-T_0/2, T_0/2$范围内的一系列方波。
2. $F_X\left(x_0; t_0\right) = P\left\{X\left(t_0\right) \leq x_0\right\} = \frac{1}{2}u(x-A) + \frac{1}{2}u(x+A)$
   因此$f_X(x) = \frac{1}{2}\delta(x-A) + \frac{1}{2}\delta(x+A)$

### 7.5 （总分6：2+2+2）

考察要点

- 随机过程时间平均，集合平均，及自相关函数计算。**7.24**
- 广义平稳随机过程定义。

1. 因为样本函数是周期函数，很容易看出其时间平均是0。其自相关函数
   $R(\lambda) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}x(t)x(t+\lambda)dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}x(t)x(t+\lambda)dt$
   $R(\lambda) = A^2\left(1-4\lambda/T_0\right), \quad 0 \leq \lambda \leq T_0/2$
2. 第二问要求计算集合平均和自相关函数，因为是均匀分布，集合平均$E[X(t)] = 0$。
   $R_X(\lambda) = E[X(t)X(t+\lambda)] = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t,\tau)x(t+\lambda,\tau)d\tau$
   $= \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t-\tau)x(t-\tau+\lambda,\tau)d(t-\tau)$
3. 如果一个随机过程的均值、方差为常数，自相关函数只和时间差有关，则该随机过程为广义平稳。

### 7.11 （总分7：2+3+2）

考察要点

- 脉冲相关函数。对形如$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k p(t-kT-\Delta)$的随机过程，有
  $R_X(\tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}R_m r(\tau-mT)$，其中$r(\tau) \triangleq \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty}p(t+\tau)p(t)dt$。

1. 考虑形如$a_k = g_0 A_k + g_1 A_{k-1}$的随机过程，首先计算$r(\tau)$

$$\begin{aligned} r(\tau) &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} p(t)p(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2-\tau} \cos(\pi t/T)\cos\left[\frac{\pi(t+\tau)}{T}\right]dt, \quad 0 \le \tau \le T \\ &= \frac{1}{2}(1-\tau/T)\cos\left(\frac{\pi\tau}{T}\right), \quad 0 \le \tau \le T \end{aligned}$$

简写为$r(\tau) = \frac{1}{2}\Lambda(\tau/T)\cos\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$，因此$R_a(\tau) = \frac{A^2}{2}\Lambda(\tau/T)\cos\left(\frac{\pi\tau}{T}\right)$

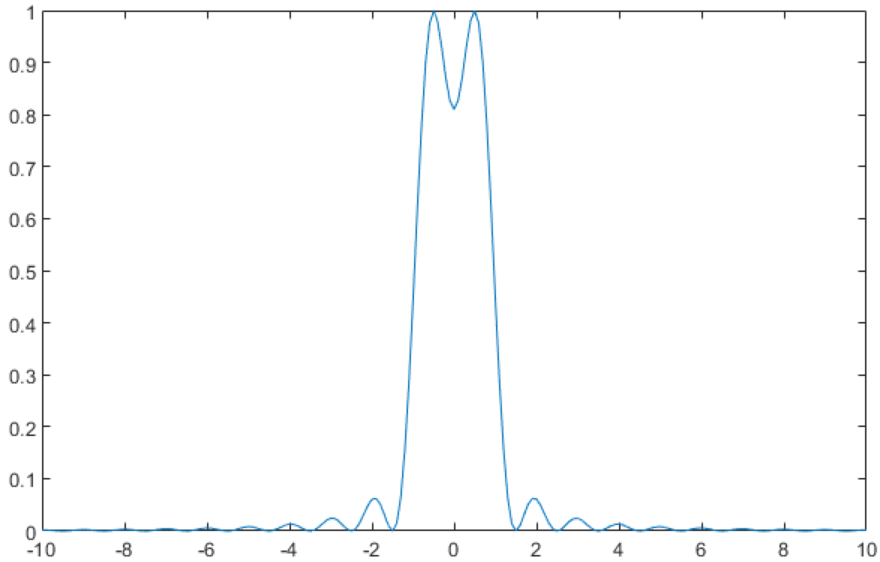
功率谱密度PDF为$S_a(f) = \frac{A^2T}{4}\left\{\mathrm{sinc}^2\left[T\left(f-\frac{1}{2T}\right)\right] + \mathrm{sinc}^2\left[T\left(f+\frac{1}{2T}\right)\right]\right\}$

