数字信号处理

Digital Signal Processing

第3章
离散傅里叶变换及其快速计算方法

徐元欣，xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

DTFT： **D**iscrete-**t**ime **F**ourier **T**ransform

离散时间 傅里叶变换

i.e. 离散时间信号的傅里叶变换

DFT： **D**iscrete **F**ourier **T**ransform

离散 傅里叶变换

i.e. 傅里叶变换是离散的

DFT $\xrightarrow{\text{快速运算}}$ FFT

时域、频域均离散

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch3.1 引言

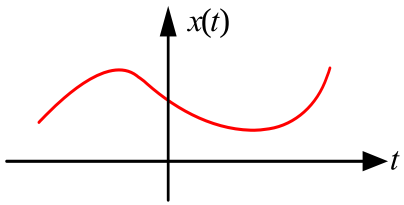
徐元欣，xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

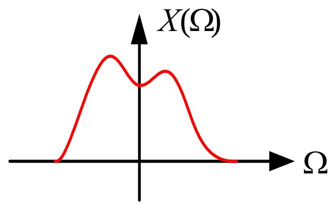
1. 连续时间、连续频率——CTFT

连续时间非周期信号 $x(t) \xrightarrow{F} X(j\Omega)$

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$





时域 $x(t)$：连续 ⟷ 非周期；非周期 ⟷ 连续

F

频域 $X(j\Omega)$

2. 连续时间、离散频率——傅里叶级数(FS)

周期为T_0的周期性连续时间函数$x(t)$

傅里叶级数的系数：$$X(jk\Omega_0)=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jk\Omega_0 t}dt$$

无穷多个谐波分量

傅里叶级数展开：$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(jk\Omega_0)e^{jk\Omega_0 t}$$

其中 $\Omega_0=2\pi F_0=\dfrac{2\pi}{T_0}$

时域

连续 ⟷ 非周期

DFS

周期 ⟷ 离散

傅里叶级数频谱域

3. 离散时间、连续频率——序列的傅里叶变换DTFT

离散时间非周期信号：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$$

时域 x(n)：离散 ⟷ 周期，非周期 ⟷ 连续：频域 $X\left(e^{j\omega}\right)$

DTFT

4. 离散时间、离散频率——离散傅里叶级数(DFS)

离散时间非周期信号（即周期序列）：

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

N个谐波分量

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$$

N为为周期序列一个周期的点数

时域 离散 ⟷ 周期 频域

DFS

时域 周期 ⟷ 离散 频域

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch3.2 离散傅里叶级数(DFS) 及其性质

徐元欣，xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

一、周期序列的离散傅里叶级数(DFS)

$\tilde{x}(n)$ 为周期序列，周期N

$\tilde{x}(n)=\tilde{x}(n+rN)$，r为任意整数

∵周期序列不是绝对可和，任意z下其Z变换不收敛

∴X(z)不存在

其存在DFS对，p76有推导过程

DFS变换对

$$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

$$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

其中 $W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

时域周期序列的DFS系数（频域）也是一个周期序列，周期为N

Note:
连续时间周期信号的谐波无数个，离散时间周期信号的谐波只有N个

令

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n) & 0\le n\le N-1\\ 0 & 其他n\end{cases}$$

取周期序列的主周期

Z变换

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

对X(z)在单位圆上抽样：

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}=W_N^{-k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}=\tilde{X}(k)$$

周期序列 $\tilde{X}(k)$ 可以看成是 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期x(n)作z变换，然后将z变换在z平面单位圆上按等间隔角2π/N抽样而得到。

二、离散傅里叶级数(DFS)的性质

$\because$ z变换 $\xrightarrow{\text{抽样}}$ DFS

$\therefore$ DFS的许多性质与z变换性质相似

又$\because$ $\tilde{x}(n), \tilde{X}(k)$ 都具有周期性，对偶性

$\therefore$ DFS与z变换性质又有区别

实际上只需一个周期内的有限个序列值即可

令 $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ 为周期为N的周期序列

$$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)] \qquad \tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

