

第六章 数字基带传输

已经学习了如何把模拟消息变成数字序列，但是要传输信息还必须把数字序列转换成波形序列。通常首先用数字序列调制脉冲波形得到基带信号。所谓基带信号是指频率范围从直流到某个有限值的信号，基带信号是低通信号。

为何要研究基带传输？

- ① 基带信号能在双绞线、电缆或其他信道上直接传输。数字基带传输有许多应用场合，如局域网、电话等，许多是直接基带传输的；
- ② 数字通带传输系统一般也是先把数字序列调制成基带信号，然后再用载波调制到与信道相匹配的通带上进行传输。

数字基带传输是数字通信的基础。

本章介绍： 数字基带信号的特点；

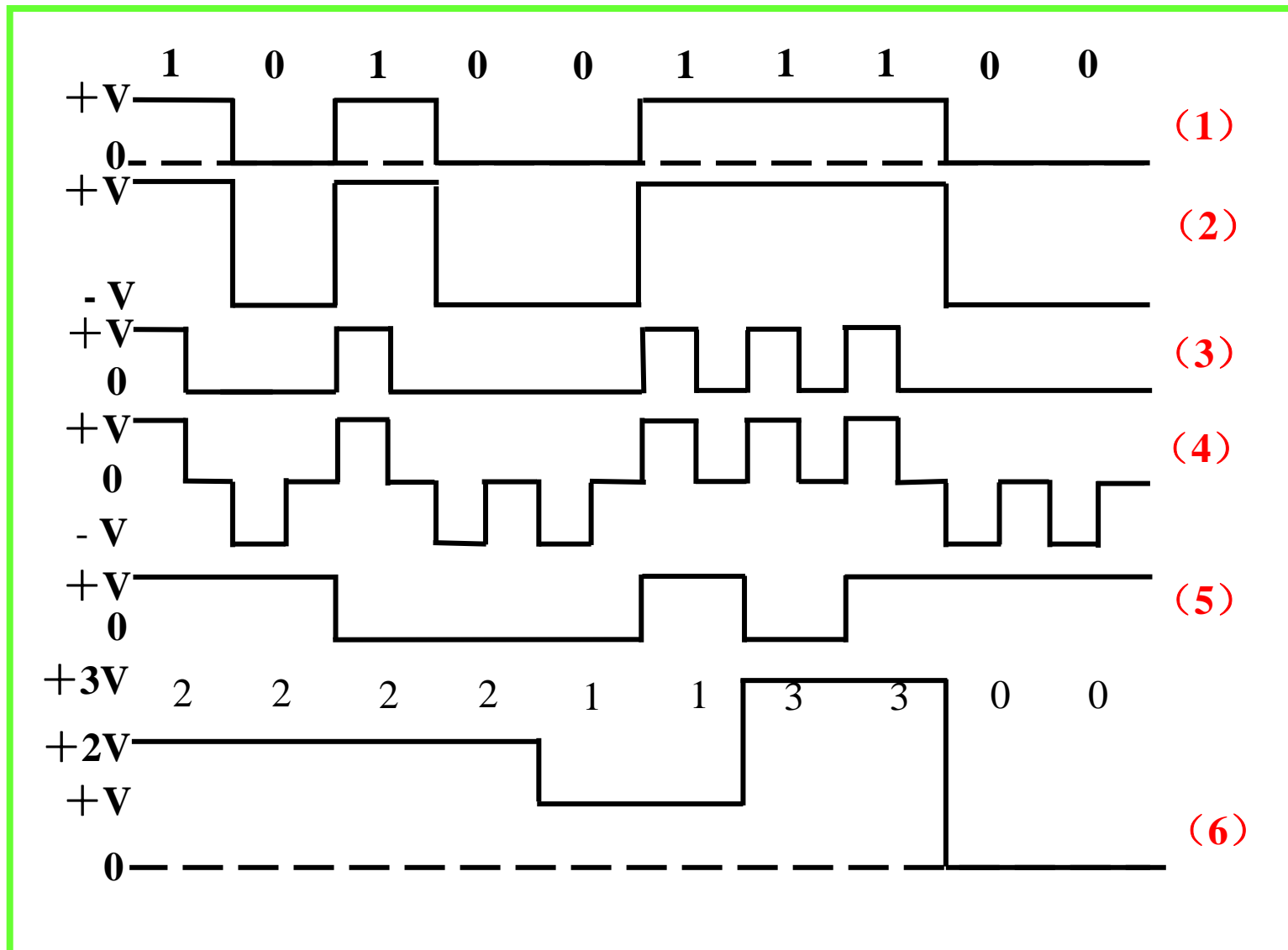
数字基带信号在基带系统中的传输技术；

§ 6.1 数字基带信号及其频谱特征

一、基本基带信号波形

为了在信道上传输数字符号则，必须把它们表示成电压或电流波形；以矩形电压脉冲为例说明几种基本基带信号波形：

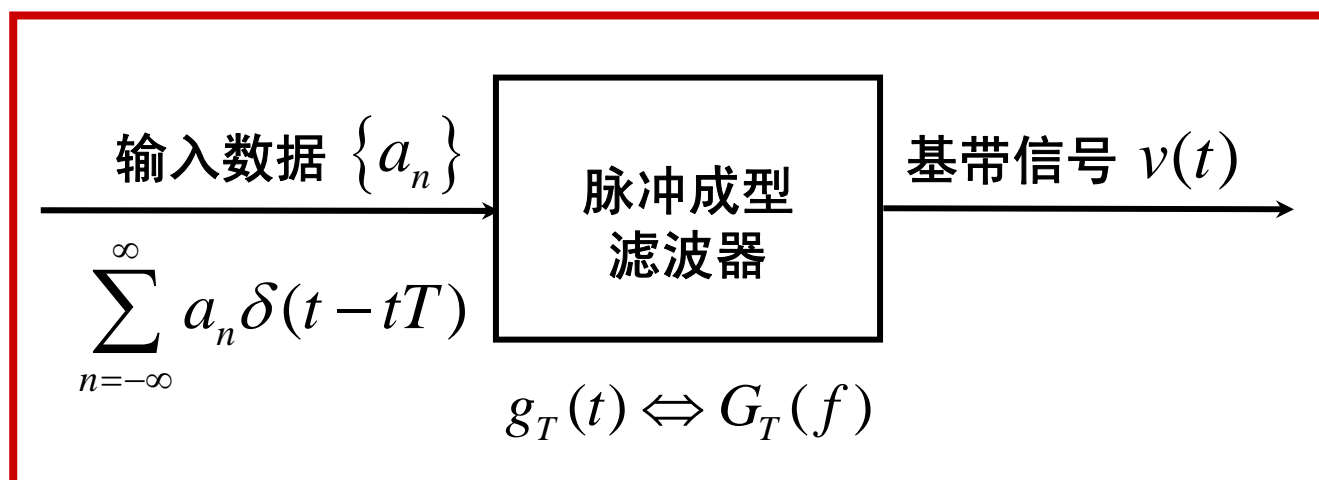
- 1、单极性不归零波形；
- 2、双极性不归零波形；
- 3、单极性归零波形；
- 4、双极性归零波形；
- 5、差分波形；
- 6、多电平波形；



