第二章 确定性信号、随机变量与随机过程

§2.1 确知信号的频域描述

一、Fourier级数和Fourier变换

定理2.1.1（**Fourier级数**）$x(t)$是周期为T_0的函数，如果

① $x(t)$ 绝对可积;

② $x(t)$ 在一个周期中至多有有限次振荡;

③ $x(t)$ 在每周期中间断点个数有限，则$x(t)$可表示为

$$x_{\pm}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \qquad x_n=\frac{1}{T_0}\int_{\alpha}^{\alpha+T_0}x(t)e^{-j2\pi\frac{n}{T_0}t}dt$$

$$x_{\pm}(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\text{ 在 } t \text{ 连续} \\ \dfrac{x(t^{+})+x(t^{-})}{2} & x(t)\text{ 在 } t \text{ 间断} \end{cases}$$

定理2.1.2 (Fourier变换) 若函数$x(t)$满足如下条件：

① $x(t)$绝对可积，

② $x(t)$在任何有限实区间上至多有限次振荡；

③ $x(t)$在任何有限实区间上至多有有限个间断点; 则有如下的变换关系：

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x_{\pm}(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$x_{\pm}(t)=\begin{cases} x(t) & x(t)\text{ 在 } t \text{ 连续} \\ \dfrac{x(t^{+})+x(t^{-})}{2} & x(t)\text{ 在 } t \text{ 间断} \end{cases}$$

$$x(t)\Leftrightarrow X(f)$$

注意1： $\delta(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft}df$

注意2： 若$x(t)$是实函数，则$X(f)$具有Hermitian性质；

$$X(-f)=X^*(f)$$

注意3： 泊松公式，若 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t)\cdot h(t-nT_0)$

$$X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{l=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{l}{T_0}\right)\cdot G\left(f-\frac{l}{T_0}\right)$$

其中 $g(t)\Leftrightarrow G(f)$ $h(t)\Leftrightarrow H(f)$

若 $g(t)=1$，$h(t)=\delta(t)$，由于

$$g(t)\Leftrightarrow \delta(f) \qquad h(t)\Leftrightarrow 1$$

$$\boxed{x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_o)\Leftrightarrow X(f)=\frac{1}{T_0}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{l}{T_0}\right)}$$

二、周期信号的Fourier变换

设$\boldsymbol{x(t)}$是周期为$\boldsymbol{T_0}$的周期信号，

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n e^{j2\pi\frac{n}{T_0}t} \Leftrightarrow X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\delta\left(f-\frac{n}{T_0}\right)$$

$$x_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt=\frac{1}{T_0}\int_{-\infty}^{\infty}x_{T_0}(t)e^{-jn\frac{2\pi t}{T_0}}dt=\frac{1}{T_0}X_{T_0}\left(\frac{n}{T_0}\right)$$

三、能量型信号的能量谱

能量型信号能量有限，即满足$\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt<\infty$。由巴塞瓦尔公式

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}|x(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|X(f)|^2df$$

能量谱密度：$G(f)=|X(f)|^2$

信号的相关函数：$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\cdot x^*(t-\tau)dt=x(\tau)\otimes x^*(-\tau)$

$$R_x(\tau)\Leftrightarrow G(f)$$

四、功率型信号的功率谱密度

功率型信号$x(t)$的功率是有限的， $0 \le \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}|x(t)|^2 dt < \infty$

功率型信号的相关函数： $R_x(\tau) = \lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)x^*(t-\tau)dt$

功率型信号的功率谱密度： $P(f) = \lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{T}|X_T(f)|^2$

$$R_x(\tau) \Leftrightarrow P(f)$$

注意：功率信号$\boldsymbol{x(t)}$通过脉冲响应为$\boldsymbol{h(t)}$的滤波器的输出为

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h^*(-\tau)$$

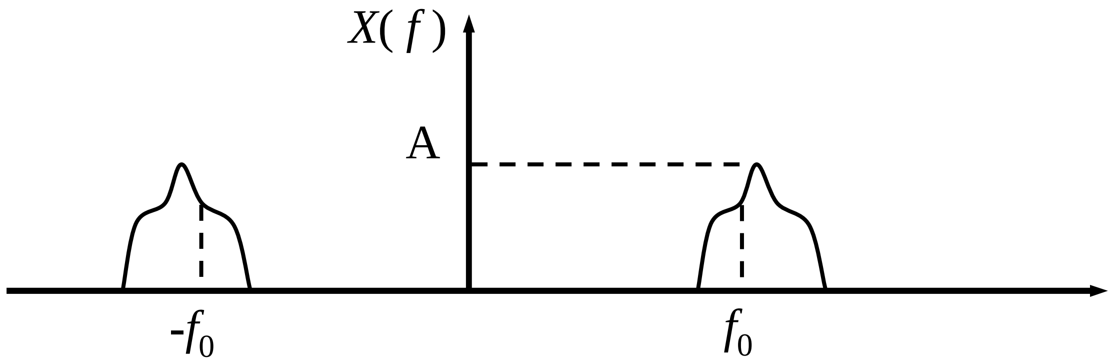
$$P_y(f) = P_x(f)|H(f)|^2$$

五、窄带信号（带通信号）和窄带系统（带通系统）

1．窄带信号

定义： 信号$x(t)$称为是带通的，或窄带的，指它的Fourier变换$X(f)$在某个高频 f_0 附近一个小领域上不为零，在其它地方为零，即

$$X(f)=0 \quad ,\forall\left|f \mp f_0\right| \geq W \, , \; W < f_0$$



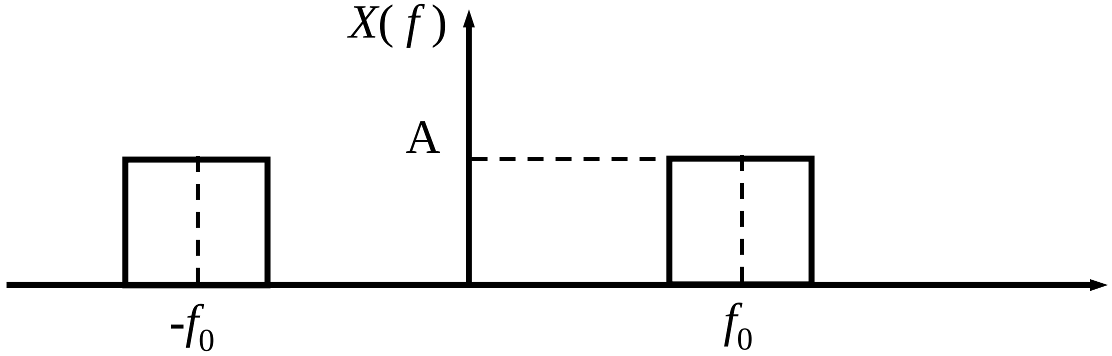
同样带通系统（窄带系统）是指它的传递函数$\boldsymbol{H(f)}$是窄带的，

即存在 $\boldsymbol{f_0}$ 使

$$H(f)=0\quad,\forall\left|f\mp f_0\right|>W\text{，}\quad W<f_0$$

如果带通系统是理想的指

$$H(f)=\begin{cases}1 & \left|f\mp f_0\right|<W\\ 0 & \left|f\mp f_0\right|>W\end{cases}\text{，}\quad W<f_0$$



在通信中常碰到信号

$$x(t) = A(t)\cos(2\pi f_0 t + \Phi(t))$$

可写成 $$x(t) = \mathrm{Re}\left\{A(t)\cdot e^{j(2\pi f_0 t + \Phi(t))}\right\}$$

复包络为 $$x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t) = A(t)\cdot e^{j\Phi(t)}$$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{x_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

现要证明，对任意窄带信号$x(t)$，它可以写成

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{x_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{x(t) + j\hat{x}(t)\right\}$$

其中 $\hat{x}(t)$ 是$x(t)$的Hilbert变换。

（1）单频信号

$$x(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)\Leftrightarrow X(f)=Ae^{j\theta}\left(\frac{1}{2}\delta(f-f_0)+\frac{1}{2}\delta(f+f_0)\right)$$

引入复数表示：

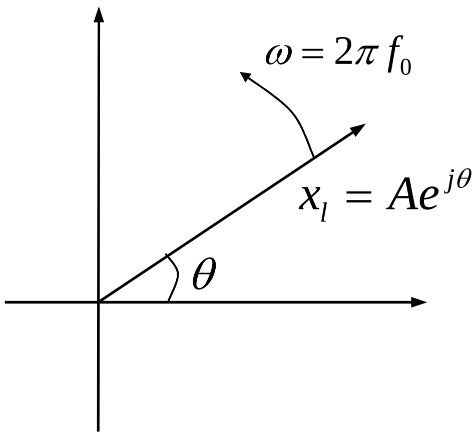
$$\begin{aligned}z(t)&=Ae^{j(2\pi f_0 t+\theta)}\\&=A\cos(2\pi f_0 t+\theta)+j\sin(2\pi f_0 t+\theta)\\&=x(t)+jx_q(t)\end{aligned}$$