1、线性

$$DFS[a\,\tilde{x}_1(n) + b\,\tilde{x}_2(n)] = a\,\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

2、序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-mk}\,\tilde{X}(k) = e^{j\frac{2\pi}{N}mk}\,\tilde{X}(k)$$

$$DFS[\tilde{x}(n-m)] = W_N^{mk}\,\tilde{X}(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}\,\tilde{X}(k)$$

Note：时域延迟，频域有线性相移

3、调制性质

$$DFS[W_N^{\ln}\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l)$$

4、周期卷积和

若 $\tilde{Y}(k)=\tilde{X}_1(k)\cdot\tilde{X}_2(k)$

则

$$\tilde{y}(n)=IDFS[\tilde{Y}(k)]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1(m)\tilde{x}_2(n-m)$$
$$=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_2(m)\tilde{x}_1(n-m)$$

周期卷积：

(1)周期卷积和的每项为周期 ∴乘积和也是N的周期序列

(2)求积只在一个周期上进行

同理 $\tilde{y}(n)=\tilde{x}_1(n)\cdot\tilde{x}_2(n)$

$$\tilde{Y}(k)=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)\tilde{X}_2(k-l)$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{X}_2(l)\tilde{X}_1(k-l)$$

也是周期卷积

5、对偶性

$$\because \tilde{x}(n) \xrightarrow{DFS} \tilde{X}(k)$$

$$有 \tilde{X}(n) \xrightarrow{DFS} N\tilde{x}(-k)$$

6、共轭对称性

由任一周期性序列 $\tilde{x}(n)$ ，定义如下两个序列：

– 共轭偶对称周期性序列 $\tilde{x}_e(n)$

$$\tilde{x}_e(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)+\tilde{x}^*(-n)\right]$$

– 共轭奇对称周期性序列 $\tilde{x}_0(n)$

$$\tilde{x}_0(n)=\frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n)-\tilde{x}^*(-n)\right]$$

– 显然，$\tilde{x}(n)$、$\tilde{x}_e(n)$和$\tilde{x}_o(n)$具有相同的周期，$\tilde{x}(n)$则可表示为$\tilde{x}_e(n)$与$\tilde{x}_o(n)$之和

$$\tilde{x}(n)=\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)$$

且具有如下关系：

$$\tilde{x}_e(-n)=\tilde{x}_e^*(n)$$

$$\tilde{x}_o(-n)=-\tilde{x}_o^*(n)$$

$$\text{(1)}\quad \tilde{x}^*(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(-k)$$

$$\text{(2)}\quad \tilde{x}^*(-n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(k)$$

$$\text{(3)}\quad \mathrm{Re}[\tilde{x}(n)] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_e(k)$$

$$\text{(4)}\quad j\,\mathrm{Im}[\tilde{x}(n)] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_o(k)$$

$$\text{(5)}\quad \tilde{x}_e(n) \xleftrightarrow{DFS} \mathrm{Re}[\tilde{X}(k)]$$

$$\text{(6)}\quad \tilde{x}_o(n) \xleftrightarrow{DFS} j\,\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)]$$

p79 式（3.15 a~j）

（1）： $x^*(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$

（2）： $x^*(-n) \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{j\omega})$

（3）： $\mathrm{Re}[x(n)] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_e(e^{j\omega})$

（4）： $j\mathrm{Im}[x(n)] \xrightarrow{\text{DTFT}} X_o(e^{j\omega})$

（5）： $x_e(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$

（6）： $x_o(n) \xrightarrow{\text{DTFT}} j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