几种基本基带信号波形

二、数字脉冲幅度调制（PAM）信号的功率谱

理想方波脉冲的频带无限宽，不可能在有限带宽信道上传输，一般都需要进行脉冲成型，成为有限带宽的基带信号来传输。



$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$

$\{a_n\}$ 是一个平稳随机序列，对二进制数据，其取值为 $\{0,1\}$

$V(t)$ 的平均值

$$E[V(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n) g_T(t - nT) = m_a \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT)$$

其中 m_a 是随机序列 $\{a_n\}$ 的平均值。显然 $V(t)$ 的平均值是周期为 T 的周期函数。 $V(t)$ 的自相关数为,

$$\begin{aligned} R_V(t + \tau, t) &= E[V(t)V(t + \tau)] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} E(a_n a_m) g_T(t - nT) g_T(t - mT + \tau) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m - n) \cdot g_T(t - nT) g_T(t - mT + \tau) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_T(t - nT) g_T(t + \tau - nT - mT) \end{aligned}$$

其中 $R_a(m) = E(a_{n+m} a_n)$; $R_V(t + \tau, t)$ 是 t 的周期为 T 的函数。

$V(t)$ 是循环平稳随机过程 (cyclostationary process) 。

循环平稳随机过程 (cyclostationary process) 。

均值和自相关函数均为周期函数的随机过程称为是循环平稳随机过程。
对于循环平稳随机过程来说，它的功率谱等于自相关函数在一个周期中的平均值的Fourier变换。

$R_V(t + \tau, t)$ 对 t 的周期平均为：

$$\begin{aligned}\bar{R}_V(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_V(t + \tau, t) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t - nT) g_T(t + \tau - nT - mT) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{nT - \frac{T}{2}}^{nT + \frac{T}{2}} g_T(t) g_T(t + \tau - mT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) g_T(t + \tau - mT) dt\end{aligned}$$

记 $R_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g_T(t) g_T(t + \tau) dt$

得到 $\bar{R}_V(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) R_g(\tau - mT)$

$\bar{R}_V(\tau)$ 的Fourier变换为:

$$\begin{aligned} S_V(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_V(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau - mT) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) \cdot e^{-j2\pi fmT} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_g(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{T} S_a(f) \cdot |G_T(f)|^2 \end{aligned}$$

其中

$$S_a(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_a(m) e^{-j2\pi fmT}$$

$$G_T(f) \Leftrightarrow g_T(t)$$

随机PAM信号的功率谱不仅与基带脉冲功率谱 $|G_T(f)|^2$ 有关, 而且和随机序列 $\{a_n\}$ 的功率谱 $S_a(f)$ 有关。

最简单情况，当 $\{a_n\}$ 是独立同分布序列时：

$$R_a(m) = \begin{cases} \sigma_a^2 + m_a^2, & m = 0 \\ m_a^2, & m \neq 0 \end{cases}$$

其中 m_a 和 σ_a^2 为序列 $\{a_n\}$ 的均值和方差。

$$\begin{aligned} S_a(f) &= \sigma_a^2 + m_a^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-j2\pi fmT} \\ &= \sigma_a^2 + \frac{m_a^2}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \end{aligned}$$

得到

$$S_V(f) = \frac{\sigma_a^2}{T} |G_T(f)|^2 + \frac{m_a^2}{T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G_T\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

其中**第一项是连续谱**，取决于基带脉冲的频谱 $G_T(f)$ ；**第二项是离散谱线**，频率间隔为 $\frac{1}{T}$ 。如果我们选 $\{a_n\}$ 的均值 $m_a = 0$ ，则离散谱线可被消除。

[例6.1.1] 对于单极性信号, 则 $m_a = (1-p)$

其中 $p = P(a_n = 0)$, $\sigma_a^2 = (1-p)p$

得到
$$S_V(f) = \frac{1}{T} p \cdot (1-p) |G_T(f)|^2 + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{(1-p)}{T} \cdot G_T\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$$

当 $p = \frac{1}{2}$, 且

$$g_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \iff G_T(f) = T \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

$$S_V(f) = \frac{1}{4T} \cdot T^2 \cdot \left[\frac{\sin \pi T f}{\pi T f} \right]^2 + \frac{1}{4} \delta(f)$$

[例6.1.2] 对于双极性信号 $a_n \in \{-1, 1\}$, $p = P(a_n = -1)$, 则

$$m_a = 1 - 2p \quad , \quad \sigma_a^2 = 4p(1 - p)$$

$$S_v(f) = \frac{4}{T} p(1 - p) |G_T(f)|^2 + \sum \left(\frac{2p - 1}{T} \right)^2 \left| G_T \left(\frac{m}{T} \right) \right|^2 \cdot \delta \left(f - \frac{m}{T} \right)$$

当 $p = \frac{1}{2}$, 且

$$g_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \iff G_T(f) = T \cdot \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f}$$

$$S_v(f) = T \cdot \left| \frac{\sin(\pi T f)}{\pi T f} \right|^2$$

[例6.1.3] 差分编码:

设数据 $\{a_n\}$ 为取值 $\{0,1\}$ 的独立二进数字序列, $p = P\{a_n = 1\}$,

对 $\{a_n\}$ 进行差分编码, 得到 $\{b_n\}, b_n \in \{0,1\}$, 其中:

$$b_n = b_{n-1} \oplus a_n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b_n - b_{n-1} = \pm 1 & a_n = 1 \\ b_n - b_{n-1} = 0 & a_n = 0 \end{cases}$$