$z(t)$表示相位子（复包络）$x_l=Ae^{j\theta}$ 以角频率$2\pi f_0$反时针旋转，即 $z(t)=x_l\cdot e^{j2\pi f_0 t}$ 。在频率域上相当于把 $Z(f)$ 在频轴上向左移 f_0，得到复数 x_l。

如何得到$Z(f)$：在频域上删除$X(f)$的负频分量，再乘以2，即

$$Z(f)=2\cdot u_{-1}(f)X(f)$$

其中 $$u_{-1}(f)=\begin{cases}1 & f>0\\ 1/2 & f=0\\ 0 & f<0\end{cases}$$



$$x_l=z(t)e^{-j2\pi f_0 t}\Longleftrightarrow X_l(f)=Z(f+f_0)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)X(f+f_0)$$

（2）一般窄带信号的复包络（相位子）

设*x*(*t*)是窄带信号，$x(t) \Leftrightarrow X(f)$ ，寻找*x*(*t*)的复包络 $x_l(t)$

首先在频域上删除 $X(f)$的负频分量，再乘以2，得到

$$Z(f) = 2 \cdot u_{-1}(f) X(f)$$

再求 $Z(f) \Leftrightarrow z(t)$

由于 $\mathcal{F}\left[u_{-1}(t)\right] = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$

（利用 $\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{t} x(t)dt\right] = \frac{X(f)}{j2\pi f} + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$ 和 $\int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt = u_{-1}(t)$ ）

所以 $\mathcal{F}\left[\frac{1}{2}\delta(t) + \frac{j}{2\pi t}\right] = u_{-1}(f)$

（利用对偶性 $x(t) \Leftrightarrow X(f) \Rightarrow X(-t) \Leftrightarrow x(f)$，以及δ(*t*)是偶函数）

所以 $z(t) = \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) \otimes x(t) = x(t) + j\frac{1}{\pi t} \otimes x(t) \triangleq x(t) + j\hat{x}(t)$

其中 $\boxed{\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes x(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau}$ 称为是$x(t)$的**Hilbert**变换。

看一下**Hilbert**变换的意义

$$\mathrm{F}\left[\frac{1}{\pi t}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j2\pi tf}}{\pi t}dt$$

$$=-j\int_{0}^{\infty}\frac{2\sin 2\pi ft}{\pi t}dt$$

$$=-j\,\mathrm{sgn}(f)$$

$$=\begin{cases}-j & f>0\\ 0 & f=0\\ j & f<0\end{cases}$$

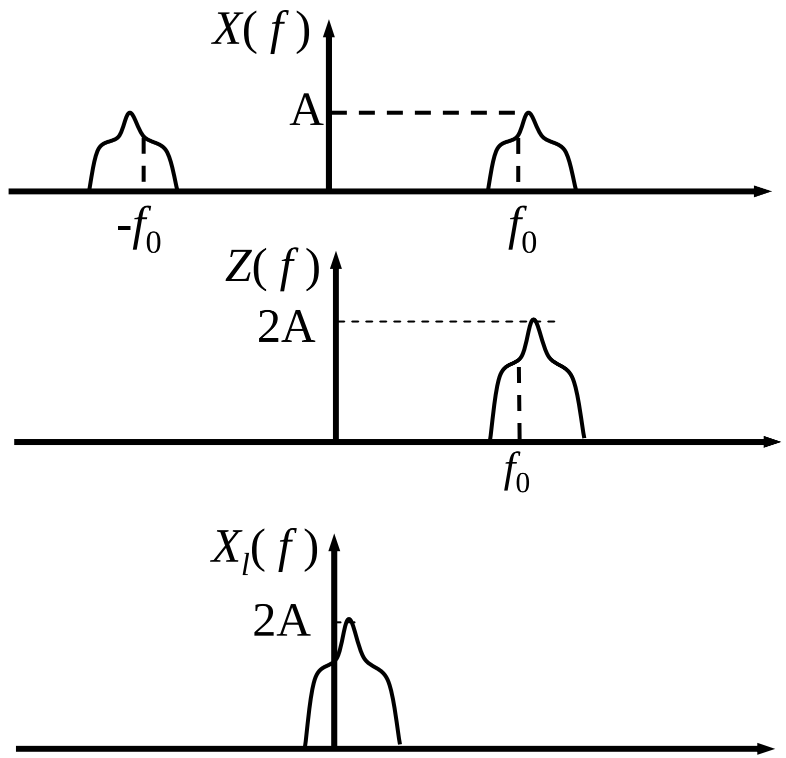
$$=\begin{cases}e^{-j\frac{\pi}{2}} & f>0\\ 0 & f=0\\ e^{j\frac{\pi}{2}} & f<0\end{cases}$$

所以 $x(t)$ 的Hilbert变换相当于把信号的正频分量移相 $-\pi/2$，负频分量移相 $\pi/2$ 。**Hilbert滤波器也称为正交滤波器。**

为了获得带通信号 $x(t)$ 的复包络表示（即等效低通表示），把 $Z(f)$ 向左移 f_0，得到 $x(t)$ 的低通等效的时域表示

$$x_l(t) = z(t) \cdot e^{-j2\pi f_0 t} \Leftrightarrow X_l(f) = Z(f+f_0) = 2u_{-1}(f+f_0)X(f+f_0)$$

显然 $\left|X_l(f)\right| = 0$， $|f| > W$， $W < f_0$



一般复包络 $x_l(t)$ **是复信号**，所以

$$x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t)$$

由于 $$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$= x_l(t)e^{j2\pi f_0}$$

$$= \left[x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)\right]$$

$$+ j\left[x_c(t)\cdot\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t\right]$$

所以 $$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(x) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

记 $$V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)}\ , \qquad \Theta(t) = \arctan\frac{x_s(t)}{x_c(t)}$$

$x(t)$的复包络可写为：

$$x_l(t) = V(t)e^{j\Theta(t)}$$

$$z(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$$

$$= x_l(t) e^{j2\pi f_0 t}$$

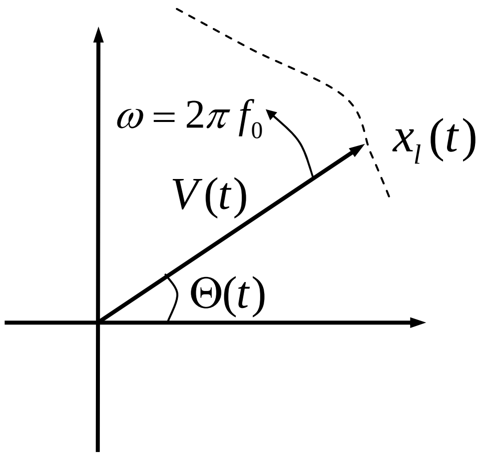
$$= V(t) \cdot e^{j\Theta(t)} \cdot e^{j2\pi f_0 \tau}$$

$$= V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t)) + jV(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

$$x(t) = V(t)\cos(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

$$\hat{x}(t) = V(t)\sin(2\pi f_0 t + \Theta(t))$$

$V(t)$和$\Theta(t)$是慢变化时间函数



（3）Hilbert变换的性质

$$\boxed{\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes x(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau}$$

(1) $x(t) = x(-t) \Longrightarrow \hat{x}(t) = -\hat{x}(-t)$ ，即偶函数的Hilbert变换为奇函数；

$x(t) = -x(-t) \Longrightarrow \hat{x}(t) = \hat{x}(-t)$ ，即奇函数的Hilbert变换为偶函数；

(2) $\hat{\hat{x}}(t) = -x(t)$ ；

(3) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{x}(t)|^2 \, dt$ ；

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\hat{x}(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}(f) X^*(f) df = 0$ ；