Ch2.5中DTFT的对称性质，p36

如果$\tilde{x}(n)$为实序列，则有：

$$\text{(7)}\quad \tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$$

$$\text{(8)}\quad \mathrm{Re}[\tilde{X}(k)] = \mathrm{Re}[\tilde{X}(-k)]$$

$$\text{(9)}\quad \mathrm{Im}[\tilde{X}(k)] = -\mathrm{Im}[\tilde{X}(-k)]$$

$$\text{(10)}\quad \arg[\tilde{X}(k)] = -\arg[\tilde{X}(-k)]$$

$$\text{(11)}\quad abs[\tilde{X}(k)] = abs[\tilde{X}(-k)]$$

数字信号处理

Digital Signal Processing

Ch3.3 离散傅里叶变换(DFT)及其性质

徐元欣，xuyx@zju.edu.cn
浙江大学信息与电子工程学院

一、离散傅里叶变换(DFT)的定义

设x(n)为长度为N的有限长序列，则可看做周期为N的周期序列的一个周期：

$$x(n)=\begin{cases}\tilde{x}(n),0\le n\le N-1\\ 0, \qquad other\end{cases}$$

$\tilde{x}(n)$ 则可看做x(n) 以N的周期延拓

$$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x(n+rN)$$

两者之间的关系

$\therefore$ 由 DFS $\xrightarrow{\text{可推导出}}$ DFT

主值区间：$\tilde{x}(n)$ 的第一个周期n=0~N-1区间

主值序列：$x(n)$是$\tilde{x}(n)$ 的主值序列
i.e.主值序列浓缩原周期序列的全部内容

更进一步，有限长序列与周期序列的数学关系为：

$$
\begin{cases}
\tilde{x}(n) = x(n\text{模}N) = x((n)_N) \\
x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)
\end{cases}
$$

周期延拓

用((n)$_N$)表示n模N，即n对N取余数

书上是用((n))$_N$来标记

取主值区间

$$
R_N(\mathrm{n}) = \begin{cases} 1, 0 \le n \le N-1 \\ 0, \quad other \end{cases}
$$

同理， $\tilde{x}(n)$的DFS $\tilde{X}(k)$也是周期N的周期序列，频域上也有：

$$
\begin{cases}
X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) \\
\tilde{X}(k) = X((k)_N)
\end{cases}
$$

由此，定义有限长序列的离散傅里叶变换**DFT**（由DFS容易得到）：

$$
\begin{cases}
X(k)=\tilde{X}(k)R_N(k)=\left[\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}\right]R_N(k)\\[2ex]
x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)=\left[\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}\right]R_N(n)
\end{cases}
$$

x(n),X(k)
代替
$\tilde{x}(n)$, $\tilde{X}(k)$

DFT变换对（标准形式）：

$$
\begin{cases}
X(k)=DFT[x(n)]=\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\\[2ex]
x(n)=IDFT[X(k)]=\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}=\dfrac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}nk}\\[2ex]
\qquad\qquad 0\le n,k\le N-1
\end{cases}
$$

二、DFT与Z变换、DTFT的关系

1、频域抽样

由Ch3.2节可知：

$\tilde{x}(n)$的DFS的系数$\tilde{X}(k)$的值是$x(n)=\tilde{x}(n)R_N(n)$ 即$\tilde{x}(n)$的主值序列x(n)

的Z变换在单位圆上N的均分点($z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}$) 上的抽样值。

同样，对于有限长序列x(n)：

$0\le n\le N\text{-}1$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$$

对X(z)在单位圆上抽样：

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\frac{2\pi}{N}k}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}=X(k)$$

$0\le k\le N\text{-}1$

i.e. 有限长序列x(n)的DFT同样也是其Z变换在单位圆上以$e^{j\frac{2\pi}{N}k}$ (或对其频谱以$\frac{2\pi}{N}k$)进行的N点等间隔抽样，这就是**频域的抽样**

