

第七章 数字通带传输

数字调制是把数字符号转换成适合于信道特征的波形。在第六章数字基带传输中，数字波形采用成型脉冲形式传输，而在通带传输中，还需要用这些成型脉冲序列去调制载波。

与模拟调制一样，在数字通带传输中成型脉冲序列可以被用来调制载波幅度、频率和相位，分别称为数字调幅、数字调频和数字调相。

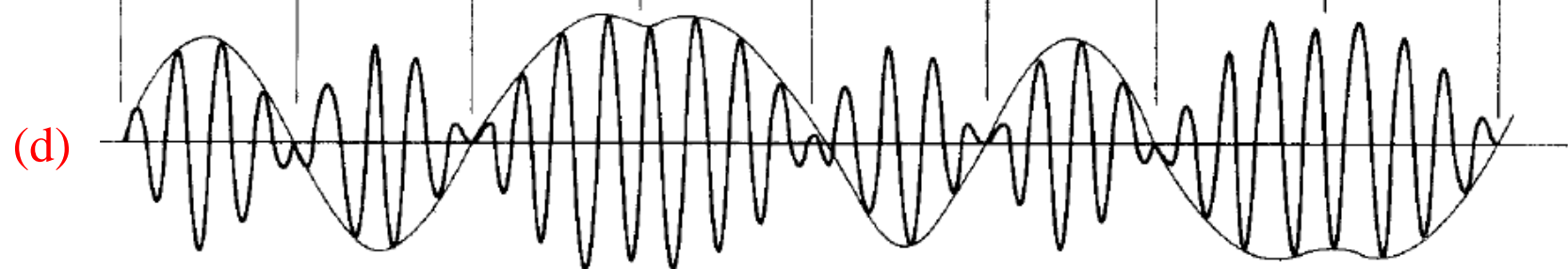
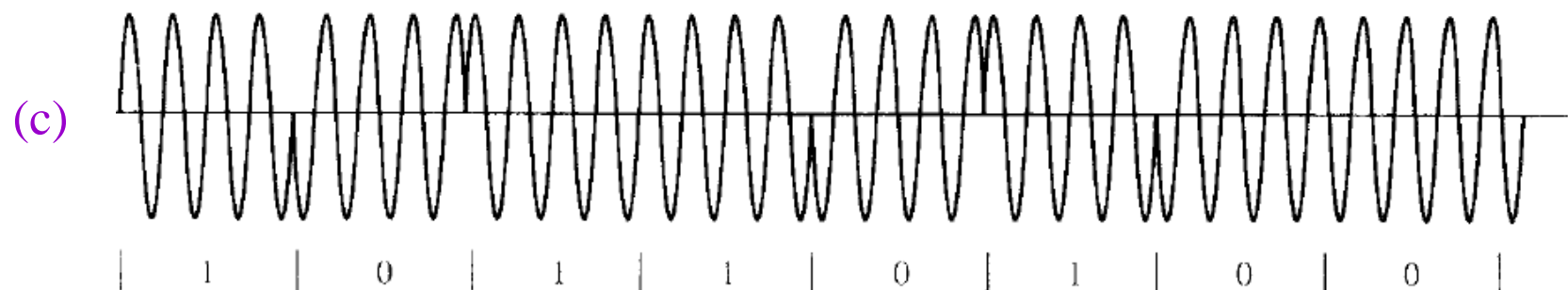
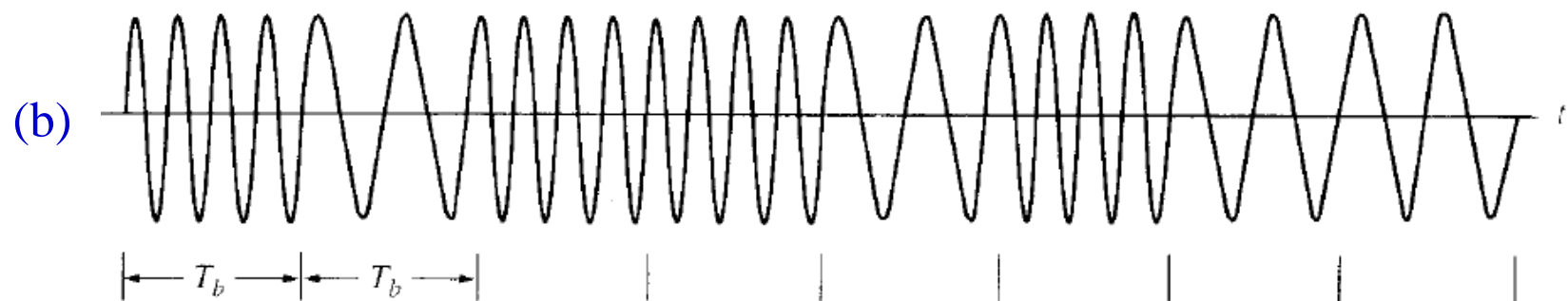
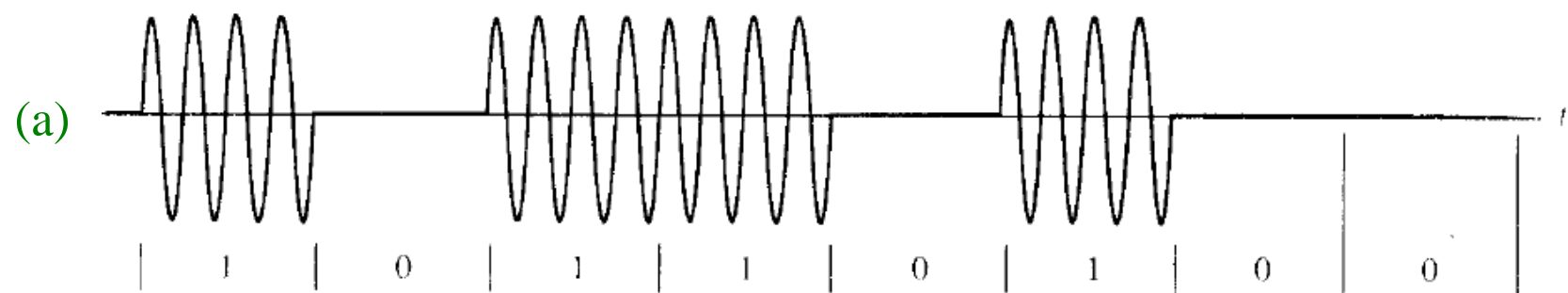
在本章中我们对各种数字通带传输系统，研究相应已调信号的时域表示和功率谱，调制和解调实现方式，以及误码率计算

§ 7.1 连续波数字调制

数字基带波形可用来调制正弦波的幅度、频率和相位。如果基带波形的基本脉冲是不归零（*NRZ*）方波脉冲，则这些被调制参数，如幅度、频率和相位是按数据值进行切换，或称为键控。

如图所示的二进制幅度偏移键控（*2ASK*），二进制频率偏移键控（*2FSK*）和二进制相位偏移键控（*2PSK*）。图中也示出二进制成型基带信号的双边带抑制载波幅度调制。

在本节我们介绍基本数字连续波调制的数学模型（发送机方框图），介绍它们的功率谱和带宽要求。



7.1.1 连续波数字调制信号的谱分析

数字连续波调制信号的基本表示式为：

$$\begin{aligned}s(t) &= A(t) \cos[2\pi f_c t + \Phi(t) + \theta] \\ &= x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) - y(t) \sin(2\pi f_c t + \theta)\end{aligned}$$

其中 $x(t) = A(t) \cos \Phi(t)$

$$y(t) = A(t) \sin \Phi(t)$$

其中 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别称为是同相和正交基带信号分量， θ 是一个均匀分布的随机变量。 $s(t)$ 的相关函数为

$$\begin{aligned}R_s(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \{ R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2) \} \cos[2\pi f_c(t_1 - t_2)] - \\ &\quad \frac{1}{2} \{ R_{xy}(t_1, t_2) + R_{yx}(t_1, t_2) \} \sin[2\pi f_c(t_1 - t_2)]\end{aligned}$$

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是平稳（或循环平稳）， $x(t)$ 和 $y(t)$ 不相关，而且 $E[x(t)] \times E[y(t)] = 0$ ，则相关函数中交叉相关项等于零，

$$R_S(\tau) = \frac{1}{2} \{ R_X(\tau) + R_Y(\tau) \} \cos 2\pi f_c \tau$$

$$P_S(f) = \frac{1}{4} \{ P_X(f - f_c) + P_X(f + f_c) + P_Y(f - f_c) + P_Y(f + f_c) \}$$

如果记

$$P_{lp}(f) = P_X(f) + P_Y(f)$$

则

$$P_S(f) = \frac{1}{4} \{ P_{lp}(f - f_c) + P_{lp}(f + f_c) \}$$

7.1.2 连续波数字幅度调制方式 (ASK)

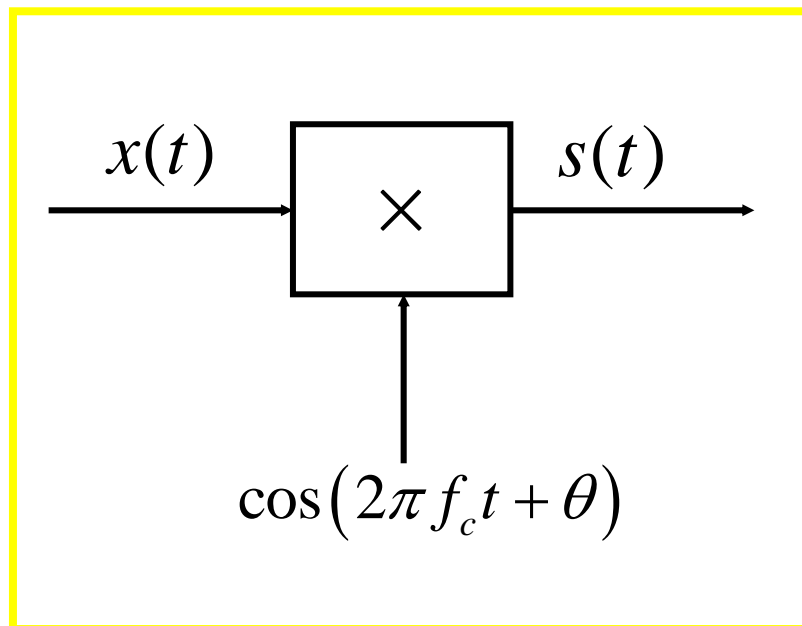
两电平的ASK如图7.1.1 (a) 所示。2ASK波形可以通过让载波通、断来产生，这种二进制通断调制方式也称为OOK (*on-off Keying*)。一般 M 进制ASK信号包含了“ $M-1$ ”种不同的“通”幅度电平和一种“断”电平。在这 M 进制ASK调制中，信号波形序列表示为：

$$s(t) = x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta)$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

$$a_n \in \{0, 1, \dots, M-1\}$$

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



若 a_n 是等概分布的， 则

$$m_a = E[a_n] = \frac{M-1}{2}, \quad \sigma_a^2 = E[a_n^2] - m_a^2 = \frac{M^2-1}{12}$$

$$P_{lp}(f) = P_x(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| G_T\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

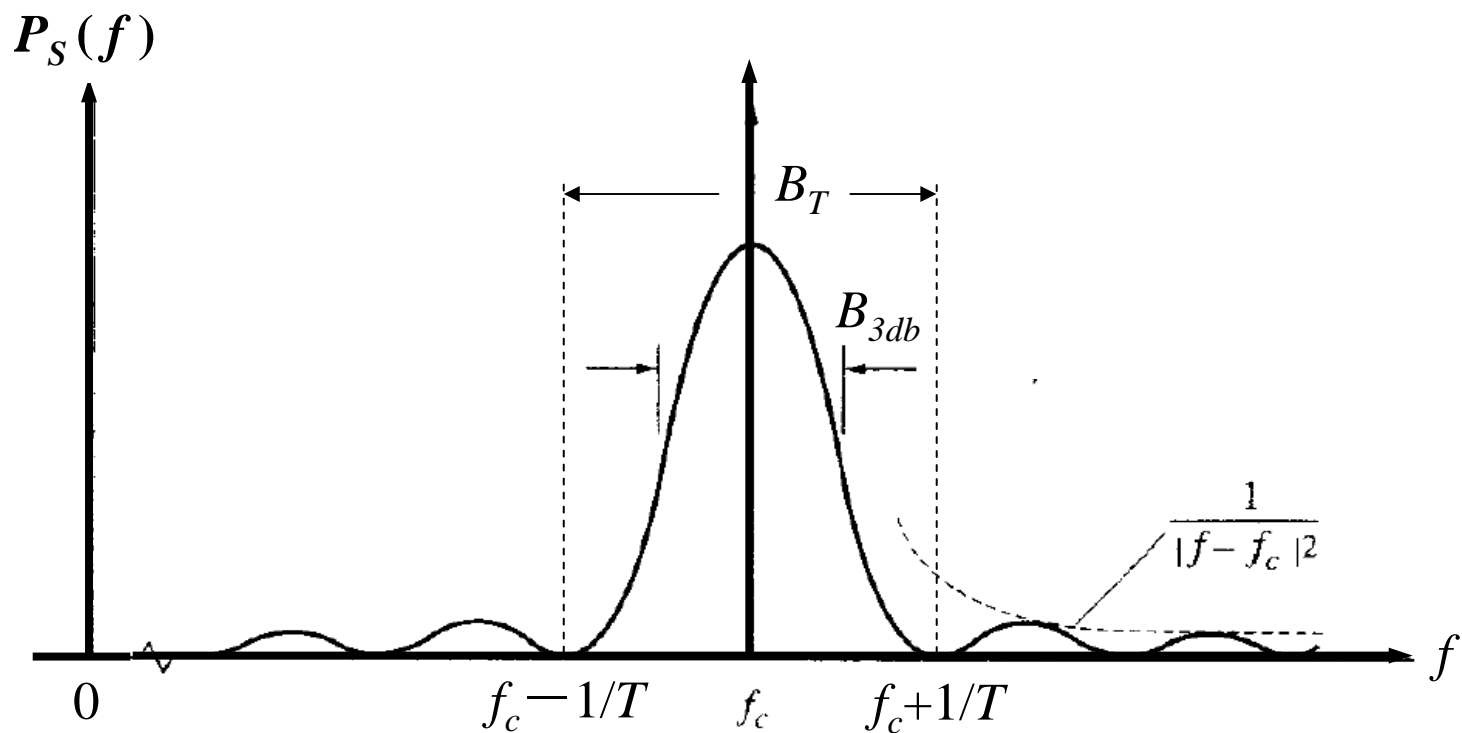
其中

$$G_T(f) = AT \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

所以

$$P_{lp}(f) = \frac{M^2-1}{12} A^2 T \left| \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \right|^2 + \left(\frac{M-1}{2} \right)^2 \cdot A^2 \delta(f)$$

$$P_s(f) = \frac{M^2-1}{12} A^2 T \left\{ \left| \frac{\sin \pi T (f - f_c)}{\pi T (f - f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi T (f + f_c)}{\pi T (f + f_c)} \right|^2 \right\} \\ + \left(\frac{M-1}{2} \right)^2 A^2 \cdot \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) \}$$



所以ASK信号的3db带宽约为 $B_{3db} = 1/T$ ，主瓣带宽约为 $B_T = 2/T$
 带外功率按 $|f - f_c|^{-2}$ 衰减。

在M进制ASK传输中，**符号率** $R_B = 1/T$ ，**比特率**为

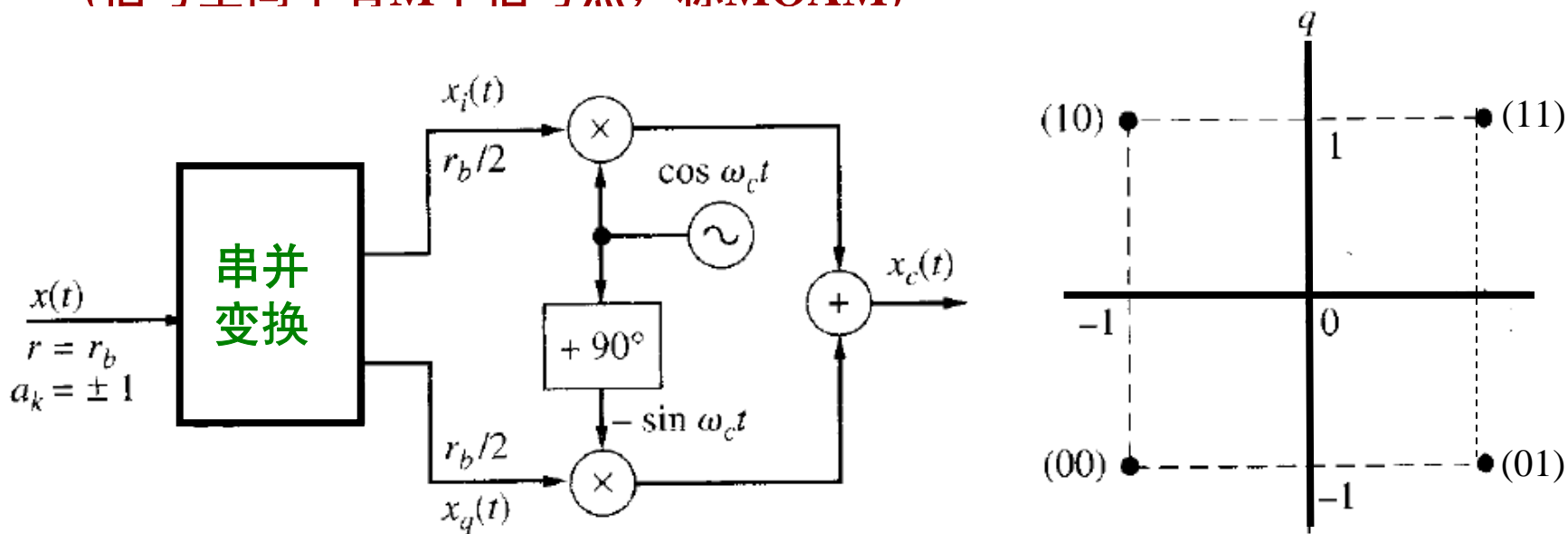
$$R_b = R_B \cdot \log_2 M = \frac{\log_2 M}{T} \quad (\text{bps}),$$

频谱利用效率为 $\eta = \frac{R_b}{B_T} = 0.5 \log_2 M$ (bps/Hz) **(按主瓣带宽算)**

7.1.3 正交载波幅度调制 (QAM)

$\cos(2\pi f_c t)$ 和 $\sin(2\pi f_c t)$ 是二个相互正交的载波，可以用二路独立的基带数字波形分别去调制这二个正交载波的幅度，然后把它们复合起来一起传输。在接收端可以用正交载波把两路基带数字波形分离开来(见图2.1.6)，这就是**正交复用的概念**。利用正交复用可以提高频谱利用效率。这种调制方式称为正交载波幅度调制。

(信号空间中有M个信号点，称MOAM)



数据在串并变换后，得到二路数据 $\{I_k\}$ 和 $\{Q_k\}$ ，这时上、下二个支路中的一对数字 (I_k, Q_k) 组成一个符号，**数据假定是双极性**，即

$$I_k, Q_k = \left(m - \frac{N+1}{2} \right), \quad m = 1, 2, 3, \dots, N; \quad M = N^2$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kt)$$

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_T(t - kt)$$

由于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是相互独立的，零均值基带信号分量

$$P_{lp}(f) = P_X(f) + P_Y(f)$$

显然 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的功率谱相同，所以

$$P_{lp}(f) = 2P_X(f)$$

$$E[I_k] = E[Q_k] = 0, \quad \sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = \left(\frac{N^2 - 1}{12} \right)$$

所以

$$P_{lp}(f) = \frac{2\sigma_I^2}{T} |G_T(f)|^2 = 2\sigma_I^2 A^2 T \left| \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right|^2$$

$$p_s(f) = \frac{N^2 - 1}{6} A^2 T \left\{ \left| \frac{\sin \pi T (f - f_c)}{\pi T (f - f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi T (f + f_c)}{\pi T (f + f_c)} \right|^2 \right\}$$

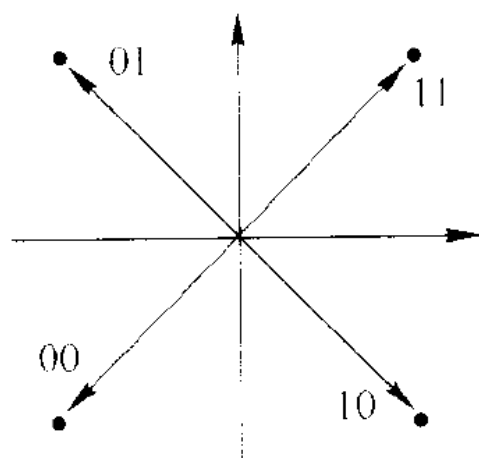
与ASK相比，少了载频上的离散谱线。对于正交两个支路上都是 N

进制的QAM传输， $M=N^2$ ，符号率为 $R_B = 1/T$ ，比特率为

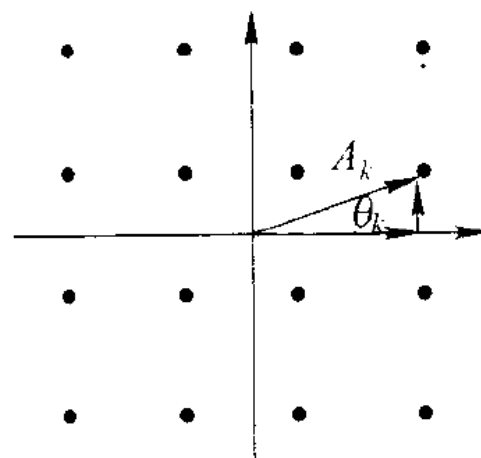
$$R_b = R_B \cdot \log_2 M = \frac{2 \log_2 N}{T} \quad (\text{bps}),$$

信号的主瓣带宽仍为 $B_T = 2/T$ ，带外功率按 $|f - f_c|^{-2}$ 衰减。

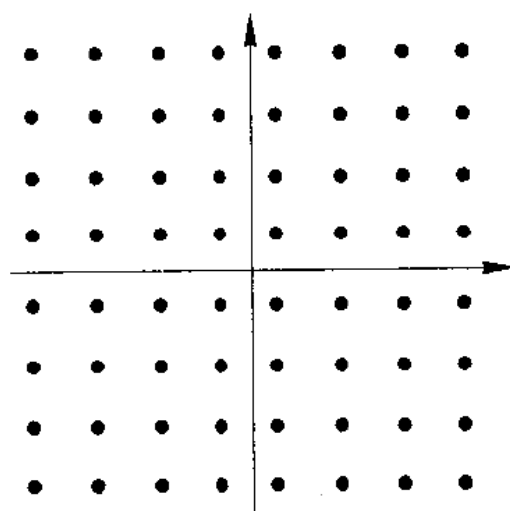
频谱利用效率为， $\eta = \frac{R_b}{B_T} = 0.5 \log_2 M = \log_2 N \quad (\text{bps/Hz})$



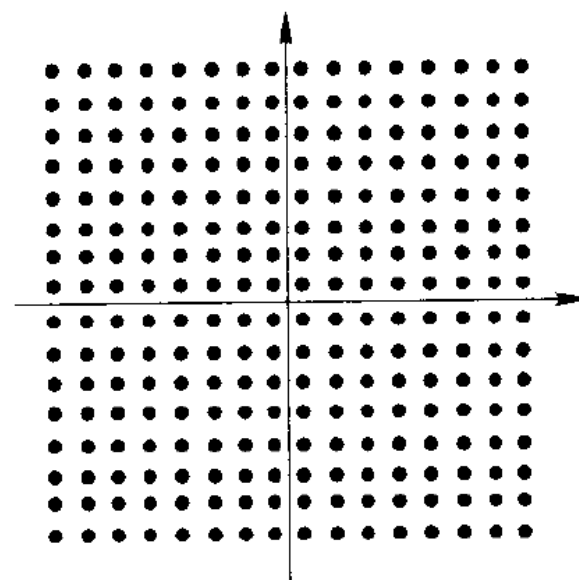
(a) 4QAM信号矢量图



(b) 16QAM信号矢量图

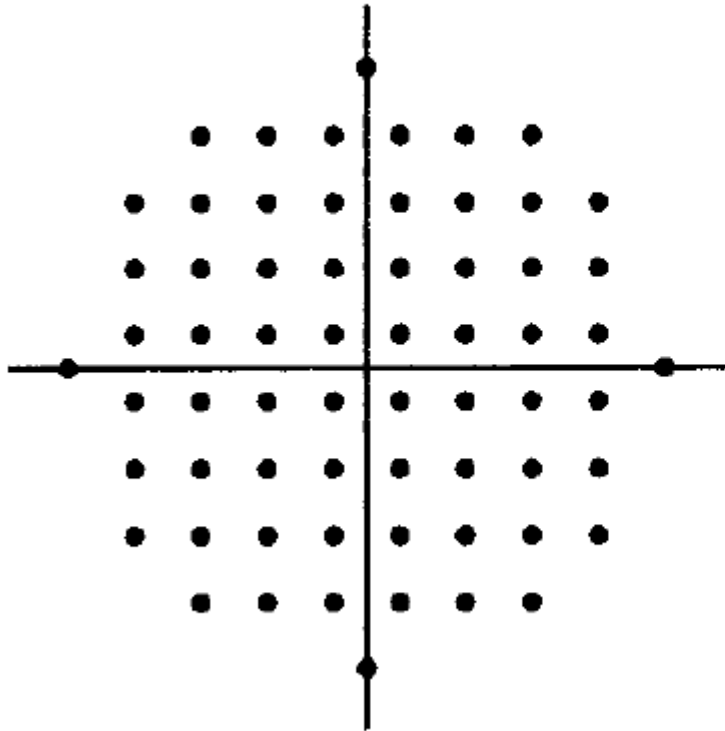


(c) 64QAM信号矢量图

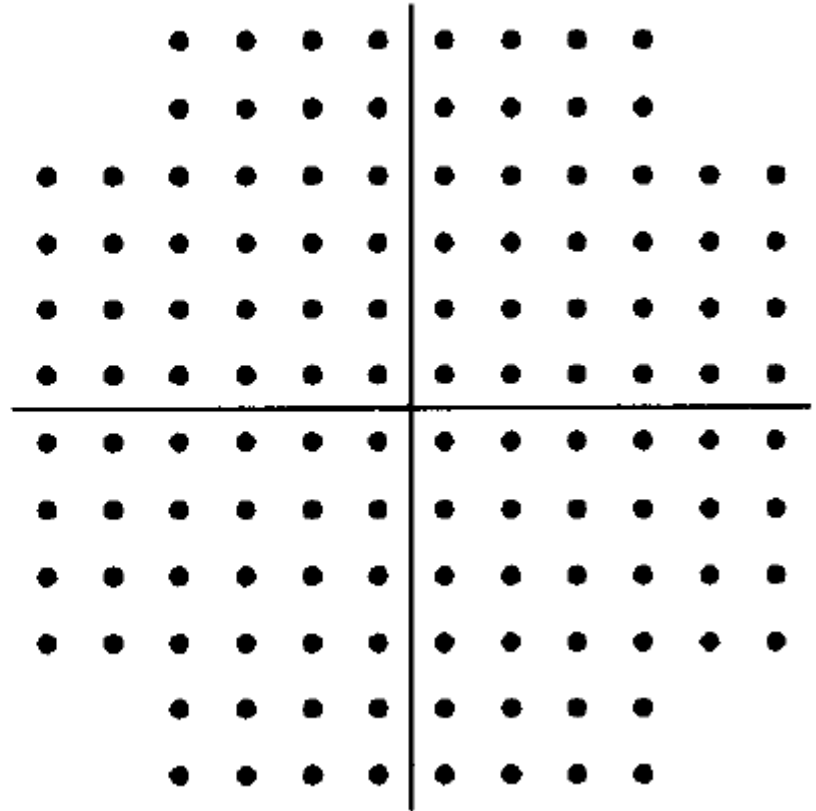


(d) 256QAM信号矢量图

64QAM

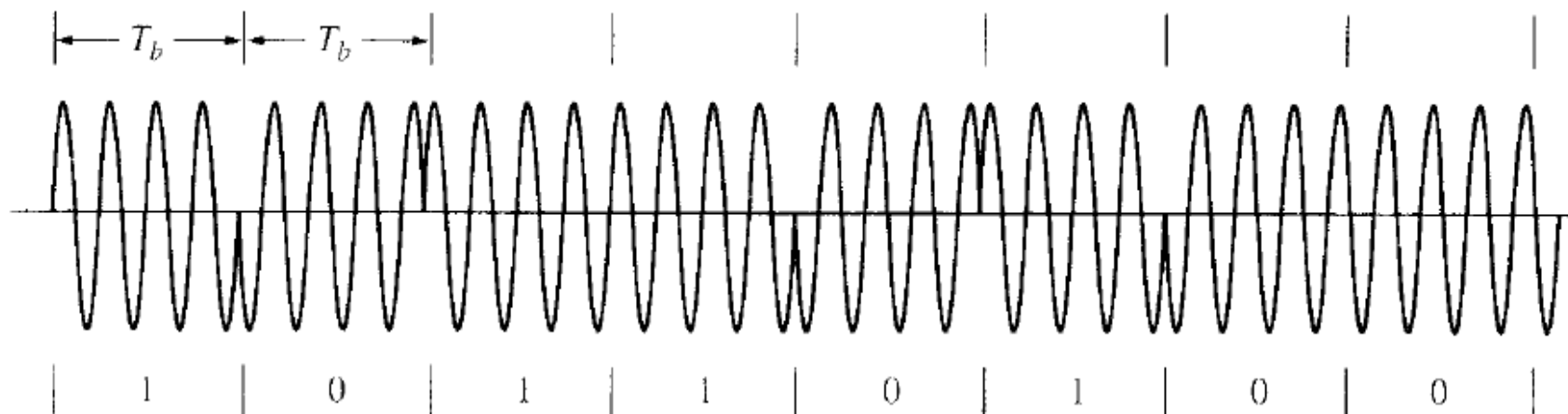


128QAM



7.1.4 连续波数字相位调制 (PSK)

二进制PSK波形示于图



M 进制PSK在时间间隔 $kT \leq t \leq (k+1)T$ 中相位为 φ_k ，它可以取 M 个不同值，所以

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + \theta + \varphi_k) g_T(t - kT) \\ &= x(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) - y(t) \sin(2\pi f_c t + \theta) \end{aligned}$$

其中

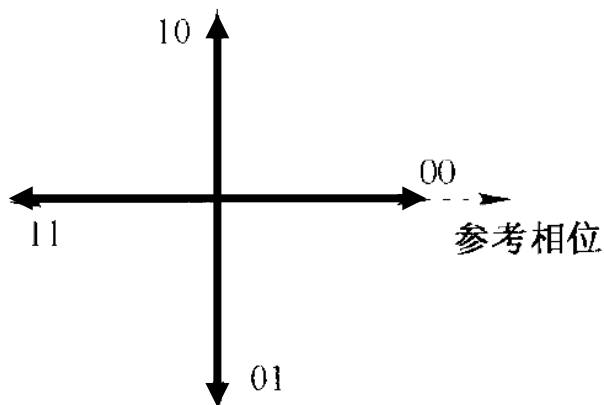
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT), \quad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_T(t - kT)$$

$$I_k = \cos \varphi_k, \quad Q_k = \sin \varphi_k$$

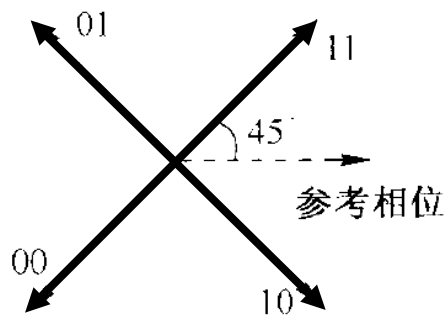
$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t < T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$\varphi_k = \pi(2a_k + N)/M, \quad a_k = 0, 1, \dots, M-1$$

其中 $N=0$ 或 1 。当 $N=0$ 时，这 M 个相位角从 0 开始均匀分布在单位圆上，当 $N=1$ 时相位角从 π/M 开始均匀分布在单位圆上。

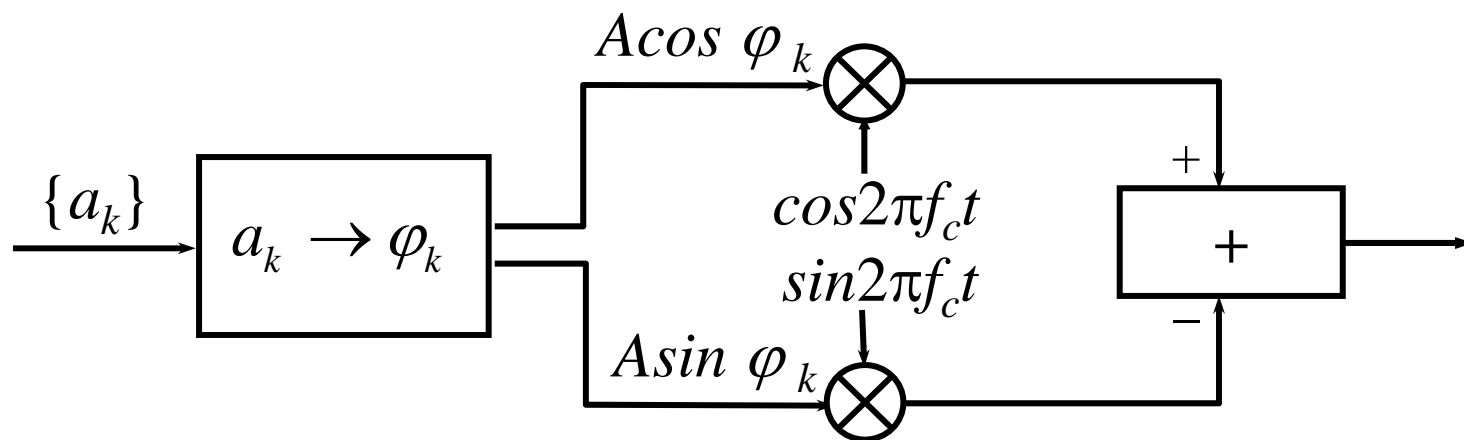


(a) A方式(N=0)