复包络是复信号 $x_l(t) = x_c(t) + jx_s(t)$

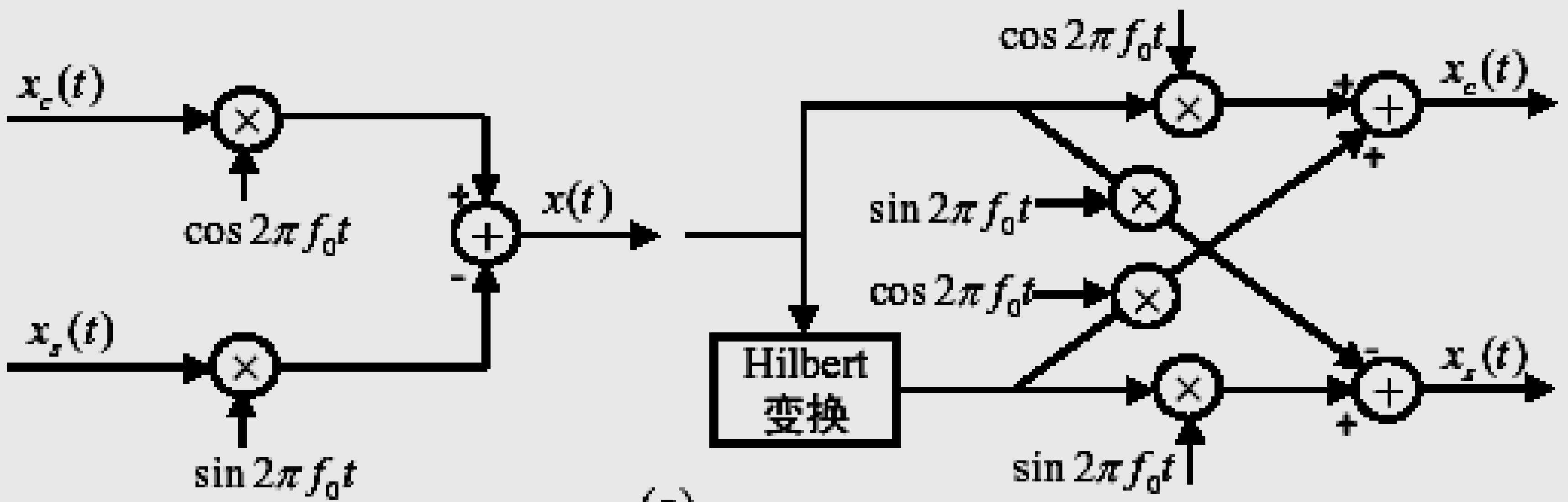
$$x_l(t)e^{j2\pi f_0} = x(t) + j\hat{x}(t)$$

得到 $$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(x) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

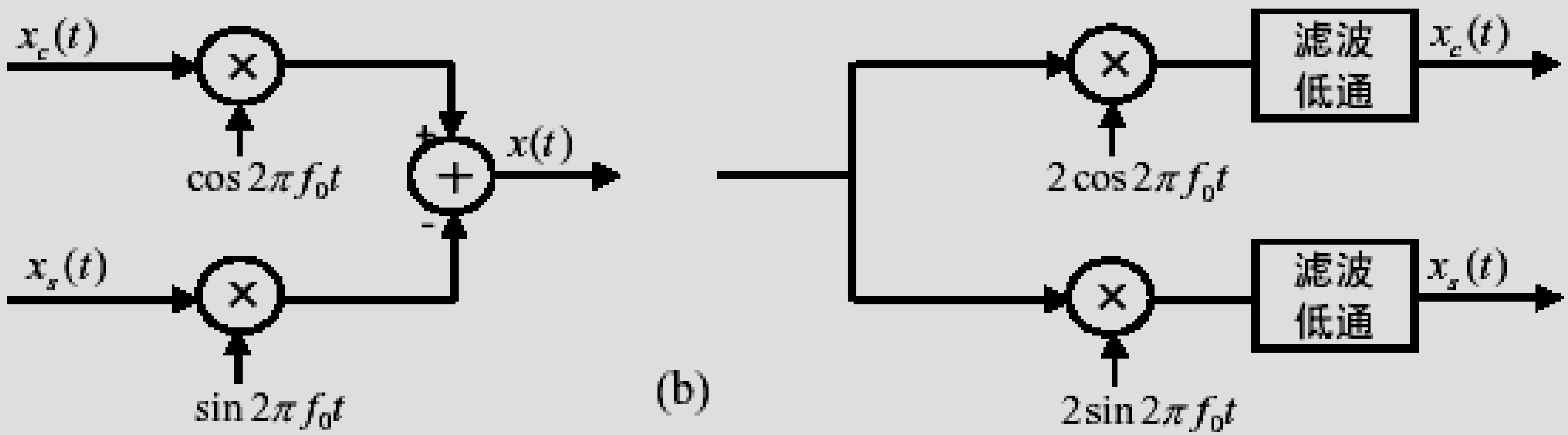
导出 $$x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(x) = -x(t)\sin(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t)$$



$x_c(t)$
$\cos 2\pi f_0 t$
$x_s(t)$
$\sin 2\pi f_0 t$
$x(t)$
Hilbert
变换
$\cos 2\pi f_0 t$
$\sin 2\pi f_0 t$
$\cos 2\pi f_0 t$
$\sin 2\pi f_0 t$
$x_c(t)$
$x_s(t)$

(a)



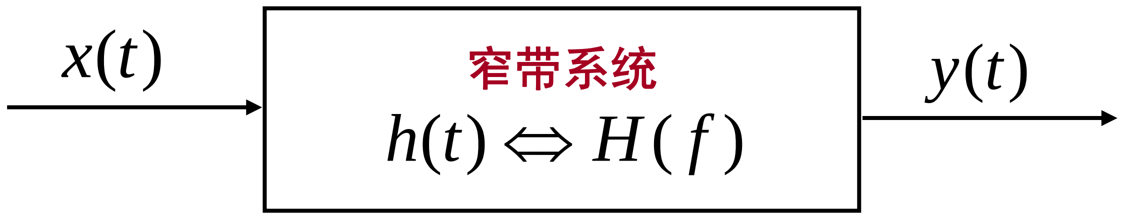
$x_c(t)$
$\cos 2\pi f_0 t$
$x_s(t)$
$\sin 2\pi f_0 t$
$x(t)$
$2\cos 2\pi f_0 t$
$2\sin 2\pi f_0 t$
滤波
低通
滤波
低通
$x_c(t)$
$x_s(t)$

(b)

2．窄带信号通过窄带系统

$x(t)$为窄带信号，$h(t)$是窄带系统的脉冲响应，输出$y(t)$的频域表示:

$$Y(f)=X(f)\cdot H(f)\quad,\qquad h(t)\Leftrightarrow H(f)$$



显然$y(t)$是窄带的，所以它的低通等效复包络 $y_l(t)\Leftrightarrow Y_l(f)$

$$Y_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot Y(f+f_0)$$

$$=2\cdot u_{-1}(f+f_o)\cdot X(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$$

$$X_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot X(f+f_0)$$

$$H_l(f)=2\cdot u_{-1}(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$$

因为 $\left[u_{-1}(f)\right]^2=u_{-1}(f)$

所以 $$X_l(f)\cdot H_l(f) = 4u_{-1}(f+f_0)\cdot X(f+f_0)\cdot H(f+f_0)$$

$$Y_l(f) = X_l(f)\cdot H_l(f)/2$$

$$y_l(t) = x_l(t)\otimes h_l(t)/2$$

$$y(t) = R_e\left[y_l(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

§2.3 随机变量

一、随机变量

$$\{X, \mathrm{X}, p(x)\}$$

$$\{(X, Y), \mathrm{X} \times \mathrm{Y}, p(x,y)\}$$

$p(x,y) = p(x)p(y|x)$ ，当X, Y独立时 $p(x,y) = p(x)p(y)$

二、分布函数

$$F_X(x) = P_r\{X \le x\}$$

三、概率分布密度

$$p_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$P_r\{a \le x \le b\} = \int_a^b p_X(x)dx$$

$$\begin{cases} p_X(x) \ge 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)dx = 1 \end{cases}$$

可以用 δ 函数表示离散随机变量的概率密度函数，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{K} p_k \cdot \delta(x-x_k)$$

两个随机变量的联合分布与分布密度

$$F_{XY}(x,y)=\Pr\left(X \le x, Y \le y\right)$$

$$f_{XY}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x,y)$$

在 $X=x$ 给定条件下，随机变量 Y 的条件概率密度定义为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}, & f_X(x)\neq 0, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

四、随机变量函数

设是一个X 随机变量，$Y=g(X)$ 是新的随机变量

$$F_Y(y)=\Pr\left(g(X)\le y\right)$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$f_Y(y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{f_X(x_k)}{|g'(x_k)|}$$