对于 $\{b_n\}$, $m_b = E\{b_n\} = P\{b_n = 1\}$

$$= P\{a_n = 1\} \cdot P\{b_{n-1} = 0 | a_n = 1\} + P\{a_n = 0\} \cdot P\{b_{n-1} = 1 | a_n = 0\}$$

$$= p \cdot (1 - m_b) + (1 - p) \cdot m_b$$

得到 $m_b = P\{b_n = 1\} = \frac{1}{2}$

$$\beta_m \square R_b[m] = E[b_n b_{n+m}]$$

$$= P\{b_n = 1, b_{n+m} = 1\} = P\{b_n = 1\} \cdot P\{b_{n+m} = 1 | b_n = 1\}$$

$$= \frac{1}{2} P\{b_{n+m} = 1 | b_n = 1\}$$

$$\begin{aligned}
2\beta_m &= P\{b_{n+m} = 1 | b_n = 1\} \\
&= P\{b_{n+m-1} = 0, a_{n+m} = 1 | b_n = 1\} + P\{b_{n+m-1} = 1, a_{n+m} = 0 | b_n = 1\} \\
&= P\{b_{n+m-1} = 0 | b_n = 1\} \cdot p + p\{b_{n+m-1} = 1 | b_n = 1\} \cdot (1 - p) \\
&= (1 - 2\beta_{m-1}) \cdot p + 2\beta_{m-1} \cdot (1 - p)
\end{aligned}$$

得到差分方程，

利用初始条件和相关函数的对称性，

得

$$\begin{aligned}
\beta_m - (1 - 2p)\beta_{m-1} &= \frac{1}{2}p \\
\beta_0 &= \frac{1}{2} \quad \text{和} \quad \beta_m = \beta_{-m} \\
\beta_m &= \frac{1}{4}[(1 - 2p)^{|m|} + 1]
\end{aligned}$$

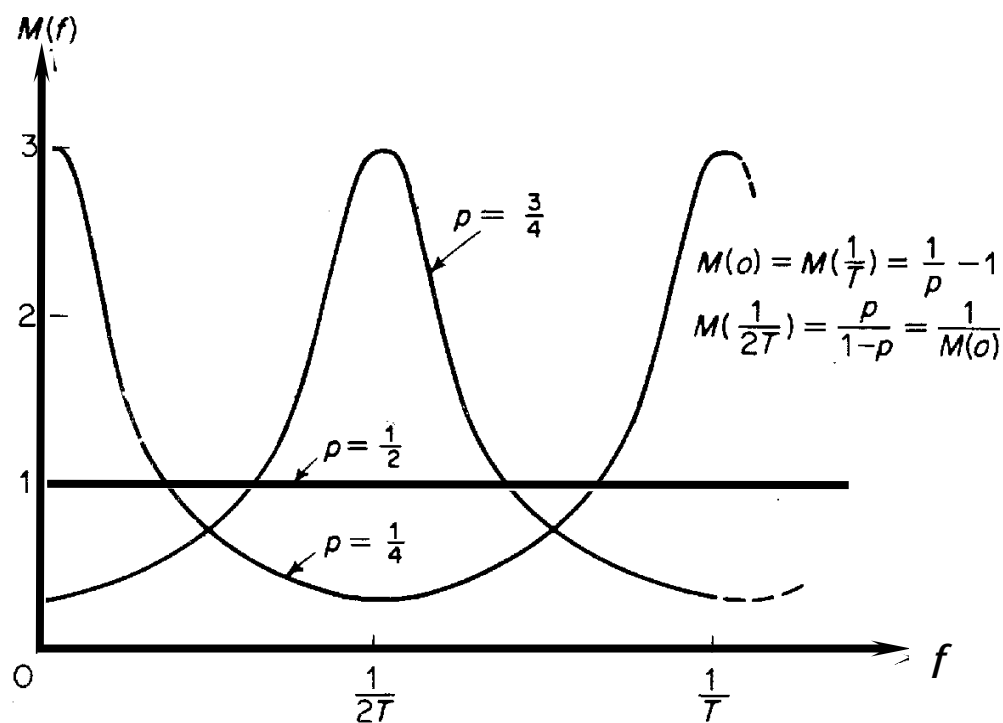
$$S_b(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_b(m) e^{-j2\pi fmT} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \beta_m e^{-j2\pi fmT}$$

于是

$$\begin{aligned}
S_V(f) &= \frac{1}{T} S_b(f) \cdot |G_T(f)|^2 \\
&= \frac{|G_T(f)|^2}{4T} \cdot M(f) + \frac{1}{4T^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| G_T\left(\frac{m}{T}\right) \right|^2 \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 M(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1-2p)^{|m|} \cdot e^{-j2\pi fmT} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[(1-2p)^m e^{-j2\pi fmT} + (1-2p)^m e^{j2\pi fmT} \right] - 1 \\
 &= \frac{p(1-p)}{p^2 + (1-2p)(\sin \pi T f)^2}
 \end{aligned}$$



当 $p > 1/2$ 时，功率则集中在 $1/2T$ 的奇数倍频率分量中；
 当 $p < 1/2$ 时，功率则集中在 $1/2T$ 的偶数倍频率分量中；
 当 $p = 1/2$ 时，则为常数1，
 这时与原来的单极性信号功率谱公式一样。

三、具有多种基本脉冲波形的基带信号功率谱

一般情况，假设在 K 进制基带传输中， K 个符号对应了 K 种不同的脉冲波形 $s_i(t), i = 1, 2, \dots, K$ 。

这时基带信号可以表示成：

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^K I_{kn} s_k(t - nT)$$

其中 $I_{kn} \in \{0, 1\}$ ，以及 $\sum_{k=1}^K I_{kn} = 1$ ，即 $I_{kn} = 1$ 表示在 $nT \leq t \leq (n+1)T$

中传输第 k 种波形。 $v(t)$ 的自相关函数

$$\begin{aligned} R_V(t + \tau, t) &= E\{V(t)V(t + \tau)\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K E\{I_{in} \cdot I_{j(n+m)}\} s_i(t - nT) \cdot s_j(t + \tau - nT - mT) \end{aligned}$$

$$E[I_{in} \cdot I_{j(m+n)}] = P(I_{in} = 1, I_{j(m+n)} = 1) = p_i \cdot p_{ij}(m)$$

其中 p_i 表示传输波形 $s_i(t)$ 的概率, $p_{ij}(m)$ 表示在当前传输波形 $s_i(t)$ 条件下, 过 m 个时刻后传送 $s_j(t)$ 的**条件转移概率**。于是

$$R_V(t + \tau, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_{ij}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_i(t - nT) s_j(t + \tau - mT - nT)$$

$R_V(t + \tau, t)$ 是 t 的周期为 T 的**周期函数**。

计算相关函数在一个周期中的平均得到,

$$\begin{aligned} \bar{R}_V(\tau) &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} R_V(t + \tau, t) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_{ij}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} s_i(t - nT) s_j(t + \tau - mT - nT) dt \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_{ij}(m) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2} - nT}^{\frac{T}{2} - nT} s_i(t) s_j(t + \tau - mT) dt \\ &= \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_{ij}(m) R_{sij}(\tau - mT) \end{aligned}$$