(b) B方式(N=1)

MPSK信号产生的原理方框图



对于 $M=4$ 的QPSK调制器的原理方框图

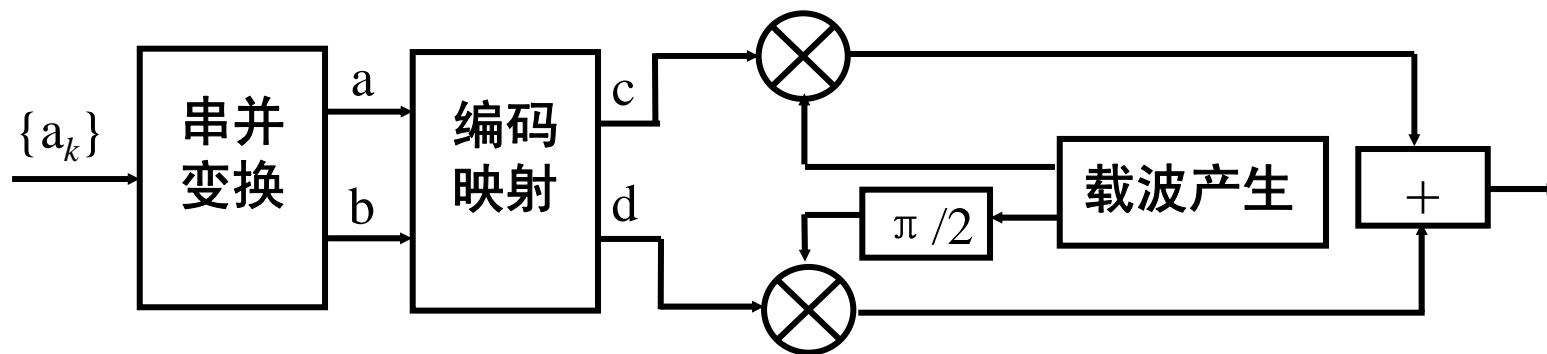


表 7.1.1 QPSK 编码映射

a	b	$N=0$		$N=1$	
		(c, d)	φ_k	(c, d)	φ_k
0	0	(1, 0)	0°	$(1, 1)/\sqrt{2}$	45°
1	0	(0, 1)	90°	$(-1, 1)/\sqrt{2}$	135°
1	1	(-1, 0)	180°	$(-1, -1)/\sqrt{2}$	225°
0	1	(0, -1)	270°	$(1, -1)/\sqrt{2}$	315°

采用了 *Gray* 编码，即相邻的信号点仅差一个比特。

PSK信号功率谱分析与QAM情况一样:

$$E[I_k] = E[Q_k] = 0, \quad E[I_k^2] = E[Q_k^2] = \frac{1}{2}$$

$$P_{lp}(f) = 2P_x(f) = A^2 T \left| \frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right|^2$$

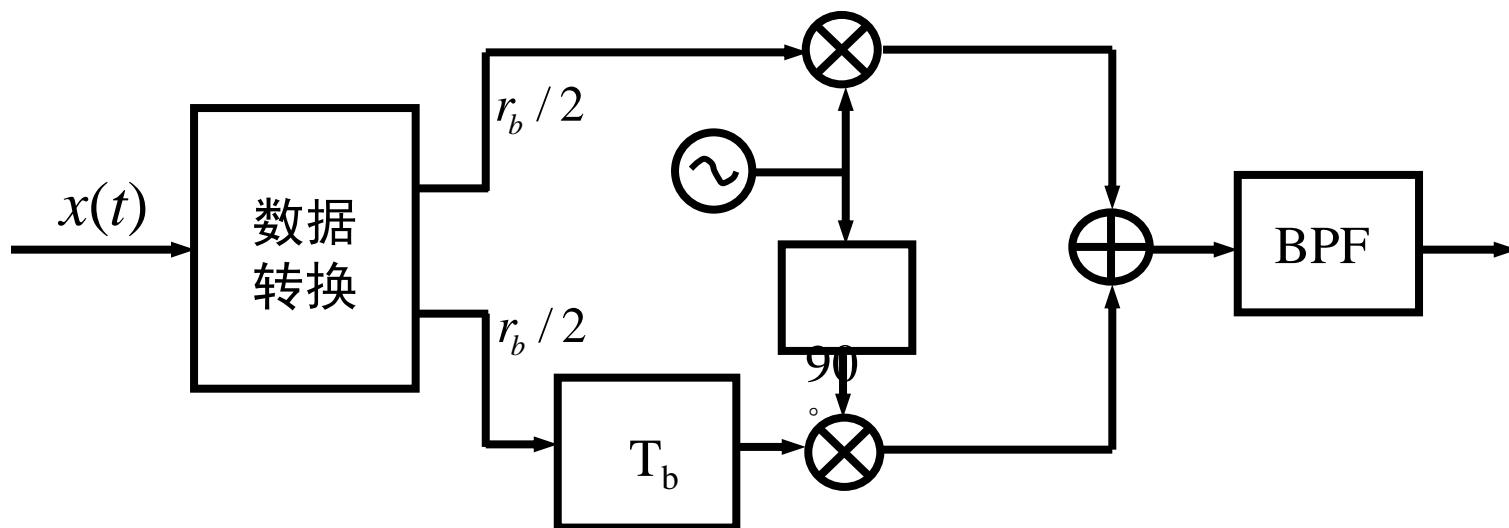
$$P_s(f) = A^2 T \left\{ \left| \frac{\sin \pi T (f - f_c)}{\pi T (f - f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi T (f + f_c)}{\pi T (f + f_c)} \right|^2 \right\}$$

M进制PSK的带宽要求 $B_T = 2/T$, **频谱利用率为**

$$\eta = 0.5 \log_2 M \quad bps / Hz$$

*PSK*信号是恒包络信号，因此发射机功率放大器的非线性对它影响不大，有利于提高功放的效率，但是我们也看到*PSK*信号功率谱的带外漏泄还是比较大的，所以需要用带通滤波器加以控制，带通滤波器会破坏*PSK*信号的恒包络特性。

还有许多其它的数字相位调制方式，例如对 $M=4$ 的*QPSK*调制加以改进，可以得到参差移相键控调制*OQPSK*。*OQPSK*调制器如图



7.1.5 连续波差分相位偏移键控调制 (*DPSK*)

在*PSK*调制中，数据信息包含在载波相位中，需要采用相干解调方式恢复数据。因此要求接收机提供与收到信号载波同频、同相的本地正弦信号。由于*PSK*频谱中不含有载波频率分量，所以在接收端恢复载波相位时，一般先通过非线性变换，产生载频的倍频分量，用锁相环路跟踪这个倍频分量，再分频获得相干载频。这个过程会产生 $2\pi / M$ 的整数倍相位不确定。两个方法可以消除相位模糊。

- (1) 通过前导字训练序列来消除这种不确定性；
- (2) 采用差分移相键控调制 *DPSK* 。在*DPSK*中利用前后符号的相位差来传输数据信息。

M 进制DPSK中发送信号为

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c t + \theta_{k-1} + \Delta\varphi_k] g_T(t - kT)$$

其中 $\theta_k = \theta_{k-1} + \Delta\varphi_k$

$$\Delta\varphi_k = \frac{\pi}{M}(2a_k + N), \quad a_k = 0, 1, 2, \dots, M-1, \quad N = 0, 1$$

从波形上看**PSK**和**DPSK**是不可区分的，它们的功率谱也是相同的。

例如对 **$M=2$** ， **$N=0$** ，则

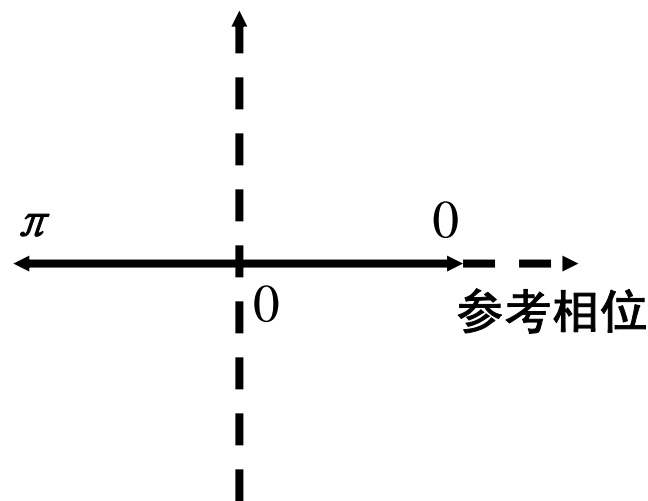
$$\Delta\varphi_k = 0 \quad \text{发送“0”}$$

$$\Delta\varphi_k = \pi \quad \text{发送“1”}$$

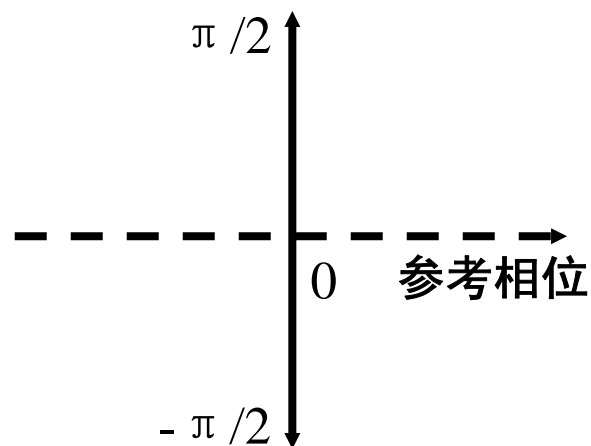
例如对 **$M=2$** ， **$N=1$** ，则

$$\Delta\varphi_k = \pi/2 \quad \text{发送“0”}$$

$$\Delta\varphi_k = -\pi/2 \quad \text{发送“1”}$$



(a) A方式($N=0$)



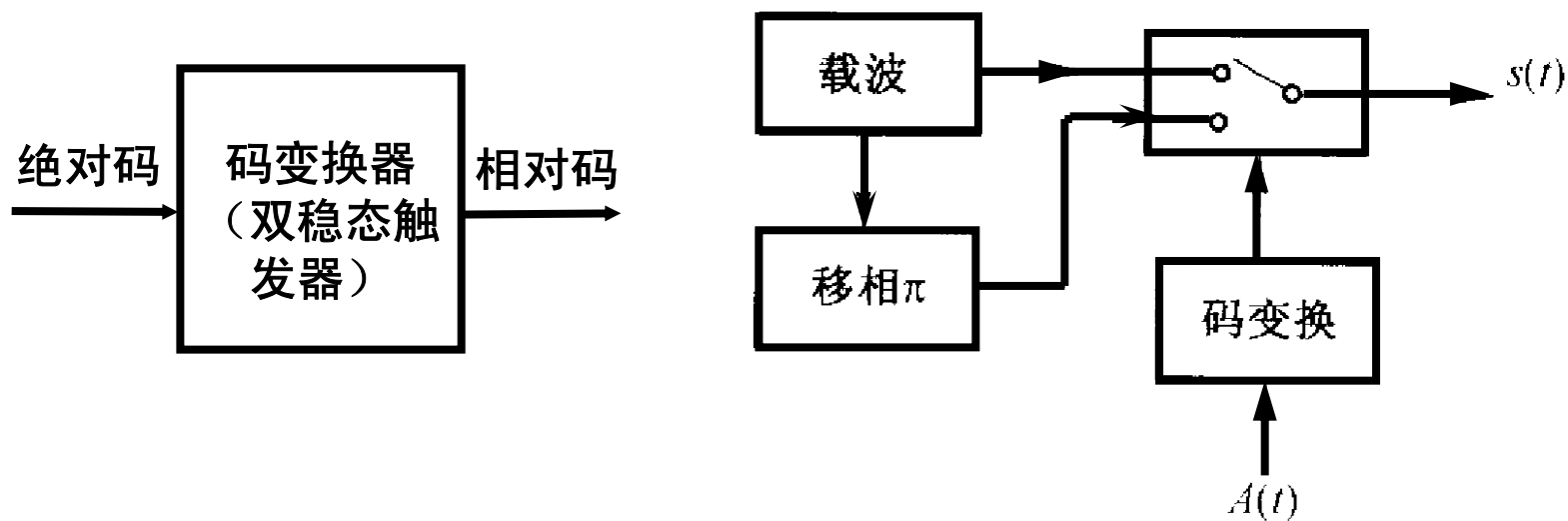
(b) B方式($N=1$)

	0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 ... 0 0 1 1 1 0 0 1 0 1 ...
$\Delta\phi$	0 0 π π π 0 0 π 0 π ... 0 0 π π π 0 0 π 0 π ...
初相	0 π
绝对相位 ($\theta_n = \theta_{n-1} + \Delta\phi$)	0 0 π 0 π π π 0 0 π ... π π 0 π 0 0 0 π π 0 ...

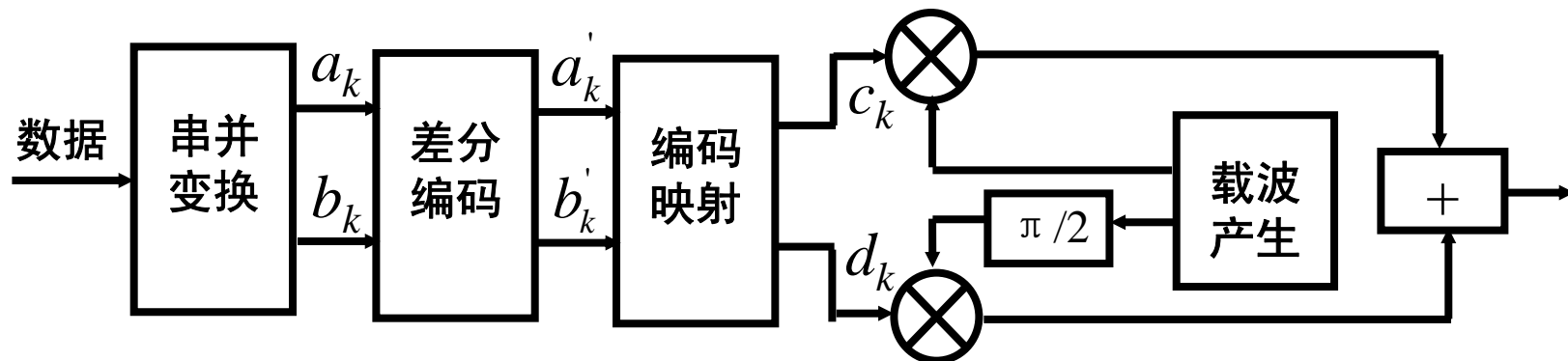
在2DPSK信号产生过程中，我们先对原来待传输的数据序列进行差分编码，再把差分编码的序列去进行2PSK调制。设 $\{a_n\}$ 为原始数据序列， $\{b_n\}$ 是差分编码后序列，

差分编码器： $b_n = b_{n-1} \oplus a_n$ 差分译码器： $b_{n-1} \oplus b_n = a_n$

a_n (绝对码)	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	...
b_n (相对码) (0)	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	...
2PSK 调制 (0)	π	0	0	π	π	0	π	π	π	π	...



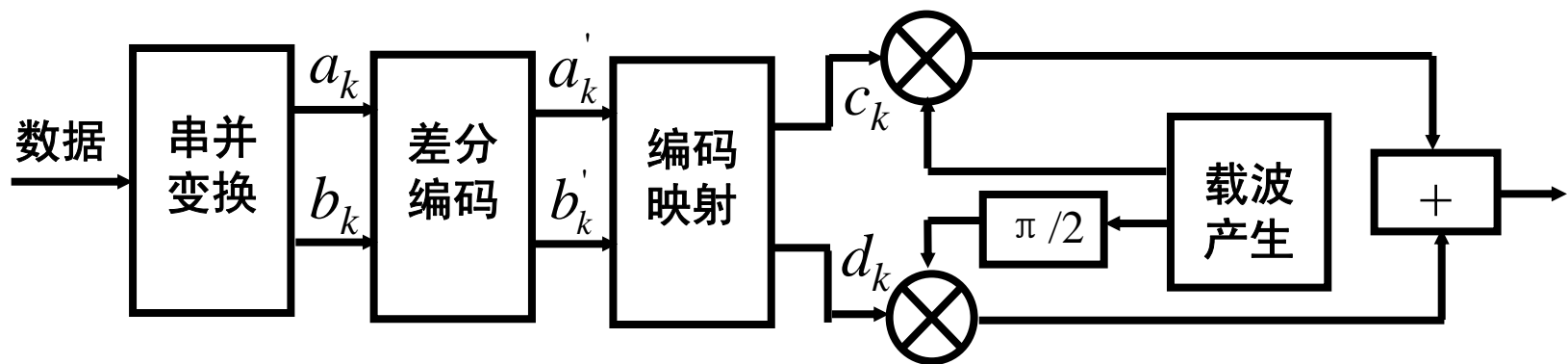
多进制DPSK，例如对QDPSK调制，也可以先经过差分编码器，把绝对码变换成相对码，再用相对码进行QPSK调制。



差分编码真值表 $(a_k, b_k) \rightarrow (a'_k, b'_k)$

绝对码及相对相位		前一时刻相对码及相位		当前时刻相对码及相位	
(a_k, b_k)	$\Delta\varphi_k$	(a'_{k-1}, b'_{k-1})	φ_{k-1}	(a'_k, b'_k)	φ_k
(0, 0)	0°	(0, 0)	0°	(0, 0)	0°
		(1, 0)	90°	(1, 0)	90°
		(1, 1)	180°	(1, 1)	180°
		(0, 1)	270°	(0, 1)	270°

(1, 0)	90°	(0, 0)	0°	(1, 0)	90°
		(1, 0)	90°	(1, 1)	180°
		(1, 1)	180°	(0, 1)	270°
		(0, 1)	270°	(0, 0)	0°
(1, 1)	180°	(0, 0)	0°	(1, 1)	180°
		(1, 0)	90°	(0, 1)	270°
		(1, 1)	180°	(0, 0)	0°
		(0, 1)	270°	(1, 0)	90°
(0, 1)	270°	(0, 0)	0°	(0, 1)	270°
		(1, 0)	90°	(0, 0)	0°
		(1, 1)	180°	(1, 0)	90°
		(0, 1)	270°	(1, 1)	180°



差分编码逻辑:

$$(a_k, b_k) \rightarrow (a'_k, b'_k)$$

当 $a'_{k-1} \oplus b'_{k-1} = 0$

$$a'_k = a'_{k-1} \oplus a_k$$

$$b'_k = b'_{k-1} \oplus b_k$$

当 $a'_{k-1} \oplus b'_{k-1} = 1$

$$a'_k = a'_{k-1} \oplus b_k$$

$$b'_k = b'_{k-1} \oplus a_k$$

差分译码逻辑:

$$(a'_k, b'_k) \rightarrow (a_k, b_k)$$

当 $a'_{k-1} \oplus b'_{k-1} = 0$

$$a_k = a'_{k-1} \oplus a'_k$$

$$b_k = b'_{k-1} \oplus b'_k$$

当 $a'_{k-1} \oplus b'_{k-1} = 1$

$$a_k = b'_k \oplus b'_{k-1}$$

$$b_k = a'_{k-1} \oplus a'_{k-1}$$

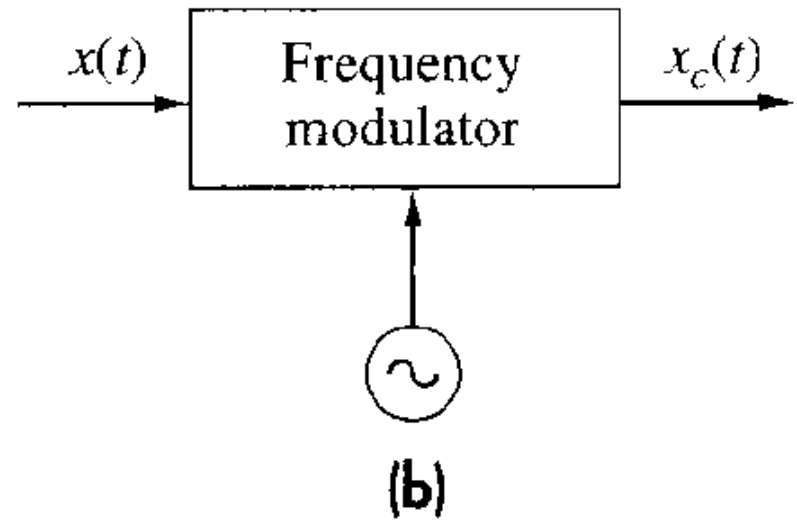
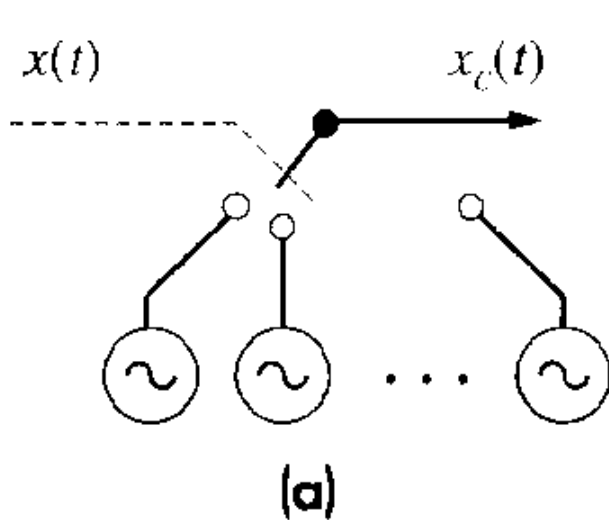
7.1.6 连续波数字频率调制

有两种数字频率调制产生方式，

- (a) 不同频率源在 $t = kT$ 时刻，由选择开关切换，相位一般不连续的；
- (b) 采用频率调制电路产生的是相位连续的 *FSK* (称为 *CPFSK*)；

两种情况的频率谱不一样

只能对一此特殊情况进行计算它们的频率谱



考虑2FSK信号

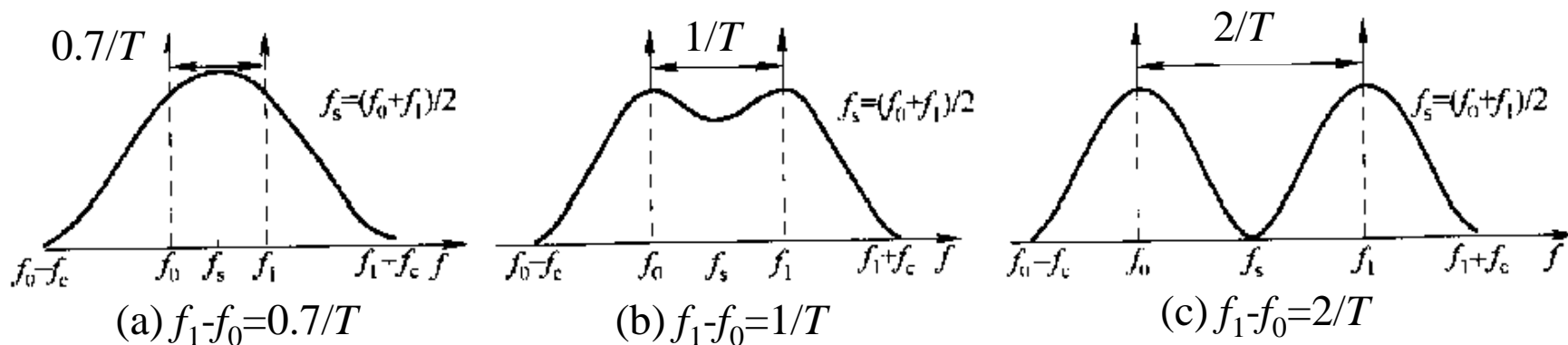
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c t + \theta + 2\pi a_n \cdot \Delta f t] g_T(t - nT)$$

其中 $a_n \in \{0, 1\}$, Δf 表示数据“0”和数据“1”对应信号的频率差;

$$\begin{aligned} s(t) = & \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n g_T(t - nT) \cos(2\pi f_c t + \theta) \\ & + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT) \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t + \theta] \end{aligned}$$

如果 $P(a_n = 0) = P\{a_n = 1\} = 0.5$

$$\begin{aligned} P_s(f) = & \frac{1}{16} A^2 T \left\{ \left| \frac{\sin \pi T(f - f_c)}{\pi T(f - f_c)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi T(f + f_c)}{\pi T(f + f_c)} \right|^2 \right\} \\ & + \left\{ \left| \frac{\sin \pi T(f - f_c - \Delta f)}{\pi T(f - f_c - \Delta f)} \right|^2 + \left| \frac{\sin \pi T(f + f_c + \Delta f)}{\pi T(f + f_c + \Delta f)} \right|^2 \right\} \\ & + \frac{A^2}{16} \{ \delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \delta(f - f_c - \Delta f) + \delta(f + f_c + \Delta f) \} \end{aligned}$$



对于 M 进制等频率间隔 Δf 的 $MFSK$ 可以认为是 M 个 $2ASK$ 信号的组合，它们要求的带宽等于 $B_T = (M - 1)\Delta + \frac{2}{T}$

因此 $MFSK$ 信号的频谱利用效率为：

$$\eta = R_b / B_T = \frac{\log_2 M}{T} \bigg/ \left[(M - 1)\Delta f + \frac{2}{T} \right]$$

如果取 $\Delta f = 1/2T$, $\eta = 2\log_2 M / (M + 3)$

当 $M > 2$ 时， $MFSK$ 频谱效率就低于 $MPSK$ 和 $MASK$ 。

如果取 $\Delta f = 1/T$, $\eta = \log_2 M / (M + 1)$

从上面功率谱可见，FSK的功率谱在带外按 $|f - f_c|^{-2}$ 衰减。

下面分析可见，如果相位连续变化，可以使带外衰减按 $|f - f_c|^{-4}$ 。

当 $2\pi\Delta fT = 2\pi$ 时，2FSK信号则在 $t=kT$ 处信号相位连续。

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c t + \theta + 2\pi a_n \cdot \Delta f t] g_T(t - nT) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t + 2\pi \frac{2a_n - 1}{2} \Delta f t\right] g_T(t - nT) \end{aligned}$$

记 $b_n = (2a_n - 1)$, $b_n = \pm 1$

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t + 2\pi b_n \cdot \frac{\Delta f}{2} t\right] g_T(t - nT) \\ &= x(t) \cos\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] - y(t) \sin\left[2\pi\left(f_c + \frac{\Delta f}{2}\right)t\right] \end{aligned}$$

其中

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(2\pi b_n \cdot \frac{\Delta f}{2} t\right) \cdot g_T(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos(\pi \Delta f t) \cdot g_T(t - nT)$$

$$= \cos(\pi \Delta f t)$$

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sin\left(2\pi b_n \cdot \frac{\Delta f}{2} t\right) \cdot g_T(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \sin(\pi \Delta f t) \cdot g_T(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \sin[\pi \Delta f (t - nT)] \cdot g_T(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n h(t - nT)$$

$$Q_n = (-1)^n b_n, \quad h(t) = \sin(\pi \Delta f t) \cdot g_T(t)$$

由于 $E[Q_n] = 0, \quad E[Q_n^2] = 1,$

$$P_X(f) = \frac{1}{4} \left[\delta\left(f - \frac{\Delta f}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right) \right]$$

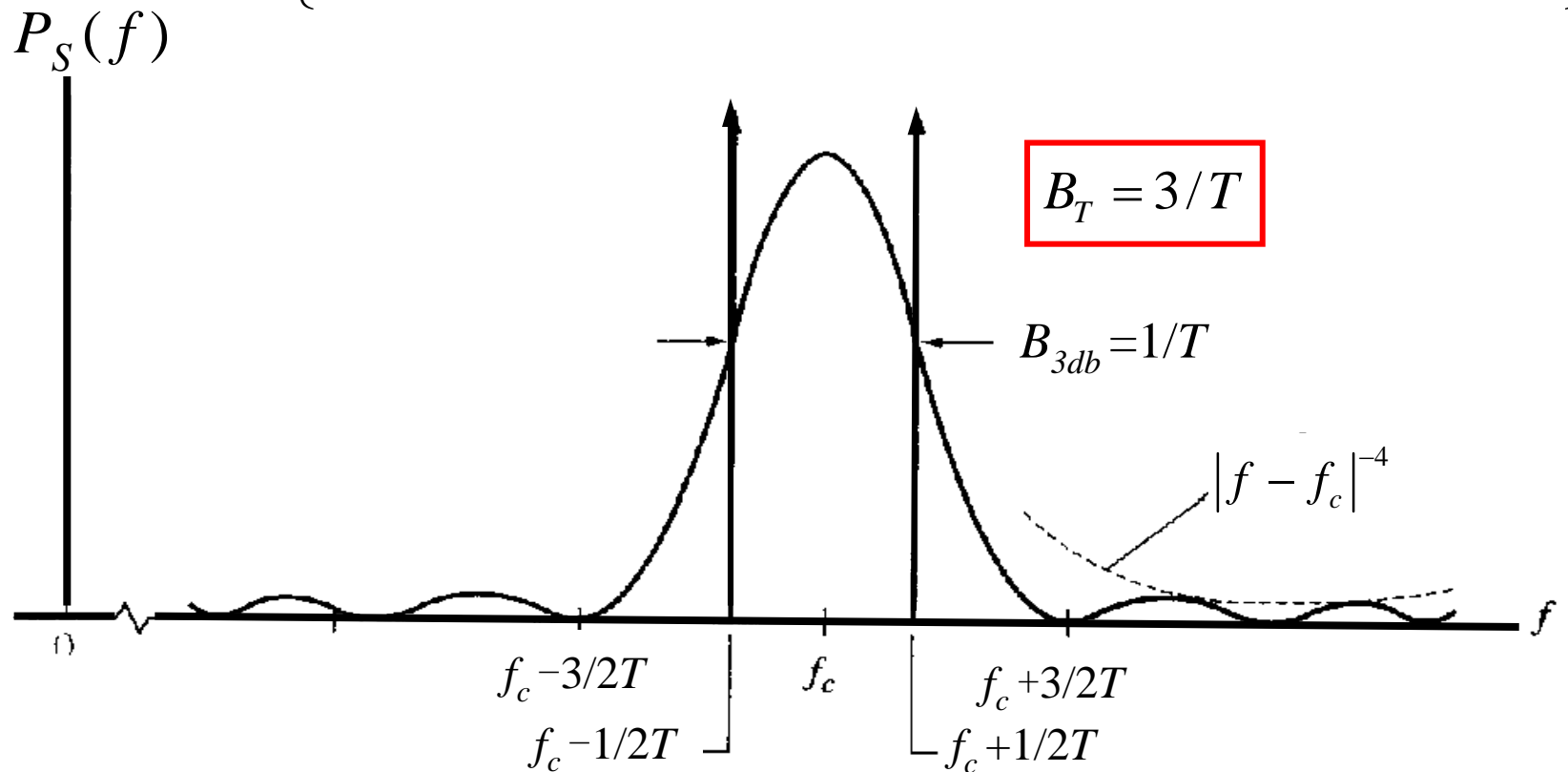
$$P_Y(f) = \frac{1}{T} |G_h(f)|^2$$

$$G_h(f) = \frac{2TA}{\pi} \left| \frac{\cos(\pi fT)}{(2Tf)^2 - 1} \right|$$

所以 $P_{lp}(f) = \frac{1}{4} \left[\delta\left(f - \frac{\Delta f}{2}\right) + \delta\left(f + \frac{\Delta f}{2}\right) \right] + \frac{4TA^2}{\pi^2} \left| \frac{\cos(\pi fT)}{(2Tf)^2 - 1} \right|^2$

$$P_s(f) = \frac{1}{16} \left[\delta(f - f_c - \Delta f) + \Delta(f - f_c) + \delta(f + f_c) + \delta(f + f_c + \Delta f) \right]$$

$$+ \frac{4TA^2}{\pi^2} \left\{ \left| \frac{\cos \pi \left(f - f_c - \frac{\Delta f}{2} \right) T}{\left[2T \left(f - f_c - \frac{\Delta f}{2} \right) \right]^2 - 1} \right|^2 + \left| \frac{\cos \pi \left(f + f_c + \frac{\Delta f}{2} \right) T}{\left[2T \left(f + f_c + \frac{\Delta f}{2} \right) \right]^2 - 1} \right|^2 \right\}$$



7.1.7 正交FSK信号及其频率间隔

二个频率分别为 f_1 和 f_2 的正弦信号码元,

$$u_i(t) = \cos(2\pi f_i t + \varphi_i) \quad 0 \leq t \leq T, i = 1, 2$$

相关系数定义为

$$\rho = \frac{2}{T} \int_0^T u_1(t) u_2(t) dt$$

其中被积项为

$$\begin{aligned} & \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) \\ &= \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] - \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 + f_2)t + \varphi_1 + \varphi_2] \end{aligned}$$

和频项在 $(0, T)$ 上积分近似为零, 差频项积分为,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T \cos[2\pi(f_1 - f_2)t + \varphi_1 - \varphi_2] dt \\ &= \frac{1}{T} \left[\frac{\sin[2\pi(f_1 - f_2)T + \varphi_1 - \varphi_2]}{2\pi(f_1 - f_2)} - \frac{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\pi(f_1 - f_2)} \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi T(f_1 - f_2)} \left\{ \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \sin[2\pi(f_1 - f_2)T] \right. \\ \left. + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) [\cos(2\pi(f_1 - f_2)T) - 1] \right\}$$

当 $\varphi_1 \neq \varphi_2$, 若 $\begin{cases} \sin[2\pi(f_1 - f_2)T]/2\pi T(f_1 - f_2) = 0 \\ \{\cos[2\pi(f_1 - f_2)T] - 1\}/2\pi(f_1 - f_2)T = 0 \end{cases}$

即 $|f_1 - f_2| = \frac{k}{T} \quad k = \pm 1, 2, \dots \implies u_1(t) \text{ 和 } u_2(t) \text{ 正交}$

$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 正交的最小频率间隔为 $1/T$

当 $\varphi_1 = \varphi_2$, 若 $\frac{\sin 2\pi(f_1 - f_2)T}{2\pi(f_1 - f_2)T} = 0$

即 $|f_1 - f_2| = \frac{k}{2T} \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \implies u_1(t) \text{ 和 } u_2(t) \text{ 正交}$