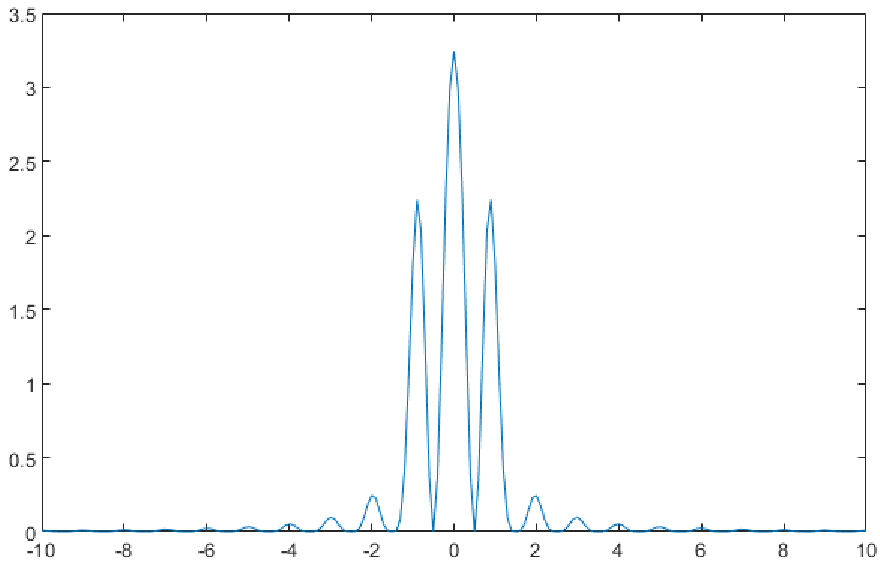
2. 立即得到$g_0 = g_1 = 1$，且$E\left[a_k a_{k+m}\right] = \begin{cases} \left(g_0^2+g_1^2\right)A^2, & m=0 \\ g_0 g_1 A^2, & m=\pm 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

因此$R_b(\tau) = A^2\left[2r(\tau) + r(\tau+T) + r(\tau-T)\right]$

$S_b(f) = A^2T\left[\mathrm{sinc}^2(Tf-0.5) + \mathrm{sinc}^2(Tf+0.5)\right]\cos^2(\pi fT)$

3.




## 7.13 （总分6：2+1+3）

1. 根据定义，直接代入

$$
\begin{aligned}
R_Z(\tau) &= E[Z(t)Z(t+\tau)] \\
&= E[X(t)X(t+\tau)Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= E[X(t)X(t+\tau)]E[Y(t)Y(t+\tau)] \\
&= R_X(\tau)R_Y(\tau)
\end{aligned}
$$

$S_X(f) = 10\Pi(f/200)$

$\because 2W = 200$

2. 时域相乘，频域卷积，即$S_Z(f) = S_X(f) * S_Y(f)$
3. 首先根据sinc函数与窗函数的傅里叶变换关系$2W\operatorname{sinc}(2W\tau) \longleftrightarrow \Pi(f/2W)$，求得

   $R_X(\tau) = 1000\operatorname{sinc}(200\tau)$。 2

   $2000 \sin(200\tau)$

   $R_Y(\tau) = E\{25\cos(50\pi t+\theta)\cos[50\pi(t+\tau)+\theta]\} = 25\cos(50\pi\tau)/2$

   $R_Z(\tau) = 12500\operatorname{sinc}(200\tau)\cos(50\pi\tau)$   $25000 \sin(200\tau)\cos(50\pi\tau)$

   $S_Z(f) = 125\left[\prod\left(\frac{f-25}{200}\right) + \prod\left(\frac{f+25}{200}\right)\right]/4$

   $125\left[\Pi\left(\frac{f-25}{200}\right) + \Pi\left(\frac{f+25}{200}\right)\right]$

## 7.27 （总分4）

考察要点

- 噪声等效带宽的概念，$P_{n_0} = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}N_0|H(f)|^2 df = N_0\int_0^{\infty}|H(f)|^2 df = N_0 B_N H_0^2$

$B_N = \frac{1}{H_0^2}\int_0^{\infty}|H(f)|^2 df = \frac{1}{4}\int_{400}^{600}\left[2\Lambda\left(\frac{f-500}{100}\right)\right]^2 df = 66.67\mathrm{Hz}$

## 7.31 （总分9：2+2+2+3）

考察要点

- 带通随机过程$X(t)$与其同相分量$X_c(t)$和正交分量$X_s(t)$的关系。(功率谱密度和交叉功率谱密度)