其中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $y=g(x)$ 实根

$$y=g(x_1)=g(x_2)=g(x_3)=\cdots==g(x_n)$$

设X和Y 是两个随机变量，具有概率密度 $f_{XY}(x,y)$定义两个新随机变量：

$$Z = g(X,Y)$$

$$W = h(X,Y)$$

$$F_{ZW}(z,w) = \Pr\left(g(X,Y) \le z, h(X,Y) \le w\right)$$

$$f_{ZW}(z,w) = \frac{\partial^2}{\partial z \partial w} F_{ZW}(z,w)$$

设 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$为下面方程组解

$$g(x,y) = z$$

$$h(x,y) = w$$

$$f_{ZW}(z,w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f_{XY}(x_k,y_k)}{|J(x_k,y_k)|}$$

$$J(x_k,y_k) = \left. \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial g}{\partial y} \\ \dfrac{\partial h}{\partial x} & \dfrac{\partial h}{\partial y} \end{vmatrix} \right|_{x=x_k,\, y=y_k}$$

五、随机变量的数字特征

1．数学期望（均值）

$$E[X]=\overline{X}=\int_{-\infty}^{\infty} x p_X(x)dx$$

当X、Y独立时，

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$$

2．方差

$$D(X)\triangleq\sigma_X^2=E\left[(X-E(X))^2\right]$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}[X-E(X)]^2 p_X(x)dx$$

3．矩

$$E\left[(X-a)^k\right]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^k p_X(x)dx$$

4．特征函数

$$E\left[e^{ju\cdot X}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{jux}\cdot p_X(x)dx$$

六、几个常用的分布

1．[*a*, *b*]上均匀分布

$$p_X(t)=\begin{cases}1/(b-a), & a\le t\le b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$E(X)=(b+a)/2\ ,\qquad D(X)=(b-a)^2/12$$

2．Rayleigh分布

$$p_X(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{\sigma^2}\exp\left\{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}\right\}, & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

$$E(X)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma\ ,\qquad D(X)=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$$

3．Guassian分布（正态分布）

$$X \sim N(a, \sigma^2)$$

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$E(X) = a \ , \quad D(X) = \sigma^2$$

当 $a = 0, \sigma^2 = 1$ 时，称为标准正态分布，这时

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

注意：几个重要积分

概率积分： $$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

误差函数： $$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

余误差函数： $$erfc(x) = 1 - erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

$$erfc(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}x} \exp\left(-x^2\right)$$

$Q(x)$ **函数**

$$Q(x) = 1 - \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

几个关于 $Q(x)$不等式

$$Q(x) \le \frac{1}{2} e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

$$Q(x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) e^{-x^2/2}, \qquad \forall x \ge 0$$

园对称复Gaussian (ZMCSCG)随机变量，记为 $Z \sim \mathrm{CN}(0, \sigma^2)$

$$Z = X + jY$$

$$X \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/2) \qquad Y \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2/2)$$

4. χ^2**中心分布随机变量：**

若$Y=\sum_{k=1}^{K} X_k^2$，其中$\{X_k\}$是K个独立同分布Gaussian随机变量$\mathrm{N}(0,\sigma^2)$，

则称Y为自由度为K的中心分布χ^2随机变量。

非χ^2中心分布随机变量：

若$Y=\sum_{k=1}^{K} X_k^2$，其中$\{X_k\}$是K个独立Gaussian随机变量$\mathrm{N}(\mu,\sigma_k^2)$，

则称Y为自由度为K的非中心分布χ^2随机变量。

七、切比雪夫(Chebychev)不等式与契尔诺夫(Chernof)界

切比雪夫不等式：

设 X 是均值为 m_x，方差为 σ_x^2 的任意随机变量。则对任何正数 $\delta > 0$，

$$\Pr\left(|X - m_x| \geq \delta\right) \leq \frac{\sigma_x^2}{\delta^2}$$

[证明] 随机变量的方差定义为

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p_X(x)dx \geq \int_{|x-m_x| \geq \delta} (x - m_x)^2 p_X(x)dx$$

$$\geq \delta^2 \int_{|x-m_x| \geq \delta} p_X(x)dx$$

$$= \delta^2 \Pr\left(|X - m_x| \geq \delta\right)$$

契尔诺夫界： 任意随机变量Y

$$g(Y)=\begin{cases}1 & Y\ge\delta\\0 & Y<\delta\end{cases}$$

对任何正数$\lambda>0$，$g(Y)\le e^{\lambda(Y-\delta)}$， 所以$g(Y)$的平均值为

$$E\left[g(Y)\right]=\Pr\left(Y\ge\delta\right)$$

$$\boxed{\Pr\left(Y\ge\delta\right)\le E\left\{e^{\lambda(Y-\delta)}\right\}}$$

通过选正数$\lambda>0$使上式右边最小化，从而得到最紧的上界，

$$\frac{d}{d\lambda}E\left\{e^{\lambda(Y-\delta)}\right\}=0$$

得最佳值λ^*满足方程，

$$E\left(Ye^{\lambda^*Y}\right)-\delta E\left(e^{\lambda^*Y}\right)=0$$

$$\boxed{\Pr\left(Y\ge\delta\right)\le e^{-\lambda^*\delta}E\left\{e^{\lambda^*Y}\right\}}$$

§2.3　平稳随机过程

一、随机过程描述

随机函数 ：依赖于参数t 的随机变量 $\xi(t)$，$t \in \mathrm{T}$

1．用分布函数来描述

对任一时刻 $t_1 \in \mathrm{T}$，$\xi(t_1)$是随机变量

$$F_1(x_1;t_1) = P\{\xi(t_1) \le x_1\} \quad , \quad \frac{\partial F_1(x_1;t_1)}{\partial x_1} = f_1(x_1,t_1)$$

对任意给定个时刻 $t_1, t_2, \ldots, t_n$，n维分布函数:

$$F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)$$

$$= P\{\xi(t_1) \le x_1, \xi(t_2) \le x_2, \cdots, \xi(t_n) \le x_n\}$$

n 维分布密度:

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n) = \frac{\partial^n F_n(x_1\cdots x_n,t_1\cdots t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

2．用数字特征描述

$$E[\xi(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x,t)dt = a(t)$$

$$D[\xi(t)] = E\left\{[\xi(t) - E(\xi(t))]^2\right\}$$

$$= E\left\{\xi^2(t)\right\} - [E(\xi(t))]^2$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_1(x,t)dx - [a(t)]^2$$

任意二个时刻 t_1，t_2值的$\xi(t_1)$和$\xi(t_2)$ 的协方差函数：

$$B(t_1,t_2) = E\left\{[\xi(t_1) - a(t_1)][\xi(t_2) - a(t_2)]\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - a(t_1)][x_2 - a(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

自相关函数：

$$R(t_1,t_2) = E[\xi(t_1) \cdot \xi(t_2)]$$

二个随机过程$\xi(t),\eta(t)$的互相关函数为：

$$R_{\xi\eta}(t_1,t_2) = E[\xi(t_1) \cdot \eta(t_2)]$$

二、平稳随机过程

所谓平稳随机过程指它的任何n维分布函数与时间起点无关，即对任何 n ：

$$F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)$$

$$=P\{\xi(t_1)\le x_1,\xi(t_2)\le x_2,\cdots,\xi(t_n)\le x_n\}$$

$$=P\{\xi(t_1+\tau)\le x_1,\xi(t_2+\tau)\le x_2,\cdots,\xi(t_n+\tau)\le x_n\}$$

$$=F_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1+\tau,t_2+\tau,\cdots,t_n+\tau)$$

从而对任何τ ，

$$F_n(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=F_n(x_1,\cdots,x_n;t_1-\tau,\cdots,t_n-\tau)$$

对于一维分布，取 $\tau=t_1$ ，于是一维分布和分布密度与时间无关，可记为$F_1(x_1)$和 $f_1(x_1)$。

对于平稳过程

均值： $$E\left[\xi(t)\right] = a$$

方差： $$D\left[\xi(t)\right] = E\left[\xi^2(t) - a^2\right]$$

$$= \sigma^2$$

自相关函数：

$$R(t_1, t_2) = R(0, t_2 - t_1)$$

$$\triangleq R(\tau)$$

如果一个随机过程的均值，方差为常数，自相关函数只和时间差有关，则称这随机过程为**广义平稳**的，相应原未定义的平稳过程亦称为**严平稳过程**。

三、各态历经过程（Ergodic过程）

对于平稳过程 $X(t)$，和任何函数 $g(x)$，有二种平均：

1．集合平均： $E\left[g(X)\right]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\cdot f(x)dx$

2．时间平均： $x(t)$为$X(t)$的一个样本函数，则$g(x(t))$的时间平均为：

$$<g(x)>=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g(x(t))dt$$

一个平稳过程 $x(t)$ 具有Ergodic性，指对任何函数 $g(x)$：

$$E\left[g(X)\right]=<g(x)>$$

各态历经平稳过程的均值和方差可用样本函数的时间平均代替，

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)dt=a$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\left[x(t)-a\right]^2 dt=D\left[X(t)\right]$$