$u_1(t)$ 和 $u_2(t)$ 正交的最小频率间隔为 $1/2T$

各种调制方式的频谱利用率比较

调制方式	频谱利用效率 (bps/Hz)
M 进制 ASK, PSK, DPSK, QAM	$0.5 \log_2 M$
MFSK (相干)	$\frac{2 \log_2 M}{(M + 3)}$
MFSK (非相干)	$\frac{\log_2 M}{(M + 1)}$

§ 7.2 二进制数字调制信号的相干解调

连续波数字调制信号的相干解调需要在接收端恢复载波的频率与相位信息，把通带信号相干地搬移到基带。这种相干搬移不损失已调信号的任何信息，所以能够达到最佳的性能。非相干解调一般利用已调信号的包络特性，在解调中不需要恢复载波的相位信息，在实现结构上比较简单，但性能明显不如相干解调。

任何二进制数字键控调制信号可以写成，

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_I(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \theta) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_Q(t - kt) \sin(2\pi f_c t + \theta)$$

其中 I_k 和 Q_k 是同相路和正交路的数据电平， $g_I(t)$ 和 $g_Q(t)$ 是基带脉冲，一般可取为幅度为 A ，持续时间为 T 的方波 $g_T(t)$ 。

在OOK $Q_k = 0, I_k \in \{0, 1\};$

中,

在BPSK中, $Q_k = 0, I_k \in (\pm 1);$ 或 $I_k = 0, Q_k \in \{\pm 1\}$

在2FSK中, $I_k = 1, Q_k \in \{\pm 1\}$

$$g_I(t) = g_T(t) \cos \pi \Delta f t$$

$$g_Q(t) = g_T(t) \sin \pi \Delta f t$$

在相干系统中我们可以假设 $\theta = 0, f_c = N_c / T$, 即载频等于符号率的整数倍。所以

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_I(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)] - \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_Q(t - kT) \sin[2\pi f_c(t - kT)]$$

于是可以在一个符号时间间隔中考虑解调问题。

在一个符号时间间隔中信号码元：

$$s(t) = s_m(t - kT), \quad kT \leq t \leq (k+1)T$$
$$s_m(t) = I_k g_I(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)] \\ - Q_k g_Q(t - kT) \sin[2\pi f_c(t - kT)]$$

在二进制系统中， m 取“0”和“1”， $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 分别代表数据“0”和“1”。

在 $AWGN$ 中二元信号最佳解调和检测可以采用相关接收器或匹配滤波器形式，在 $s_0(t)$ 和 $s_1(t)$ 等概情况下，最大似然检测的误符号率

$$P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|^2}{2N_0}}\right) \quad (6.3.75)$$

其中 $\|\mathbf{s}_0 - \mathbf{s}_1\|$ 为在信号空间中这两个信号点之间的距离。

7.2.2 OOK信号的相干解调

OOK信号的一般形式

$$s_{ook}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)]$$

$$I_n \in \{0, 1\}$$

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

在一个符号间隔中，二个码元信号为

$$s_0(t) = 0 \quad \text{发“0”}$$

$$s_1(t) = g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad \text{发“1”}$$

基信号

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t) \quad 0 \leq t \leq T$$

$$E = \frac{A^2 T}{2}$$

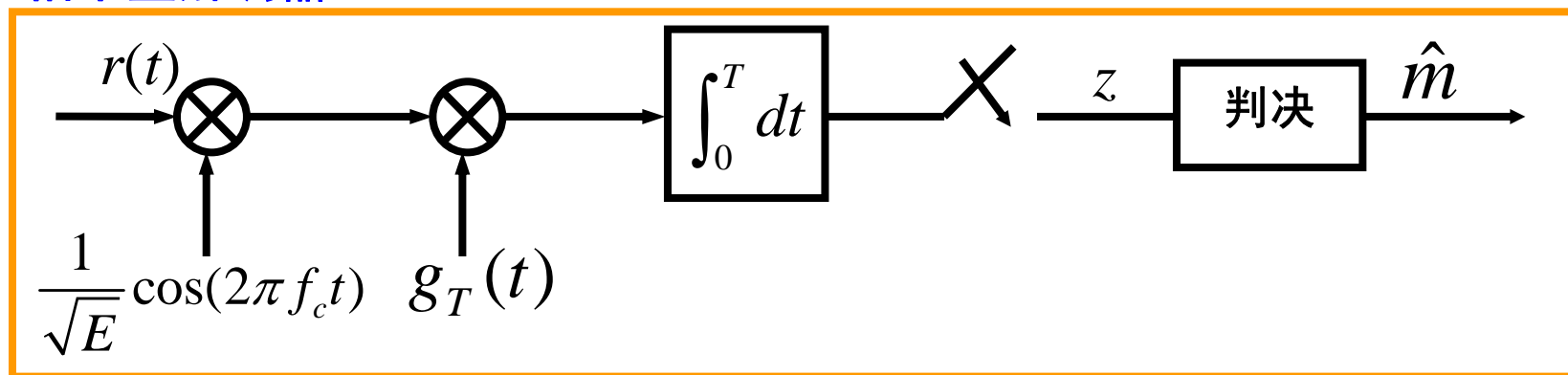
于是

$$s_0(t) = 0 \quad s_1(t) = \sqrt{E} \varphi(t)$$

在信号空间中表示:



相干型解调器:



若发送信号为 $s_m(t)$, 则收到的信号为: $r(t) = s_m(t) + n(t)$

发送“0”条件下: $z = \int_0^T r(t)\varphi(t)dt = n_0$

发送“1”条件下: $z = \int_0^T r(t)\varphi(t)dt = \sqrt{E} + n_1$

其中 n_0 和 n_1 是均值为零, 方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯噪声。

按照最大似然准则: $\hat{m} = \arg \min_{m \in \{0,1\}} \{|z - s_m|\}$

等价于: $z > \frac{\sqrt{E}}{2}$ 判发送 “1”

$z < \frac{\sqrt{E}}{2}$ 判发送 “0”

误码率为: $P_{OOK}(e) = \frac{1}{2} \{P(e | s_0) + P(e | s_1)\}$

$$P(e | s_0) = P(e | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\frac{\sqrt{E}}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

所以

$$P_{OOK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

其中平均信号码元能量 $E_{av} = E / 2$

记平均信噪比为 $\rho = E_{av} / N_0$

$$P_{OOK}(e) = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right)$$

$$\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (\rho \gg 1)$$

实际上从信号空间图可见, $\|s_0 - s_1\|^2 = E$, 代入公式(6.3.87)就得差错概率。

7.2.3 BPSK信号的相干解调

对于A类BPSK调制，已调信号可写成，

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) g_T(t - kT), \quad \varphi_k = \{0, \pi\}$$

或
$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)], \quad I_k \in \{\pm 1\}$$

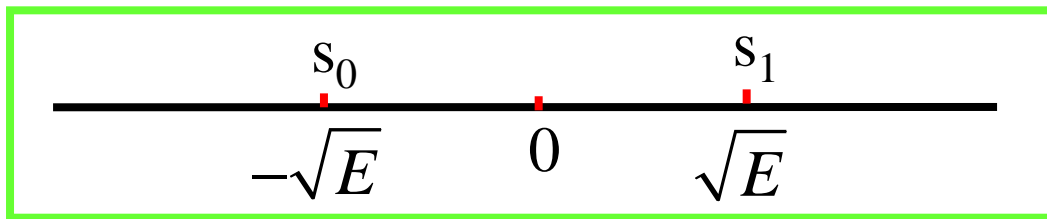
在一个符号间隔（0，T）中考虑信号码元，

$$s_0(t) = -g_T(t) \cos 2\pi f_c t \quad \text{发送“0”}$$

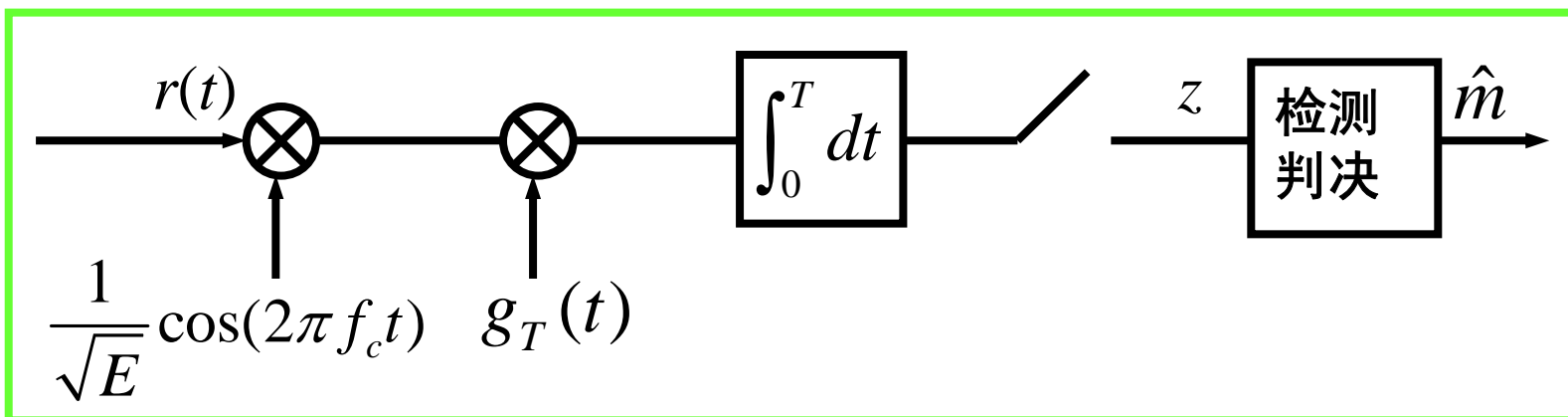
$$s_1(t) = g_T(t) \cos 2\pi f_c t \quad \text{发送“1”}$$

这是一个一维调制，基函数为 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t$,

二个信号在信号空间的座标为，



BPSK系统的相关接收机，



当发送信号 $s_m(t)$ 时，收到信号为， $r(t) = s_m(t) + n(t)$

发送“0”条件下： $z = -\sqrt{E} + n_0$

发送“1”条件下： $z = \sqrt{E} + n_1$

按最大似然概率准则， $\hat{m} = \arg \min_{m \in \{0,1\}} \left\{ \|z - s_m\|^2 \right\}$

等价于
$$\begin{cases} z > 0 & \text{发送 “1”} \\ z < 0 & \text{发送 “0”} \end{cases}$$

误码率为：

$$P_{BPSK}(e) = \frac{1}{2} \{ P(e | s_0) + P(e | s_1) \}$$

$$P_{BPSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{E}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{N_0}} dx = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

因为对BPSK信号， E 就是平均码元能量（也是平均比特能量），

$$P_{BPSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E_{av}}{N_0}}\right)$$

记平均符号信噪比（也是平均比特信噪比）为 $\rho = E_{av} / N_0$

$$P_{BPSK}(e) = Q\left(\sqrt{2\rho}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\rho}\right)$$

$$\approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}, \quad (\rho \gg 1)$$

其实在信号空间中 $\|s_0 - s_1\|^2 = 4E$ ，代入公式（6.3.75）就得到误符号率。

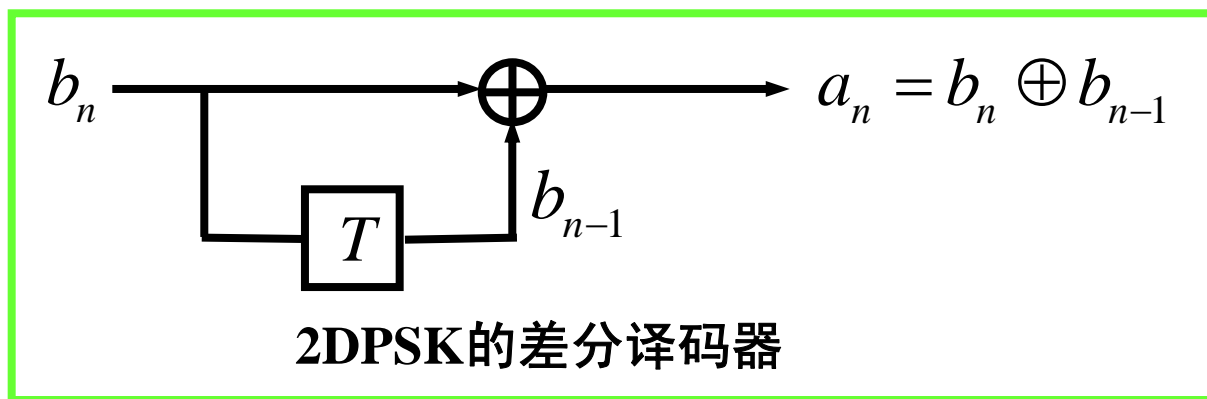
[注意]原则上说，对于OOK和BPSK的相干解调也可以用匹配滤波器来代替相关器，但在实现时有困难。设**位同步采样误差**为， $t_k = T(1 \pm \varepsilon)$ ，由于匹配滤波器仅在 T 时刻输出与相关器输出一样，采样误差使得**匹配滤波输出值降低** $\cos \theta_\varepsilon$ 倍，其中 $\theta_\varepsilon = 2\pi \cdot f_c \varepsilon T$ ，于是**误码率**为

$$P_{BPSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0} \cdot \cos^2 \theta_\varepsilon}\right)$$

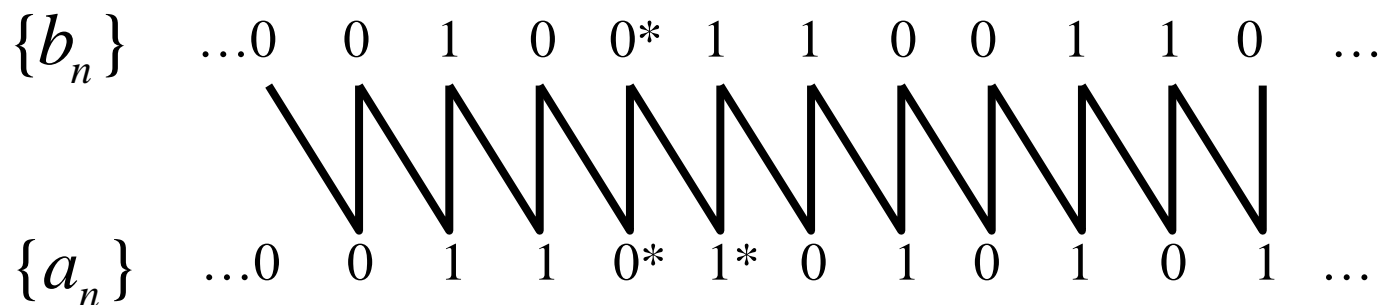
例如当 $\varepsilon = 0.003T$, $T = 0.5ms$, $f_c = 100kHz$ 则 $\theta_\varepsilon = 54^\circ$ ，于是 $\cos^2 \theta_\varepsilon = 0.34$ ，这使性能下降许多。所以用射频匹配滤波器实现是不现实的。

7.2.4 2DPSK的相干解调

在2DPSK相干解调中，首先采用与BPSK相同的相干方式恢复出相对码 $\{b_n\}$ ，然后采用差分译码恢复绝对码 $\{a_n\}$ ，



差分译码会引起误码扩散，如



2DPSK的误码率为

$$P_{DPSK}(e) = 2P_{BPSK}(e)[1 - P_{BPSK}(e)] \approx 2P_{BPSK}(e)$$

由于 $P_{BPSK}(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho},$

$$P_{DBPSK}(e) = \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}, \quad (\rho \gg 1)$$

$$\rho = E_{av} / N_0$$

7.2.5 2FSK信号的相干解调

2FSK信号为

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + 2\pi Q_k \Delta f t) g_T(t - kT)$$

其中 $Q_k \in \{0, 1\}$, $\Delta f = 1/T$, $f_c = N_c / T$, 2FSK信号也可写成,

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c(t - kT) + 2\pi Q_k \Delta f(t - kT)] g_T(t - kT)$$

在一个符号间隔中研究二个码元信号

$$s_0(t) = g_T(t) \cos[2\pi f_c t] \quad \text{表示发“0”}$$

$$s_1(t) = g_T(t) \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t] \quad \text{表示发“1”}$$

由于 $\Delta f = 1/T$, 所以两个码元信号正交。

这是**二维调制**，二个基信号为

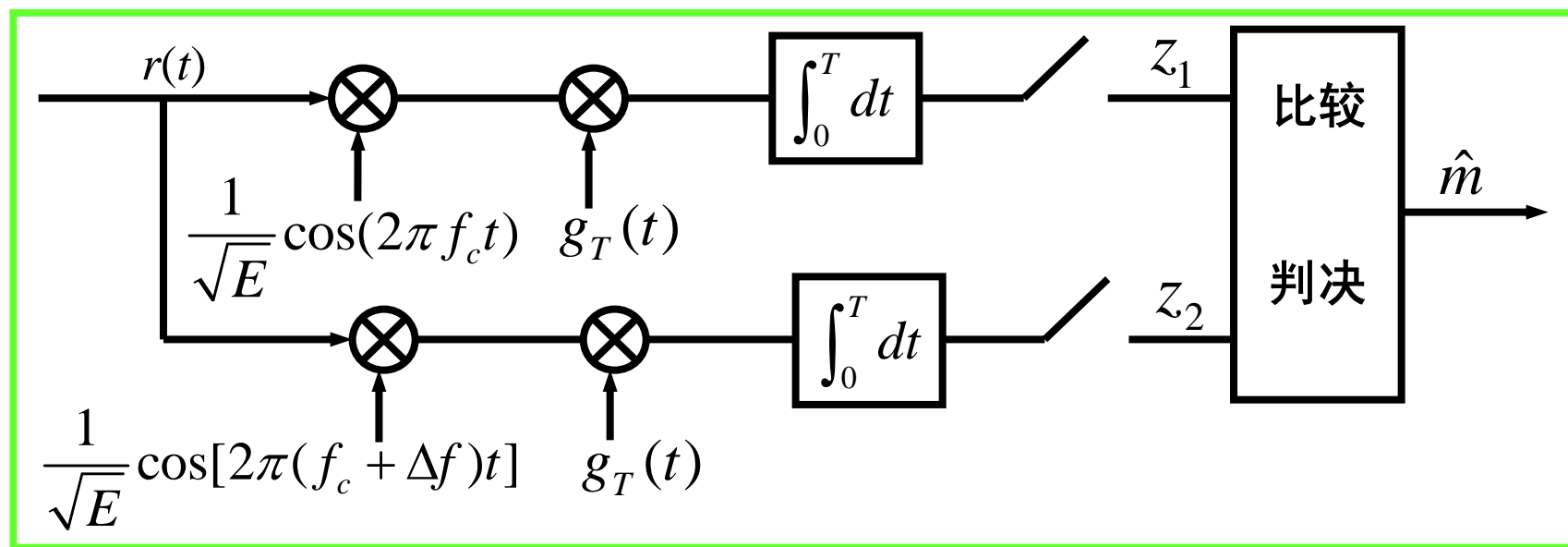
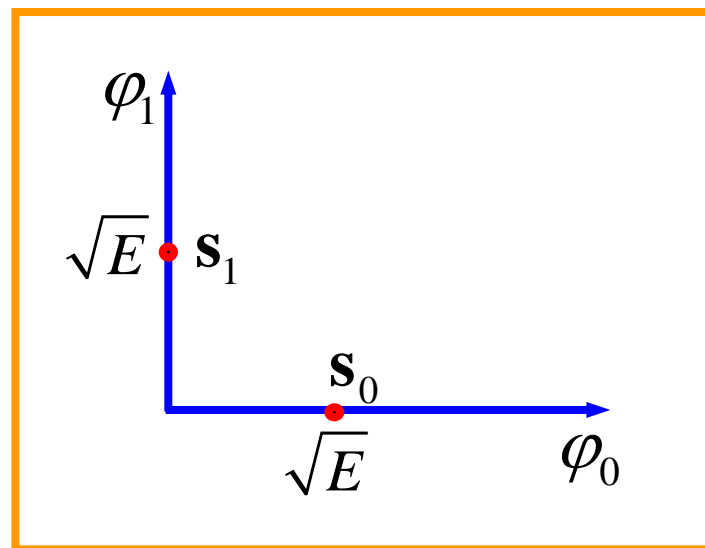
$$\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos(2\pi f_c t),$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos[2\pi(f_c + \Delta f)t]$$

两个码元信号在信号空间中的坐标点为：

$$\mathbf{s}_0 = (\sqrt{E}, 0)$$

$$\mathbf{s}_1 = (0, \sqrt{E})$$



当发送信号为 $s_m(t)$ 时，接收到信号

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

在两个码元等概，等能量情况下，最大似然准则为最大相关准则，即

$$\begin{array}{ll} \text{判发送“0”} & \mathbf{z} \cdot \mathbf{s}_0 > \mathbf{z} \cdot \mathbf{s}_1 \\ \text{判发送“1”} & \mathbf{z} \cdot \mathbf{s}_0 < \mathbf{z} \cdot \mathbf{s}_1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z_1 \cdot \sqrt{E} > z_2 \cdot \sqrt{E} \\ z_1 \cdot \sqrt{E} < z_2 \cdot \sqrt{E} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} z_1 - z_2 > 0 \\ z_1 - z_2 < 0 \end{array}$$

在发送 $s_0(t)$ 条件下

$$z_1 = \sqrt{E} + n_1, \quad z_2 = n_2$$

在发送 $s_1(t)$ 条件下

$$z_1 = n_1, \quad z_2 = \sqrt{E} + n_2$$

误码率

$$P_{2FSK}(e) = \frac{1}{2} \{ P(e | \mathbf{s}_0) + P(e | \mathbf{s}_1) \}$$

由对称性

$$P(e | \mathbf{s}_0) = P(e | \mathbf{s}_1)$$

$$P_{2FSK}(e) = P(e | \mathbf{s}_0) = P\{n_1 - n_2 < -\sqrt{E}\}$$

记 $\zeta = n_1 - n_2$ ，是零均值，方差为 N_0 的高斯随机变量，所以

$$P_{2FSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{E}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2N_0}\right\} dx = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

对于2FSK来说，两个码元信号等能量 $E_{av} = E$ ，所以，

$$P_{2FSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

记 $\rho = E_{av} / N_0$

$$\begin{aligned} P_{2FSK} &= Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad (\rho \gg 1) \end{aligned}$$

7.2.6 二进制数字调制信号相干解调的性能比较

调制方式	
OOK	$P_{OOK}(e) = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}$
BPSK	$P_{BPSK}(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(\sqrt{\rho}) \approx \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}$
2DPSK	$P_{DPSK}(e) \approx 2P_{BPSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho}} e^{-\rho}$
2FSK	$P_{2FSK} = Q(\sqrt{\rho}) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{-\frac{\rho}{2}}$

§ 7.3 M进制数字调制信号的相干解调

在M进制数字调制系统中，M进数据用M个不同的码元信号表示。

如果每隔 T 时间发送一个码元信号，即波特率 $R_B = 1/T$ ，但是比

特率为 $R_b = \log M \cdot R_B$ (比特/秒)。在M进制调幅(包括正交调幅)和

调相系统中，**信号宽带是由符号率决定的**，所以M进制调制信号所

需要的带宽与二进制调制信号相同，于是M进制调制的频带利用率

远高于二进数字调制。**M进制数字调制一般称为频谱高效调制。**

7.3.1 MASK相干解调

M进制ASK信号的一般形式为

$$s_{MASK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos[2\pi f_c(t - kT)]$$

其中 $I_k \in \{A_m = A_0 + m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1\}$

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

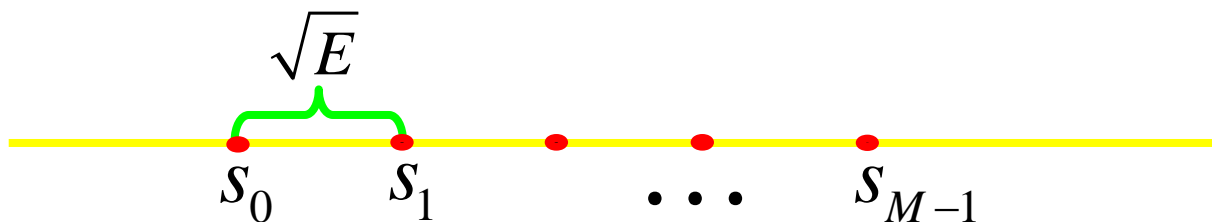
在一个符号间隔(0, T)中, 这M个码元信号写为,

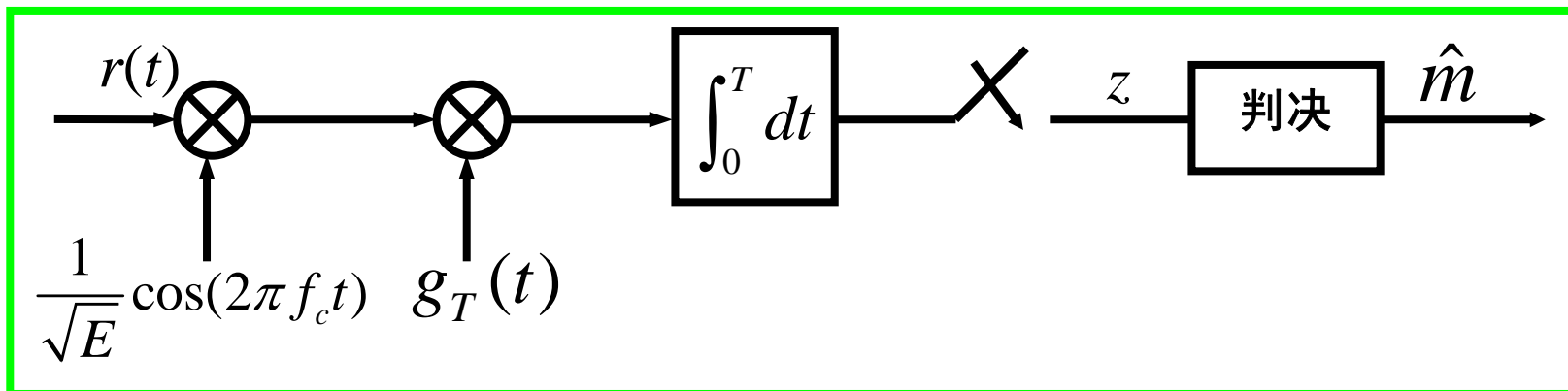
$$s_m(t) = A_m g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

一维调制, 基信号 $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad E = A^2 T / 2$

码元信号点的座
标,

$$s_m = A_m \sqrt{E}, \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$





设发送信号为 $s_m(t)$ ，则收到信号为，

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

相关器输出采样值为，

$$z = A_m \sqrt{E} + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $N_0 / 2$ 的高斯变量。当信号码元是等概率

发送时，最大似然准则等价于最小距离准则。平均错误概率

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) \quad (\text{推导见[例6.3.9]})$$

由于MASK码元信号的平均能量为，

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \left\{ \sum_{m=0}^{M-1} A_m^2 E \right\} = \frac{E}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (A_0 + m)^2 \\ &= E \left[A_0^2 + A_0(M-1) + \frac{1}{6}(M-1)(2M-1) \right] \end{aligned}$$

当 $A_0 = 0$ 时，即M进制OOK调制，则

$$E_{av} = \frac{E}{6}(M-1)(2M-1)$$

$$E = \frac{6E_{av}}{(M-1)(2M-1)}$$

所以

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)(2M-1)N_0}} \right)$$

当 $M=2$ 时，上式正是OOK调制信号相干解调的误码公式。

当 $A_0 = -(M-1)/2$ ，这时信号码元对称于零点排列，

$$E_{av} = \frac{(M^2 - 1)E}{12}$$

$$E = \frac{12E_{av}}{M^2 - 1}$$

所以

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M^2 - 1)N_0}}\right)$$

记平均符号信噪比为 $\rho = E_{av} / N_0$ ，则

$$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\rho}{(M^2 - 1)}}\right)$$

当 $M = 2$ 时，正好是BPSK信号相干解调的误码率(7.2.29)

7.3.2 MPSK的相干解调

对于M=4, N=1的QPSK信号可以写成:

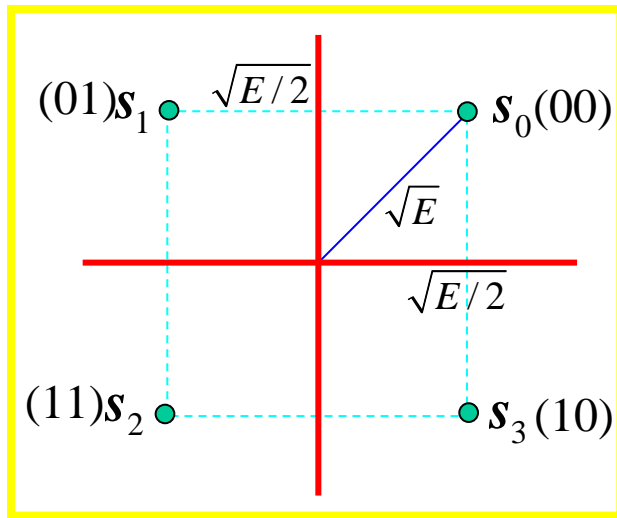
$$\begin{aligned}s(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f_c t + \varphi_k) g_T(t - kT) \\&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \cos \varphi_k \cdot g_T(t - kT) \cdot \cos[2\pi f_c(t - kT)] - \right. \\&\quad \left. \sin \varphi_k \cdot g_T(t - kT) \cdot \sin[2\pi f_c(t - kT)] \right\}\end{aligned}$$

$$\text{其中 } \varphi_k \in \left\{ \frac{2m+1}{4}\pi, \quad m=0,1,2,3 \right\}$$

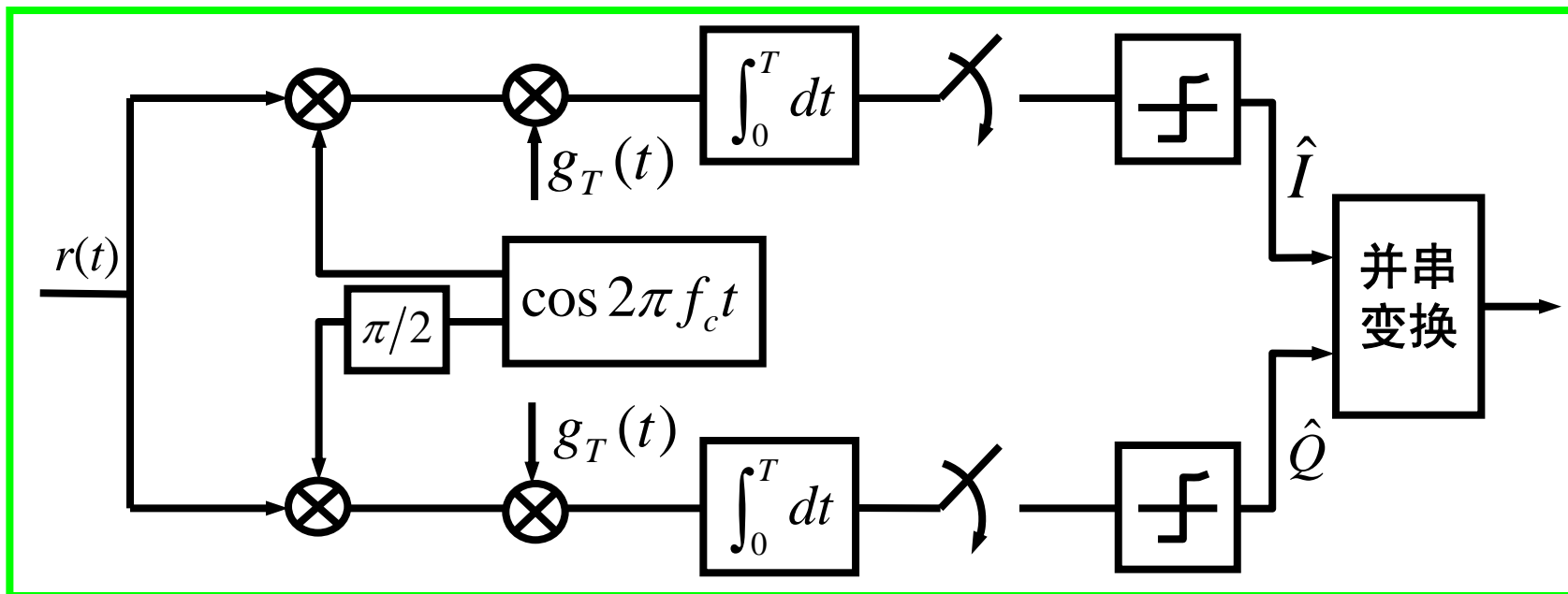
在一个符号间隔(0, T)中, 码元信号为,

$$\begin{aligned}s_m(t) &= \cos \varphi_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t) - \sin \varphi_m g_T(t) \sin(2\pi f_c t) \\&= \frac{\sqrt{2}}{2} (I \cos(2\pi f_c t) - Q \sin 2\pi f_c t) g_T(t), \quad m=0, 1, 2, 3\end{aligned}$$

其中 $I = \pm 1, Q = \pm 1$



因此**QPSK**信号相当于二路正交载波的**BPSK**，它的相干解调原理图：



设BPSK的差错概率为 $P(e)$ ，则QPSK相干解调的符号正确解调概率为，

$$P_{QPSK}(c) = [1 - P(e)]^2$$

所以QPSK相干解调的误符号率为

$$P_{QPSK}(e) = 1 - P_{QPSK}(c) = 2P(e) \left(1 - \frac{1}{2}P(e) \right)$$

现在BPSK信号点之间距离是 $\sqrt{2E}$ ，所以 $P(e) = Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$

于是
$$P_{QPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$$

平均信号码元能量 $E_{av} = E$ ，所以

$$P_{QPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

采用**Gray码映射**，即相位相邻信号点仅相差一个比特，则误比特率为：

$$P_{QPSK}(be) \approx Q\left(\sqrt{\frac{E_{av}}{N_0}}\right)$$

QPSK符号代表两个比特，**平均比特能量为平均符号能量一半**，即

$E_{bav} = E_{av} / 2$ ，所以

$$P_{QPSK}(be) \approx Q\left(\sqrt{\frac{2E_{bav}}{N_0}}\right) \quad (\text{与BPSK一样})$$