其中 $R_{sij}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_i(t)s_j(t+\tau)dt$

取 $\bar{R}_V(\tau)$ 的Fourier变换

$$S_V(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i P_{ij}(f) S_i(f) S_j^*(f)$$

其中 $P_{ij}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_{ij}(n) e^{-j2\pi n f T}$

如果数据序列是独立的，即基带信号序列是无记忆的，则对任何

$n \geq 1, p_{ij}(n) = p_j$ ，所以

$$P_{ij}(f) = \delta_{ij} + p_j \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} e^{-j2\pi n f T}$$

$$S_V(f) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K p_i |S_i(f)|^2 - \frac{1}{T} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i \cdot p_j S_i(f) S_j^*(f) \\ + \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K p_i p_j S_i\left(\frac{n}{T}\right) S_j^*\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

对 $K = 2$ 情况, 则

$$S_V(f) = \frac{1}{T} p(1-p) |S_1(f) - S_2(f)|^2 \\ + \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| pS_1\left(\frac{n}{T}\right) + (1-p)S_2\left(\frac{n}{T}\right) \right|^2 \delta\left(f - \frac{n}{T}\right)$$

其中 p 为传送 $s_1(t)$ 的概率, $(1-p)$ 为传送 $s_2(t)$ 的概率。

§ 6.2 常用的数字序列码型

数字序列的功率谱 $S_a(f)$ 对于基带信号功率谱有重大影响；
为了适合信道传输，编码后的数字序列还要经过一些处理。

通常对于数字序列码型要求：

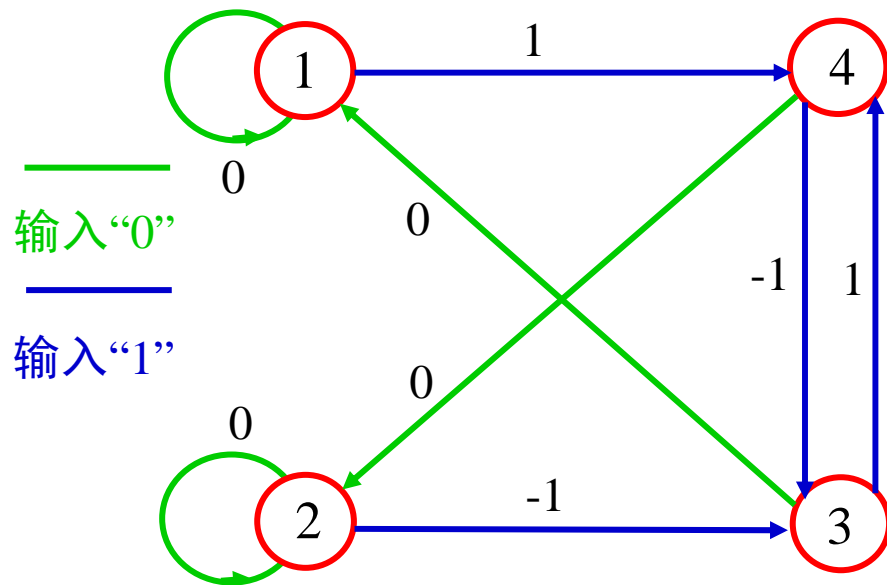
- 1、无直流分量，较低的低频分量；
- 2、能从基带信号中获取码元定时信息；
- 3、信道传输效率高；
- 4、具有一定的检错能力；
- 5、不受信源统计特性的影响；

一、AMI码 (Alternate Mark Inverse)

AMI码称为交替传号反转码，是一个3电平码。它把消息码中的“1”交替变成“+1”和“-1”，把“0”仍然变为“0”。

例如：

消息	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	...
AMI码	1	0	0	0	-1	1	-1	0	0	1	0	-1	1	...



状态①出发输入序列：

1 0 1 1 0 1 0 1 ...

输出AMI码：

1 0 -1 1 0 -1 0 1 ...

状态转移过程：

① → ④ → ② → ③ → ④ →

② → ③ → ① → ④ ...

二、HDB₃码 (3rd Order High Density Bipolar)

HDB₃码称为3阶高密度双极性码。它是三电平码。

HDB₃码编码首先把消息数字序列按AMI码编码，用“0”表示“0”，用 ± 1 交替表示“1”。如果没有出现4个或4个以上的连“0”，则不做变化；当出现4个连“0”，就将第4个“0”改成与前面一个非“0”码元（“+1”或“-1”）同极性码元。原来AMI码的“极性交替反转”原则被破坏。破坏“极性交替反转原则”的码元称为“破坏码元”，并用V表示（+V表示“+1”，-V表示“-1”）。为了消除极性不平衡，要求相邻“破坏码元”的极性也交替反转。当二个相邻V之间有奇数个非零码元，则相邻V自然是极性反转的。当相邻V之间有偶数个非零码元时，这时把4位连“0”串中第一个“0”变成B（+B表示“+1”，-B表示“-1”），B的极性与前一个非“0”码元极性相反，即B是满足极性交替反转原则。

例如：

消息码	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1
AMI	-1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	-1	1
HDB ₃	-1	0	0	0	-V	1	0	0	0	V	-1	1	-B	0	0	-V	+1	-1

HDB₃编码比较复杂；不过HDB₃的译码是非常简单。

因为每一个破坏码元“V”总是和前一个非“0”码元同极性，所以从收到的码元序列很容易找到破坏码元“V”，因此也就知道“V”及前面3个码元必为“0”，然后把所有“-1”变成“1”就恢复了所有消息码。