2、时域上

设某 $x'(n)$ 为绝对可和、非周期序列，其Z变换为：

$$X'(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x'(n)z^{-n}$$

∵绝对可和 ∴x’(n)的傅里叶变换存在且连续

i.e. Z变换ROC包括单位圆

对X’(z)在单位圆上（或者DTFT）进行N点均匀抽样：

$$X'(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x'(n)W_N^{kn}$$

令某周期序列$\tilde{x}_N(n)$的DFS为抽样值：

$$\tilde{X}_N(k) = X'(z)\Big|_{z=W_N^{-k}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x'(n) W_N^{kn}$$

$$\tilde{x}_N(n) = IDFS\left[\tilde{X}_N(k)\right] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x'(n+rN)$$

频域抽样序列$\tilde{X}_N(k)$的$IDFS$得到的$\tilde{x}_N(n)$是原来非周期序列$x'(n)$基于周期为$\boldsymbol{N}$点的周期延拓

$$X_N(k)=\tilde{X}_N(k)R_N(k)=X'(z)\Big|_{z=W_N^{-k}}R_N(k)$$

频域抽样

N点

$$X'(z)=Z[x'(n)]$$

N点IDFT

Z变换

$$x_N(n)=\tilde{x}_N(n)R_N(n)=[\sum_{r=-\infty}^{\infty}x'(n+rN)]R_N(n) \overset{?}{=} x'(n)$$

讨论：

① $x'(n)$不是有限长序列：

时域的周期延拓必造成混音现象，产生误差

n↑，若信号衰减的越↑（i.e. 尾巴↓ ）⟶ 误差↓

频域抽样点数N↑（i.e.越密） ⟶ 误差↓

② $x'(n)$有限长序列，点数M

若N<M，$x'(n)$以N为周期延拓，也会有混叠，不能无失真恢复原信号$x'(n)$

若N≥M，可以无失真恢复原信号$x'(n)$：$x'(n)=\tilde{x}_N(n)\,R_N(n)$

结论：

对于**N**点的有限长序列的**DFT**满足无失真条件，因此：

1. 可以利用它的z变换在单位圆 (即其DTFT)上**N**点均匀的频域抽样(即其DFT)值来精确表征该序列。
2. 其**DFT**就是其**DTFT**按**2π k/N**进行的**N**点等间隔抽样。

3、由X(k)恢复X(z)　　N点有限长序列x(n)

$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}\right]z^{-n}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\left[\sum_{n=0}^{N-1}(W_N^{-k}z^{-1})^n\right]$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-W_N^{-Nk}z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$W_N^{-Nk}=1$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(z)$$

内插公式

$$\Phi_k(z)=\frac{1}{N}\frac{1-z^{-N}}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

插值函数

4、由X(k)恢复X($e^{j\omega}$)

对上式令$z=e^{j\omega}$，有：

$$X(e^{j\omega})=\sum_{k=0}^{N-1}X(k)\Phi_k(e^{j\omega})$$

其中

$$\Phi_k(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j\omega N}}{N\left(1-e^{-j(\omega-2\pi k/N)}\right)}$$

Note：一般，$X(e^{j\omega})$,$X(k)$是复数

三、DFT的性质（与DFS相似）

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{x}(\mathrm{n}) \arrow[r, shift left, "DFS"] \arrow[d, shift left, "R_N(n)"] & \tilde{X}(k) \arrow[l, shift left, "IDFS"] \arrow[d, shift left, "R_N(k)"] \\
x(n) \arrow[r, shift left, "DFT"] \arrow[u, shift left, "(n)_N"] & X(k) \arrow[l, shift left, "IDFT"] \arrow[u, shift left, "(k)_N"]
\end{tikzcd}
$$

$$\text{设} x_1(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} X_1(k)$$

$$x_2(n) \underset{IDFT}{\overset{DFT}{\rightleftarrows}} X_2(k)$$

1、线性

$$\boldsymbol{DFT[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(k)+bX_2(k)}$$

Note：

①如果$x_1(n)$,$x_2(n)$都为N 点，则$aX_1(k)+bX_2(k)$也为N点序列

②如果$x_1(n)$,$x_2(n)$点数不等，$x_1(n)$为N_1点，$x_2(n)$为N_2点，则$ax_1(n)+bx_2(n)$应为$N=\max[N_1, N_2]$点，DFT按N来计算