四、相关函数与功率谱

相关函数性质

① $R(0) = E[\xi^2(t)] = \sigma^2 \geq 0$

② $R(\tau) = E\left[\xi(t_1)\xi(t_1+\tau)\right] = E\left[\xi(t_1-\tau)\xi(t_1)\right] = R(-\tau)$

有时为了强调是随机过程$\xi(t)$的相关函数，也记为$R_\xi(\tau)$ 。

③ $\left|R(\tau)\right| \leq R(0)$

④ $R(\infty) = \left\{E\left[\xi(t)\right]\right\}^2$ 称为直流功率

因为 $R(\infty) = \lim\limits_{\tau\to\infty} E\left[\xi(t)\xi(t+\tau)\right]$

可以认为当$\tau \to \infty$时，$\xi(t)$和$\xi(t+\tau)$独立，

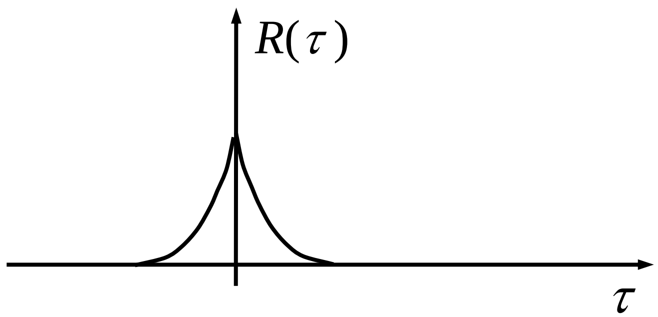
所以 $R(\infty) = E\left[\xi(t)\right] \cdot \lim\limits_{\tau\to\infty} E\left[\xi(t+\tau)\right] = E^2\left[\xi(t)\right]$

因为 $$D[\xi(t)] = E[\xi^2(t)] - E^2[\xi(t)]$$

$$= R(0) - R(\infty)$$

$$\triangleq \sigma^2$$

所以 σ^2也称为为交流功率，一般平稳过程的相关函数 $R(\tau)$ 有如下图形状：



功率谱

设 $x(t)$ 为平稳随机过程 $X(t)$ 一个样本函数，$x_T(t)$ 为它的截断

$$x_T(t)=\begin{cases} x(t) & |t|\le T/2 \\ 0 & |t|\ge T/2 \end{cases}$$

$$F_T(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x_T(t)\cdot e^{-j2\pi ft}dt$$

功率谱定义为：

$$P_X(f)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{T}E\left\{\left|F_T(f)\right|^2\right\}$$

可以证明：

$$R_X(\tau)\Leftrightarrow P_X(f)$$

当功率谱为常数时，即 $P_X(f)=A$，则随机过程 $X(t)$ 称为白色的，

相应的相关函数 $R_X(\tau)=A\cdot\delta(\tau)$ 。

[例] $X(t)=\sin(2\pi f_0 t+\theta)$，**其中** θ **为** $(0,2\pi)$ **上均匀分布随机变量，**

$$E\left[X(t)\right]=E\left[\sin(2\pi f_0 t+\theta)\right]=0$$

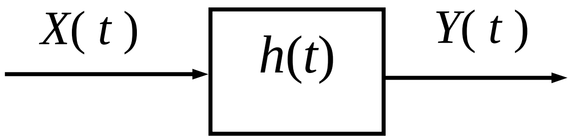
$$R(t_1,t_2)=E\left[\sin(2\pi f_0 t_1+\theta)\cdot\sin(2\pi f_0 t_2+\theta)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\text{，}\qquad \tau=t_2-t_1$$

$$P_X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cdot e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\left[\delta(f-f_0)+\delta(f+f_0)\right]$$

五、平稳随机过程通过线性系统



平稳过程 $X(t)$ **的样本函数** $\mathbf{x(\,t\,)}$**，它通过线性系统** $\mathbf{h(\,t\,)}$**的输出为：**

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

输出过程为： $Y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau$

① 输出过程 $Y(t)$**的均值：**

$$E\left[Y(t)\right]=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)X(t-\tau)d\tau\right]=E\left[X(t)\right]\cdot H(0)$$

② $Y(t)$**的自相关函数** $R_Y(t,t+\tau)$

$$R_Y(t,t+\tau)=E\left[y(t)y(t+\tau)\right]$$

$$=E\left[\int_{-\infty}^{\infty}h(\alpha)x(t-\alpha)d\alpha\cdot\int_{-\infty}^{\infty}h(\beta)x(t+\tau-\beta)d\beta\right]$$

$$=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

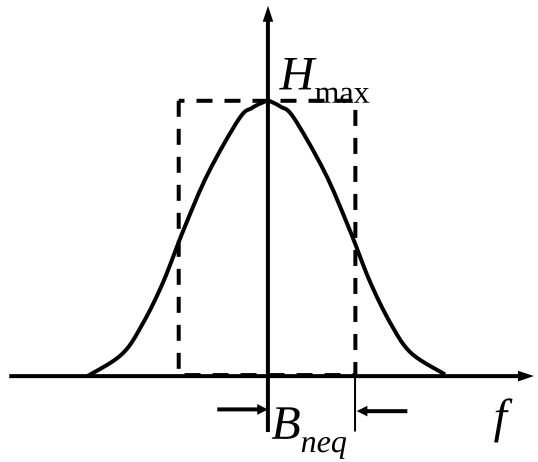
③ $Y(t)$ 的功率谱

$$P_Y(f)=\int_{-\infty}^{\infty}R_Y(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau=P_X(f)\cdot H(f)\cdot H^*(f)$$

$$=P_X(f)\cdot\left|H(f)\right|^2$$

④ 线性系统的等效噪声带宽

白噪声 $P_x(f)=N_0/2$，通过滤波器 $H(f)$



输出功率谱： $$P_Y(f)=\frac{N_0}{2}\left|H(f)\right|^2$$

滤波器等效噪声带宽：

$$B_{neq}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df}{2H_{\max}^2}$$

输出总功率： $$P_Y=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(f)\right|^2 df$$

$$=N_0\cdot B_{neg}\cdot H_{\max}^2$$

⑤ 二个随机过程的互相关函数

随机过程$X(t)$和$Y(t)$之间的互相关函数为

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$

显然，

$$R_{XY}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_2,t_1)$$

如果 $R_{XY}(t_1,t_2)$ 仅和有 $\tau=t_1-t_2$ 关，则称 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 为联合广义平稳的。如果

$$Y(t)=X(t)\otimes h(t)$$

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)Y(t_2)\right]$$

$$=E\left[x(t_1)\int_{-\infty}^{\infty}x(s)h(t_2-s)ds\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}R_X(t_1-s)h(t_2-s)ds$$

$$=R_X(\tau)\otimes h(-\tau)$$

其中$\tau=t_1-t_2$。

六、高斯过程

如果随机过程 $X(t)$的任何 n 维分布均为高斯分布，则该过程称为高斯过程，即对任何 $t_1, t_2, \cdots, t_n \in \mathrm{T}$ ，

$$f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |B|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) B^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^T \right\}$$

其中， $B = \left(b_{ij}\right)_{n \times n}$ $\qquad b_{ij} = E\left[(x(t_i) - a_i)(x(t_j - a_j) \right]$

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{，}\quad \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\text{，}\quad a_i = E\left[x(t_i) \right]$$

可见高斯过程的分布密度仅和各随机变量均值，方差和二阶矩有关，所以如果高斯过程是广义平稳的，则它必定是严格平稳的。

对于白高斯噪声，这时各时刻的随机变量不相关，

即 $b_{ij}=0,(i\neq j)$ 这时

$$B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & & & \\ & \sigma_2^2 & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \sigma_n^2\end{pmatrix},\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sigma_1^2} & & & \\ & \frac{1}{\sigma_2^2} & 0 & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \frac{1}{\sigma_n^2}\end{pmatrix}$$

$$f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$

$$=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j}\exp\left\{-\frac{(x_j-a_j)^2}{2\sigma_j^2}\right\}$$

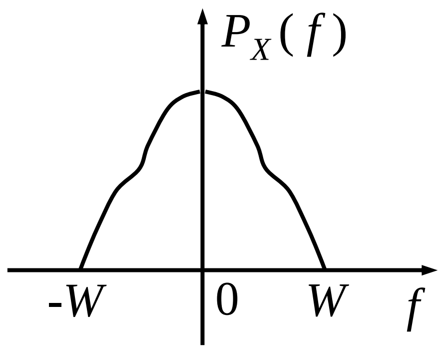
$$=f(x_1;t_1)f(x_2;t_2)\cdots f(x_n;t_n)$$