三、双相码（Manchester码）

编码规则： 把每个二进制码元变换成相位不同的一个周期方波。

消息码元	双相码
0	01
1	10

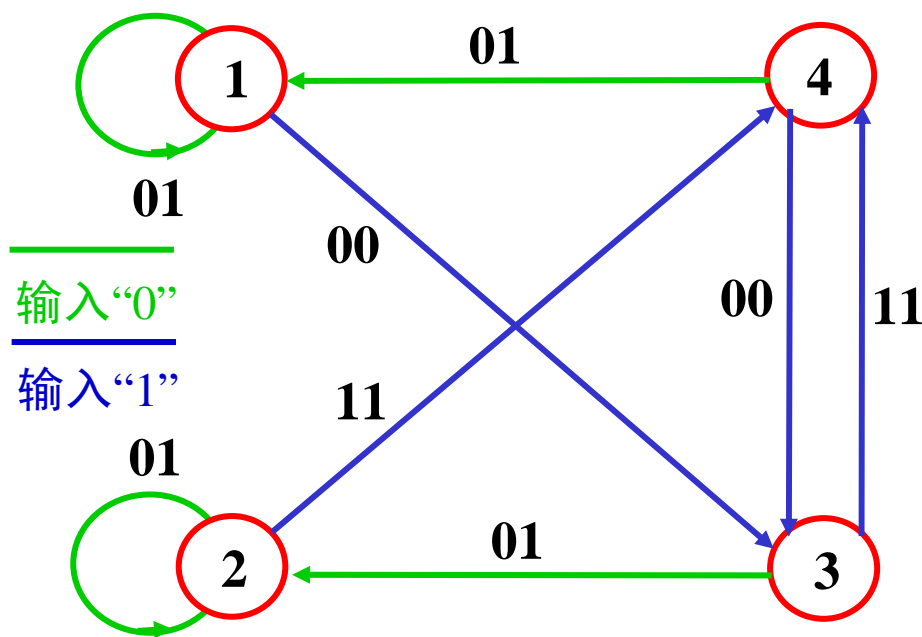
例如：

消息码	1	0	1	1	0	0	0	1
双相码	10	01	10	10	01	01	01	10

四、CMI码 (Coded Mark Inverse)

CMI码是编码传号反转码。它是输入一位，输出二位的码。当数据符号为“0”，则编码输出“01”，当数据符号“1”，则交替输出“00”或“11”。

输入	输出
0	01
1	00或11 交替

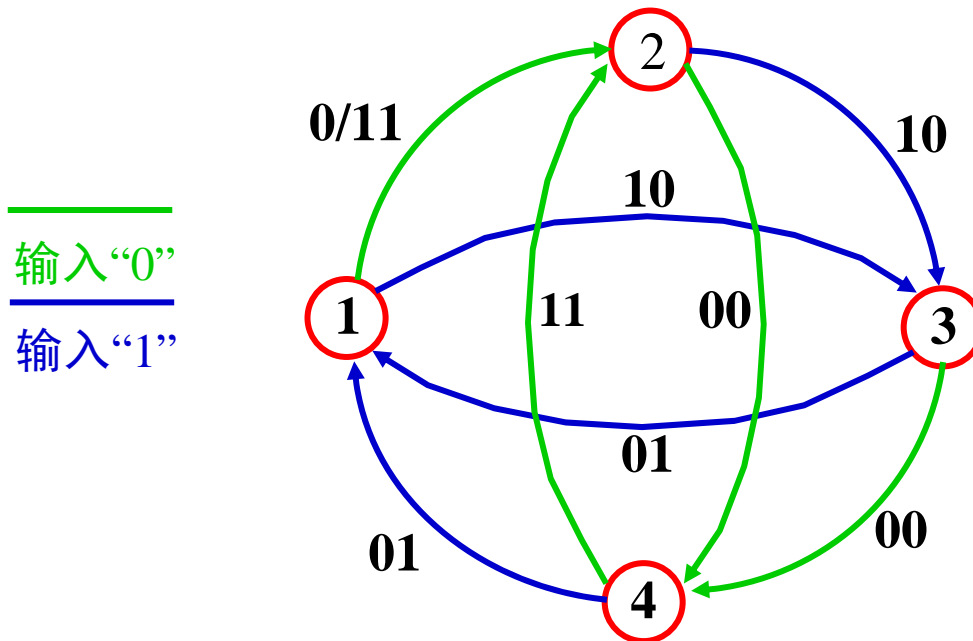


例如：

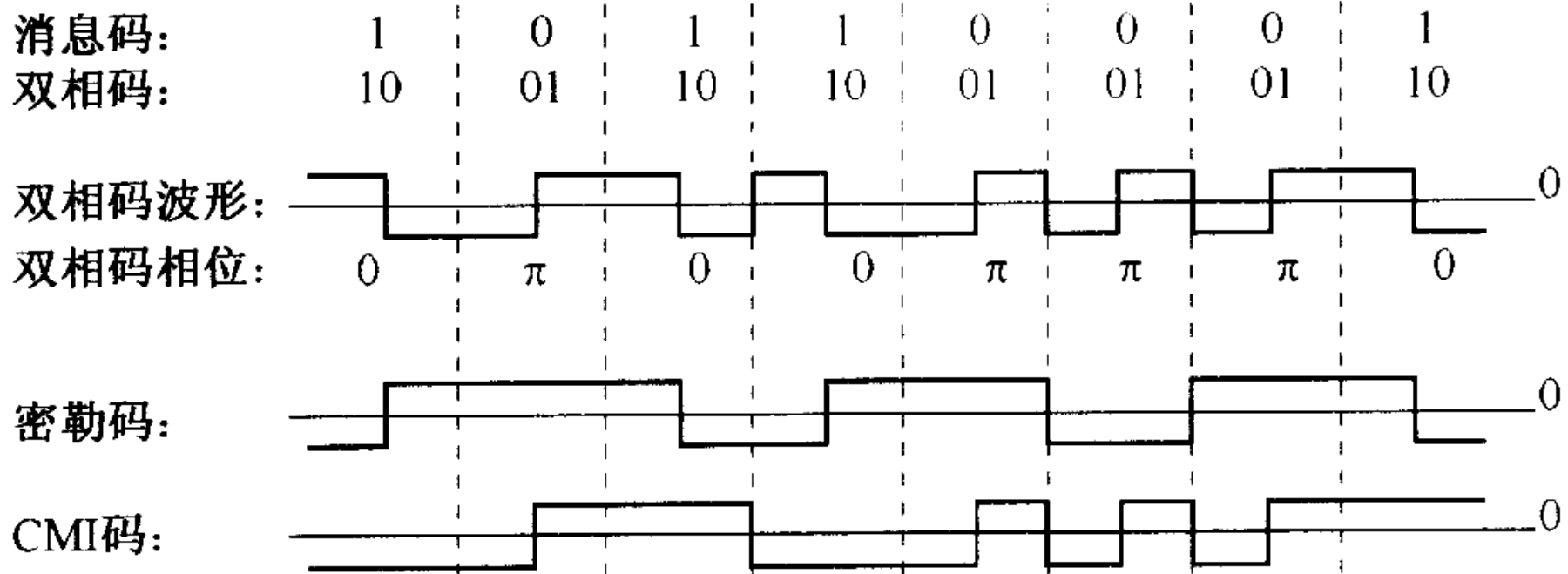
消息码	1	0	1	1	1	0	0	1
CMI码	11	01	00	11	00	01	01	11

五、Miller码

消息码元“1”用“10”或“01”表示，使二个码元符号间电平不跳变；
消息码元“0”用“00”或“11”表示，使相连的“0”用交替“00”，“11”表示，
而单个“0”则使相邻码元电平不跳变。