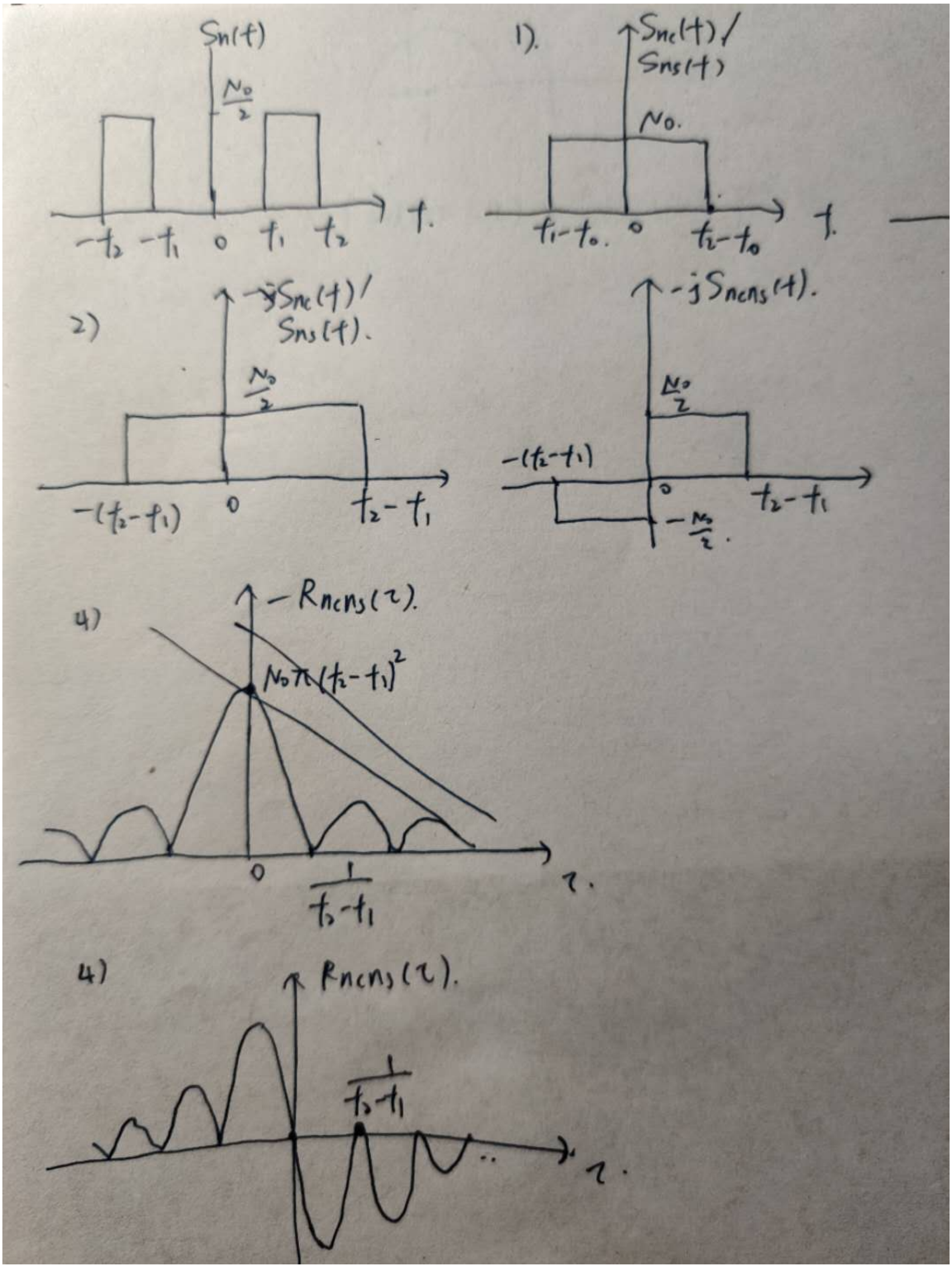
  $S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \mathrm{Lp}[S_n(f-f_0) + S_n(f+f_0)]$

  $S_{n_cn_s}(f) = j\mathrm{Lp}\left[S_n(f-f_0) - S_n(f+f_0)\right]$

1. $S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = N_0\Pi\left(\frac{f}{f_2-f_1}\right)$，$S_{n_cn_s}(f) = 0$。
2. $S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \frac{N_0}{2}\Pi\left(\frac{f}{2(f_2-f_1)}\right)$

   当$f_0 = f_1$时，$S_{n_cn_s}(f) = \begin{cases} j\dfrac{N_0}{2}, -(f_2-f_1) \le f \le 0 \\ -j\dfrac{N_0}{2}, 0 \le f \le (f_2-f_1) \end{cases}$