2、序列的圆周移位（循环移位）

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n+m)$$

过程：

①将x(n)以N为周期进行周期延拓 $\longrightarrow \tilde{x}(n)$

② $\tilde{x}(n)$ 加以移位m $\longrightarrow \tilde{x}(n+m)$

③取主值区间 $\tilde{x}(n+m)R_N(n) \longrightarrow x_m(n)$

对于$x_m(n)=x((n+m))_N)R_N(n)$

则$X_m(k)=\mathrm{DFT}[x_m(n)]=W_N^{-mk}X(k)=e^{j\frac{2\pi}{N}mk}X(k)$

同理

$$x((n-m))_N)R_N(n)\xrightarrow{DFT}W_N^{mk}X(k)=e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}X(k)$$

3、反转定理

$$x((-n)_N)R_N(n)=\begin{cases} x(0), & n=0 \\ x(N-n), & n=1,\dots N-1 \end{cases} \xrightarrow{DFT} X((-k)_N)R_N(k)$$

4、共轭对称性

设有限长序列x(n)，长度为N,周期延拓为 $\tilde{x}(n)$

$$\tilde{x}(n) = x((n)_N) \qquad\qquad x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n)$$

p36 Ch2.5.3中：任意序列可表示为一个共轭对称分量和共轭反对称分量之和。

$\tilde{x}(n)$ 的共轭对称分量：

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)\right] = \frac{1}{2}\left[x((n)_N) + x^*((-n)_N)\right]$$

共轭反对称分量：

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}\left[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)\right] = \frac{1}{2}\left[x((n)_N) - x^*((-n)_N)\right]$$

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n), \tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n),$$

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$$

x(n)的圆周共轭对称分量

$$x_{ep}(n)=\tilde{x}_e(n)R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x((n)_N)+x^*((-n)_N)\right]R_N(n)$$

x(n)的圆周共轭反对称分量

$$x_{op}(n)=\tilde{x}_o(n)R_N(n)=\frac{1}{2}\left[x((n)_N)-x^*((-n)_N)\right]R_N(n)$$

$$\begin{aligned}\therefore\ x(n)&=\tilde{x}(n)R_N(n)\\&=[\tilde{x}_e(n)+\tilde{x}_o(n)]R_N(n)\\&=x_{ep}(n)+x_{op}(n)\end{aligned}$$

i.e.有限长序列x(n)可以分解成相同点数的圆周共轭对称分量 $x_{ep}(n)$ 和圆周共轭反对称分量 $x_{op}(n)$

DTFT的对称性

(1): $x^*(n)$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$X^*(e^{-j\omega})$
(2): $x^*(-n)$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$X^*(e^{j\omega})$
(3): $\mathrm{Re}[x(n)]$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$X_e(e^{j\omega})$
(4): $j\mathrm{Im}[x(n)]$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$X_o(e^{j\omega})$
(5): $x_e(n)$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
(6): $x_o(n)$	$\xrightarrow{\text{DTFT}}$	$j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

$$x^*(n) \xleftrightarrow{DFT} = X^*((N-k)_N)R_N(k)$$

$$x^*((N-n)_N)R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} X^*(k)$$

$$\mathrm{Re}[x(n)] \xleftrightarrow{DFT} X_{ep}(k) = \frac{1}{2}[X(k)_N + X^*((N-k)_N)]R_N(k)$$

$$j\,\mathrm{Im}[x(n)] \xleftrightarrow{DFT} X_{op}(k) = \frac{1}{2}[X((k)_N) - X^*((N-k)_N)]R_N(k)$$

$$x_{ep}(n) = \frac{1}{2}[x(n)_N + x^*((N-n)_N)]R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} \mathrm{Re}[X(k)]$$

$$x_{op}(n) = \frac{1}{2}[x(n)_N - x^*((N-n)_N)]R_N(n) \xleftrightarrow{DFT} j\,\mathrm{Im}[X(k)]$$

p91

DFT的对称性

DFS的对称性

(1) $\tilde{x}^*(n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(-k)$

(2) $\tilde{x}^*(-n) \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}^*(k)$