消息码元	1	1	0	1	0	0	1	0
Miller码	01	10	00	01	11	00	01	11



密勒码的最大脉冲宽度为2个T,

用双相码的下降沿去触发一个双稳态触发器可以得到密勒码。

六、nBmB码

这是一类分组码。它把每 n 位二进制数据码元分成一组，并把这些长度 n 的分组变换成长度为 m ($m > n$) 的二进制码字。在 2^m 种可能的长度为 m 序列中选 2^n 个为码字，其他为禁用序列。这样得到的码称为 nBmB 码，它们可能具有好的性质。双相码、密勒码和 CMI 码都可以看成为 1B2B 码。在光纤通信中常用，例如 5B6B 码。

§ 6.3 基带信号通过加性白高斯噪声信道传输

在基带传输情况中，接收到的是基带波形脉冲，我们还要通过解调来恢复脉冲波形。由于经过传输的脉冲波形已非原来理想的发送波形，信道滤波和接收机的前端滤波使得波形失真，引起了码间干扰（ISI）。另外由于在传输过程中存在各种干扰和加性噪声，使得接收到的脉冲波形迭加上噪声干扰，因而在对信号采样判决时会出现错误。解调的目的在于要免除码间干扰影响，以可能最好的信号噪声比来恢复基带脉冲。

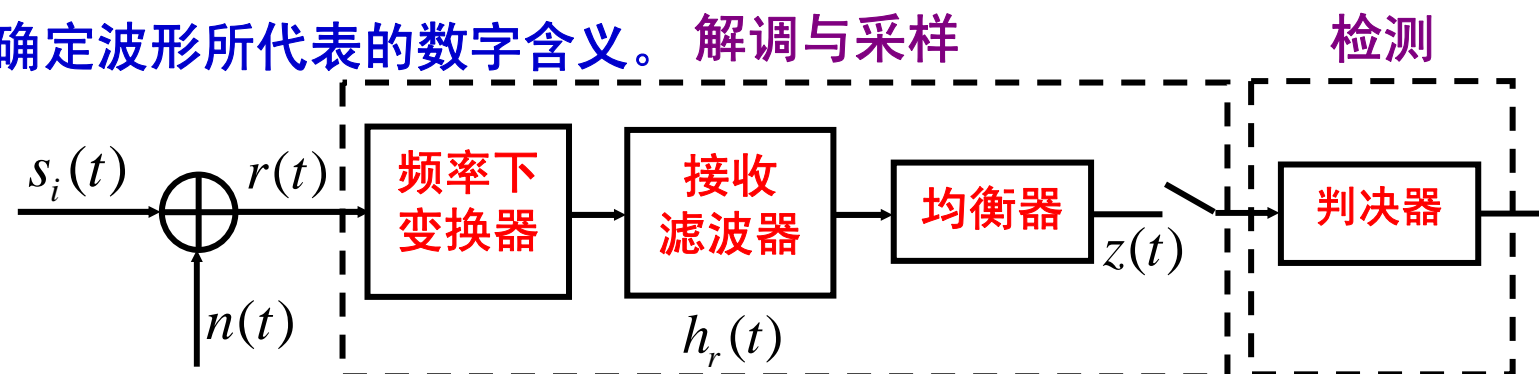
通过对发送、接收滤波器的正确设计，以及利用各种均衡器技术，原则上我们可以消除码间干扰影响。

本节主要讨论基带信号通过加性白高斯噪声信道（AWGN）传输，不考虑由于频带限制所带来的码间干扰影响；也就是把信道作为无限带宽系统。

一、解调和检测

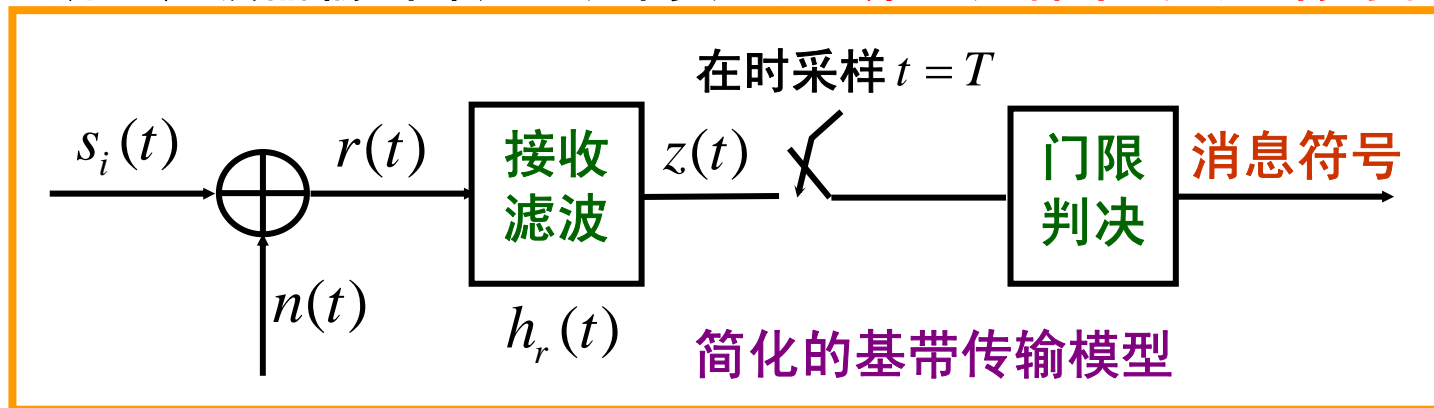
解调就是把接收到波形恢复成发送的基带脉冲，而检测是指作出判断，

确定波形所代表的数字含义。



频率下变换方框是为带通信号传输所设计，对于基带信号传输来说，它可以完全省去。接收滤波器，执行波形恢复的功能。接收滤波器是以最好的信噪比恢复基带脉冲。这种最佳滤波器也称为匹配滤波器，或者叫相关器。由于发送滤波，信道滤波使得接收到的脉冲序列发生码间干扰，不适于直接采样和判决，均衡器用来消除由带限系统所引起的码间干扰（ISI）。实际系统中接收滤波器和均衡器往往结合在一起。

解调/检测过程包含有二个转换。第一是波形—样本转换，这由采样器完成。在每个符号时间 T 结束，采样器输出样本值 $z(mT)$, $z(mT)$ 也称为检测统计量。检测统计量是一个随机变量，它与接收到符号的能量及附加噪声有关。由于输入噪声是Gaussian过程，接收滤波器是线性的，所以滤波器输出噪声也是高斯的。第二是样本到消息符号转换。