由于高斯随机变量相加后仍为高斯变量，所以高斯过程通过线性系统的输出仍然是高斯的。

七、带限过程及其采样

定义： 平稳随机过程 $X(t)$ 称为是带限的，指它的功率谱

$$P_X(f)=0\,,\quad |f|\geq W。$$



定理： 令 $X(t)$ 是平稳带限过程，即

$$P_X(f)=0,\quad |f|>W,$$

则下面式子成立：

$$E\left|X(t)-\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\sin c(2W(t-kT_s))\right|^2=0$$

其中，$T_s=\dfrac{1}{2W}$ ，$\sin c(x)=\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}$

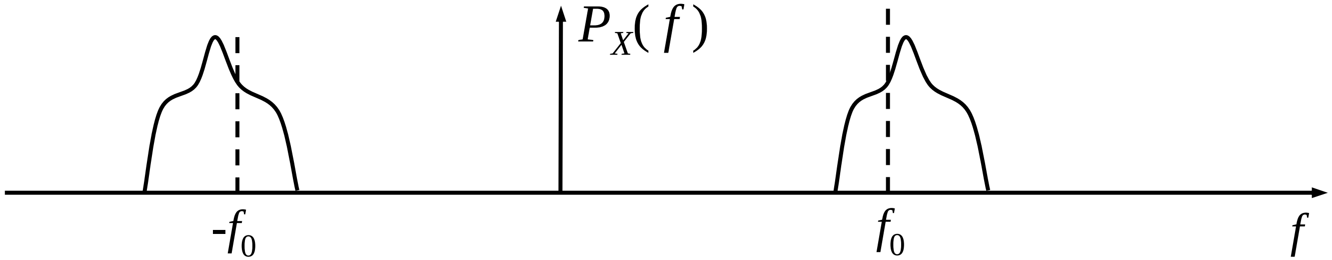
$X(t)$ 可以写成，

$$X(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(kT_s)\sin c(2W(t-kT_s))\qquad \text{（均方意义下成立）}$$

八、平稳带通过程

定义：随机过程 $X(t)$ 称为是带通的（或窄带的）是指

$$P_X(f)=0，\left|f\mp f_0\right|\geq W，\quad W<f_0$$



我们寻找窄带过程的复包络表示，也就是它的等效低通表示。

因为$X(t)$是带通过程，所以它的自关函数 $R_X(\tau)$是一个确定的带通函数。

令 $X(t)$ 通过脉冲响应为 $h(t)=\dfrac{1}{\pi t}$ 的Hilbert滤波器，输出为 $\hat{X}(t)$，

则

$$R_{X\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(-\tau)$$

$$=-\hat{R}_X(\tau)$$

$$R_{\hat{X}}(\tau)=R_X(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$$

$$=R_X(\tau)$$

我们可以定义二个新的过程 $X_c(t),X_s(t)$

$$X_c(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$X_s(t)=\hat{X}(t)\cos(2\pi f_0 t)-X(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 分别称为随机过程 $X(t)$ 的低通同相分量和低通正交分量，当 $X(t)$ 是零均值，平稳随机过程时，则 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 也具有同样性质。

定理： 若$X(t)$是零均值，平稳窄带随机过程，则$X_c(t)$和$X_s(t)$也是零均值、平稳过程。

[证明] 显然$\hat{X}(t)$是零均值，平稳的，于是$X_c(t)$和$X_s(t)$的零均值是显然的。可以证明：

$$R_{X_c}(t+\tau,t) = E\left[X_c(t+\tau)X_c(t)\right]$$
$$= R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

（证明中利用了$\hat{R}_X(\tau)$是奇函数），所以

$$R_{X_c}(\tau) = R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{X_s}(\tau) = R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) + \hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)$$

$$R_{X_cX_s}(\tau) = R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau) - \hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

#

下面证明$X_c(t)$和$X_s(t)$是低通过程：

定理：$X_c(t)$和$X_s(t)$是低通过程，即$X_c(t)$和$X_s(t)$的功率谱在$|f|>W$为零。

[证明] 因为$R_{X_c}(t)$，$R_{X_s}(t)$是确定信号，把

$$R_{X_c}(t)=R_{X_s}(t)=R_X(\tau)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0 t)$$

与确定信号相比，$R_{X_c}(t)$和$R_{X_s}(t)$正好对应了带通信号$R_X(t)$的相应低频同相分量和低频正交分量，所以$R_{X_c}(t)$和$R_{X_s}(t)$是低通的，即$P_{X_c}(f)$和$P_{X_s}(f)$仅在$|f|>W$时，不为零。 #

考虑 $X_c(t)$和 $X_s(t)$的功率谱

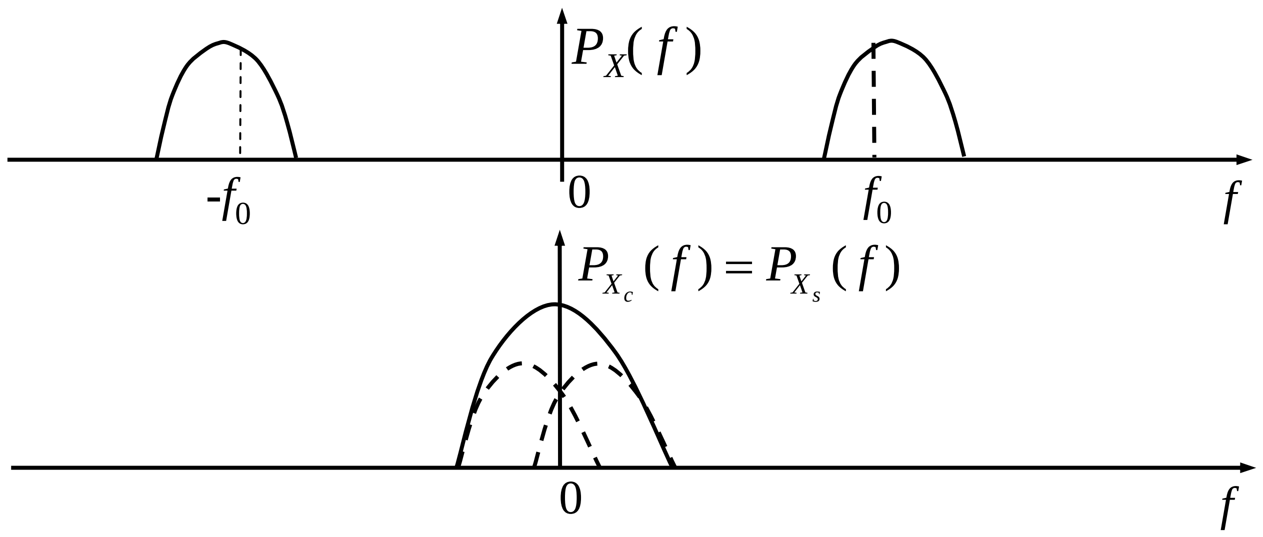
$$P_{X_c}(f)=P_{X_s}(f)=\mathcal{F}\left[R_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)+\hat{R}_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\right]$$

$$=\frac{P_X(f-f_0)+P_X(f+f_0)}{2}+[-j\,\mathrm{sgn}(f)P_X(f)]\otimes\left[\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}\right]$$

$$=\frac{P_X(f-f_0)}{2}\left[1-\mathrm{sgn}(f-f_0)\right]+\frac{P_X(f+f_0)}{2}\left[1+\mathrm{sgn}(f+f_0)\right]$$

由于 $P_X(f)$ 的窄带性，所以

$$P_{X_c}(f)=P_{X_s}(f)=\begin{cases}P_X(f-f_0)+P_X(f+f_0) & |f|<f_0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 的功率

因为 $$R_{X_c}(0) = R_{X_s}(0) = R_X(0)$$

所以 $$\sigma_{X_c}^2 = \sigma_{X_s}^2 = \sigma_X^2$$

另一方面由于

$$R_{X_cX_s}(\tau) = R_X(\tau)\sin(2\pi f_0\tau) - \hat{R}_X(\tau)\cos(2\pi f_0\tau)$$

因为 $R_X(\tau)$为偶函数，$\hat{R}_X(\tau)$ 是奇函数，所以是 $R_{X_cX_s}(\tau)$奇函数，

从而： $$R_{X_cX_s}(0) = E\left[X_c(t)X_s(t)\right] = 0$$

因为在任何时刻 t，二个相正交分量 $X_c(t)$和 $X_s(t)$不相关，但这不能保证在任何二个不同时刻 t_1，t_2这二个分量的不相关。

由 $$X_c(t)=X(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$X_s(t)=\hat{X}(t)\cos(2\pi f_0 t)-X(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