(3) $\mathrm{Re}[\tilde{x}(n)] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_e(k)$

(4) $j\,\mathrm{Im}[\tilde{x}(n)] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}_o(k)$

(5) $\tilde{x}_e(n) \xleftrightarrow{DFS} \mathrm{Re}[\tilde{X}(k)]$

(6) $\tilde{x}_o(n) \xleftrightarrow{DFS} j\,\mathrm{Im}[\tilde{X}(k)]$

4、DFT形式下的帕赛瓦定理

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

证：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-kn}]^*$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} Y^*(k)\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn}$$

推论：令y(n)=x(n)

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

注：$\frac{1}{N}$系数是因为DFT变换未进行归一化

时域上计算的能量 = 频域上计算的能量

5、圆周卷积（循环卷积）

设 $x_1(n)$ 和 $x_2(n)$ 都是长度为 N 的有限长序列

$$x_1(n) \xrightarrow{DFT} X_1(k) \qquad x_2(n) \xrightarrow{DFT} X_2(k)$$

若 $$Y(k)=X_1(k)\bullet X_2(k)$$

则 $$y(n)=IDFT[Y(k)]=[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2((n-m))_N)]R_N(n)$$

$$=[\sum_{m=0}^{N-1}x_2(m)x_1((n-m))_N)]R_N(n)$$

相当于周期序列 $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$ 作周期卷积和后再取主值序列。

同理有：

若 $$y(n) = x_1(n) \bullet x_2(n)$$

则 $$Y(k) = \frac{1}{N} X_1(k) \textcircled{N} X_2(k)$$

$$= \frac{1}{N} X_2(k) \textcircled{N} X_1(k)$$

7、有限长序列的线性卷积与圆周卷积

设$x_1(n)$为N_1点有限长序列，$0 \le n \le N_1$-1

设$x_2(n)$为N_2点有限长序列，$0 \le n \le N_2$-1

(1) 线性卷积

$$y_l(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m)x_2(n-m)$$

$$=\sum_{m=0}^{N_1-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

$\therefore y_l(n)$是$(N_1+N_2$-1)点有限长序列。

(2) 圆周卷积

设为L点的圆周卷积 Ⓛ

$x_1(n)$补上L-N_1个零值点

$x_2(n)$补上L-N_2个零值点

令 $$y(n) = x_1(n) \text{Ⓛ} x_2(n)$$

$$\tilde{x}_2(n) = x_2((n)_L) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL)$$

$$\therefore\ y(n) = [\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2((n-m)_L)] R_L(n)$$

$$= [\sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_2(n+rL-m)] R_L(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{L-1} x_1(m) x_2(n+rL\text{-m})] R_L(n)$$

$$= [\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL)] R_L(n)$$

L点圆周卷积y(n)是线性卷积$y_l(n)$以"L"为周期的周期延拓序列的主值序列。

$$y(n)=[\sum_{r=-\infty}^{\infty} y_l(n+rL)]R_L(n)$$

$\because$ $y_l(n)$为N_1+N_2-1点有限长序列

$\therefore$只有延拓的周期L满足 L$\geq$ N_1+N_2-1 才使各延拓周期不会交叠，则y(n)的前(N_1+N_2-1)个点正好是$y_l(n)$。

$$\therefore x_1(n) Ⓛ x_2(n)=x_1(n)*x_2(n) \quad \begin{cases} L\geq N_1+N_2-1 \\ 0\leq n\leq N_1+N_2-2 \end{cases}$$