对于的**MPSK**， **M 个码元信号为**

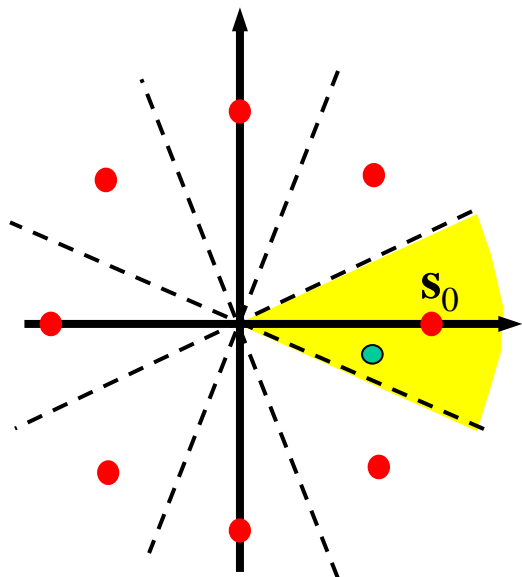
$$s_m(t) = [\cos \varphi_m \cos(2\pi f_c t) - \sin \varphi_m \sin(2\pi f_c t)] g_T(t), \quad t \in [0, T]$$

其中 $\varphi_m = 2\pi \cdot m / M$, $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1$

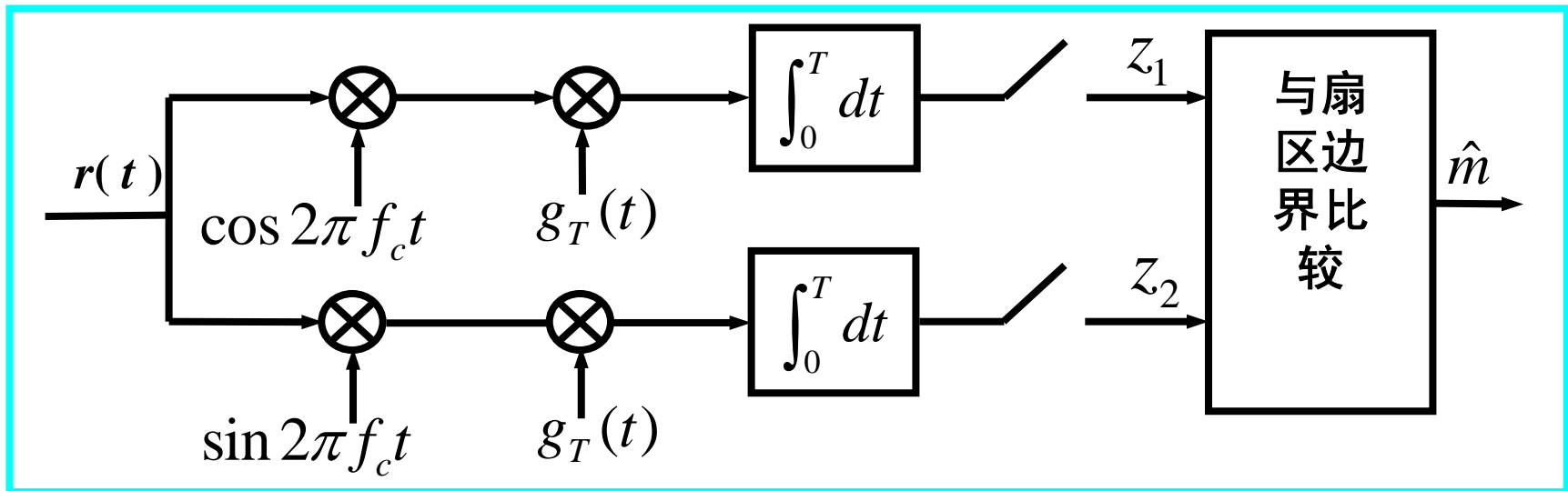
相应二维信号空间的基矢量为

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

M 个信号矢量点均匀分布在半径为 \sqrt{E} 的圆周上，



在等概发送信号码元情况下，最大似然接收相当于按最近距离作判决。在信号空间中作 **M 个对称扇区**，每个扇区中包含一个信号点。如接收矢量点落在某扇区内，则判定发送信号是扇区所含的那个信号点。



由于对称性，平均符号错误概率等于发送 $s_0(t)$ ，但接收到矢量 (z_1, z_2) 不在第0号扇区的概率，即

$$P_{MPSK}(e) = P \left\{ \left| \arctan \frac{z_2}{z_1} \right| > \frac{\pi}{M} \mid s_0 \right\}$$

当发送 $s_0(t)$ 条件下，接收到信号

$$r(t) = s_0(t) + n(t)$$

其中 $n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0 / 2$ 的白高斯噪声。

所以 $z_1 = \sqrt{E} \cos \varphi_0 + n_1 = \sqrt{E} + n_1$, $z_2 = \sqrt{E} \sin \varphi_0 + n_2 = n_2$

n_1 和 n_2 是独立，同分布高斯变量，它的均值为零，方差 $\sigma^2 = N_0 / 2$,

因此
$$p_{Z_1 Z_2}(z_1, z_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(z_1 - \sqrt{E})^2 + z_2^2}{2\sigma^2} \right\}$$

令
$$V = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2} \quad \Theta = \arctan \frac{Z_2}{Z_1}$$

$$p_{V\Theta}(v, \theta) = \frac{v}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{(v - \sqrt{E} \cos \theta)^2 + E \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right\}$$

$$\begin{aligned} p_{\Theta}(\theta) &= \int_0^{\infty} p_{V\Theta}(v, \theta) dv \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp \left\{ \frac{-E \sin^2 \theta}{2\sigma^2} \right\} \int_0^{\infty} v \exp \left\{ -\frac{\left(v - \frac{\sqrt{E}}{\sigma} \cos \theta \right)^2}{2} \right\} dv \end{aligned}$$

记符号信噪比为 $\rho = \frac{E}{2\sigma^2} = \frac{E}{N_0}$

$$p_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \exp\{-2\rho \sin^2 \theta\} \int_0^{\infty} v \exp\left\{-\frac{(v - \sqrt{2\rho} \cos \theta)^2}{2}\right\} dv$$

于是MPSK符号差错概率为

$$P_{MPSK}(e) = 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} p_{\Theta}(\theta) d\theta$$

当 $\rho = E / N_0 \gg 1$, 以及 $|\theta| \leq \pi / 2$ 时,

$$p_{\Theta}(\theta) \approx \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos \theta \cdot e^{-2\rho \sin^2 \theta}$$

$$\begin{aligned} P_{MPSK}(e) &= 1 - \int_{-\frac{\pi}{M}}^{\frac{\pi}{M}} \sqrt{\frac{2\rho}{\pi}} \cos \theta \cdot e^{-2\rho \sin^2 \theta} d\theta \\ &\approx 2Q\left(\sqrt{2\rho} \cdot \sin \frac{\pi}{M}\right) \end{aligned}$$

由于相位错误最可能是错成相邻的两个信号矢量，所以当采用**Gray码**对信号矢量进行编码时，一个符号错误只引起一个比特错误，于是误比特率为：

$$P_{MPSK}(be) = \frac{1}{k} P_{MPSK}(e)$$

其中

$$k = \log_2 M$$

由于比特信噪比 ρ_b 和符号信噪比 ρ 关系为，

$$\rho_b = \frac{\rho}{\log_2 M}$$

所以

$$P_{MPSK}(be) = \frac{2}{k} Q\left(\sqrt{2k\rho_b} \cdot \sin\frac{\pi}{M}\right)$$

当**M=4**时，与前面推导的QPSK结果一致。

7.3.4 MQAM的相干解调

MQAM调制可以看成二路ASK通过正交载波复用，在同一个频道上传输，所以MQAM的带宽与ASK调制一样。MQAM信号形式为

$$s_{MQAM}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k g_T(t - kT) \cos 2\pi f_c(t - kT) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} Q_k g_T(t - kT) \sin 2\pi f_c(t - kT)$$

在一个符号间隔 $(0, T)$ 中，MQAM的信号码元为，

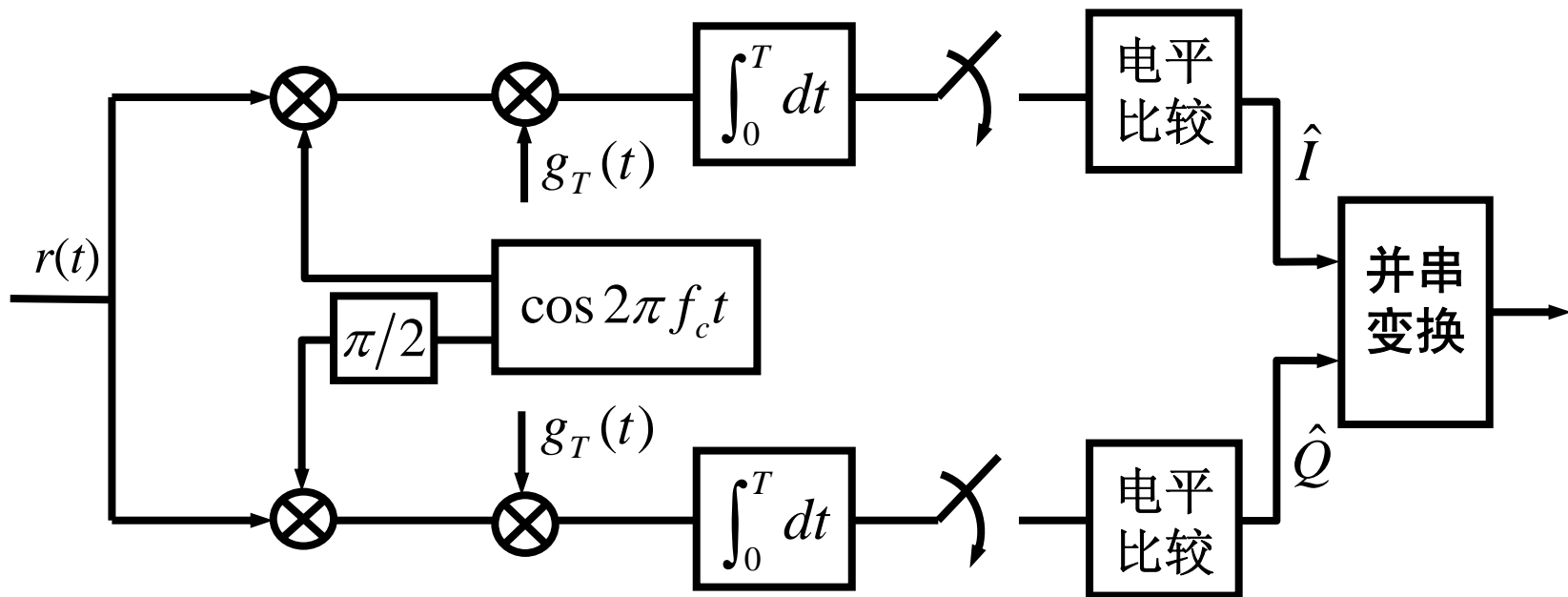
$$s_m(t) = I_m g_T(t) \cos 2\pi f_c t + Q_m g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

$$I_m, Q_m \in \left\{ -\frac{K-1}{2} + i, i = 0, 1, \dots, K-1 \right\}$$

在二维信号空间中两个基函数为，

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} \cos 2\pi f_c t, \quad \varphi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} \sin 2\pi f_c t$$

信号点坐标为： $\mathbf{s}_m = (I_m \sqrt{E}, Q_m \sqrt{E})$, $m = 0, 1, \dots, M$, $M = K^2$



由于MQAM是二路正交，对称ASK组成，所以一般**只能用相干方式解调**。由于对称性， I 路和 Q 路差错概率相同，记为 P ，于是MQAM符号差错概率为： $P_{MQAM}(e) = 1 - (1 - P)^2 \approx 2P, \quad P \ll 1$

其中 P 是 K 进制ASK符号的差错概率。由公式(7.3.6)

$$P = \frac{2(K-1)}{K} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

所以 $P_{MQAM}(e) \approx 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right)$

由于MQAM信号码元的平均能量为

$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{E}{4K^2} \sum_{i=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{K-1} \left\{ (2i+1-K)^2 + (2j+1-K)^2 \right\} \\ &= \frac{E}{6} (K^2 - 1) = \frac{E}{6} (M - 1) \end{aligned}$$

所以 $E = \frac{6E_{av}}{(M - 1)}$

$$P_{MQAM}(e) = 4 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}} \right) Q \left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M - 1)N_0}} \right)$$

MQAM和MPSK比较

对于**16QAM**，当 $\frac{E_{av}}{N_0} = 100$ 时， $P_{16QAM}(e) = 1.2 \times 10^{-5}$

在同样信噪比下，**16PSK**误码率为 $P_{16PSK}(e) = 6 \times 10^{-3}$

在大信噪比情况下比较 $P_{MQAM}(e)$ 和 $P_{MPSK}(e)$

$$P_{MPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}} \cdot \sin \frac{\pi}{M}\right) \quad P_{MQAM}(e) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right)Q\left(\sqrt{\frac{3E_{av}}{(M-1)N_0}}\right)$$

信噪比增益为

$$\gamma_M \triangleq \left(\frac{SNR_{MQAM}}{SNR_{MPSK}}\right) = \frac{3}{2(M-1) \sin^2 \frac{\pi}{M}}$$

当 $M = 4$ ， $\gamma_M = 1$ ，所以**4PSK**和**4QAM**性能相当；当M充分大时，

$\sin \frac{\pi}{M} \approx \frac{\pi}{M}$ ，于是

$$\gamma_M = \frac{3M^2}{2(M-1)\pi^2} \approx \frac{3M}{2\pi^2}$$

表 7.4.1 MQAM 相对于 MPSK 的信噪比增益

M	$10\log_{10} \gamma_M (db)$
8	1.65
16	4.20
32	7.02
64	9.95

7.3.5 MFSK相干解调

在MFSK系统中，已调信号可写成，

$$s_{MFSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi f_c t + 2\pi Q_k \Delta f t] g_T(t - kt)$$

其中 $Q_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

对于 $f_c = N_c / T$, $\Delta f = 1/T$ 的正交FSK信号来说，它可写成

$$s_{MFSK}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos[2\pi(f_c + Q_k \Delta f)(t - kT)] g_T(t - kT)$$

在一个符号间隔(0,T)中，MFSK信号码元为

$$s_m(t) = g_T(t) \cos[2\pi(f_c + m\Delta f)t] , \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

MFSK是M维正交调制，在M维信号空间中，基矢量为

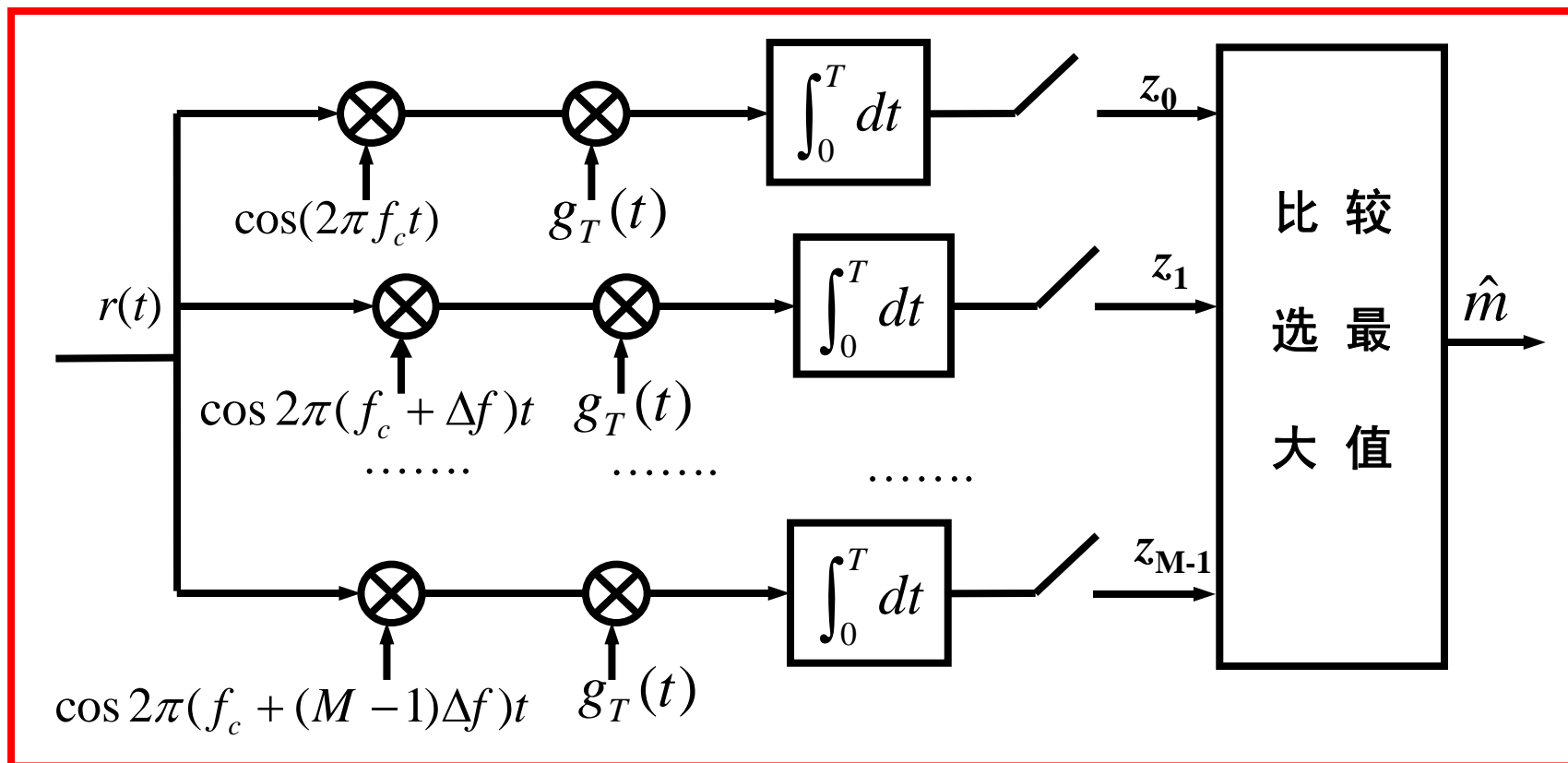
$$\varphi_m(t) = \frac{1}{\sqrt{E}} g_T(t) \cos[2\pi(f_c + m\Delta f)t] , \quad m = 0, 1, \dots, M-1$$

M个信号码元矢量的座标为:

$$\mathbf{s}_m = (0, 0, \dots, \sqrt{E}, 0, \dots, 0)$$

第m位

相干相关解调器



当发送信号码元为 $s_m(t)$ 时，接收到信号为

$$r(t) = s_m(t) + n(t)$$

经相关、采样后，

$$z_i = n_i, \quad i \neq m$$

$$z_m = \sqrt{E} + n_m$$

其中 $n_i, i = 0, 1, \dots, M-1$ 为相互独立，零均值，方差为 $N_0/2$ 的高斯随机变量。在码元等概率发送条件下，由于码元是等能量的，所以最大似然

判决是选最大相关支路，即

$$\hat{m} = \arg \max_m \{z_m\}$$

误码概率由式(6.3.103)给出

$$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2E/N_0})^2}{2} \right] dx$$

记码元信噪比为 $\rho = \frac{E}{N_0}$

$$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho})^2}{2} \right] dx$$

MFSK是M进制正交信号，误比特率约为误符号率的一半，

$$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)} P_{MFSK}(e)$$

同时比特信噪比和符号信噪比关系是

$$\rho_b = \frac{\rho}{\log_2 M}$$

所以误比特率与比特信噪比关系：

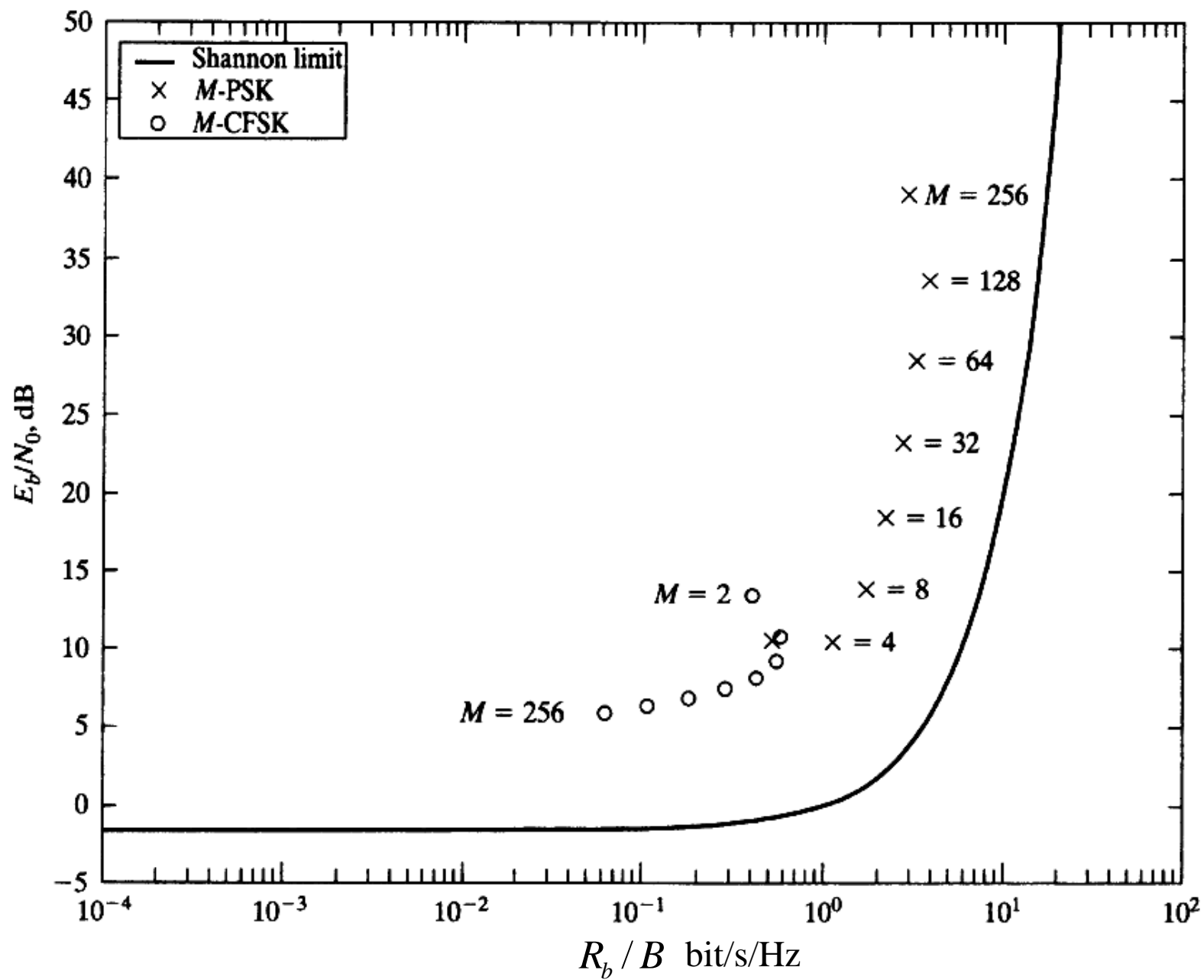
$$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho_b \log_2 M})^2}{2} \right] dx$$

7.3.6 M进制数字调制信号相干解调性能比较

调制方式	误符号率	误比特率
MASK	$P_{MASK}(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6\rho}{(M^2-1)}}\right)$	$P_{MASK}(be) \approx P_{MASK}(e) / \log_2 M$
QPSK	$P_{QPSK}(e) \approx 2Q(\sqrt{\rho})$	$P_{QPSK}(be) \approx 0.5 P_{QPSK}(e)$
MPSK	$P_{MPSK}(e) \approx 2Q\left(\sqrt{2\rho} \cdot \sin\frac{\pi}{M}\right)$	$P_{MPSK}(be) \approx P_{MPSK}(e) / \log_2 M$
MQAM	$P_{MQAM}(e) = 4\left(1 - \frac{1}{\sqrt{M}}\right) Q\left(\sqrt{\frac{3\rho}{(M-1)}}\right)$	$P_{MQAM}(be) \approx P_{MQAM}(e) / \log_2 M$
MFSK	$P_{MFSK}(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \cdot \exp\left[-\frac{(x - \sqrt{2\rho})^2}{2}\right] dx$	$P_{MFSK}(be) = \frac{M}{2(M-1)} P_{MFSK}(e)$

下表给出了M进制PSK, QAM, FSK的功率有效性和频率有效性:

Modulation Scheme		E_b/N_0 for BER = 10^{-6}	Bandwidth Efficiency
PSK:	$M = 2$	10.5	0.5
	$M = 4$	10.5	1.0
	$M = 8$	14.0	1.5
	$M = 16$	18.5	2.0
	$M = 32$	23.4	2.5
	$M = 64$	28.5	3.0
	$M = 128$	33.8	3.5
	$M = 256$	39.2	4.0
QAM:	$M = 4$	10.5	1.0
	$M = 16$	15.0	2.0
	$M = 64$	18.5	3.0
	$M = 256$	24.0	4.0
	$M = 1024$	28.0	5.0
	$M = 4096$	33.5	6.0
FSK:	$M = 2$	13.5	0.40
	$M = 4$	10.8	0.57
	$M = 8$	9.3	0.55
	$M = 16$	8.2	0.42
	$M = 32$	7.5	0.29
	$M = 64$	6.9	0.18
	$M = 128$	6.4	0.11
	$M = 256$	6.0	0.06



§ 7.4 数字调制信号的非相干解调

在许多实际应用中，接收到的信噪比可能足够高，即使采用非最佳的非相干解调也能获得令人满意的误码性能。这时就没有必要采用复杂的相干解调。

在非相干解调中接收机没有关于接收到信号载波的相位信息，但我们可以合理地假定非相干解调系统所提供的本地振荡信号频率与接收到信号一样，相位差是一个 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布随机变量 θ ，同时可以合理地认为在一个符号间隔中相位差 θ 几乎不变。

[例如] 在一个载波频率 $f_c=100\text{MHz}$ ，符号率 $R_B=100\text{K}$ 波特的数字传输系统中，目前采用晶体稳频的接收机的频率误差可以做到 10^{-6} ，因此在一个符号间隔中相位误差仅，

$$100 \times 10^6 \times 10^{-6} \times 360^\circ / 100 \times 10^3 = 0.36^\circ$$

即 100Hz 的频率差在一个符号间隔中仅引起 0.36° 的相位误差变化。

7.4.1 OOK信号的非相干解调

考虑在一个符号间隔 $(0, T)$ 中接收到的信号,

$$r(t) = A_m g_T(t) \cos(2\pi f_c t + \theta) + n(t)$$

其中 $g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad A_m \in \{0, 1\}$

θ 为 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布随机变量, $n(t)$ 为零均值, 功率谱密度为 $N_0/2$ 的加白高斯噪声。 $r(t)$ 可写成,

$$r(t) = A_m g_T(t) \cos \theta \cdot \cos 2\pi f_c t - A_m g_T(t) \sin \theta \cdot \sin 2\pi f_c t + n(t)$$

可以看成是二维调制, 二个基函数为:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_c t, \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \sin 2\pi f_c t$$

其中 $E = A^2 T / 2$

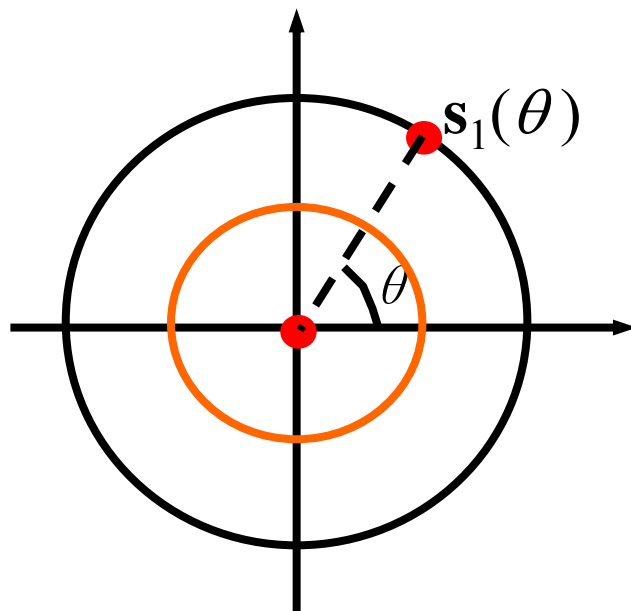
当存在不确定的随机相位时，两个可能的接收信号码元为，

$$s_0(t) = 0 \quad 0 < t < T$$

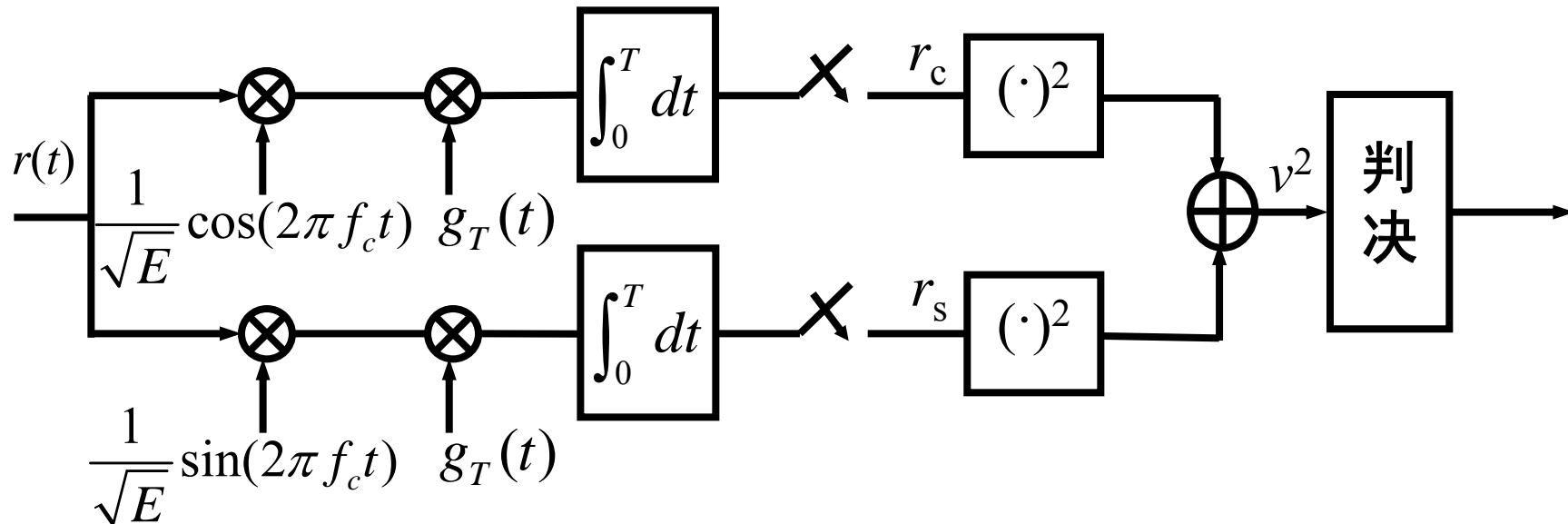
$$s_1(t) = \sqrt{E} [\cos \theta \cdot \varphi_1(t) - \sin \theta \cdot \varphi_2(t)]$$

相应的二个信号点是和 θ 有关的随机点：

$$\mathbf{s}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{s}_1(\theta) = (\sqrt{E} \cos \theta, -\sqrt{E} \sin \theta)$$



非相干相关接收原理方框图



若 s_m 发送，则非相干相关接收输出的二个样本为：

$$r_c = \sqrt{E} A_m \cos \theta + n_c, \quad r_s = \sqrt{E} A_m \sin \theta + n_s$$

其中
$$n_c = \int_0^T n(t) \cdot \varphi_1(t) dt, \quad n_s = \int_0^T n(t) \cdot \varphi_2(t) dt$$

为独立，零均值，方差为 $N_0 / 2$ 的高斯噪声。

在 A_m 和 θ 给定条件下 (r_c, r_s) 的联合分布为

$$P_{R_c R_s}(r_c, r_s | A_m, \theta) = \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{(r_c - \sqrt{E_m} \cos \theta)^2 + (r_s - \sqrt{E_m} \sin \theta)^2}{N_0} \right\}$$

其中 $E_m = A_m E$

$$\begin{aligned} P_{R_c R_s}(r_c, r_s | A_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r_c, r_s | A_m, \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{r_c^2 + r_s^2 + E_m}{N_0} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{\sqrt{E_m} [r_c \cos \theta + r_s \sin \theta]}{N_0 / 2} \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{r_c^2 + r_s^2 + E_m}{N_0} \right\} \cdot I_0 \left(\frac{\sqrt{E_m (r_c^2 + r_s^2)}}{N_0 / 2} \right) \end{aligned}$$

作变量变换 $R_c = V \cos \Theta$, $R_s = V \sin \Theta$

$$\text{得到 } P_{V\Theta}(v, \theta | A_m) = \frac{v}{\pi N_0} \exp \left\{ -\frac{v^2 + E_m}{N_0} \right\} I_0 \left\{ \frac{\sqrt{E_m} \cdot v}{N_0 / 2} \right\}$$

$$P_V(v | A_m) = \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2 + E_m}{N_0}\right\} I_0\left\{\frac{\sqrt{E_m} v}{N_0/2}\right\}$$

对于OOK调制，

$$P_V(v | A_m = 0) = \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2}{N_0}\right\}$$

$$P_V(v | A_m = 1) = \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2 + E}{N_0}\right\} I_0\left\{\frac{\sqrt{E} v}{N_0/2}\right\}$$

当 $P(A_0 = 0) = P(A_1 = 1) = 1/2$ 时，采用最大似然准则，

$$\left. \begin{array}{l} \text{判发 } s_1 \quad \frac{P_V(v | A_1)}{P_V(v | A_0)} > 1 \\ \text{判发 } s_2 \quad \frac{P_V(v | A_1)}{P_V(v | A_0)} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} I_0\left(\frac{\sqrt{E} v}{N_0/2}\right) > e^{\frac{E}{N_0}} \\ I_0\left(\frac{\sqrt{E} v}{N_0/2}\right) < e^{\frac{E}{N_0}} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} v > \gamma_T \\ v < \gamma_T \end{array} \right\}$$