   当$f_0 = f_2$时，$S_{n_cn_s}(f) = \begin{cases} -j\dfrac{N_0}{2}, -(f_2-f_1) \le f \le 0 \\ j\dfrac{N_0}{2}, 0 \le f \le (f_2-f_1) \end{cases}$
3. $S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) =$相同，$S_{n_cn_s}(f)$取负。
4. $$
\begin{aligned}
R_{n_cn_s(\tau)} &= j\left[\int_{-(f_2-f_1)}^{0} -\frac{N_0}{2}e^{j2\pi f\tau}df + \int_0^{f_2-f_1}\frac{N_0}{2}e^{j2\pi f\tau}df\right] \\
&= -[N_0\pi(f_2-f_1)^2\tau]\operatorname{sinc}^2[(f_2-f_1)\tau]
\end{aligned}
$$




## 7.33 (总分8：4+4)

考察要点

- 窄带随机过程$X(t)$在频域上的变换
- 互相关函数$R_{n_c n_s}(\tau)$的概念

POWER SPECTRAL DENSITIES

$$S_{n_c}(f) = S_{n_s}(f) = \mathrm{Lp}\left[S_n(f - f_0) + S_n(f + f_0)\right]$$

CROSS-POWER SPECTRAL DENSITY

$$S_{n_c n_s}(f) = j\mathrm{Lp}\left[S_n(f - f_0) - S_n(f + f_0)\right]$$

7.33. (a).

首先，对 $n(t)$ 信号，设其低通等效为 $n_l(t)$.

$n(t) = Re(n_l(t) e^{jw_0 t}) = Re(n_l'(t) e^{j(w_0+w_d)t})$.

其中 $n_l(t) = n_c(t) + j n_s(t)$. $n_l'(t) = n_c'(t) + j n_s'(t)$.

因此、$n_l'(t) = n_l(t)\cdot e^{-jw_d t}$，展开，令实部虚部分别相等.

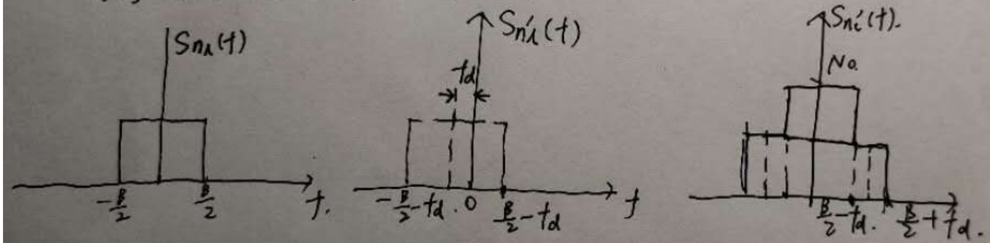
$n_c'(t) = n_c(t)\cos w_d t + n_s(t)\sin w_d t$

$n_s'(t) = n_s(t)\cos w_d t - n_c(t)\sin w_d t$

若求 $S_{n_c'}(f)$ 与 $S_{n_s'}(f)$，先求其自相关函数，即.

$R_{n_c'}(\tau) \triangleq E[n_c'(t)\, n_c'(t+\tau)] = R_c(\tau)\cos w_d t\cdot\cos w_d(t+\tau) + R_s(\tau)\sin w_d t\cdot\sin w_d(t+\tau)$,

由于 $R_c(\tau)=R_s(\tau)$，因此. $R_{n_c'}(\tau) = R_{n_s'}(\tau) = R_c(\tau)\cos(w_d\tau)$




$S_{n_c'}(f) = S_{n_s'}(f) = \frac{1}{2} S_{n_c}(f+f_d) + \frac{1}{2} S_{n_c}(f-f_d) = \begin{cases} N_0 & |f|<\frac{B}{2}-f_d \\ N_0/2 & \frac{B}{2}-f_d<|f|<\frac{B}{2}+f_d \\ 0 & \text{other} \end{cases}$

(b).

因为 $n(t) = n_c'(t)\cos(w_0+w_d)t - n_s'(t)\sin(w_0+w_d)t$

利用性质. $S_{n_c' n_s'}(f) = j\,LP[S_n(f-f_0-f_d) - S_n(f+f_0+f_d)]$

$= \begin{cases} +j\frac{N_0}{2} & -f_d+\frac{B}{2} \le f \le f_d+\frac{B}{2}. \\ -j\frac{N_0}{2} & -(\frac{B}{2}+f_d) \le f \le -(\frac{B}{2}-f_d) \\ 0, & \text{other.} \end{cases}$

not uncorrelated

$R_{n_c' n_s'}(\tau) = F(S_{n_c' n_s'}(f)) = -R_s(\tau)\sin w_d\tau$.

$R_{n_c' n_s'}(0) = 0$. (independent).