L$\geq$ N_1+N_2-1 ， 则L点圆周卷积能代表线性卷积。

四、DFT变换的应用

利用DFT对非周期连续时间信号傅里叶变换对逼近的全过程

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
x_a(t) \arrow[r, "\text{抽样}", "t=nT_s"'] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathit{CTFT}"'] & x(n) \arrow[r, "\text{截短}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathit{DTFT}"] & x(n)d(n) \arrow[r, "\text{周期延拓}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathit{DTFT}"] & \tilde{x}_N(n) \arrow[r, shift left, "\text{取一个周期}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathit{DFS}"] & x_N(n) \arrow[l, shift left, "\text{周期延拓}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\mathit{DFT}"] \\
X_a(j\Omega) \arrow[r, "\text{周期延拓}", "\Omega_s=\frac{2\pi}{T_s}"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{卷积}"] & X(e^{j\omega})*D(e^{j\omega}) \arrow[r, "\text{抽样}", "\Omega_0=\frac{\Omega_s}{N}"'] & \tilde{X}_N(k) \arrow[r, shift left, "\text{取一个周期}"] & X_N(k) \arrow[l, shift left, "\text{周期延拓}"]
\end{tikzcd}
$$

1. 频率分辨力和记录长度

对于DFT，频率函数要抽样变成离散的序列，有效抽样间隔对应的连续时间域的频域就是其频率分辨力F_0。

表示利用DFT进行频谱分析时所能达到的最小频率间隔

$$\text{抽样间隔}\ \omega_0 = \frac{2\pi}{N} \Rightarrow F_0 = \frac{f_s}{N}$$

记录长度

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = NT_s = \frac{N}{f_s}$$

有

$$N = \frac{f_s}{F_0} = \frac{T_0}{T_s} \underset{\text{必须}}{>} \frac{2f_h}{F_0}$$

$Note: f_s \uparrow, N \uparrow \neq$ 频率分辨力高

【例】有一频谱分析用的FFT处理器，抽样点数为2的整数幂次。设无采用任何特殊的数据处理措施：①频率分辨力≤10Hz② f_h ≤4KHz，确定：

①最小记录长度T_0

②抽样点的最大抽样间隔T(即最小抽样频率)