其中 γ_T 满足
$$I_0\left(\frac{\sqrt{E} \gamma_T}{N_0/2}\right) = e^{\frac{E}{N_0}}$$

当 x 充分大时, $\ln I_0(x) \approx x$, 所以当信噪比 $\frac{E}{N_0}$ 充分大时

$$\frac{\sqrt{E}\gamma_T}{N_0/2} = \frac{E}{N_0} \iff \gamma_T = \frac{\sqrt{E}}{2}$$

所以OOK非相干解调的误码率

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{1}{2} \{ P(e | A_1) + P(e | A_0) \} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\gamma_T} \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2 + E}{N_0}\right\} \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right) dv \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\gamma_T}^{\infty} \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2}{N_0}\right\} dv \end{aligned}$$

第二项

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma_T}^{\infty} \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2}{N_0}\right\} dv = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{4N_0}}$$

第一项： 当 $\frac{\sqrt{E}}{N_0/2} \gg 1$ 时， $P_V(v | A_m = 1)$ 非常近似于均值为 \sqrt{E} ，

方差为 $N_0/2$ 的正态分布，所以

$$\frac{1}{2} \int_0^{\gamma_T} \frac{v}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v^2 + E}{N_0}\right\} \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v}{N_0/2}\right) dv \approx \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$$

OOK误码率 $P_e = \frac{1}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right) + \frac{1}{2} e^{-\frac{E_{av}}{2N_0}}$

由于**平均符号能量** $E_{av} = E/2$ ， **记** $\rho = E_{av}/N_0$

$$P_e = \frac{1}{2} Q(\sqrt{\rho}) + \frac{1}{2} e^{-\frac{\rho}{2}}$$

$$P_e \approx \frac{1}{2} e^{-\frac{\rho}{2}}, \quad \rho \gg 1$$

7.4.2 2FSK信号非相干解调

在2FSK信号的非相干解调系统中，接收到信号可以写成：

$$r(t) = g_T(t) \cos(2\pi f_i t + \theta_i) + n(t), \quad i = 0, 1$$

其中

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad |f_0 - f_1| = \frac{k}{2T}$$

θ_0, θ_1 是二个在 $(0, 2\pi)$ 均匀分布的独立随机变量。 $n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。 $r(t)$ 可写成：

$$r(t) = g_T(t) \cos \theta_i \cos 2\pi f_i t - g_T(t) \sin \theta_i \sin 2\pi f_i t + n(t)$$

可以看成是4维调制，四个基函数为

$$\varphi_{0c}(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad \varphi_{0s}(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \sin 2\pi f_0 t$$

$$\varphi_{1c}(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \cos 2\pi f_1 t, \quad \varphi_{1s}(t) = \sqrt{\frac{1}{E}} g_T(t) \sin 2\pi f_1 t$$

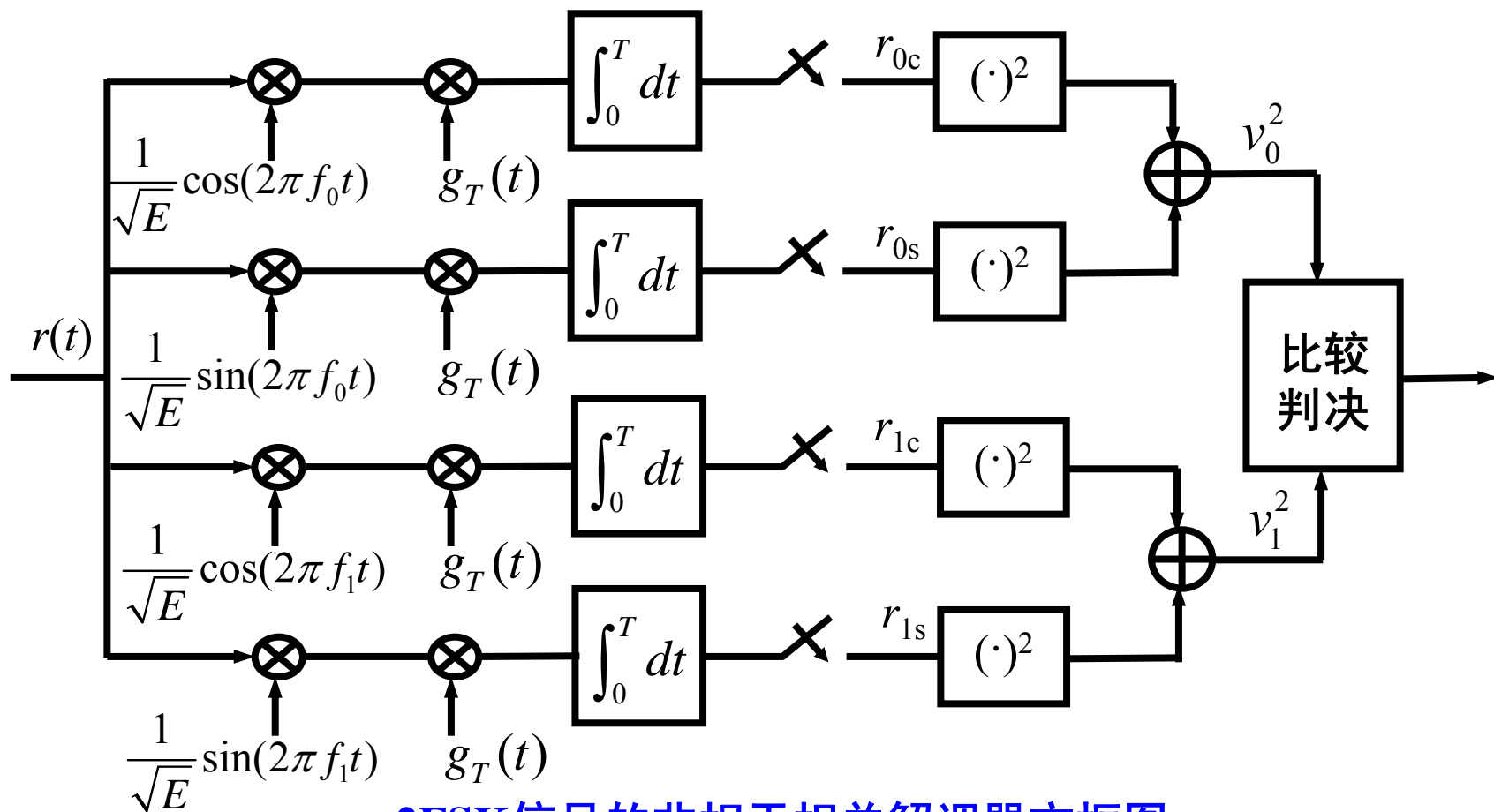
$$E = A^2 T / 2$$

相应的两个信号码元,

$$s_i(t) = \sqrt{E} [\cos \theta_i \cdot \varphi_{ic}(t) - \sin \theta_i \cdot \varphi_{is}(t)] , \quad i = 0, 1$$

在信号空间中对应的是与 θ_0, θ_1 有关的两个随机点:

$$\mathbf{s}_0 = (\sqrt{E} \cos \theta_0, \sqrt{E} \sin \theta_0, 0, 0), \quad \mathbf{s}_1 = (0, 0, \sqrt{E} \cos \theta_1, \sqrt{E} \sin \theta_1)$$



2FSK信号的非相干相关解调器方框图

假设 \mathbf{s}_0 发送，则非相干相关接收机输出四个采样值为

$$r_{0c} = \sqrt{E} \cos \theta_0 + n_{0c}, \quad r_{0s} = \sqrt{E} \sin \theta_0 + n_{0s}$$

$$r_{1c} = n_{1c}, \quad r_{1s} = n_{1s}$$

其中
$$n_{0c} = \int_0^T n(t) \cdot \varphi_{0c}(t) dt, \quad n_{0s} = \int_0^T n(t) \cdot \varphi_{0s}(t) dt$$

$$n_{1c} = \int_0^T n(t) \cdot \varphi_{1c}(t) dt, \quad n_{1s} = \int_0^T n(t) \varphi_{1s}(t) dt$$

$n_{0c}, n_{0s}, n_{1c}, n_{1s}$ 是彼此独立，零均值，方差为 $N_0 / 2$ 的高斯变量。

$$\begin{aligned} p(r_{0c}, r_{0s}, r_{1c}, r_{1s} | \mathbf{s}_0, \theta_0) &= \left(\frac{1}{N_0 \pi} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{r_{1c}^2 + r_{1s}^2}{N_0} \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ -\frac{(r_{0c} - \sqrt{E} \cos \theta_0)^2 + (r_{0s} - \sqrt{E} \sin \theta_0)^2}{N_0} \right\} \\ &= \left(\frac{1}{N_0 \pi} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{r_{0c}^2 + r_{0s}^2 + r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + E}{N_0} \right\} \\ &\quad \cdot \exp \left\{ \frac{\sqrt{E} (r_{0c} \cos \theta_0 + r_{0s} \sin \theta_0)}{N_0 / 2} \right\} \end{aligned}$$

$$p(r_{0c}, r_{0s}, r_{1c}, r_{1s} | \mathbf{s}_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(r_{0c}, r_{0s}, r_{1c}, r_{1s} | \mathbf{s}_0, \theta_0) d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\pi N_0} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{r_{0c}^2 + r_{0s}^2 + r_{1c}^2 + r_{1s}^2 + E}{N_0} \right\} \cdot I_0 \left(\frac{\sqrt{E(r_{0c}^2 + r_{0s}^2)}}{N_0 / 2} \right)$$

令

$$r_{0c} = v_0 \cos \varphi_0, \quad r_{1c} = v_1 \cos \varphi_1$$

$$r_{0s} = v_0 \sin \varphi_0, \quad r_{1s} = v_1 \sin \varphi_1$$

得到

$$p(v_0, v_1, \varphi_0, \varphi_1 | \mathbf{s}_0) = \frac{v_1 v_2}{(\pi N_0)} \exp \left\{ -\frac{v_0^2 + v_1^2 + E}{N_0} \right\} I_0 \left(\frac{\sqrt{E} v_0}{N_0 / 2} \right)$$

所以

$$p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} p(v_0, v_1, \varphi_0, \varphi_1 | \mathbf{s}_0) d\varphi_0 d\varphi_1$$

$$= \frac{v_0 v_1}{(N_0 / 2)} \exp \left\{ -\frac{v_0^2 + v_1^2 + E}{N_0} \right\} I_0 \left(\frac{\sqrt{E} v_0}{N_0 / 2} \right)$$

同样

$$p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_1) = \frac{v_0 v_1}{(N_0 / 2)^2} \exp \left\{ -\frac{v_0^2 + v_1^2 + E}{N_0} \right\} I_0 \left(\frac{\sqrt{E} v_1}{N_0 / 2} \right)$$

采用最大似然准则，

$$\begin{array}{l} \text{判发 } \mathbf{s}_0 \\ \text{判发 } \mathbf{s}_1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_0)}{p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_1)} > 1 \\ \frac{p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_0)}{p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_1)} < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right) > I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_1}{N_0/2}\right) \\ I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right) < I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_1}{N_0/2}\right) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_0 > v_1 \\ v_0 < v_1 \end{array} \right\}$$

计算误码率， $P_e = \frac{1}{2}P\{V_0 > V_1 | \mathbf{s}_1\} + \frac{1}{2}P\{V_1 > V_0 | \mathbf{s}_0\}$

由于对称
性，

$$P\{V_0 > V_1 | \mathbf{s}_1\} = P\{V_1 > V_0 | \mathbf{s}_0\}$$

所以

$$\begin{aligned} P_e &= P\{V_1 > V_0 | \mathbf{s}_0\} = \iint_{v_1 > v_0} p(v_0, v_1 | \mathbf{s}_0) dv_0 dv_1 \\ &= \int_0^\infty \frac{v_0}{N_0/2} \exp\left[-\frac{v_0^2 + E}{N_0}\right] I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right) \left\{ \int_{v_0}^\infty \frac{v_1}{N_0/2} \exp\left[-\frac{v_1^2}{N_0}\right] dv_1 \right\} dv_0 \\ &= \int_0^\infty \frac{v_0}{N_0/2} \exp\left[-\frac{v_0^2 + E}{N_0}\right] \cdot I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right) \cdot \exp\left[-\frac{v_0^2}{N_0}\right] dv_0 \end{aligned}$$

令 $t = \frac{2v_0}{\sqrt{N_0}}$, $\eta = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$, 则

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\eta^2/2} \int_0^\infty t \exp\left\{-\frac{t^2 + \eta^2}{2}\right\} \cdot I_0(\eta t) dt$$

由于

$$\int_0^\infty t \exp\left[-\frac{t^2 + \eta^2}{2}\right] \cdot I_0(\eta t) dt = 1$$

所以

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{2}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{E}{2N_0}}$$

发送信号码元的平均能量为 $E_{av} = E$

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{E_{av}}{2N_0}}$$

记平均信噪比 $\rho = E_{av} / N_0$

$$P_e = \frac{1}{2} e^{-\frac{\rho}{2}}$$

计算非相干MFSK的误码率

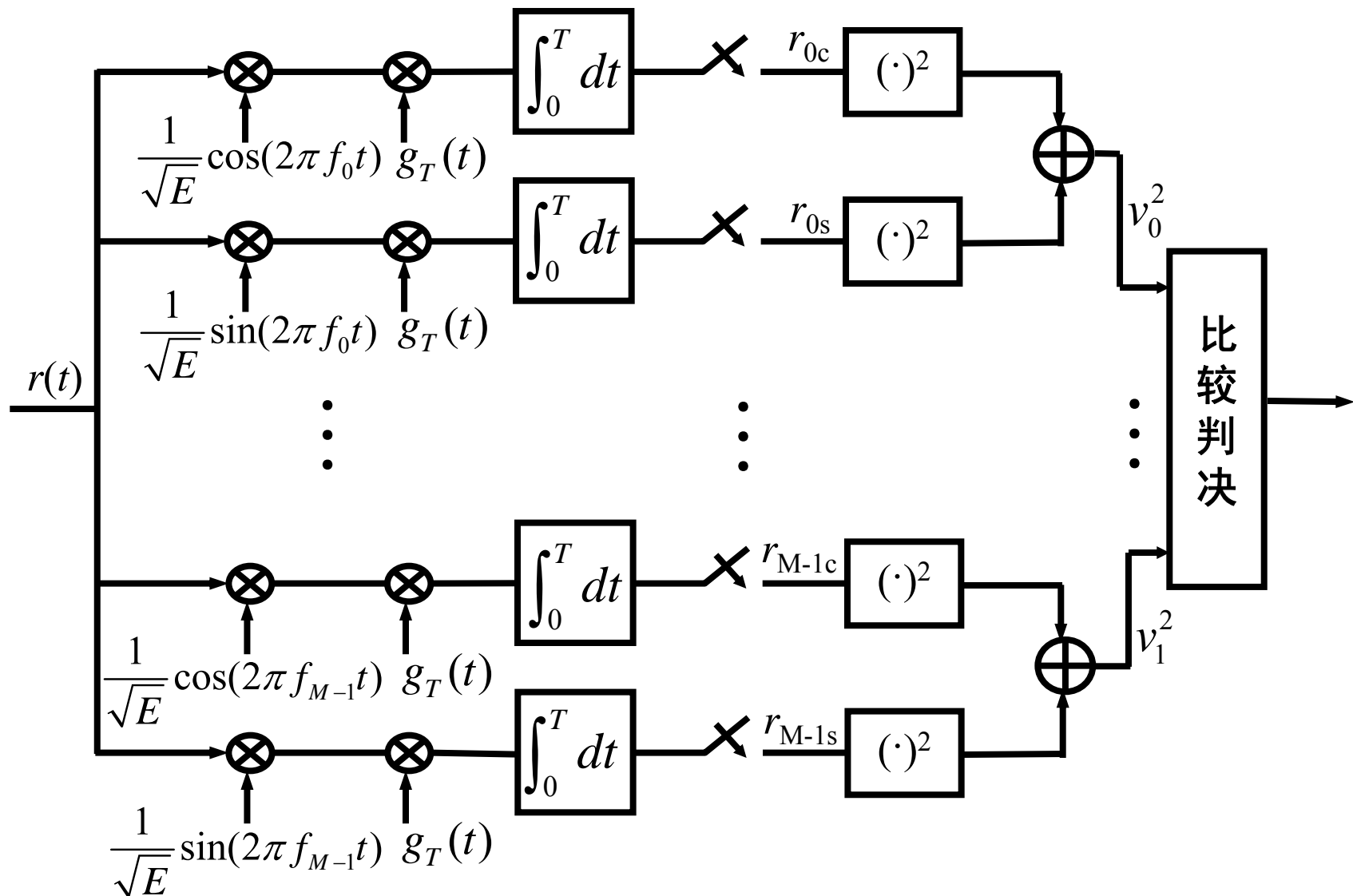
在MFSK信号的非相干解调系统中，接收到信号可以写成：

$$r(t) = g_T(t) \cos(2\pi f_i t + \theta_i) + n(t), \quad i = 0, 1, \dots, M-1$$

其中

$$g_T(t) = \begin{cases} A & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad |f_i - f_{i-1}| = \frac{k}{2T}, i = 1, \dots, M-1$$

$\{\theta_i\}$ 是在 $(0, 2\pi)$ 均匀分布的**独立随机变量**。 $n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。



MFSK信号的非相干相关解调器方框图

在等先概率条件下，最大似然概率准则是：

$$\hat{m} = \arg \max_m \{v_m\}$$

问题的对称性，正确接收概率等于在发送 s_0 条件下正确接收概率，即

$$\begin{aligned} P_M(c) &= P\{V_0 > \max(V_1, V_2, \dots, V_{M-1}) \mid \mathbf{s}_0\} \\ &= P\{V_0 > V_1, V_0 > V_2, \dots, V_0 > V_{M-1} \mid \mathbf{s}_0\} \\ &= \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot P\{V_1 < v_0, V_2 < v_0, \dots, V_{M-1} < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} dv_0 \end{aligned}$$

在发送 s_0 条件下， V_1, V_2, \dots, V_{M-1} 是独立、同分布瑞利变量，所以

$$P\{V_1 < v_0, V_2 < v_0, \dots, V_{M-1} < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} = \prod_{i=1}^{M-1} P\{V_i < v_0 \mid \mathbf{s}_0\}$$

因为

$$\begin{aligned} P\{V_i < v_0 \mid \mathbf{s}_0\} &= \int_0^{v_0} \frac{v_i}{N_0/2} \exp\left(-\frac{v_i^2}{N_0}\right) dv_i \\ &= \left(1 - e^{-\frac{v_0^2}{N_0}}\right), \quad i = 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

$$p\{v_0 \mid \mathbf{s}_0\} = \frac{v_0^2}{N_0/2} \exp\left\{-\frac{v_0^2 + E}{N_0}\right\} I_0\left(\frac{\sqrt{E}v_0}{N_0/2}\right)$$

所以

$$\begin{aligned} P_M(c) &= \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot \left(1 - e^{-\frac{v_0^2}{N_0}}\right)^{M-1} dv_0 \\ &= \sum_{n=0}^{M-1} (-1)^n \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) \cdot C_{M-1}^n e^{-\frac{nv_0^2}{N_0}} dv_0 \end{aligned}$$

$$P_M(e) = 1 - P_M(c)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{M-1} (-1)^{n+1} C_{M-1}^n \int_0^\infty p(v_0 \mid \mathbf{s}_0) e^{-\frac{nv_0^2}{N_0}} dv_0 \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot C_{M-1}^n}{n+1} \cdot e^{-\frac{nE}{(n+1)N_0}} \end{aligned}$$

因为 $E_{av} = E$ ，所以

$$\begin{aligned} P_M(e) &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot C_{M-1}^n \cdot e^{-\frac{n}{n+1} \cdot \frac{E_{av}}{N_0}} \\ &= \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot C_{M-1}^n \cdot e^{-\frac{n}{n+1} \cdot \rho} \end{aligned}$$

其中平均符号信噪比为 $\rho = \frac{E_{av}}{N_0}$

7.4.3 DPSK信号的差分相干解调（相位比较解调）

在DPSK调制系统中，是利用前后码元信号的相位差来传输数据信息，它的相位基准是前一时刻的相位，所以可以采用差分相干解调。

这也是一种非相干解调。在M进制DPSK中，在第k个符号间隔 $[kt, (k+1)t]$ 中载波相位角为

$$\theta_k = \left(\theta_{k-1} + a_k \cdot \frac{2\pi}{M} \right) \mod 2\pi$$

其中 $a_k \in \{0, 1, \dots, M-1\}$

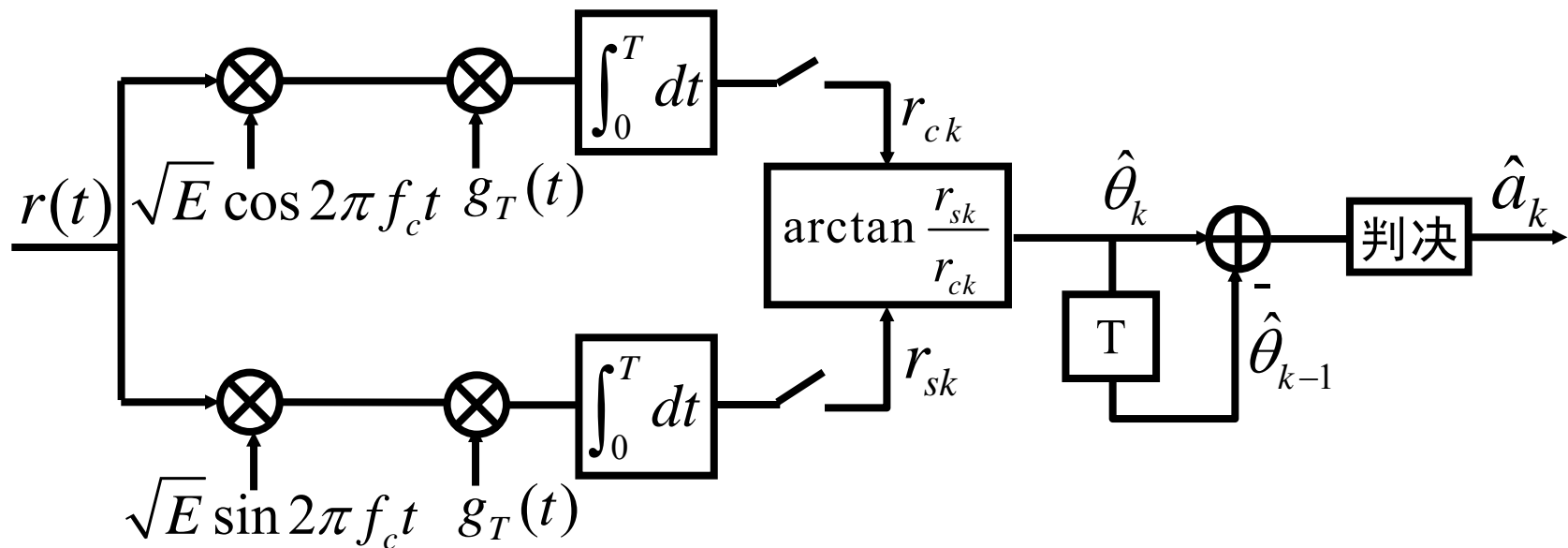
在时间间隔 $[kt, (k+1)t]$ 中发送信号为

$$s(t) = g_T(t - kt) \cos(2\pi f_c t + \theta_k)$$

接收到的信号为

$$r(t) = g_T(t - kt) \cos(2\pi f_c t + \theta_k + \varphi) + n(t)$$

其中， φ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机变量， $n(t)$ 是零均值，功率谱密度为 $N_0/2$ 的加性白高斯噪声。



DMPSK信号的差分相干解调方框图

两个支路上的采样输出为，

$$r_{ck} = \sqrt{E} \cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck}, \quad r_{sk} = \sqrt{E} \sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk}$$

复数形式为， $r_k = \sqrt{E} e^{i(\theta_k + \varphi)} + n_k$

其中复数高斯噪声为 $n_k = n_{ck} + jn_{sk}$ ， n_{ck} 和 n_{sk} 为零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯噪声。

假定**随机相位 ϕ 在二个相邻符号间隔中不变**，则 $(k-1)$ 时刻采样输出为

$$r_{k-1} = \sqrt{E} e^{i(\theta_{k-1} + \phi)} + n_{k-1}$$

对于 r_k 和 r_{k-1} 的相位差进行判决，也就是对 $r_k r_{k-1}^*$ 的相位进行判决，

$$r_k r_{k-1}^* = E e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})} + \sqrt{E} e^{j(\theta_k + \phi)} n_{k-1}^* + \sqrt{E} e^{-j(\theta_{k-1} + \phi)} n_k + n_k n_{k-1}^*$$

相位差 $\theta_k - \theta_{k-1}$ 包含在 $r_k r_{k-1}^*$ 的平均值 $E e^{j(\theta_k - \theta_{k-1})}$ 中，其余项都是噪声。为了分析误码率，不仿**假定在某符号间隔发送 $a_k = 0$** ，则

$\theta_k - \theta_{k-1} = 0$ ，所以

$$r_k r_{k-1}^* = E + \sqrt{E} (n_k' + n_{k-1}') + n_k n_{k-1}^*$$

其中 $n_k' \triangleq e^{-j(\theta_{k-1} + \phi)} n_k$ ， $n_{k-1}' \triangleq e^{j(\theta_k + \phi)} n_{k-1}^*$

由于 ϕ 是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布的随机相位，所以 n_k', n_{k-1}' 和 n_k, n_{k-1}^* 的统计特性一样。

计算 $r_k r_{k-1}^*$ 的相位的概率分布十分复杂，主要困难在于项 $n_k n_{k-1}^*$ ，但当信噪比 E / N_0 充分大时，可以忽略 $n_k n_{k-1}^*$ ，使得分析大为简化。

记 $r_k r_{k-1}^* = z_1 + jz_2$

$$z_1 = E + \sqrt{E}(n'_{ck} + n'_{ck-1}), \quad z_2 = \sqrt{E}(n'_{sk} + n'_{sk-1})$$

判决装置是把 $\arctan(z_2 / z_1)$ 与第0个扇区的边界相比较。若它不落在第0个扇区，则表示出现了符号差错。这时的差错情况与MPSK相干解调情况一样，只是现在噪声为 $(n'_{ck} + n'_{ck-1})$ 和 $(n'_{sk} + n'_{sk-1})$ ，代替MPSK相干解调时的 n_1 和 n_2 。由于 $(n'_{ck} + n'_{ck-1})$ 和 $(n'_{sk} + n'_{sk-1})$ 的方差为 N_0 ，比MPSK时大一倍，所以相应误码率为

$$P(e) \approx 2Q\left(\sqrt{\rho} \cdot \sin \frac{\pi}{M}\right)$$

其中符号信噪比为 $\rho = E / N_0$ ，与相干解调相比性能差了 3db。

对于DBPSK的差分相干解调，其误码率可以精确算出。在DBPSK中， $(\theta_k - \theta_{k-1}) \in \{0, \pi\}$ ，只要判别 $\text{Re}\{r_k r_{k-1}^*\}$ 是大于零，还是小于零。

$$r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} > 0 \quad \text{则判 } a_k = 0$$

$$r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} < 0 \quad \text{则判 } a_k = 1$$

假定发送 $a_k = 0$ ，即 $\theta_k = \theta_{k-1}$ ，则误码率

$$P(e) = P\{r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1} < 0 \mid a_k = 0\}$$

$$r_k r_{k-1}^* = \left\{ \left[\sqrt{E} \cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck} \right] + j \left[\sqrt{E} \sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk} \right] \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left[\sqrt{E} \cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck-1} \right] - j \left[\sqrt{E} \sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk-1} \right] \right\}$$

记

$$\begin{aligned}
 D &\triangleq (r_k r_{k-1}^* + r_k^* r_{k-1}) = 2 \operatorname{Re} [r_k r_{k-1}^*] \\
 &= 2 \left\{ \left[\sqrt{E} \cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck} \right] \left[\sqrt{E} \cos(\theta_k + \varphi) + n_{ck-1} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \left[\sqrt{E} \sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk} \right] \left[\sqrt{E} \sin(\theta_k + \varphi) + n_{sk-1} \right] \right\}
 \end{aligned}$$

由于 $(\theta_k + \varphi)$ 仍然是 $(0, 2\pi)$ 上均匀分布随机相位，所以把 $(\theta_k + \varphi)$ 仍记为 φ ，通过配平方运算可以化简为

$$\begin{aligned}
 D &= 2(\alpha^2 - \beta^2) \\
 \alpha^2 &= \left[\sqrt{E} \cos \varphi + \frac{1}{2}(n_{ck} + n_{ck-1}) \right]^2 + \\
 &\quad \left[\sqrt{E} \sin \varphi + \frac{1}{2}(n_{sk} + n_{sk-1}) \right]^2 \\
 \beta^2 &= \left[\frac{1}{2}(n_{ck} - n_{ck-1}) \right]^2 + \left[\frac{1}{2}(n_{sk} - n_{sk-1}) \right]^2
 \end{aligned}$$

由于 $n_{ck}, n_{ck-1}, n_{sk}, n_{sk-1}$ 是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯随机变量，所以

$$\eta_{c1} \triangleq \frac{1}{2}(n_{ck} + n_{ck-1}), \quad \eta_{c2} \triangleq \frac{1}{2}(n_{ck} - n_{ck-1})$$

$$\eta_{s1} \triangleq \frac{1}{2}(n_{sk} + n_{sk-1}), \quad \eta_{s2} \triangleq \frac{1}{2}(n_{sk} - n_{sk-1})$$

是4个零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯变量，于是

$$\alpha^2 = (\sqrt{E} \cos \varphi + \eta_{c1})^2 + (\sqrt{E} \sin \varphi + \eta_{s1})^2$$

$$\beta^2 = \eta_{c2}^2 + \eta_{s2}^2$$

$$P(e) = P\{D < 0 \mid a_k = 0\}$$

$$= P\{\alpha^2 < \beta^2\}$$

上面误码率与2FSK非相干解调情况一样，但现在噪声功率为 $N_0 / 4$ ，是2FSK情况一半。

DBPSK信号的差分相干解调误码率

$$P(e) = \frac{1}{2} e^{-\rho}$$

其中平均符号信噪比为, $\rho = \frac{E}{N_0}$

BPSK相干解调的误码率

$$P(e) = Q(\sqrt{2\rho}) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\rho}} \cdot e^{-\rho}$$

所以2DPSK信号的差分相干解调的误码率与相干BPSK解调误码率非常相近。例如对于 $P(e) = 10^{-5}$, 差分相干解调要求 $\rho = 10.4db$, 而BPSK相干解调要求 $\rho = 9.9db$, 仅相差0.5db。

7.4.4 二进制数字调制信号的非相干解调性能比较

调制方式	误符号率
OOK	$P_e = \frac{1}{2}Q(\sqrt{\rho}) + \frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}} \approx \frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$
2FSK	$P_e = \frac{1}{2}e^{-\frac{\rho}{2}}$
MFSK	$P_e = \sum_{n=1}^{M-1} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} \cdot C_{M-1}^n \cdot e^{-\frac{n}{n+1} \cdot \rho}$
2DPSK (差分相干解调)	$P(e) = \frac{1}{2}e^{-\rho}$

§ 7.5 连续相位调制

在数字角度调制中，如果相位变化连续，有利于功率谱密度带外衰减加快，而且使已调信号经带限滤波后包络变化减小。在本节中我们讨论连续相位FSK（CPFSK）调制，最小偏移调制（MSK），高斯最小偏移调制（GMSK）以及一般的多—h连续相位调制等。

7.5.1 连续相位FSK调制（CPFSK）

通常用某种数字PAM信号去控制压控振荡器，从而产生相位连续的调频信号。设M进制的PAM基带信号为

$$v(t) = \sum_n a_n g_T(t - nT)$$

$a_n \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$ 是信息符号， $g_T(t)$ 是幅度为 $1/2T$ ，宽度为 T 的矩形脉冲，于是连续相位FSK信号可写成：

$$s(t) = A \cos \left[2\pi f_c t + 4\pi f_d T \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau + \varphi_0 \right]$$

f_c 是载波频率， f_d 是峰值频偏， φ_0 是任何初相。

$\theta(t; \mathbf{a})$ 用表示信号 $s(t)$ 的相位中扣除载频相位后的附加相位,

$$\theta(t; \mathbf{a}) = 4\pi T f_d \int_{-\infty}^t v(t) dt$$

在时间区间 $[kT, (k+1)T]$ 中, 附加相位为,

$$\begin{aligned}\theta(t; \mathbf{a}) &= 2\pi f_d T \sum_{j=-\infty}^{k-1} a_j + 2\pi(t - kT) f_d a_k \\ &= \theta_k + 2\pi h a_k q(t - kT)\end{aligned}$$