$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & 0 \leq t \leq T & \text{发送“1”} \\ s_0(t) & 0 \leq t \leq T & \text{发送“0”} \end{cases}$$

$$r(t) = s_i(t) + n(t) \quad z(t) = r(t) \otimes h_r(t)$$

$$z(T) = a_i(T) + n_o(T)$$

$z(t)$ 在时刻 $t = T$ 的采样输出为,

$$z(T) = a_i(T) + n_o(T)$$

其中 $a_i(T)$ 是由信号分量得到的, 是所需分量; $n_o(T)$ 是噪声分量。

$$z = a_i + n_o$$

$n_o(T)$ 是均值为零, 方差为 σ_0^2 的高斯噪声

$$p(z | s_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_0}{\sigma_0}\right)^2\right]$$
$$p(z | s_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z - a_1}{\sigma_0}\right)^2\right]$$

$p(z | s_0)$ 和 $p(z | s_1)$ 分别称为是 s_0 、 s_1 的似然概率。

判决器作用是把采样值 z 与某门限 γ 相比, 根据大于 γ 还是小于 γ 来确定发送的是 s_0 , 还是 s_1 。基带传输系统中的解调和检测主要归结为如何设计一个好的接收滤波器和如何选择比较门限。

二、信号和噪声的矢量空间表示

N 维矢量空间

在 N 维矢量空间 \mathbf{S} 中每个矢量 \mathbf{x} 用它的 N 个坐标表示为 (x_1, x_2, \dots, x_N) ;

两个矢量 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 的和定义为:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_N + y_N)$$

矢量 \mathbf{x} 与标量 α 之积定义 :

$$\alpha \mathbf{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_N)$$

两个矢量 \mathbf{x} 、 \mathbf{y} 的内积:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^N x_i y_i$$

矢量 \mathbf{x} 的长度定义为:

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

矢量 x 的长度定义为:

$$\| \mathbf{x} \| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

两个矢量 x 、 y 的夹角: $\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\| \mathbf{x} \| \times \| \mathbf{y} \|}$

$$v_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$$

$$v_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$$

\dots

$$v_N = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

是一组相互正交, 规一的矢量, 称为基矢量。

Gram-Schmidt规范化法则

对于任何 N 个线性无关矢量 $x_i, i = 1, 2, \dots, N$ ，可以通过如下方法得到一组 N 个**正交、规一矢量** $\{e_i\}$ ；

任取一个矢量，比如 x_1 ，

$$e_1 = x_1 / \|x_1\| ;$$

$$b_2 = x_2 - (x_2 \cdot e_1)e_1 ,$$

$$e_2 = b_2 / \|b_2\| ;$$

$$b_3 = x_3 - (x_3 \cdot e_1)e_1 - (x_3 \cdot e_2)e_2 ,$$

$$e_3 = b_3 / \|b_3\| ;$$

$\dots \quad \dots$

\dots

$$b_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n \cdot e_i)e_i ,$$

$$e_n = b_n / \|b_n\| ; \quad n = 1, 2, \dots, N$$

可以把任何一组 N 个正交、规一矢量，作为这个 N 维空间 S 的基矢量。

信号和噪声的矢量空间表示

把在 $(0, T)$ 上平方可积函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 看成是矢量,

$x(t)$ 和 $y(t)$ 的**内积定义**: $(x(t), y(t)) = \int_0^T x(t)y(t)dt$

$x(t)$ 函数的**长度定义**: $\|x(t)\| = \sqrt{\int_0^T x^2(t)dt}$

矢量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的**夹角定义**: $\cos \theta = \frac{(x(t) \cdot y(t))}{\|x(t)\| \times \|y(t)\|}$

$\varphi_i(t), i = 1, 2, \dots, N$ 是一组在 $(0, T)$ 上定义的**正交、规一函数**, 即

$$\int_0^T \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

任何一个由 $\{\varphi_i(t)\}$ 线性组合构成的函数 $s(t)$ 可以表示为:

$$s(t) = s_1\varphi_1(t) + s_2\varphi_2(t) + \cdots + s_N\varphi_N(t)$$

把 $\{\varphi_i(t)\}$ 看成是一组 N 个正交、规范基函数, 相当于 N 维正交空间的 N 个正交单位向量。于是 $s(t)$ 就可以看成为是这个 N 维空间中的一个点, 它的座标为 (s_1, s_2, \cdots, s_N) , 称这 N 维空间为信号空间。

由Gram-Schmidt正交化步骤:

可以从任何一组 M 个波形 $\{s_i(t)\}$, $i = 1, 2, \cdots, M$, $t \in [0, T]$ 构造出一组 N 个正交规范波形 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_N(t)$, $N \leq M$;

任取一个矢量, 比如 $s_1(t)$,

$$\varphi_1(t) = s_1(t) / \|s_1(t)\| \quad ;$$

$$b_2 = s_2 - \langle s_2 \cdot \varphi_1 \rangle \varphi_1 \quad ,$$

$$\varphi_2(t) = b_2(t) / \|b_2(t)\| \quad ;$$

$$b_3 = s_3 - \langle s_3 \cdot \varphi_1 \rangle \varphi_1 - \langle s_3 \cdot \varphi_2 \rangle \varphi_2 \quad , \quad \varphi_3(t) = b_3(t) / \|b_3(t)\| \quad ;$$

$\cdots \quad \cdots$

\cdots

$$b_n = s_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle s_n \cdot \varphi_i \rangle \varphi_i \quad ,$$

$$\varphi_n(t) = b_n(t) / \|b_n(t)\| \quad ;$$

$n = 1, 2, \cdots, N$

使得:

$$s_1(t) = s_{11}\varphi_1(t) + s_{12}\varphi_2(t) + \cdots + s_{1N}\varphi_N(t)$$