所以 $$X(t)=X_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-X_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{X}(t)=X_c(t)\sin(2\pi f_0 t)+X_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$X(t)$可写成 $$X(t)=V(t)\cos(2\pi f_0 t+\Theta(t))$$

其中 $$V(t)=\sqrt{X_c^2(t)+X_s^2(t)}\text{，}\quad \Theta(t)=\arctan\frac{X_s(t)}{X_c(t)}$$

$A(t)=V(t)e^{j\angle\Theta(t)}$ 称为窄带过程 $X(t)$ 的复包括。

$$X(t)=\mathrm{Re}[A(t)\cdot e^{j2\pi f_0 t}]$$

现求幅度 $V(t)$ 和相位 $\Theta(t)$ 的分布：

当是 $X(t)$ 平稳窄带高斯过程时，则 $X_c(t)$ 和 $X_s(t)$ 是二个独立，平稳高斯过程。

所以 $$f_{X_c,X_s}(x_c,x_s)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_c^2+x_s^2}{2\sigma^2}\right\}$$

由于 $$X_c(t)=V(t)\cos\Theta(t)\text{，}\quad X_c(t)=V(t)\sin\Theta(t)$$

作变量置换 $$X_c=V\cos\Theta\text{，}\quad X_s=V\sin\Theta$$

得到幅度 $V(t)$ 和相位 $\Theta(t)$ 的联合分布为：

$$f_{V\Theta}(v,\theta)=\frac{v}{2\pi\sigma^2}\exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right],\qquad v\geq 0,\quad -\pi\leq\theta\leq\pi$$

幅度分布： $$f_V(v)=\int_{-\pi}^{\pi}f_{V\Theta}(v,\theta)d\theta=\frac{v}{\sigma^2}\cdot\exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right]\quad ,v\geq 0$$

相位分布： $$f_\Theta(\theta)=\int_0^{\infty}f_{V\Theta}(v,\theta)dv=1/2\pi\quad ,-\pi\leq\theta\leq\pi$$

平稳窄带高斯过程的幅度满足**Rayleigh分布**，相位满足**均匀分布**。

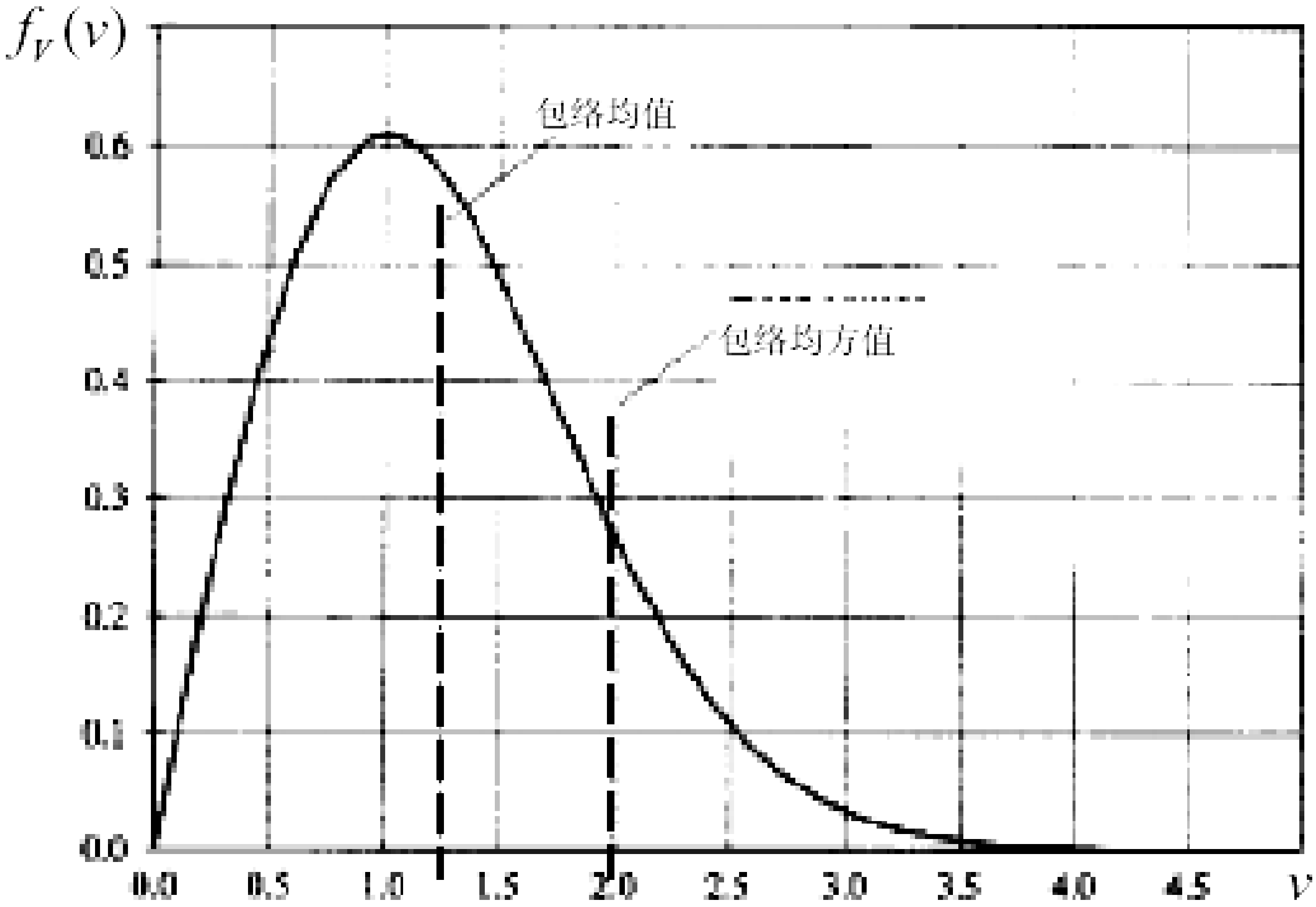


图 2.3.10 Rayleigh 概率分布密度函数（$\sigma^2=1$）

九、正弦波加窄带高斯噪声信号

设信号为 $s(t)=A\cos(2\pi f_0 t+\Theta)$

其中 A **和** f_0 **为确知常数，**Θ **为** $(-\pi,\pi)$ **上均匀分布随机变量。**

$N(t)$为频谱在 f_0 附近的窄带高斯噪声过程：

$$N(t)=N_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-N_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

设 $r(t)$ **为正弦波** $s(t)$ **迭加上窄带高斯噪声**$N(t)$

$$r(t)=s(t)+N(t)$$

$$=\left[A\cos\Theta+N_c(t)\right]\cos(2\pi f_0 t)-\left[A\sin\Theta+N_s(t)\right]\sin(2\pi f_0 t)$$

记 $Z_c(t)\triangleq A\cos\Theta+N_c(t)$ **,** $Z_s(t)\triangleq A\sin\Theta+N_s(t)$

$r(t)$ 的包络为：

$$V(t)=\sqrt{\left[A\cos\Theta+N_c(t)\right]^2+\left[A\sin\Theta+N_s(t)\right]^2}$$

$r(t)$ 的相位为：

$$\Phi(t)=\arctan\frac{Z_s(t)}{Z_c(t)}$$

经计算 $V(t)$ 的概率分布为

$$f_V(v)=\int_{-\pi}^{\pi} f_v(v\,|\,\Theta=\theta)\cdot f_\Theta(\theta)d\theta$$

$$=\frac{v}{\sigma^2}\exp\left[-\frac{v^2+A^2}{2\sigma^2}\right]\cdot I_0\left(\frac{Av}{\sigma^2}\right)\qquad ,v\geq 0$$

上述分布称为**Rice分布**。

$r(t)$ 相位 $\Phi(t)$ 的概率分布，可以证明为

$$f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)=\int_0^\infty f_{V\Phi}(v,\varphi\,|\,\Theta=\theta)dv$$

$$=\frac{\exp(-A^2/2\sigma^2)}{2\pi}+\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{2(2\pi)^{\frac{1}{2}}\sigma}\exp\left[-\frac{A^2}{2\sigma^2}\sin^2(\theta-\varphi)\right]\left\{1+erf\left[\frac{A\cos(\theta-\varphi)}{\sqrt{2}\sigma}\right]\right\}$$

所以 $$f_\Phi(\varphi)=\int_{-\pi}^{\pi} f_\Phi(\varphi\,|\,\Theta=\theta)\cdot P_\Theta(\theta)d\theta$$