调制
指数

其中

$$h = 2f_d T$$

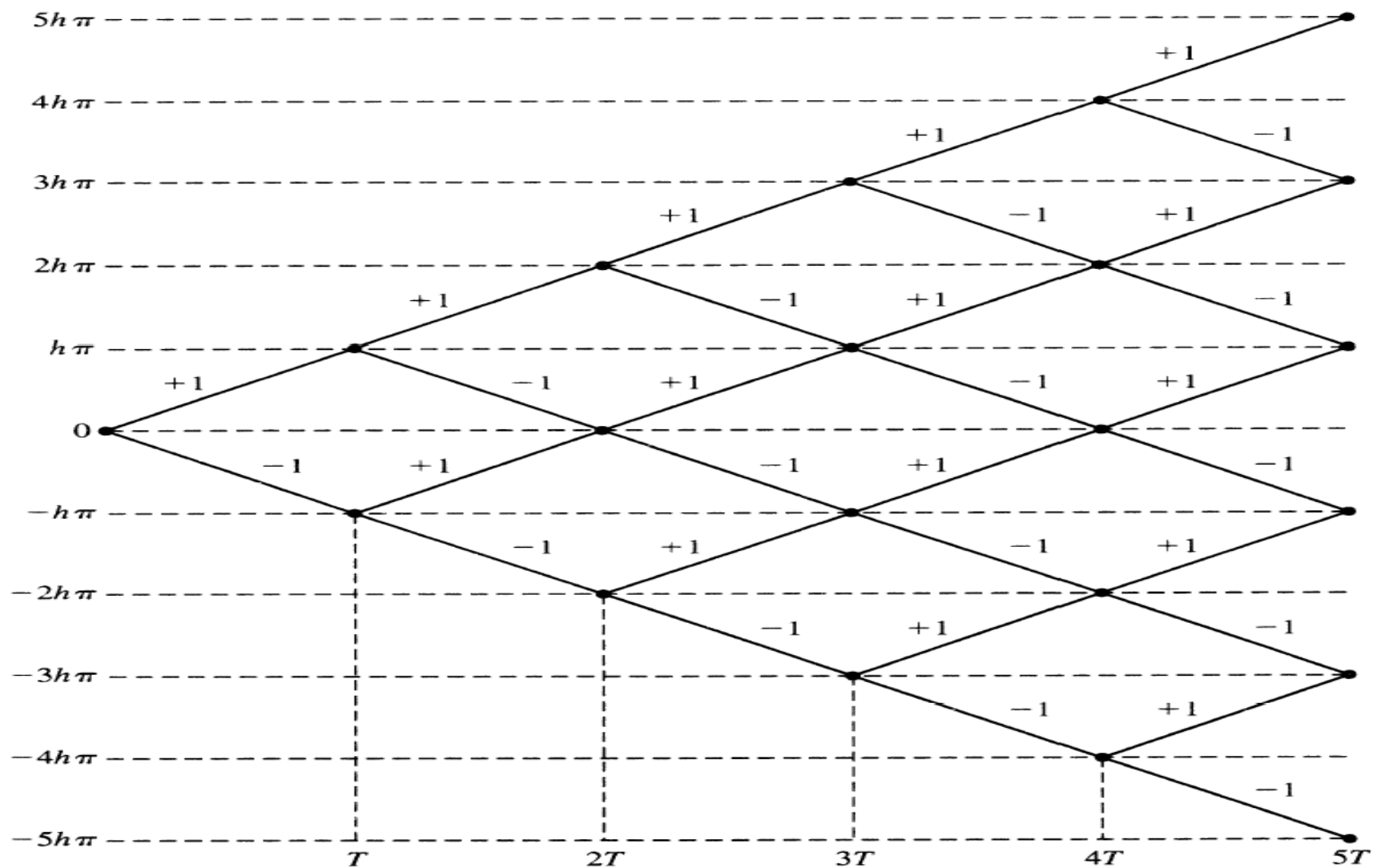
$$\theta_k = \pi h \sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i$$

累计
相位

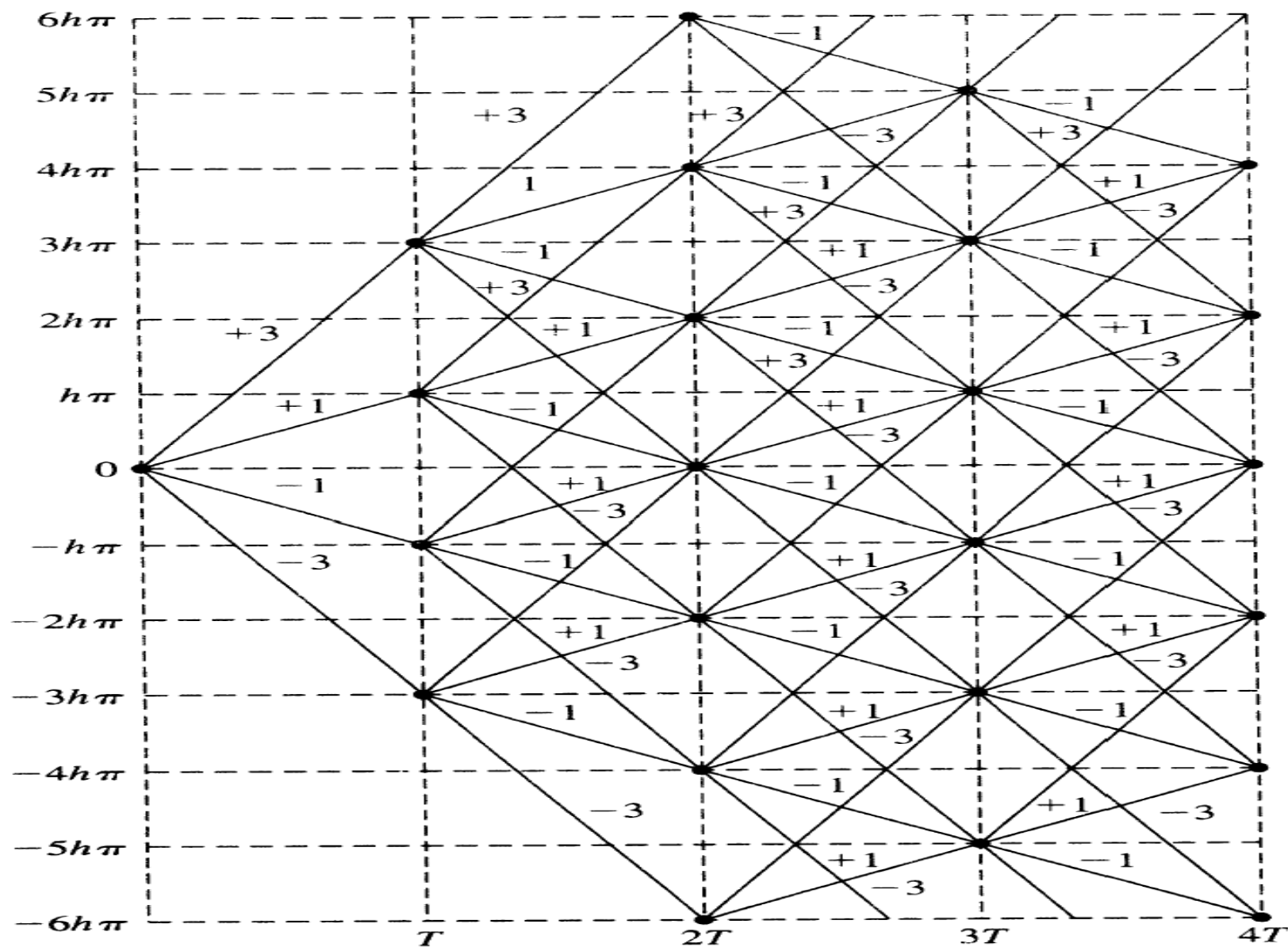
$$q(t) = \int_{-\infty}^t g_T(\eta) d\eta = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ t/2T & 0 \leq t \leq T \\ 1/2 & t \geq T \end{cases}$$

相位成形函数

对于二进制数据 $a = \pm 1$ 所有可能的附加相位轨线



对于四进数据 $a = \pm 1, \pm 3$ 所有可能的附加相位轨线



7.5.2 最小偏移键控 (MSK) 调制

MSK是 $h=0.5$ 的二进制CPFSK，它的附加相位为：

$$\begin{aligned}\theta(t; \mathbf{a}) &= \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i + \pi a_k q(t - kT) \\ &= \frac{\pi t}{2T} a_k + \varphi_k\end{aligned}, \quad t \in [kT, (k+1)T]$$

$$\varphi_k = \frac{\pi}{2} \sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i - \frac{k\pi}{2} a_k$$

φ_k 满足递推关系：
$$\varphi_k = \varphi_{k-1} + \frac{\pi}{2} k(a_{k-1} - a_k)$$

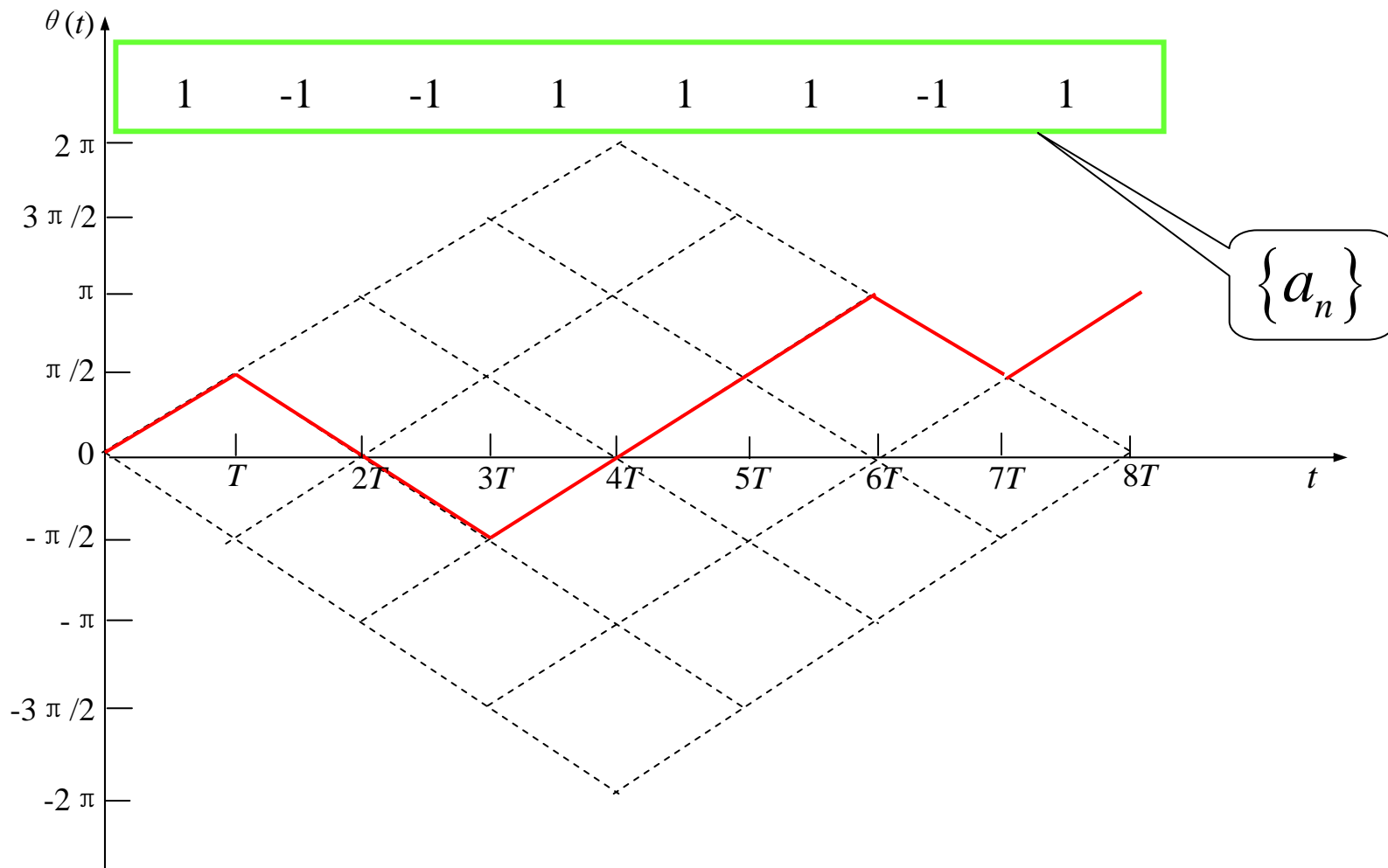
在 $t \in [kT, (k+1)T]$ ，MSK信号可写成

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \frac{\pi t}{2T} a_k + \varphi_k)$$

$$a_k = 1 \longrightarrow f_1 = f_c + \frac{1}{4T}, \quad a_k = -1 \longrightarrow f_1 = f_c - \frac{1}{4T}$$

$$\Delta f = f_1 - f_0 = \frac{1}{2T} \quad \text{二个正弦信号正交的最小频率间隔 (MSK) 。}$$

对于相干解调，可以假设 $\varphi_0 = 0$ ，所以 $\varphi_k = 0, \pi \pmod{2\pi}$ ，
 附加相位 $\theta(t; a)$ 在区间 $[kT, (k+1)T]$ 上是一条斜率为 $a_k \pi / 2T$ 、截距为 φ_k 的直线段。在一个符号时间中 $\theta(t; a)$ 变化 $\pm \pi / 2$ 。



总结以上论述，MSK信号具有如下特点：

- 1、MSK信号是恒包络信号；
- 2、相对于载波 f_c 的频偏为 $\pm 1/4T$ ，调制指数为 $h = 0.5$ ；
- 3、在任何符号间隔区间中，二个码元信号正交；
- 4、附加相位 $\theta(t)$ 在一个码元时间中线性变化，变化量为 $\pm\pi/2$ ；
- 5、MSK信号的相位在数据符号转换时刻连续；

MSK信号实现方法:

MSK信号写成正交调制形式

$$\begin{aligned}s(t) &= A \cos[2\pi f_c t + \theta(t; \mathbf{a})] \\ &= A \cos \theta(t; \mathbf{a}) \cos 2\pi f_c t - A \sin \theta(t; \mathbf{a}) \sin 2\pi f_c t\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\cos \theta(t; \mathbf{a}) &= \cos \left(\frac{\pi a_k}{2T} t + \varphi_k \right) \\ &= \cos \frac{\pi a_k}{2T} t \cdot \cos \varphi_k - \sin \frac{\pi a_k}{2T} t \cdot \sin \varphi_k \\ &= \cos \varphi_k \cdot \cos \frac{\pi t}{2T}, \quad t \in [kT, (k+1)T] \\ -\sin \theta(t, \mathbf{a}) &= -\sin \left(\frac{\pi a_k}{2T} t + \varphi_k \right) \\ &= -\sin \frac{\pi a_k}{2T} t \cdot \cos \varphi_k - \cos \frac{\pi a_k}{2T} t \cdot \sin \varphi_k \\ &= -a_k \cos \varphi_k \cdot \sin \frac{\pi a_k}{2T} t, \quad t \in [kT, (k+1)T]\end{aligned}$$

所以在 $t \in [kT, (k+1)T]$

$$s(t) = I_k \cdot A \cos \frac{\pi t}{2T} \cdot \cos 2\pi f_c t - Q_k \cdot A \sin \frac{\pi t}{2T} \cdot \sin 2\pi f_c t$$

$$I_k = \cos \varphi_k, \quad Q_k = a_k \cos \varphi_k$$

目的要证明:

$$I_{2k} = I_{2k-1}, \quad Q_{2k+1} = Q_{2k}$$

表明同相数据 $\{I_k\}$ 和正交数据 $\{Q_k\}$ 都是每隔时间 $2T$ 才改变一次, 而且二路数据改变的时刻交错相隔 T 。

数据序列 $\{a_k\}$ 进行差分编码, 转换成 $\{c_k\}$

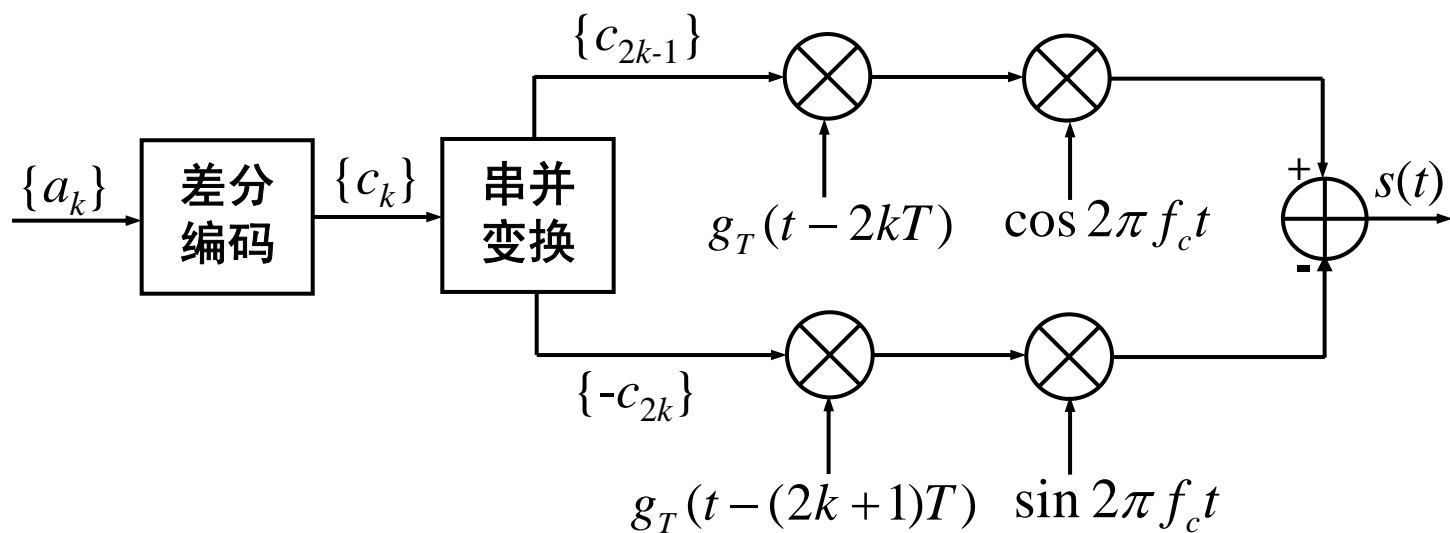
$$c_k = c_{k-1} \cdot a_k \quad \text{or} \quad a_k = c_{k-1} \cdot c_k$$

可以证明 $I_{2l-1} = I_{2l} = c_{2l-1}$, $Q_{2l} = Q_{2l+1} = c_{2l}$

$$s(t) = \sum_l c_{2l-1} g_T[t - 2lT] \cos 2\pi f_c t - c_{2l} g_T[t - (2l+1)T] \sin 2\pi f_c t$$

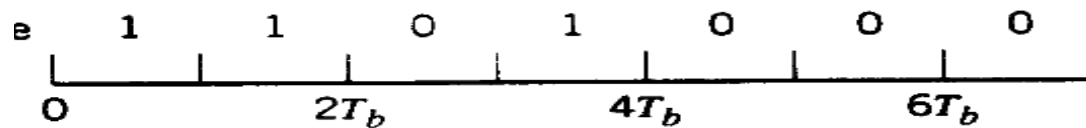
$$g_T(t) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi t}{2T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

MSK的一种实现方式



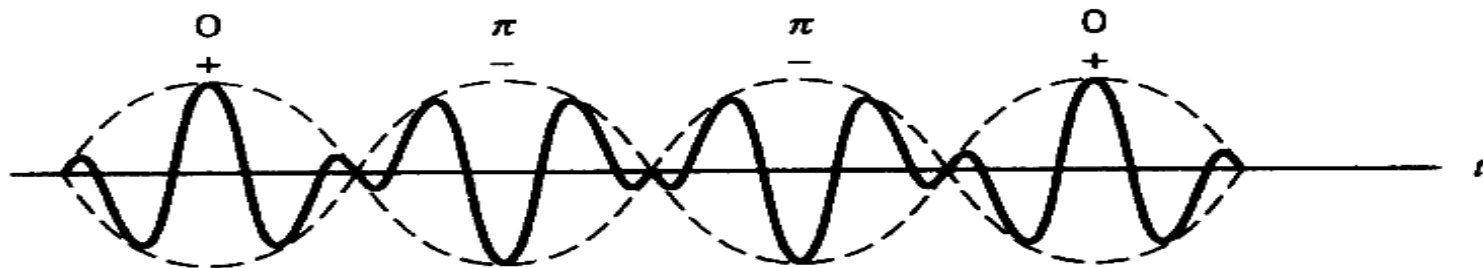
与OQPSK信号几乎相同，只是用余弦脉冲代替矩形脉冲。

输入二进制序列



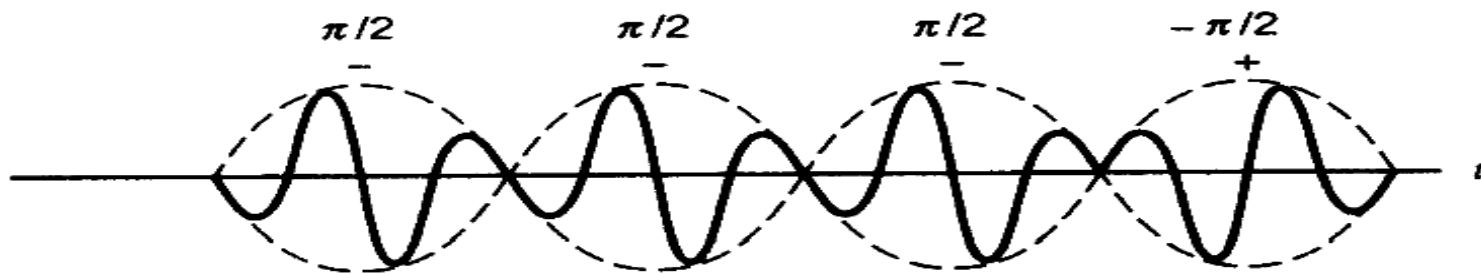
(a)

$$c_{2k-1}g_T[t-2kT]\cos 2\pi f_c t$$



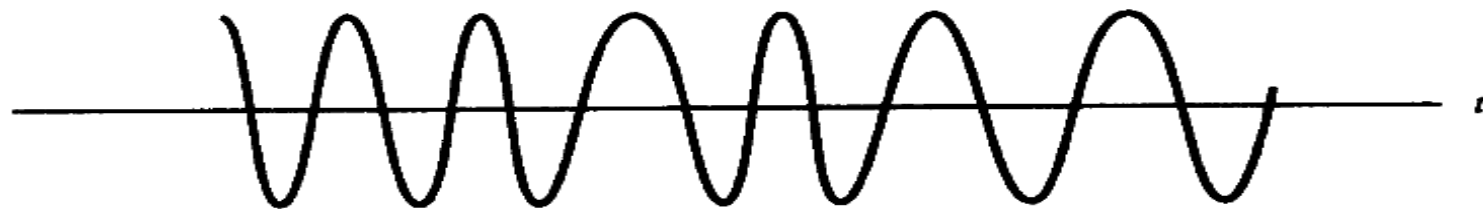
(b)

$$-c_{2k}g_T[t-(2k+1)T]\cos 2\pi f_c t$$



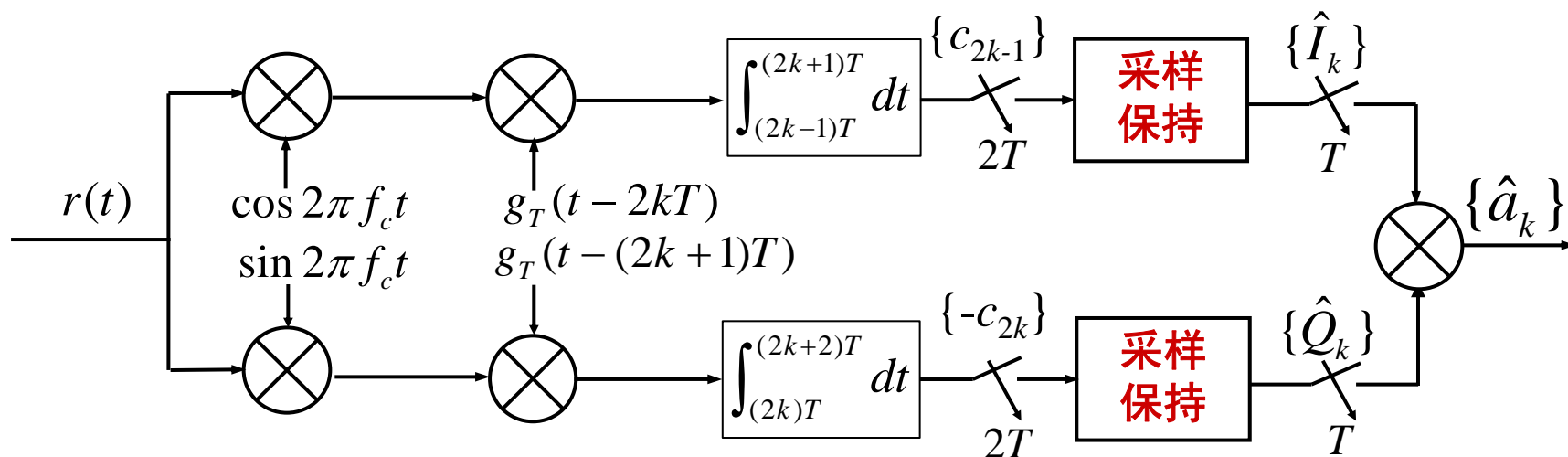
(c)

$s(t)$



(d)

MSK解调方式:



由于差分编码:

$$P_{MSK}(c) = [1 - P_{BPSK}(e)]^2$$

$$P_{MSK}(e) = 1 - P_{MSK}(c)$$

$$\approx 2P_{BPSK}(e)$$

$$\approx 2Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

MSK误码率

$\{I_k\}, \{Q_k\}$ 直接传输

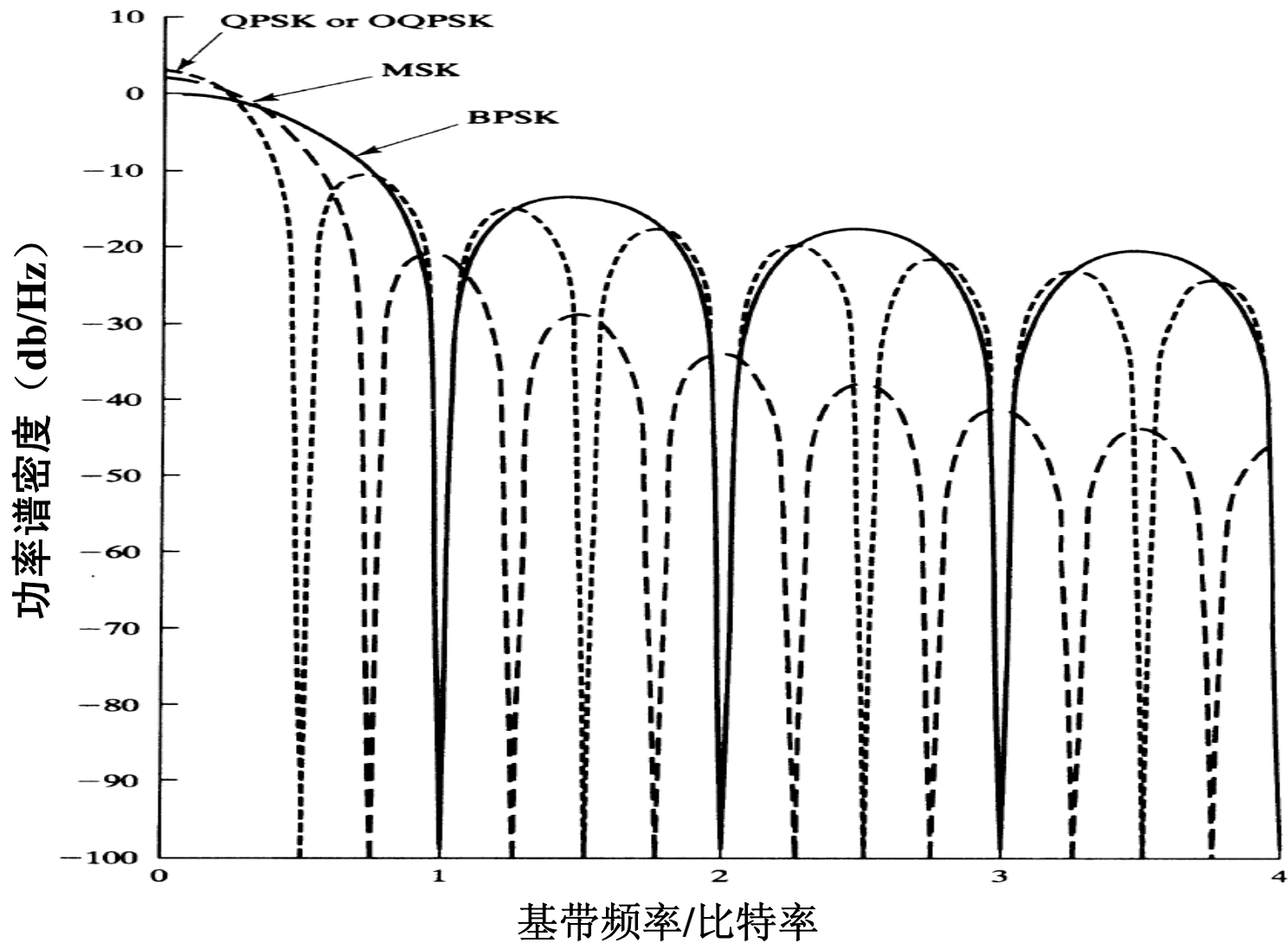
$$P_{MSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{2E}{N_0}}\right)$$

MSK信号的功率谱:

与QPSK一样，只是在MSK信号中基带脉冲是余弦脉冲，不是矩形脉冲。

$$g_T(t) = \begin{cases} A \cos \frac{\pi t}{2T} & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \longleftrightarrow G_T(f) = \frac{4TA}{\pi} \cdot \frac{\cos 2\pi fT}{16T^2 f^2 - 1}$$

$$\begin{aligned} P_{MSK}(f) &= \frac{2}{T} \left\{ |G_T(f + f_c)|^2 + |G_T(f - f_c)|^2 \right\} \\ &= \frac{32TA^2}{\pi^2} \left\{ \left| \frac{\cos 2\pi(f - f_c)t}{16T^2(f - f_c)^2 - 1} \right|^2 + \left| \frac{\cos 2\pi(f + f_c)t}{16T^2(f + f_c)^2 - 1} \right|^2 \right\} \end{aligned}$$



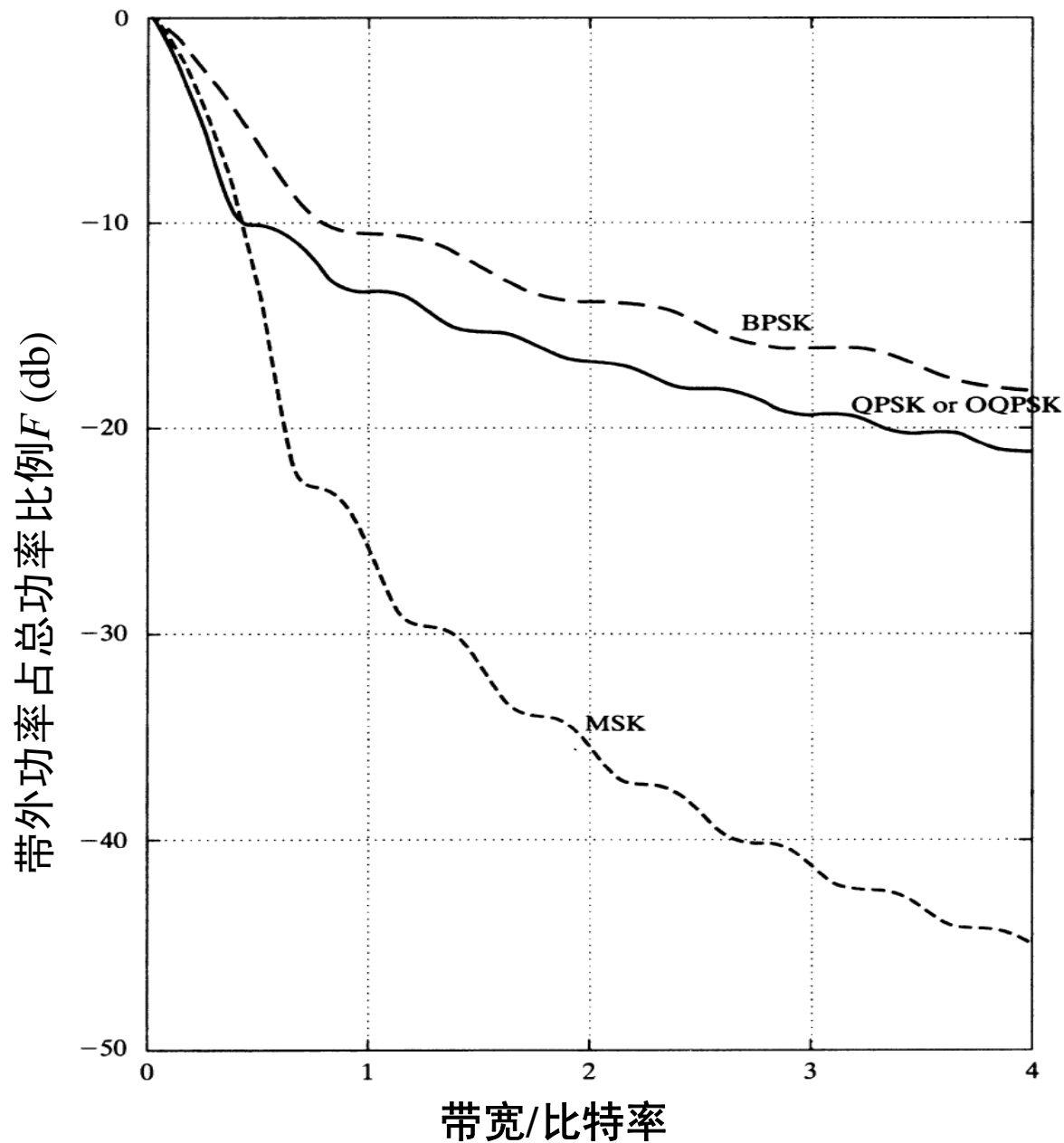
MSK信号的主瓣宽度是QPSK的1.5倍，是BPSK的3/4，

它的旁瓣衰减远快于QPSK和BPSK。

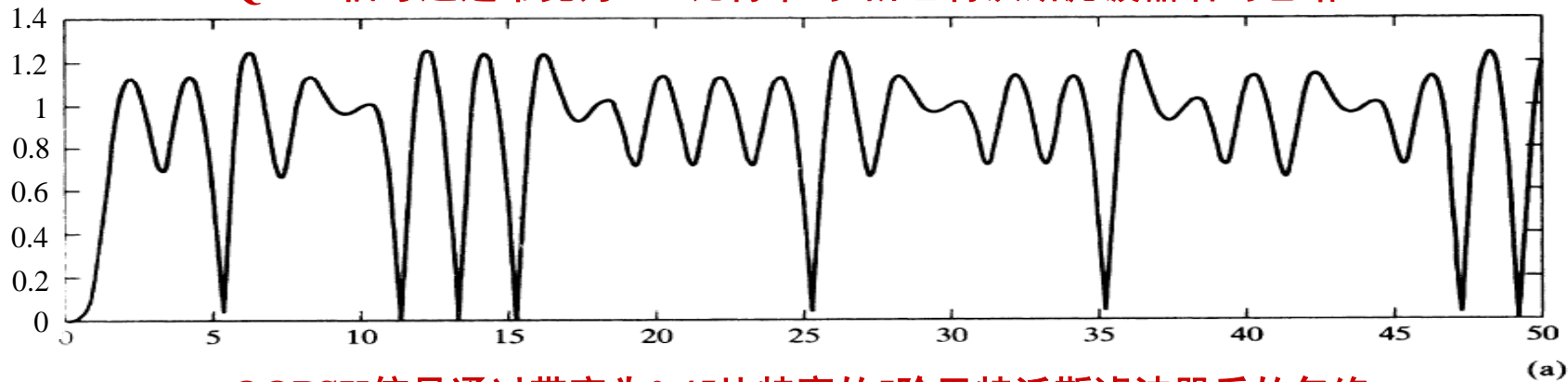
帶外功率占总功率的比例

$$F = \frac{\int_W^\infty P(f)df}{\int_0^\infty P(f)df}$$

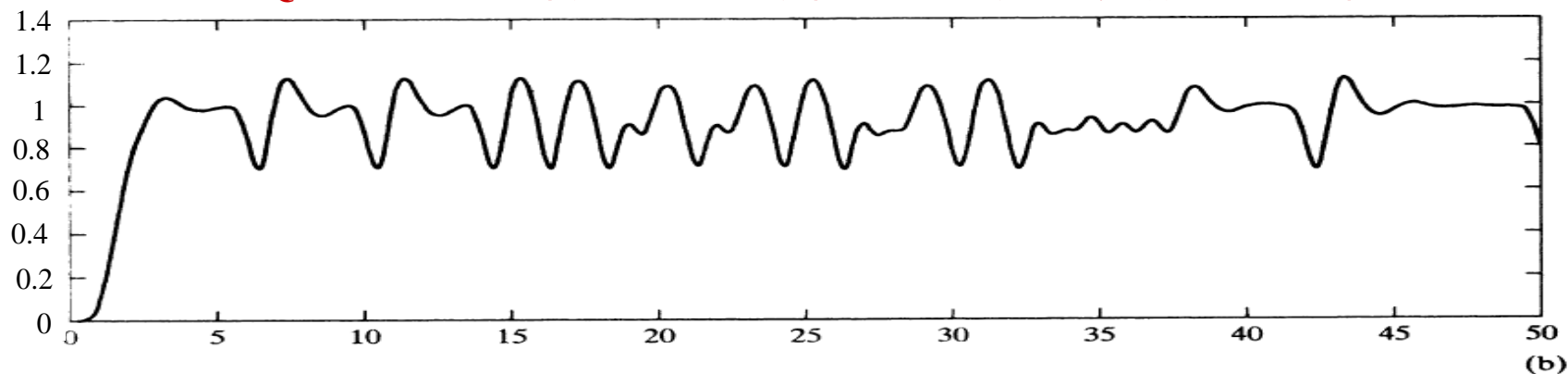
$$B_{99} = \begin{cases} 1.2/T_b, & MSK \\ 7/T_b, & QPSK \end{cases}$$