③一个记录中最少点数N

解：

① $T_0 \geq \frac{1}{F_0} = \frac{1}{10Hz} = 0.1s$

② $T_s < \frac{1}{2f_h} = \frac{1}{2\times 4KHz} = 0.125ms$

③ $N > \frac{2f_h}{F_0} = \frac{2\times 4KHz}{10Hz} = 800$

$\therefore$ 取$N = 2^{10} = 1024 > 800$

2、频谱泄露

设无限长序列 $x_1(n) \xrightarrow{F} X_1(e^{jw})$

截短成 $x_2(n) \xrightarrow{F} X_2(e^{jw})$

$$x_1(n) \xrightarrow{\text{时域上乘w(n)窗函数}} x_2(n)$$

$$X_1(e^{jw}) \xrightarrow{\text{频域上与}W(e^{j\omega})\text{卷积}} X_2(e^{jw})$$

频谱"扩散"(拖尾、变宽)，即频谱泄露

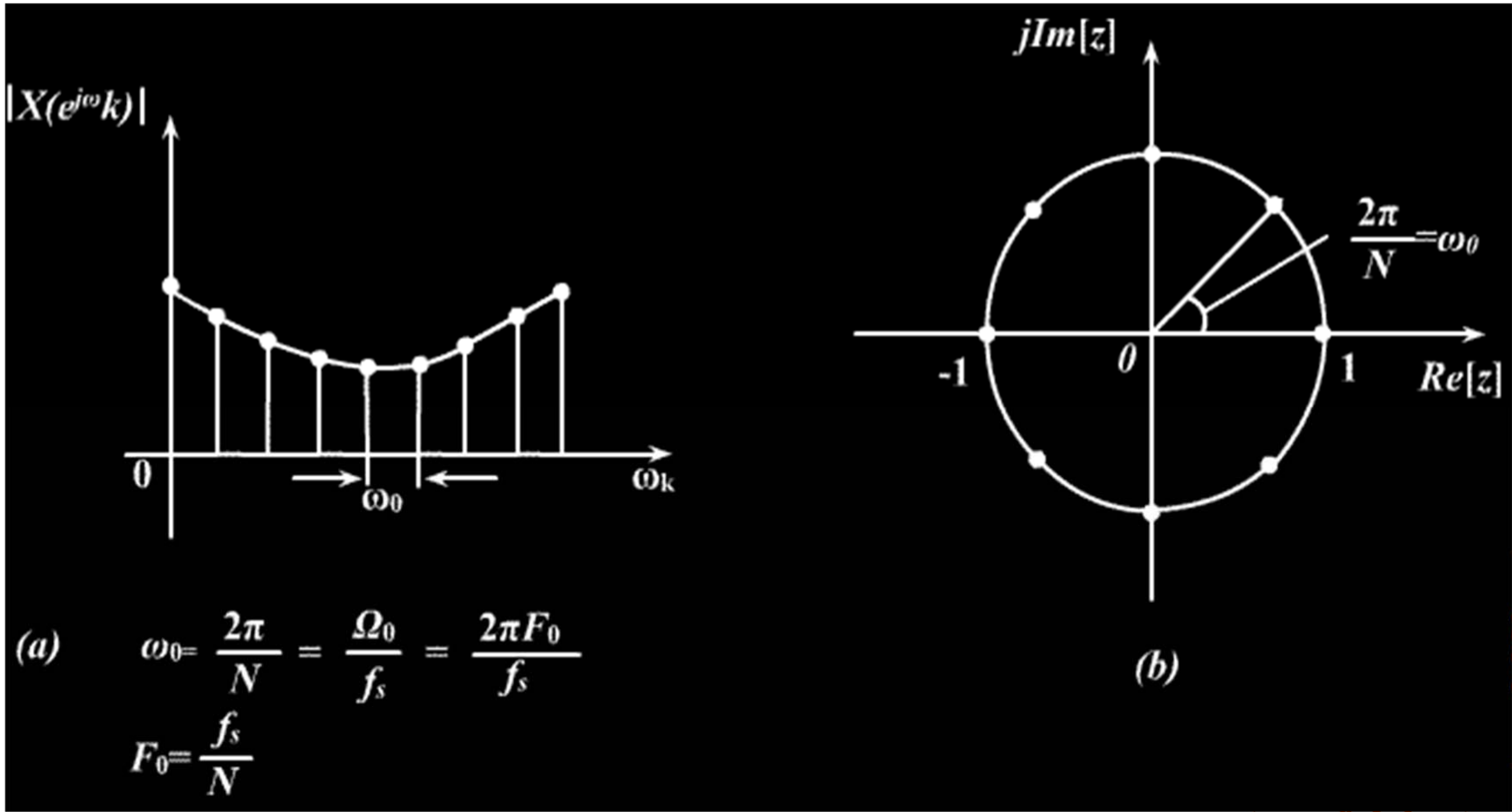
减小频谱泄露：

①取更长的数据，i.e.**窗宽加宽**

②窗函数不突然截断(即不加矩形窗)，要**缓慢截断**。如：三角形窗、升余弦窗等。使窗函数的频谱的旁瓣能量更小，卷积后造成的泄露减小。将在Ch5(FIR滤波器设计)进一步讨论。

3、栅栏效应

“栅栏效应”：DFT的频谱限于基频f_0的整数倍处的离散谱。像”栅栏”观看一个景象，只在离散点地方看到真实景象。



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} = \frac{\Omega_0}{f_s} = \frac{2\pi F_0}{f_s}, \qquad F_0 = \frac{f_s}{N}$$

提高频率分辨力F_0（更细密）

减小栅栏效应：

①频域抽样更宽，即**增加频域抽样点数**N

②在不改变时域数据的情况下，在时域数据末端**添加一些零值点**，使一个周期内点数增加，而不改变原有的记录数据。

频率分辨力不变