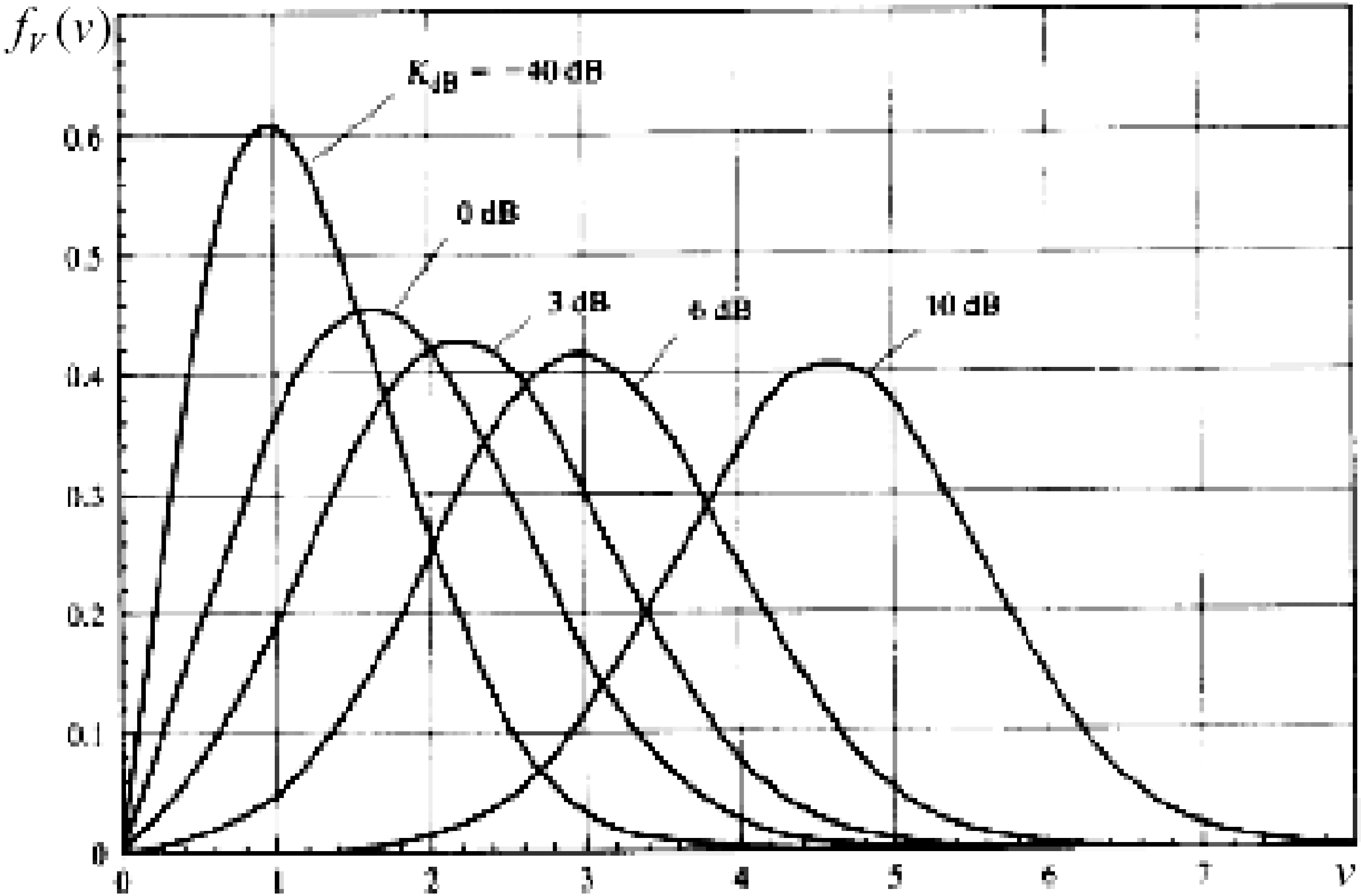


图 2.3.11　Rice 分布密度函数，$K_{db} = 10\log_{10} A^2/2\sigma^2$ 为信噪比参数

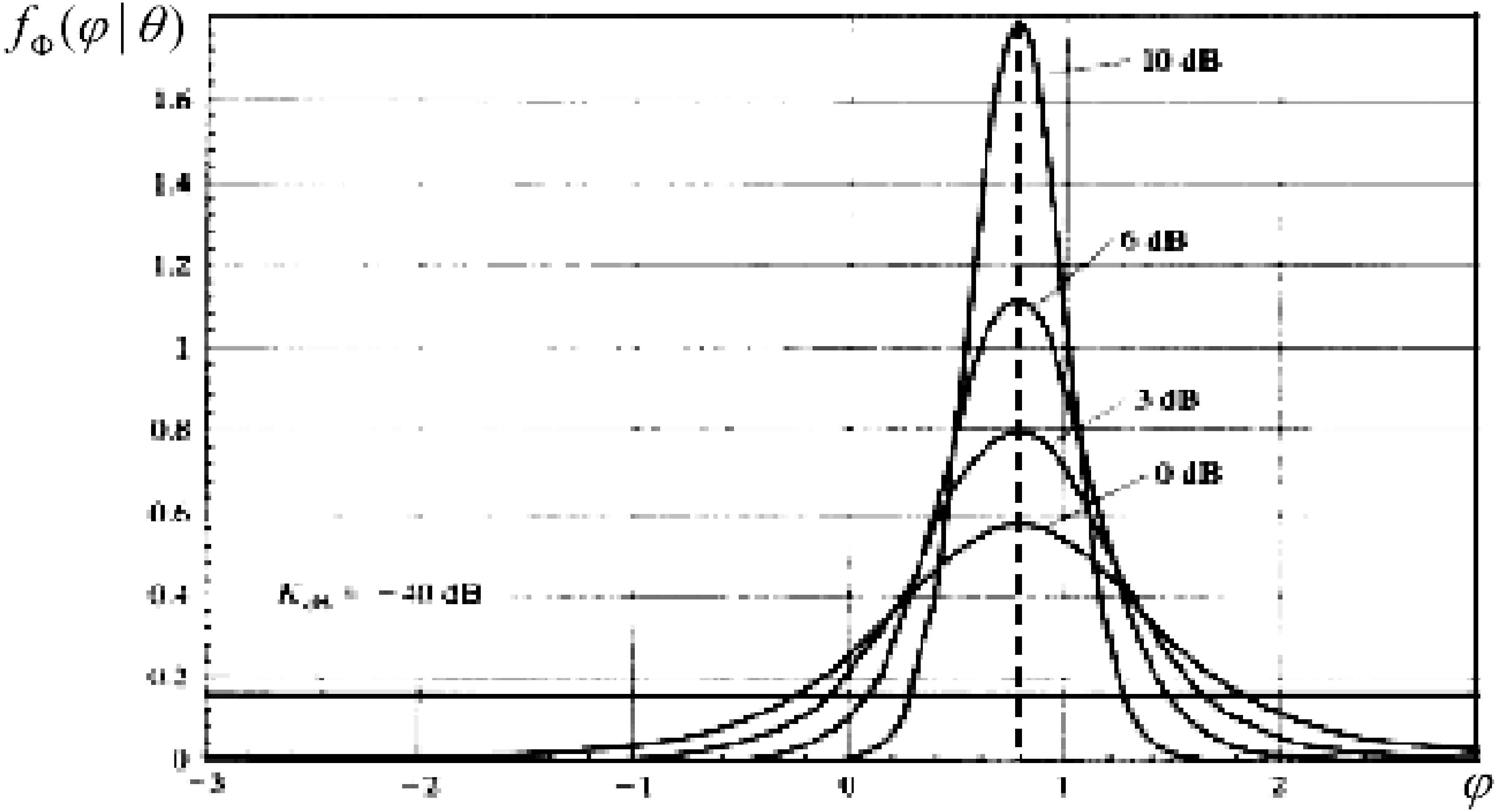


图 2.3.12 在条件 $\theta=\pi/4$ 下相位 Φ 的条件分布密度

十、 循环平稳过程

一个时间连续的二阶矩随机过程$\left\{X(t), t \in (-\infty, \infty)\right\}$被称为是周期为$T$的广义循环平稳过程是指它的均值过程和自相关函数均是t的周期为T的周期函数，即

$$m_X(t) \triangleq E\left\{X(t)\right\} = m_X(t+T)$$

$$R_X(t+\tau, t) \triangleq E\left\{X(t+\tau)X^*(t)\right\} = E\left\{X(t+T+\tau)X^*(t+T)\right\}$$

$$= R_X(t+T+\tau, t+T)$$

由于平稳随机过程具有处理上的优越性，因此希望把循环平稳随机过程转化成平稳过程，使得可以利用诸如功率谱这样的概念。

$$\overline{R}_X(\tau) = \frac{1}{T}\int_0^T R_X(t+\tau, t)dt$$

$$P_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R}_X(\tau) \cdot e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$