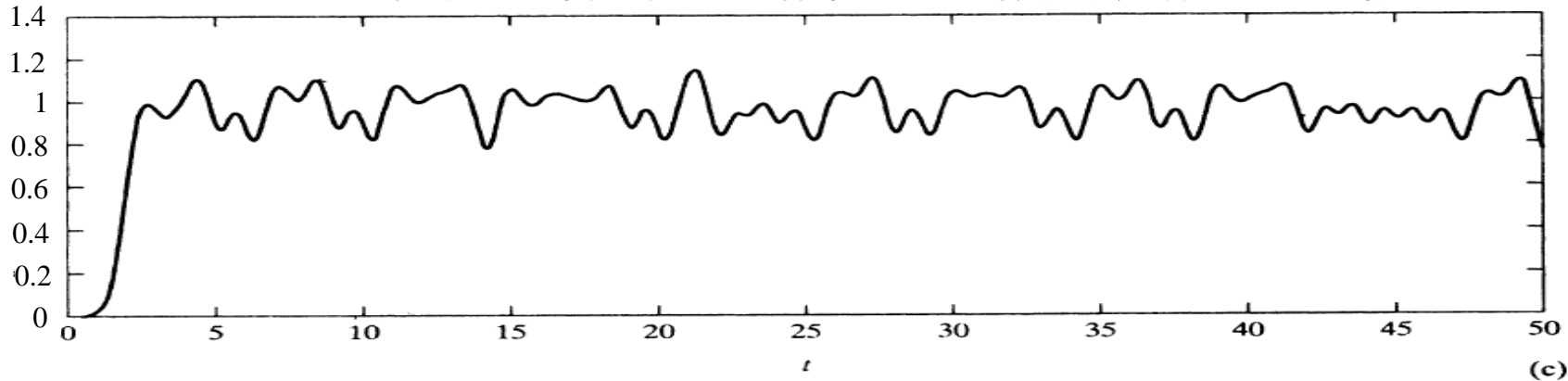
QPSK信号通过带宽为0.45比特率的5阶巴特沃斯滤波器后的包络



OQPSK信号通过带宽为0.45比特率的5阶巴特沃斯滤波器后的包络



MSK信号通过带宽为0.45比特率的5阶巴特沃斯滤波器后的包络



7.5.3 高斯最小偏移键控 (GMSK)

修正MSK调制方式，使得附加相位不仅连续，而且光滑（即高次可微），这样可以使已调信号的功率谱更为紧凑。可以证明如果附加相位 $\theta(t;a)$ 是 t 的 m 次可微函数，则它的功率谱密度随频率按 $2(m+1)$ 次幂反比下降。

二进制矩形脉冲幅度调制信号去调制正弦波的频率，当调制指数等于 $h = 0.5$ 时，就得到**MSK信号**。

$$s(t) = A \cos(2\pi f_c t + \pi \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau)$$
$$v(t) = \sum_n a_n g_T(t - nT)$$
$$g_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad a_n = \pm 1$$

先把矩形脉冲序列 $v(t)$ 通过一个低通滤波器进行预滤波，用预滤波输出去控制压控振荡器进行调频，得到**GMSK信号**。

一般要求预滤波器满足如下条件：

- 1、预滤波器应有窄的通带和陡峭的过滤带；
- 2、预滤波器的脉冲响应有相对较低的过冲；
- 3、要求预滤波器输出的频率成型函数的积分为1/2，

这将使得每个数据码元对于相位的总影响为 $\pi/2$ ；

合适的低通滤波器是高斯脉冲响应滤波器，简称高斯滤波器：

$$h_G(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-\pi^2 t^2 / \alpha^2} \longleftrightarrow H_G(f) = e^{-\alpha^2 f^2}$$

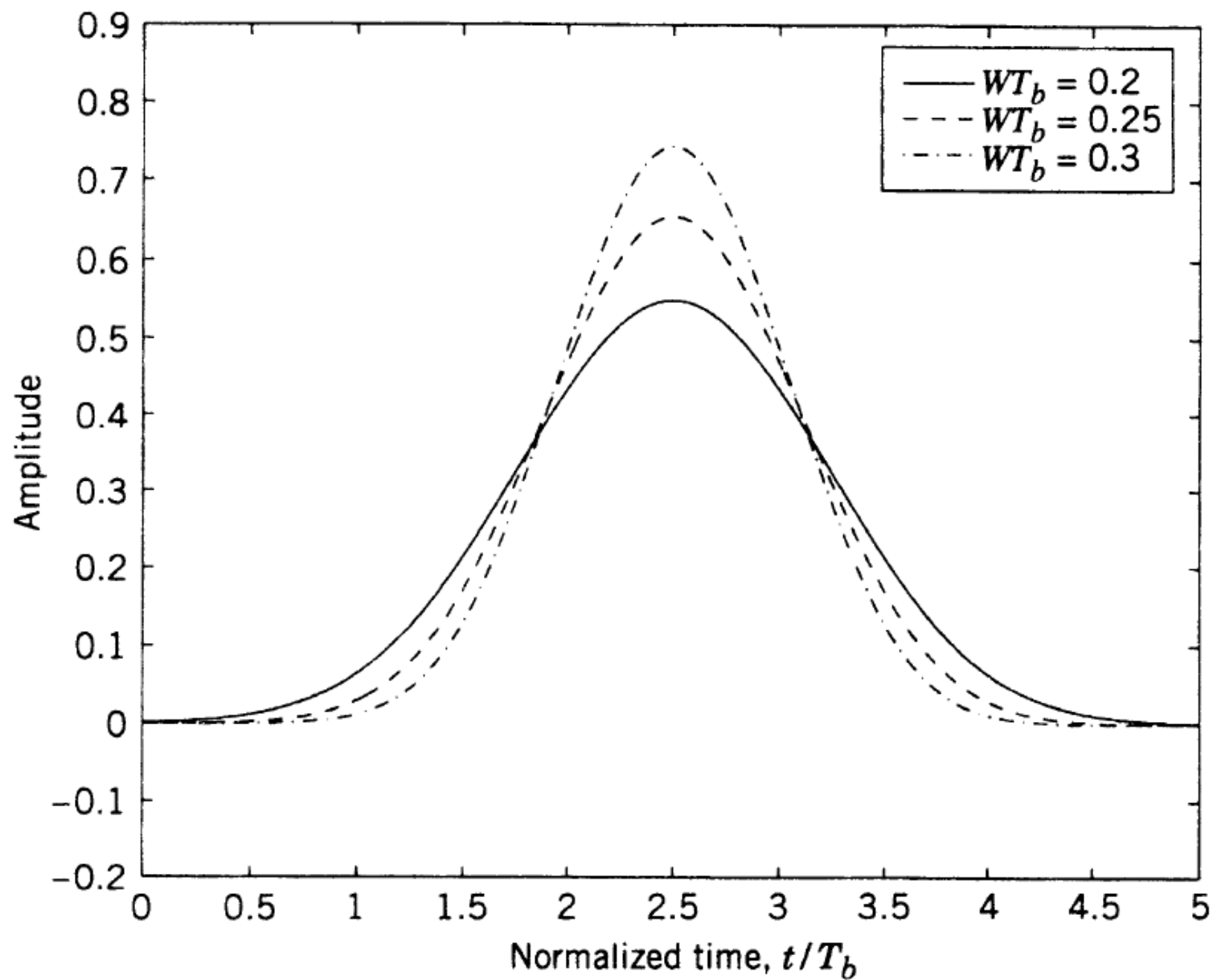
参数 α 与 $H_G(f)$ 的3db带宽B的关系为：
$$\alpha = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\sqrt{2}B} \approx \frac{0.5887}{B}$$

通过高斯滤波器后输出为，

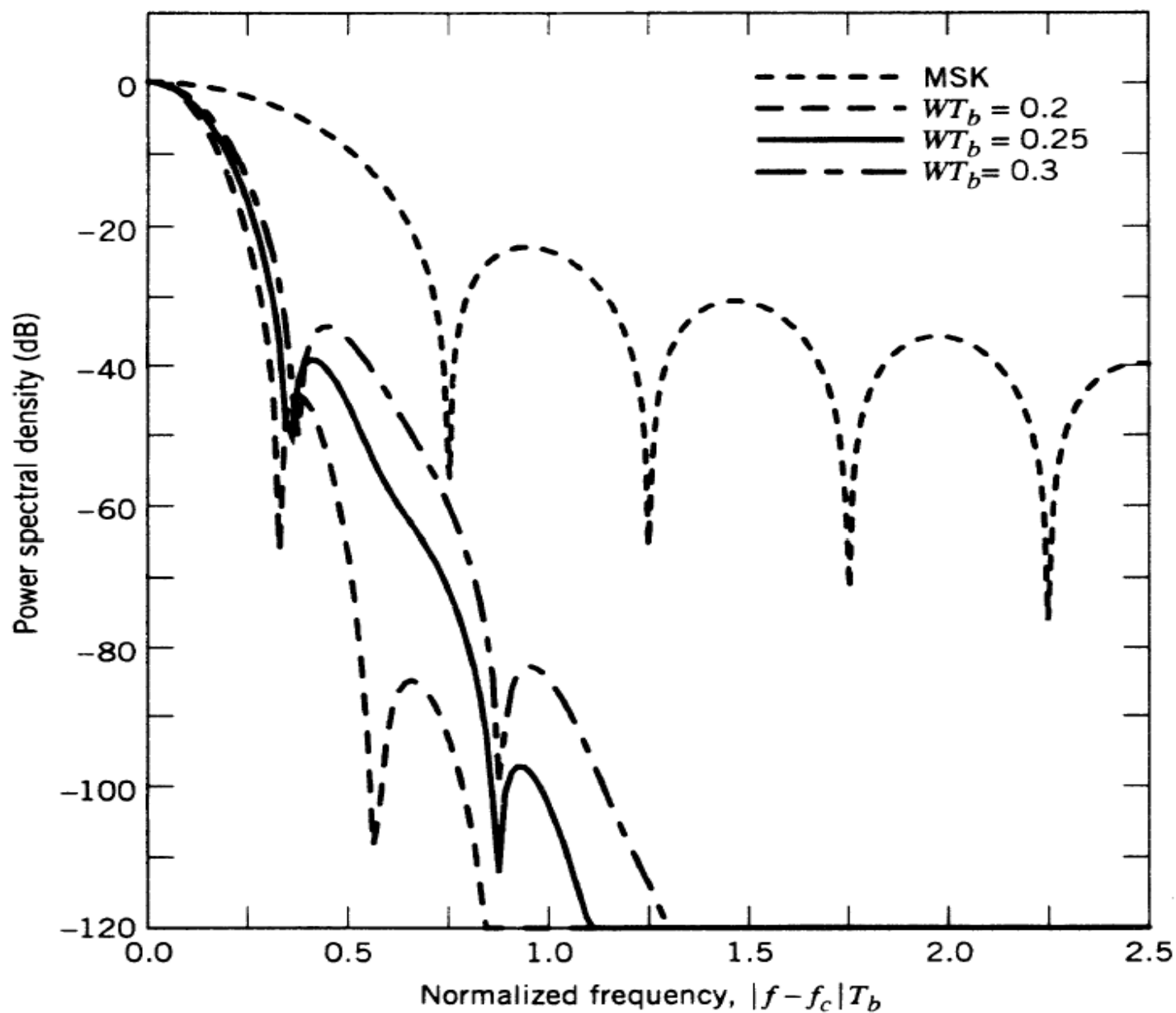
$$w(t) = \sum_k a_p \cdot g(t - kT)$$
$$g(t) = g_T(t) \otimes h_G(t) = \frac{1}{2T} \left\{ Q\left(\frac{2\pi B(t-T)}{\sqrt{\ln 2}}\right) - Q\left(\frac{2\pi Bt}{\sqrt{\ln 2}}\right) \right\}$$

用高斯滤波后的基带信号 $w(t)$ 去进行 $h = 0.5$ 调频，称为 **GMSK**。

不同 BT 值时GMSK的频率成型脉冲



几种不同 BT 值的GMSK信号和MSK信号的功率谱密度

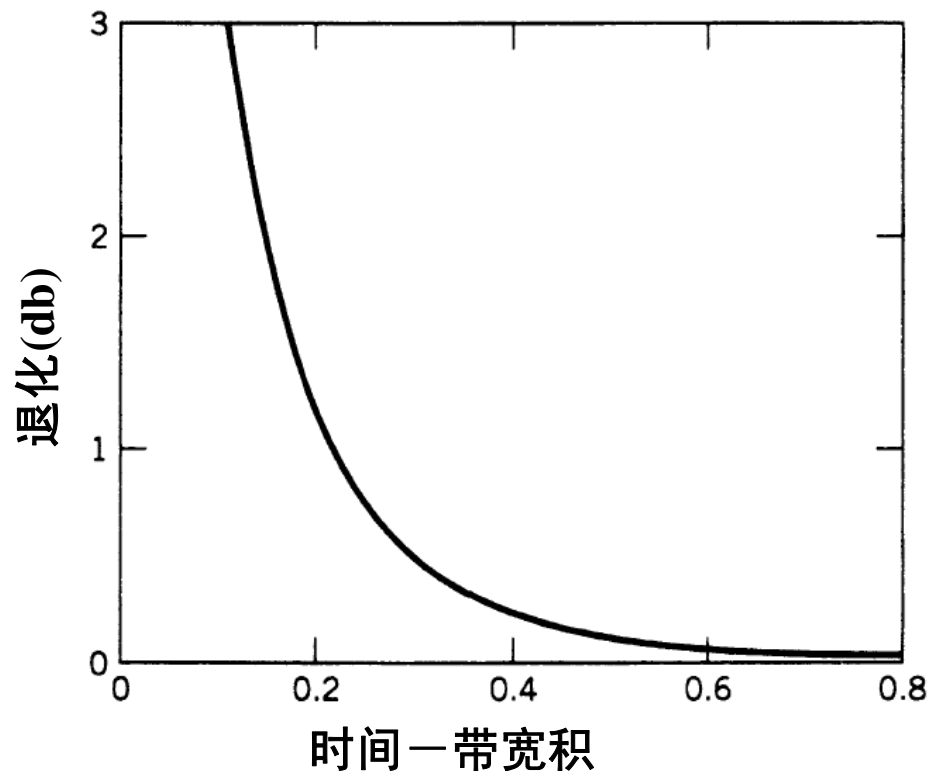


GMSK解调的误码率：

截断后的频率成型脉冲的宽度为 $5T$ ，所以GMSK信号中存在码间干扰，而且当 BT 乘积减小时引入的码间干扰增大。

$$P_{GMSK}(e) = Q\left(\sqrt{\frac{\gamma E_b}{N_0}}\right)$$

其中 γ 与 BT 乘积有关，它表示相对于MSK的性能退化。



退化 $10\log_{10}(\gamma/2)$ 与 BT 的关系

$BT=\infty$ (MSK), 性能退化为0db

$BT=0.3$, 性能退化为0.46db

7.5.4 多-h连续相位调制

多-h连续相位调制信号的一般形式为

$$s(t; \alpha) = A \cos(2\pi f_c t + \theta(t; \alpha) + \varphi_0)$$

在相干解调中，不失一般性可认为 $\varphi_0 = 0$ 。附加相位为

$$\theta(t; \alpha) = 2\pi \int_{-\infty}^t \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i a_i g(\tau - iT) d\tau, \quad -\infty < t < \infty$$

其中 $a_i \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$, $\{h_i\}$ 是一组周期调制指数，即 $h_{i+k} = h_i$,

$g(t)$ 是频率脉冲成型函数，一般它在 $[0, LT]$ 外为零，在 $[0, LT]$ 内不为零，其中 L 为正整数。当 $L=1$ 时称为全响应， $L>1$ 时称为部分响应。

相位脉冲成型函数：

$$q(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau, \quad -\infty < t < \infty$$

要求

$$q(LT) = 1/2$$

几种常用的连续相位调制信号的频率成型函数

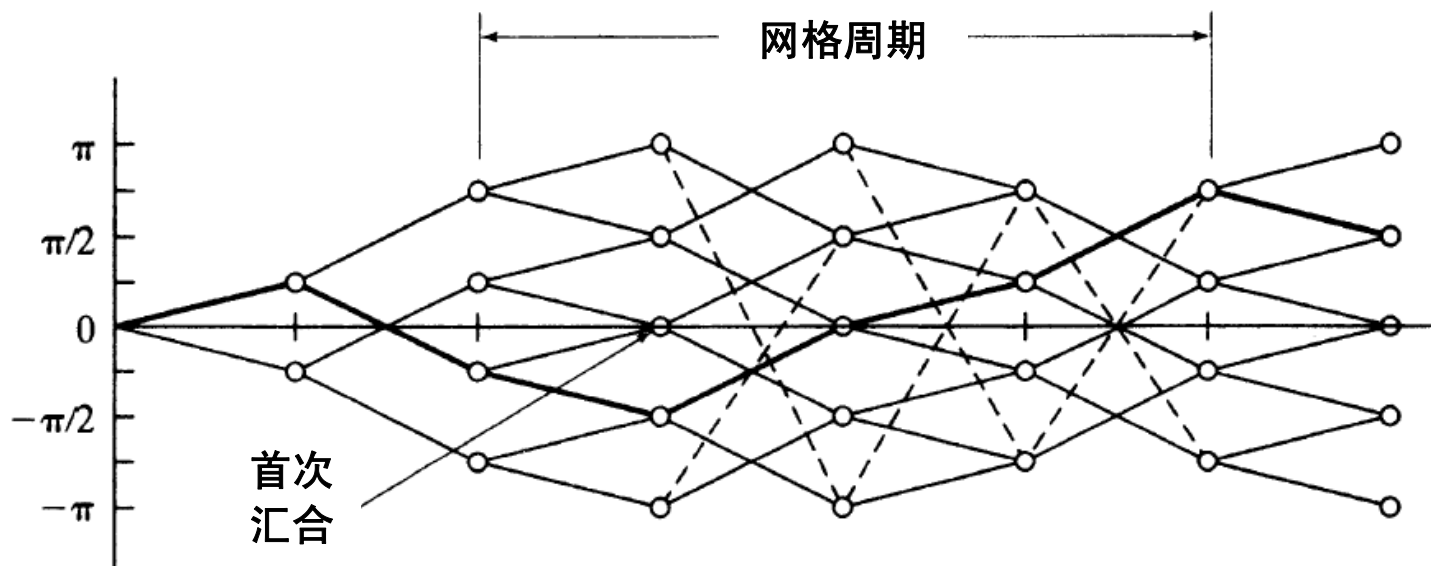
LREC (矩形)	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} & 0 \leq t \leq LT \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$
LRC (升余弦)	$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT} (1 - \cos \frac{2\pi t}{LT}) & 0 \leq t \leq LT \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$
GMSK	$g(t) = \left\{ Q \left[\frac{2\pi B(t - \frac{T}{2})}{\sqrt{\ln 2}} \right] - Q \left[\frac{2\pi B(t + \frac{T}{2})}{\sqrt{\ln 2}} \right] \right\}$

全响应 ($L=1$)，频率成型函数 $g(t)$ 为矩形脉冲。这时多- h 连续相位调制信号在区间 $[kT, (k+1)T]$ 中表示为

$$s(t : \alpha) = A \cos \left[2\pi \left(f_c t + \frac{1}{2} a_k h_k (t/T - k) \right) + \varphi_k \right]$$

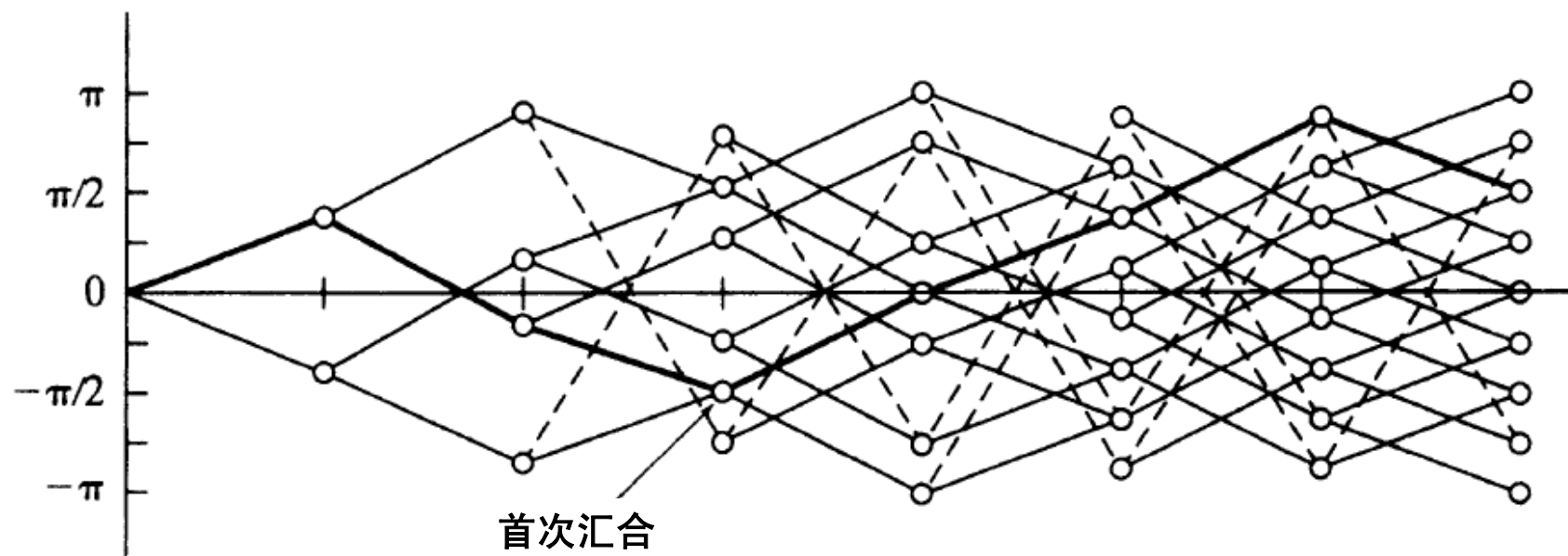
$$\varphi_k = \pi \sum_{i=-\infty}^{k-1} a_i h_i$$

[例7.5.1] a. 考虑 h 序列 $\{h_1, h_2\} = \{1/4, 2/4\}$ 情况。与数据 1, -1, -1, 1, 1, -1 对应的相位轨线：



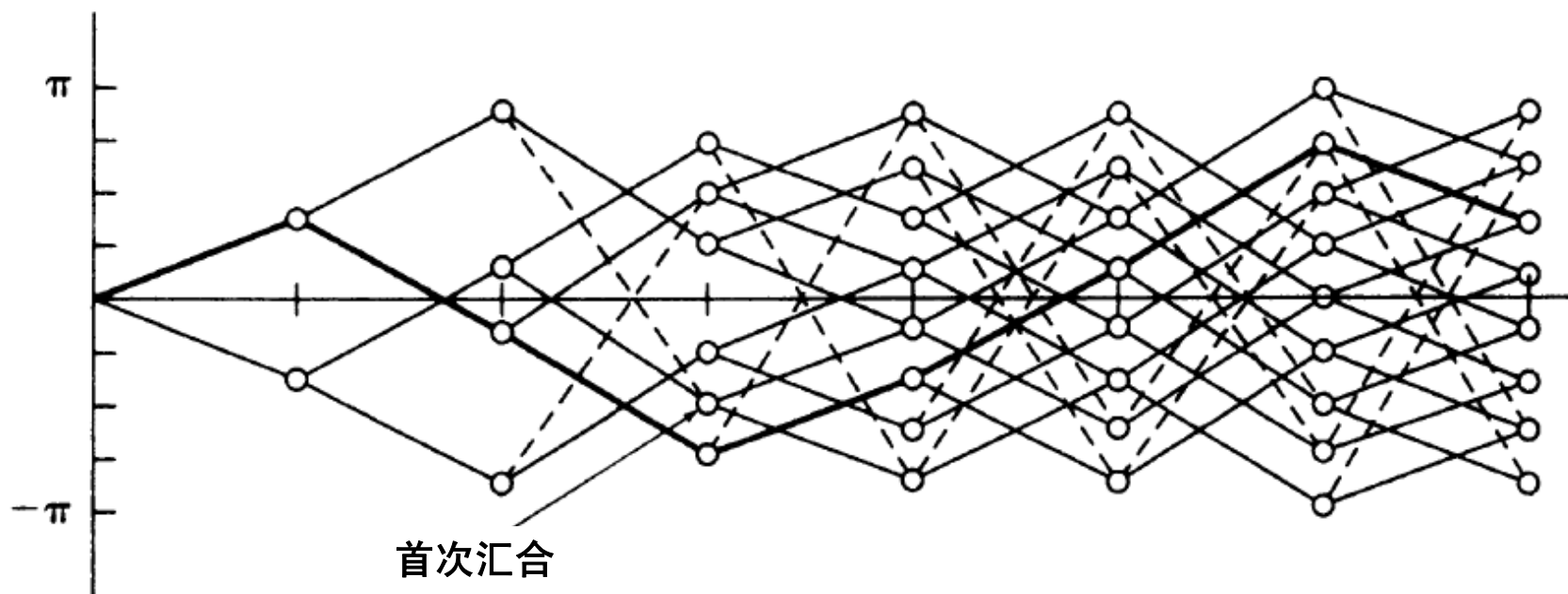
(a) $\{h_i\} = \{1/4, 2/4\}$

b. 考虑 h 序列 $\{h_1, h_2\} = \{3/8, 4/8\}$



(b) $\{h_i\} = \{3/8, 4/8\}$

c. 考虑 h 序列 $\{h_1, h_2, h_3\} = \{3/8, 4/8, 5/8\}$



(c) $\{h_i\} = \{3/8, 4/8, 5/8\}$

多-h连续相位调制信号的最佳解调要利用Viterbi译码算法：

设发送信号： $s(t; \alpha) = A \cos(2\pi f_c t + \theta(t; \alpha))$

接收到信号： $r(t) = s(t; \alpha) + n(t)$

最大似然接收机（Viterbi算法）：

$$\hat{\alpha} = \arg \min_{\alpha'} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{nT} [r(t) - s(t; \theta(t; \alpha'))]^2 dt$$

这等价于在相位网格上寻找一条与接收信号距离最短的轨线，是一个最短路径问题。 Viterbi算法的性能决定于自由距离

$$D_{\min}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{i \neq j} \int_0^{nT} [s(t; \alpha^{(i)}) - s(t; \alpha^{(j)})]^2 dt$$

采用L>1的部分响应方式，以及采用多-h方式，都是由于部分响应方式和多-h方式能够增大相位状态数，使相位轨线变化更为复杂，有利于自由距离的增加，也有利于相位轨线更为平滑。

§ 7.6 正交频分复用调制 (OFDM)

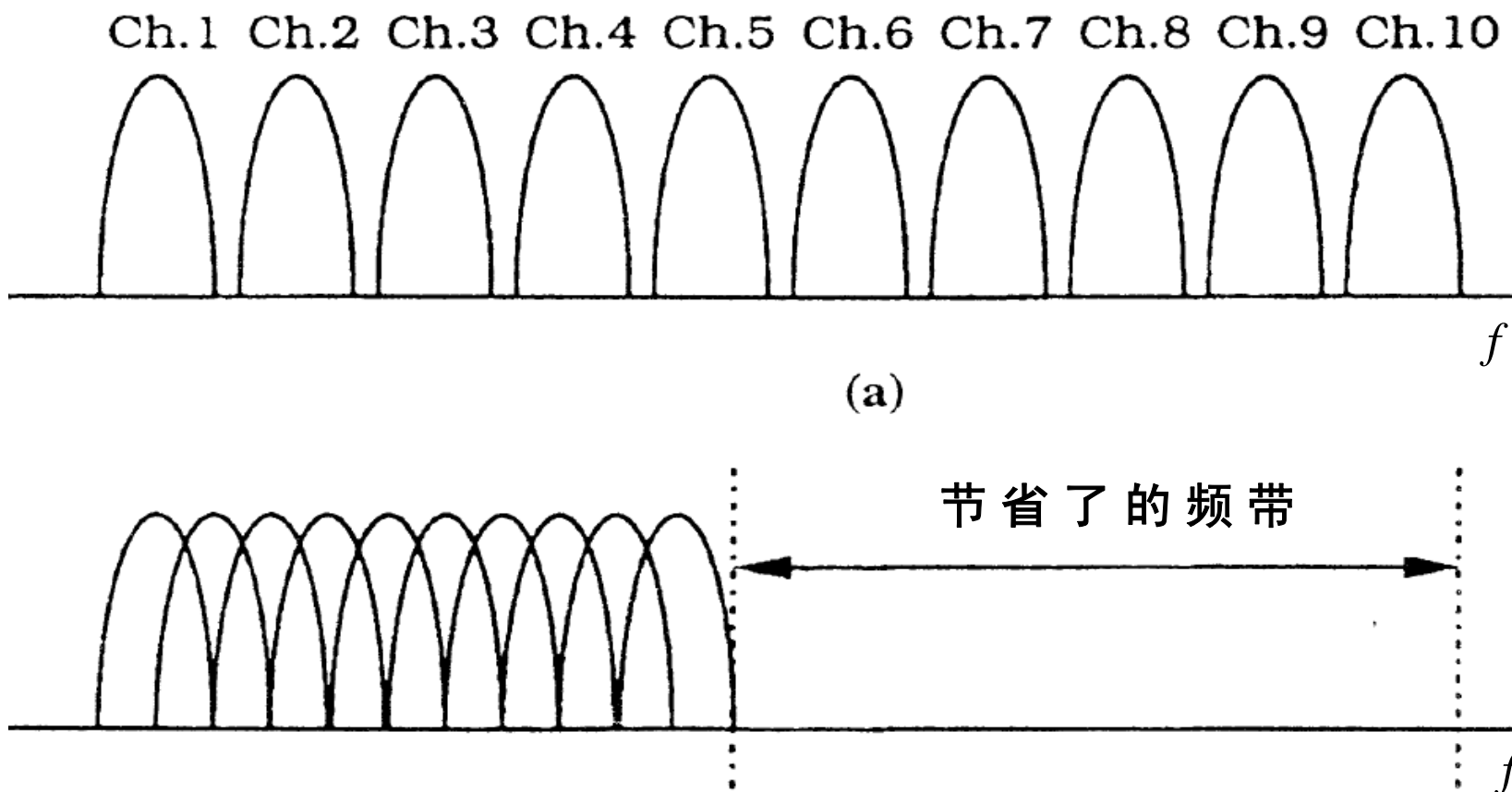
单载波调制：把数据流所构成的基带信号去调制一个载波。

多载波调制：先把高速数据流经串并变换转换成一组低速数据流，然后各自去调制相应载波，并行传输。

多载波调制，也称为多音调调制。通常的频分复用 (FDM) 就是多载波调制。**正交频分复用调制 (OFDM)** 是一种特殊的多载波调制方式。

正交频分复用调制与传统的频分复用的区别：

1、OFDM方式允许各子信道频谱重迭；



2. 为了防止各子信道之间的串扰，OFDM要求各子载波相互正交；

3. OFDM可以利用离散Fourier变换（DFT）来实现其调制和解调；

OFDM的优点:

1. OFDM把数据流分成多个低码率的子数据流，用这些低码率子数据流去调制相应的子载波。这样使被传输的符号的持续时间展宽，有利于减少码间干扰（ISI）；
2. 由于整个信道频带被分成一系列子频带，所以窄带干扰只影响其中一个或少数几个子信道，对于大多数子信道没有影响，因而OFDM减轻了窄带干扰和频率选择性干扰的影响。
3. 通过自适应技术可使受干扰轻的子信道传输较高的码率，受干扰严重的子信道传输低的码率、或者干脆不传输任何信息，这样可以充分利用信道容量，实现信息论中的灌水原则。

OFDM有许多优良性能，使得它在通信中，特别在宽带传输中，如DVB、DAB、ADSL、无线局域网和无线广域网中获得广泛应用。

OFDM的某些缺点：

1. 对于同步有更高要求；
2. OFDM是多路载波的合并传输，故有时多路子载波同相合并，增强了信号幅度，有时反相合并会抵消了信号幅度，所以OFDM信号的幅度起伏较大，造成信号峰均比较大，使得OFDM对于功率线性放大提出了严格要求。

7.6.1 OFDM的基本模型与DFT实现

一般OFDM的每个子载波采用PSK调制或QAM调制。令 N 表示子载波数目， T 表示OFDM符号的有效持续时间， d_i 表示第 i 个子信道上传输的复数数据符号， $f_i = f_c + \frac{i}{T}$ 是第 i 个子载波的频率， $p(t)$ 为矩形脉冲波形，即

$$p(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

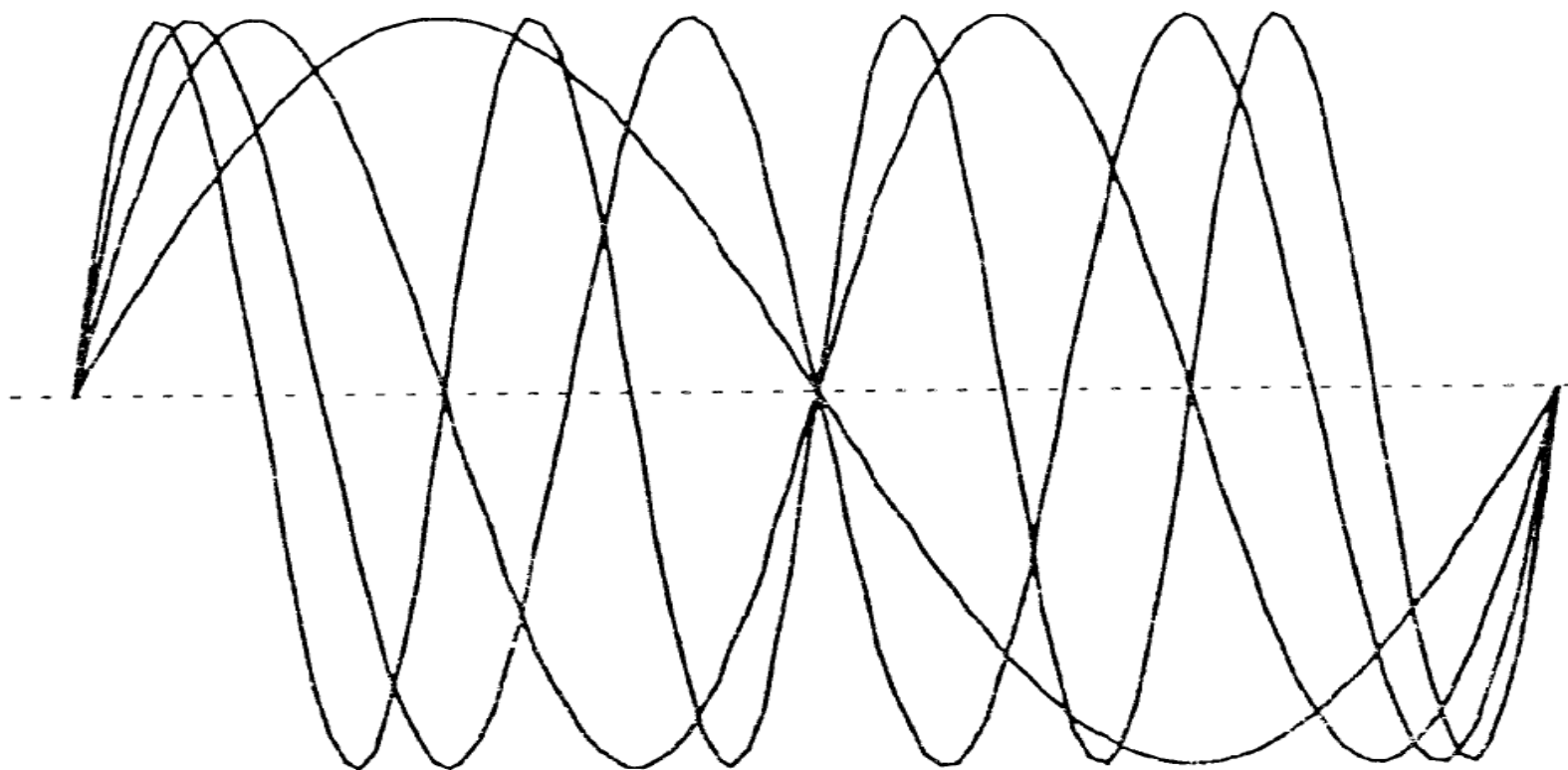
从时刻 t_s 开始的一个OFDM符号为

$$s(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} d_i p(t - t_s) \exp \{ j2\pi f_i (t - t_s) \} \right\}, \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

相应的复数等效基带信号可表示为：

$$s_{eq}(t) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i p(t - t_s) \exp \left\{ j2\pi \frac{i}{T} (t - t_s) \right\}, \quad t_s \leq t \leq t_s + T$$

图中表示组成OFDM信号的4个子载波。在实际系统中各子载波的幅度和相位往往是不相同的。但**在一个OFDM的有效符号时间 T 中都包含了每个子载波的整数个周期，而且相邻子载波在一个OFDM有效符号时间中相差一个周期。**



子载波的正交性，及解调：

由于OFDM子载波之间的正交性，即

$$\frac{1}{T} \int_0^T \exp \left\{ j \left(\frac{2\pi n t}{T} + \varphi_n \right) \right\} \cdot \exp \left\{ -j \left(\frac{2\pi m t}{T} + \varphi_m \right) \right\} dt = \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

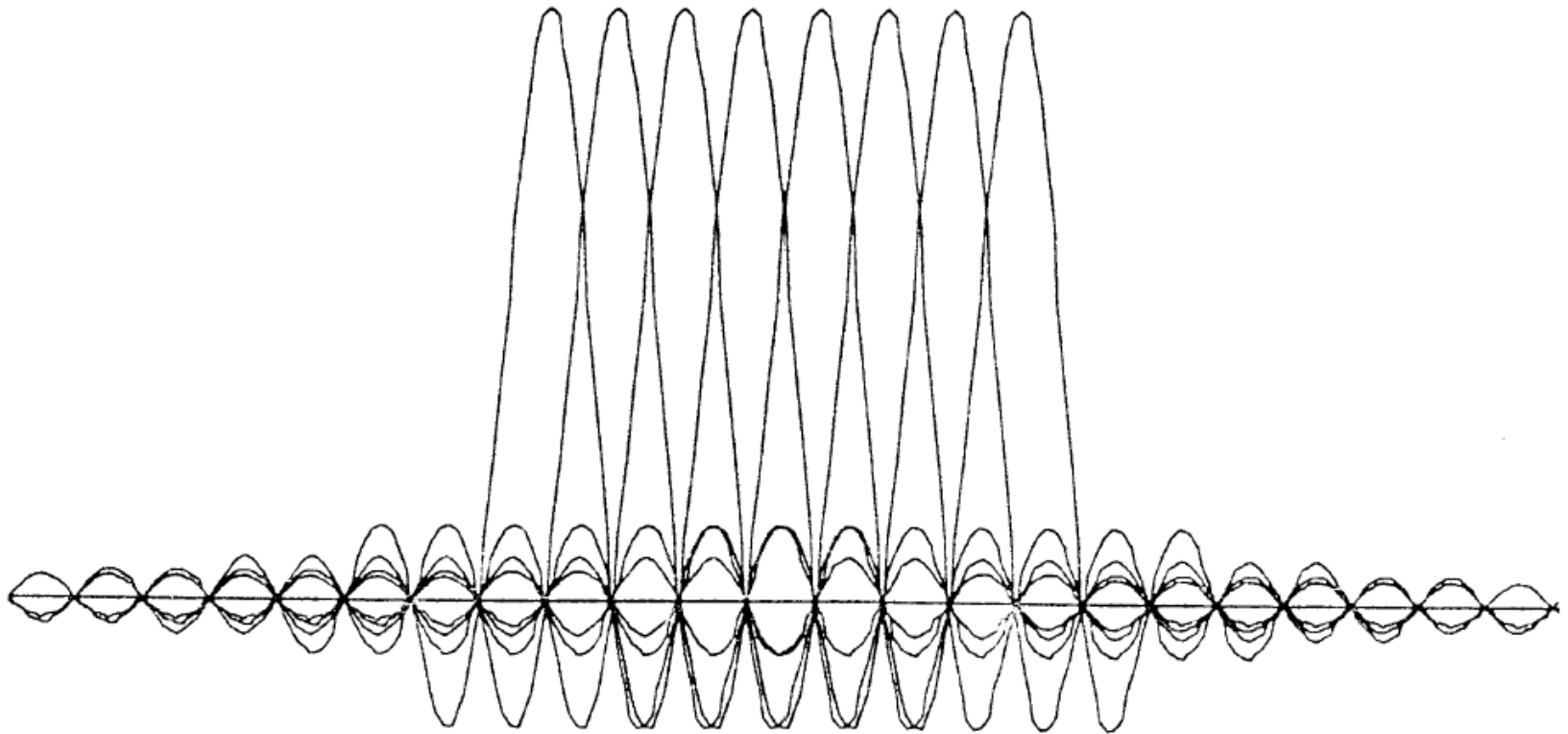
所以OFDM接收机对第 k 个子载波解调为，

$$\hat{d}_k = \frac{1}{T} \int_{t_s}^{t_s+T} \exp \left\{ -j \frac{2\pi k}{T} (t - t_s) \right\} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} d_i \exp \left\{ j \frac{2\pi i}{T} (t - t_s) \right\} dt = d_k$$

于是其它的子载波对于解调子载波不造成干扰。

OFDM信号的频谱:

OFDM信号的频谱可看成是周期为 T 的矩形脉冲波形的频谱与各子载波频率上的 δ 函数 $\left(\sum_{i=0}^{N-1} \delta(f - f_i)\right)$ 的卷积。



用离散Fourier逆变换（IDFT）构成 OFDM基带信号：

对复数等效基带信号(7.6.3)以时间间隔 $\varepsilon = T / N$ 采样，得到

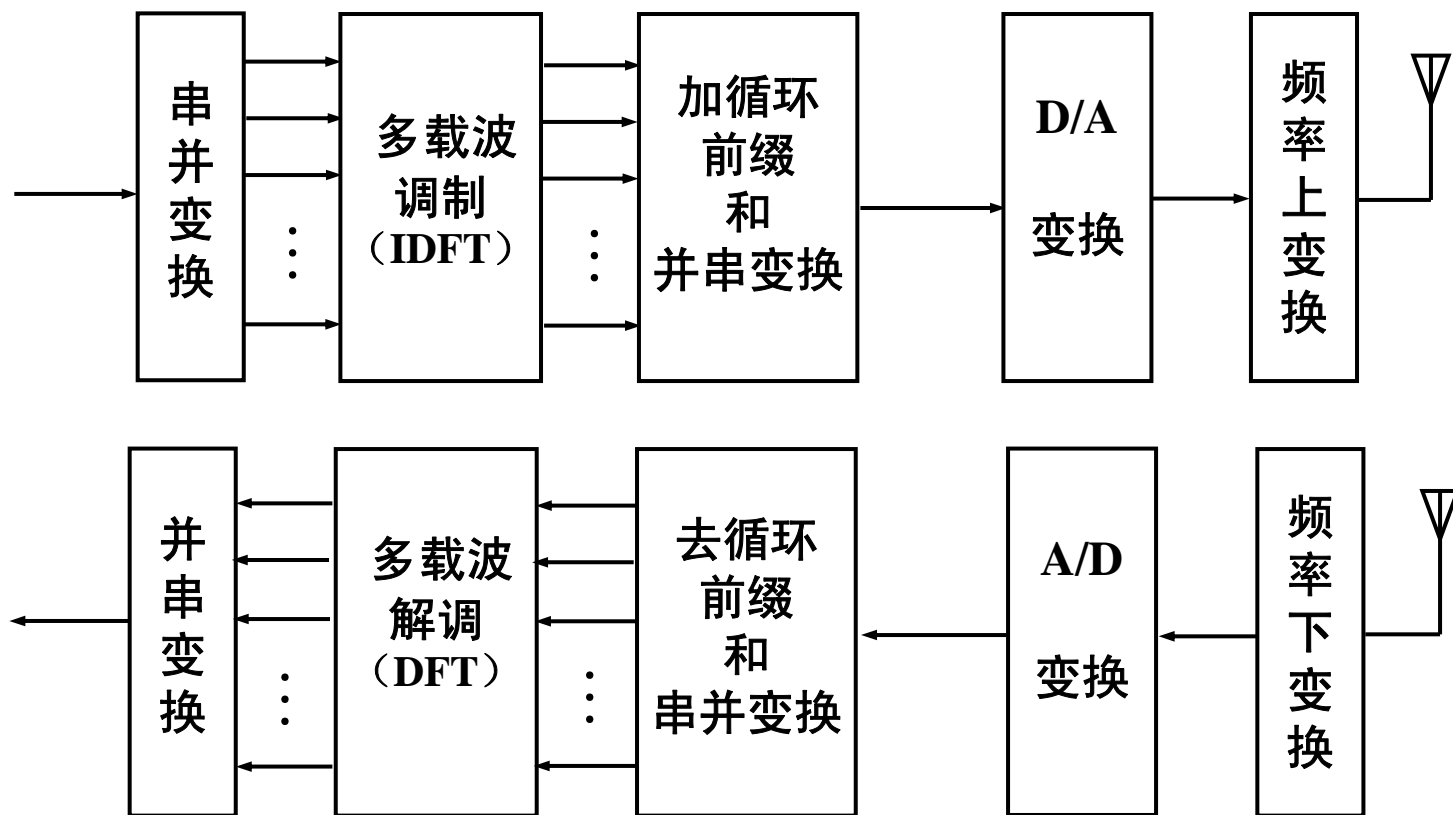
$$s_k = s_{eq}(k\varepsilon) = s_{eq}\left(\frac{kT}{N}\right) = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \exp\left\{j \frac{2\pi i k}{N}\right\}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

表示 $\{s_k\}$ 是对 $\{d_i\}$ 进行IDFT运算的结果。反过来在接收端为了恢复出数据 $\{d_i\}$ ，可以对 $\{s_k\}$ 进行反变换，即DFT变换，

$$d_i = \sum_{k=0}^{N-1} s_k \exp\left\{-j \frac{2\pi i k}{N}\right\}, \quad 0 \leq i \leq N-1$$

OFDM的调制和解调可以由IDFT和DFT来完成。通过N点IDFT运算把频域数据符号 d_i 变换成时域数据符号 s_k ，然后经过加循环前缀、并串变换和数模变换转换成时域波形，再经过频率上搬移到射频，发送出去。在接收端进行相应的逆变换。

OFDM的调制，解调系统方框图

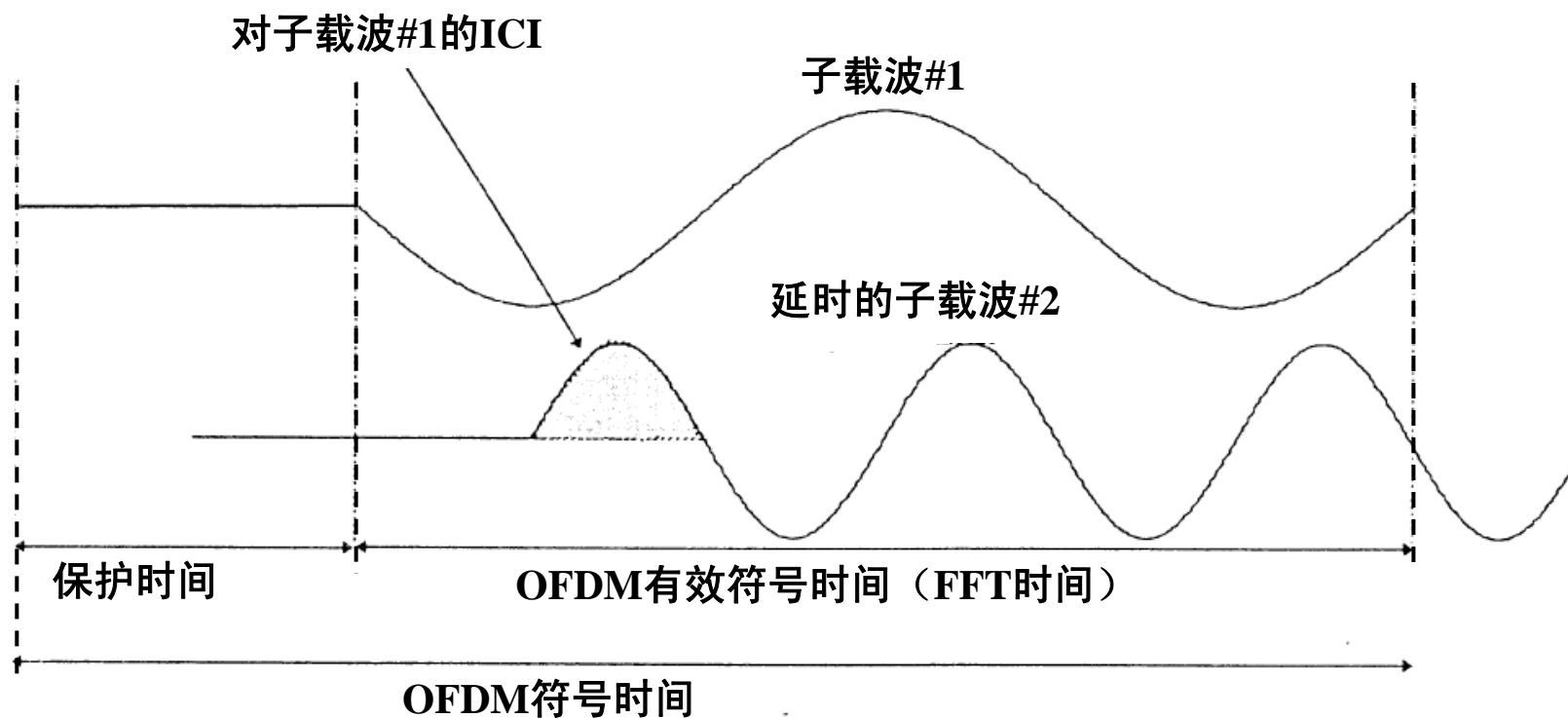


在OFDM系统的实际运用中，可采用更方便、更快捷的IFFT/FFT。

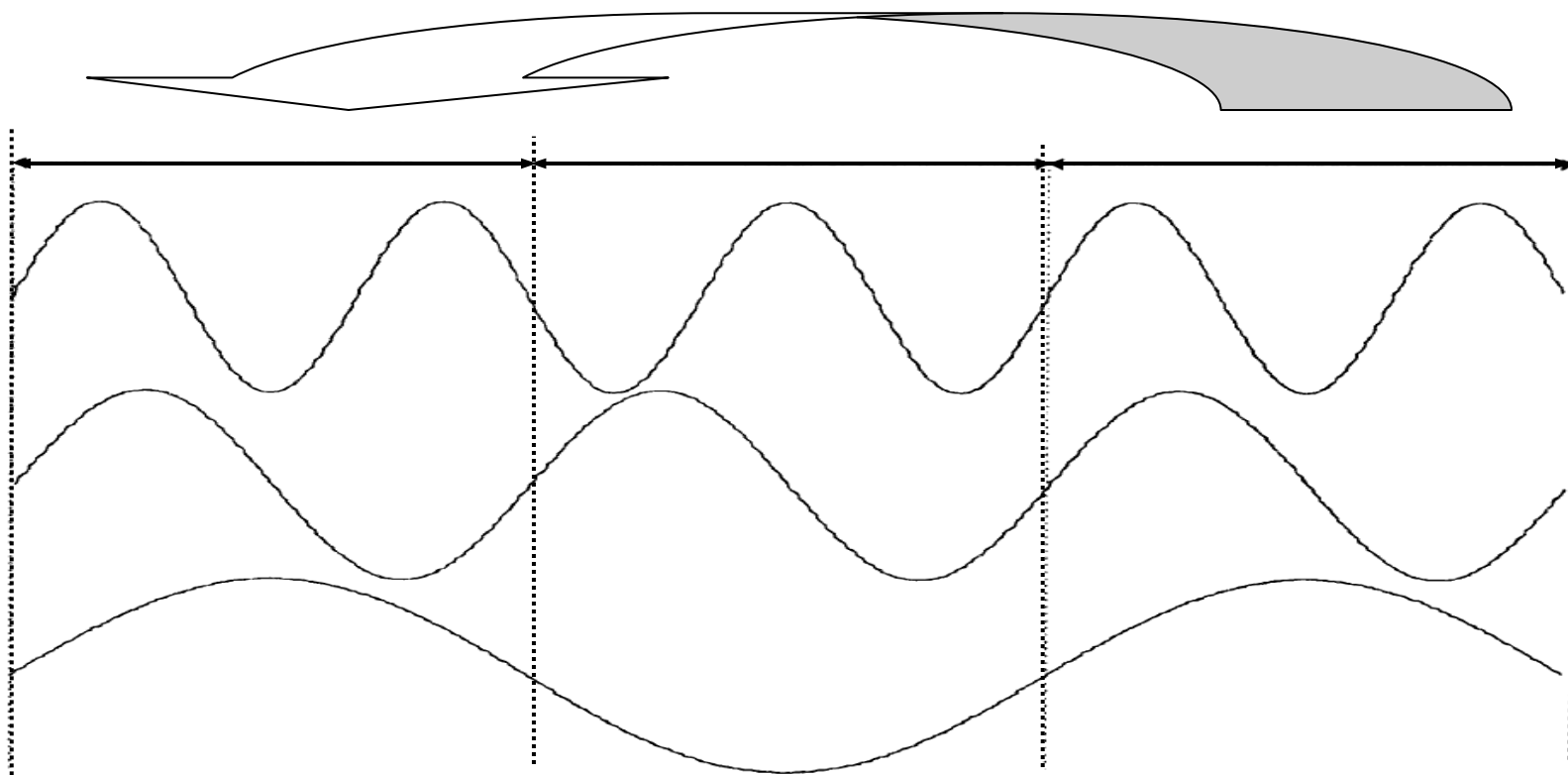
7.6.2 保护时间与循环前缀

为了最大限度地消除码间干扰（ISI），可以在OFDM符号之间加入保护时间 Δ 。保护时间的长度要大于预期的多径信道最大时延扩展。在保护时间中，OFDM系统完全不传输数据，它是一段空白。这样使得一个符号的多径时延分量不会干扰后继符号。加上保护时间后的OFDM符号时间长度为 $T_s = T + \Delta$ ，其中OFDM的积分时间（即IDFT/DFT时间），仍为 T （有效符号时间），相邻子载波频率间隔仍为 $1/T$ 。

空白的**保护时间**虽然能够消除多径展宽引起的码间干扰，但**使子载波之间的正交性被破坏**，产生子载波之间的串扰，即产生信道间干扰（ICI）。



为了消除子信道之间的串扰，OFDM采用在原来空白保护时间中加循环前缀的方法。如图7.6.6所示，把OFDM符号的后面一段波形复制到原来空白保护时间中。由于OFDM有效时间 T 中包含了子载波的整数周期，所以这样加循环前缀不会在拼接处造成相位的突变。



设经过IDFT的OFDM时域数据为：

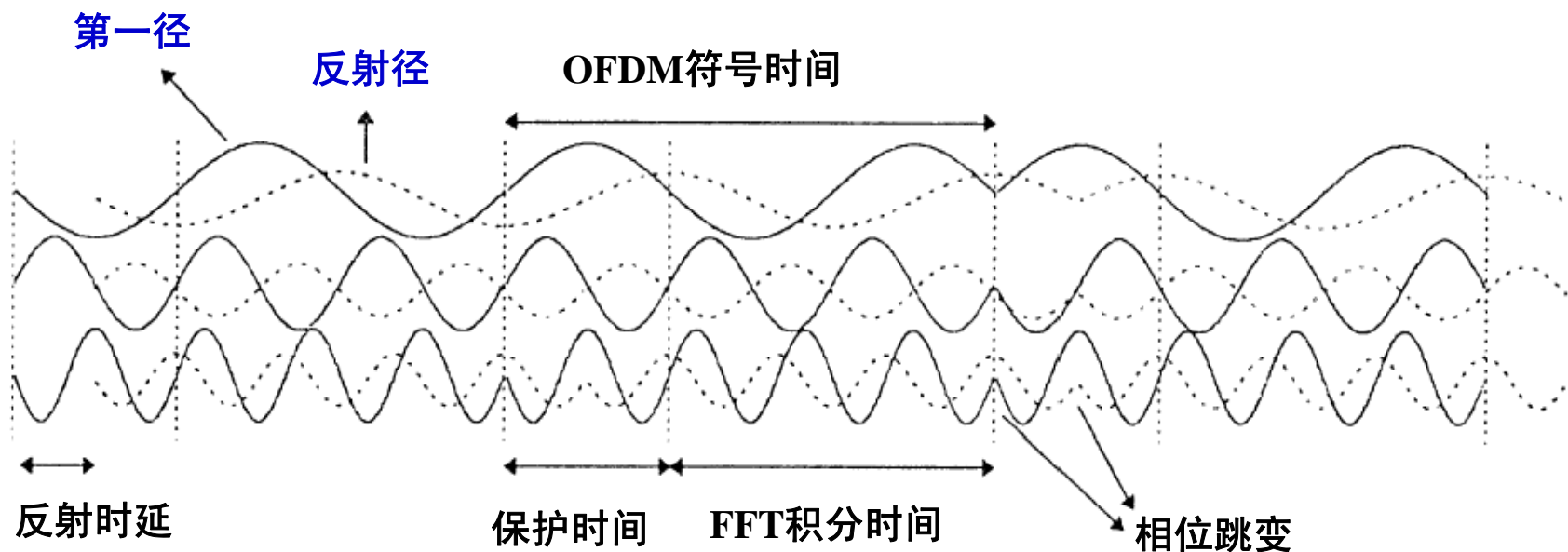
$$s_k = IDFT\{d_i\} = \sum_{i=0}^{N-1} d_i \exp\left\{j \frac{2\pi i k}{N}\right\}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

则加循环前缀后的OFDM符号为：

$$x_k = \begin{cases} s_{k+N} & k = -m, -m+1, \dots, -1 \\ s_k & k = 0, 1, 2, \dots, N-1 \end{cases}$$

其中 $m = \frac{\Delta}{T} \cdot N$ 为循环前缀的长度。

多径传播对OFDM符号的影响



虚线是实线信号的时延复制品。OFDM的各子载波经过BPSK调制，在符号边界处可能发生相位跳变，对于虚线来说，这种相位跳变只能发生在实线信号的相位跳变之后。由于多径延时小于保护时间，所以可以保证在DFT的运算时间长度 T 中，不会发生信号相位的跳变。这不影响子载波之间的正交性。

7.6.3 OFDM的符号检测与功率谱

假定多径传输信道的最大时延不超过保护时间长度 Δ ，OFDM信号有 N 个子载波，时间分辨率为 $\varepsilon = T / N$ ，所以可以分辨的多径数目为 $m+1$ ，其中 $m = \frac{\Delta}{\varepsilon} = \frac{\Delta}{T} \cdot N$ 。于是多径传输信道的脉冲响应可写成：

$$h(t) = \sum_{i=0}^m h_i \delta(t - i\varepsilon) \longleftrightarrow H(f) = \sum_{i=0}^m h_i e^{-j2\pi \cdot i\varepsilon \cdot f}$$

在子载波频率 $f_k = k / T$ 上的频率响应为

$$H_k = H\left(\frac{k}{T}\right) = \sum_{i=0}^m h_i e^{-j2\pi i \cdot k / N}$$

OFDM接收机接收到的等效基带信号为：

$$r_{eq}(t) = s_{eq}(t) \otimes h(t) + n(t)$$

接收到信号经A/D变换及去除循环前缀后，得到受扰的时域数据 $\{y_k\}$

进行DFT变换得到频域数据

$$\hat{d}_k = DFT\{y_k\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_k \cdot e^{-j2\pi k \cdot n / N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

循环前缀长度大于最大时延，**不考虑OFDM的码间干扰和信道间干扰**，

$$\hat{d}_k = d_k \cdot H_k + w_k \quad (7.6.15)$$

w_k 是高斯噪声的Fourier变换，仍然是高斯噪声。必须对信道频率响应 H_k 进行估计和补偿。一般通过在每个子载波信道上周期地传递已知调制序列（即训练序列）或无调制导频序列来完成对信道的估计。

第 k 个子载波信道的信噪比：

$$SNR_k = \frac{TP_k |H_k|^2}{\sigma_{nk}^2}$$

由式(7.6.15)，接收机对第 k 个子信道仅需要乘常数

$$C_k = 1 / H_k$$

对于**采用最小均方误差准则的接收机**，对第 k 个子信道需要乘上

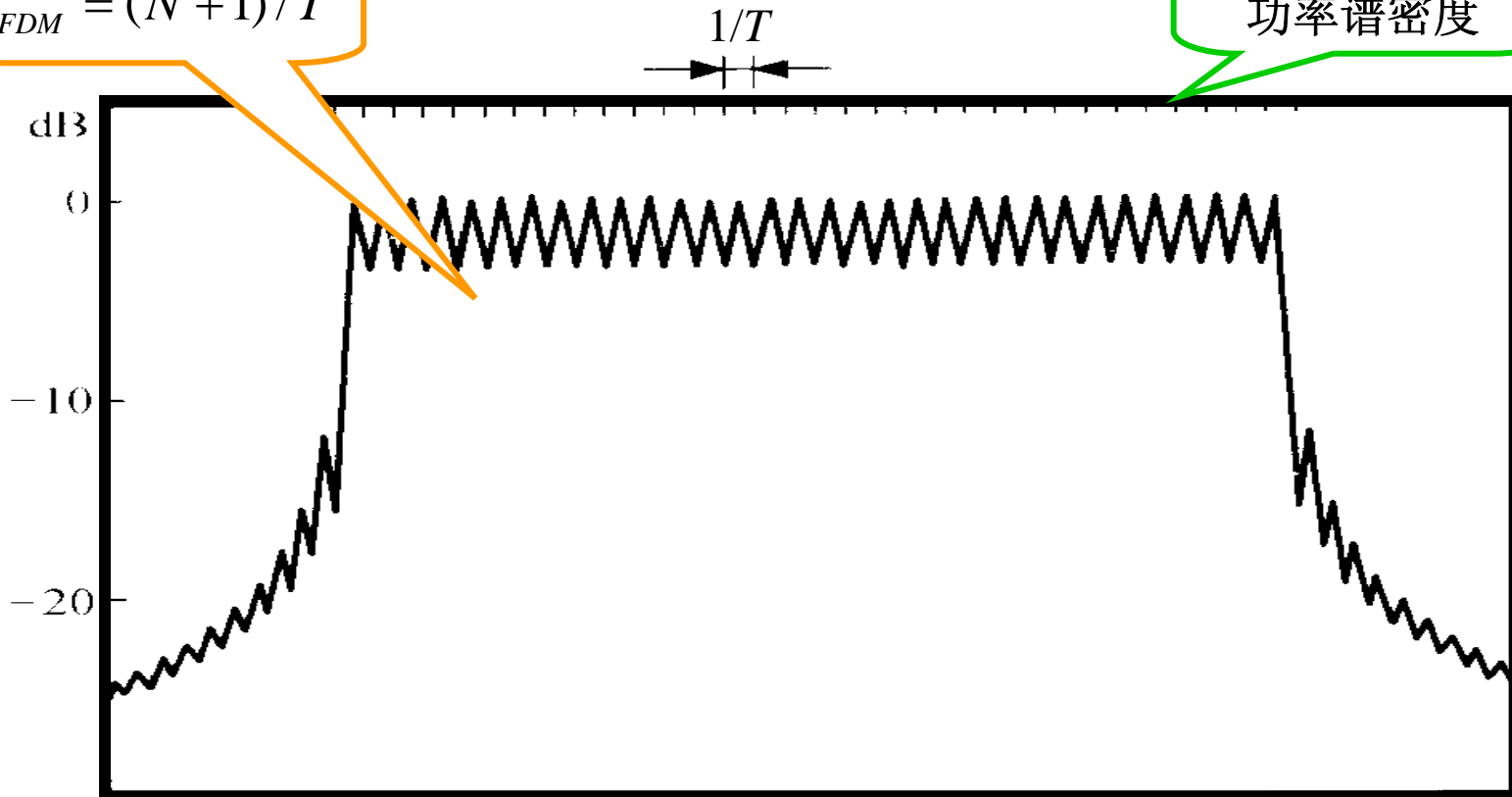
$$C_k = \frac{H_k^*}{|H_k|^2 + \sigma_n^2 / \sigma_s^2}$$

OFDM信号的功率谱 (当各子载波分配到相同功率时)

$$P_{OFDM}(f) = \frac{PT^2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \left| \frac{\sin[\pi(f - f_i)T]}{\pi(f - f_i)T} \right|^2$$

$$B_{OFDM} = (N + 1) / T$$

$N=32$ 的OFDM
功率谱密度



$$\eta_{OFDM} = \frac{N \cdot \log_2 M}{T} / B_{OFDM} = \frac{N}{N + 1} \log_2 M, \text{ bit} / \text{Hz} / \text{s}$$

对OFDM信号采用“加窗”技术可使带外功率谱密度下降得更快，“加窗”意味着不采用矩形脉冲加权，采用其它形状的脉冲加权，使得OFDM符号的幅度在边界处平滑地下降到零。常用的“窗”类型有升余弦窗等。