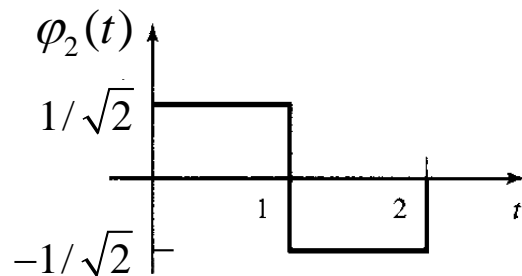
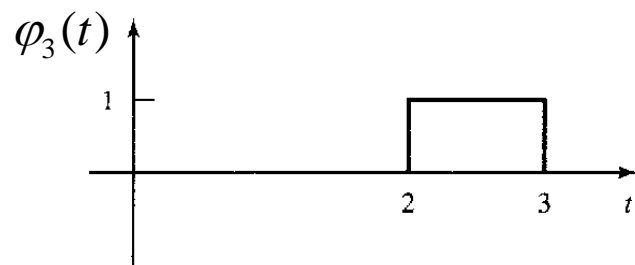
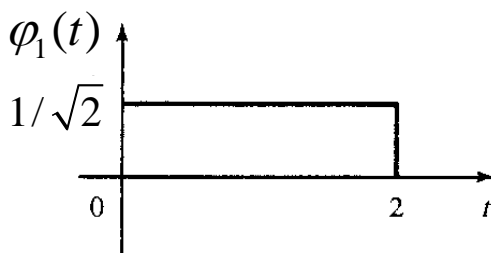
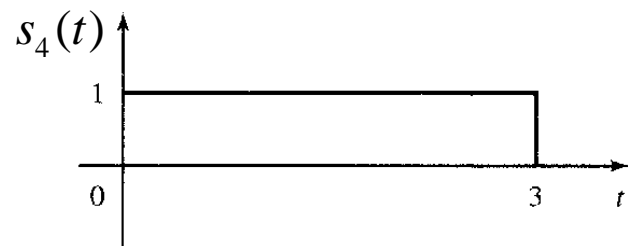
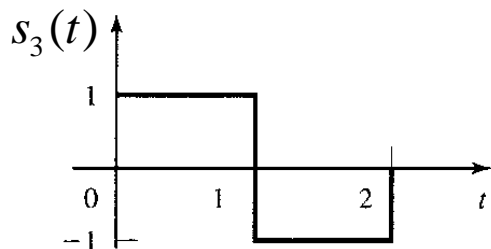
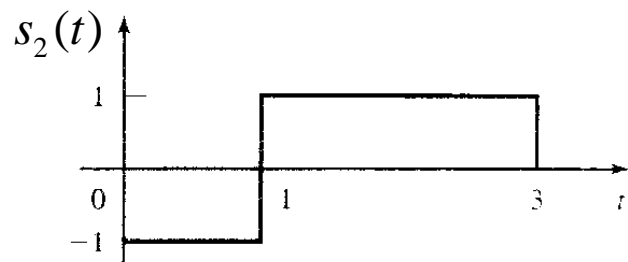
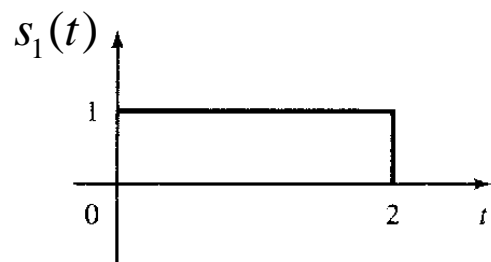
$$s_2(t) = s_{21}\varphi_1(t) + s_{22}\varphi_2(t) + \cdots + s_{2N}\varphi_N(t)$$

$$\vdots$$

$$s_M(t) = s_{M1}\varphi_1(t) + s_{M2}\varphi_2(t) + \cdots + s_{MN}\varphi_N(t)$$

$$s_{ij} = \int_0^T s_i(t)\varphi_j(t)dt, \quad i=1,2,\cdots,M; j=1,2,\cdots,N$$

[例] 4个基带信号 $s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)$



构造出一组3个正交规范波形

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)$$

$$s_1(t) = \sqrt{2}\varphi_1(t)$$

$$s_2(t) = -\sqrt{2}\varphi_2(t) + \varphi_3(t)$$

$$s_3(t) = \sqrt{2}\varphi_2(t)$$

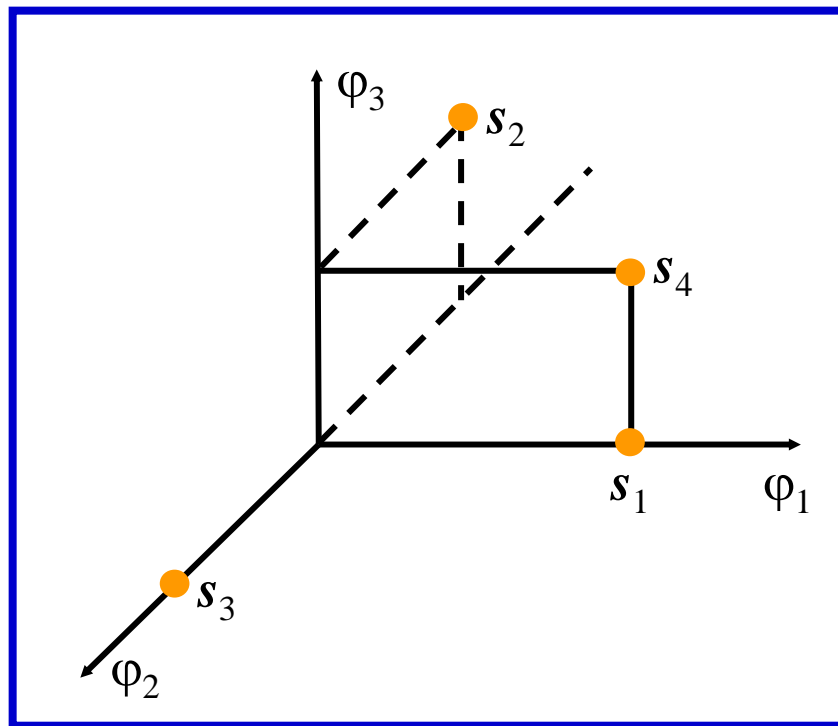
$$s_4(t) = \sqrt{2}\varphi_1(t) + \varphi_3(t)$$

$$s_1 = (\sqrt{2}, 0, 0), s_2 = (0, -\sqrt{2}, 1),$$

$$s_3 = (0, \sqrt{2}, 0), s_4 = (\sqrt{2}, 0, 1)$$

$$\|s_1\|^2 = 2, \|s_2\|^2 = 3,$$

$$\|s_3\|^2 = 2, \|s_4\|^2 = 3$$



每个信号波形 $s_i(t)$ 可以用矢量 $(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iN})$ 表示，信号能量

$$E_i = \int_0^T s_i^2(t) dt = \int_0^T \left[\sum_{j=1}^N s_{ij} \varphi_j(t) \right]^2 dt = \sum_{j=1}^N s_{ij}^2 \square \|s_i\|^2 \quad i = 1, 2, \dots, M$$

信号的能量相当于矢量 $(s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{iN})$ 长度的平方。

[例] 在 $(-\pi, \pi)$ 上定义的**16个基带信号**:

$$s_{i,j}(t) = i \cdot \cos t + j \cdot \sin t, \quad i, j = \pm 1, \pm 3$$

可以用**二维信号空间中的点**表示, 该二维信号空间的基矢量函数为:

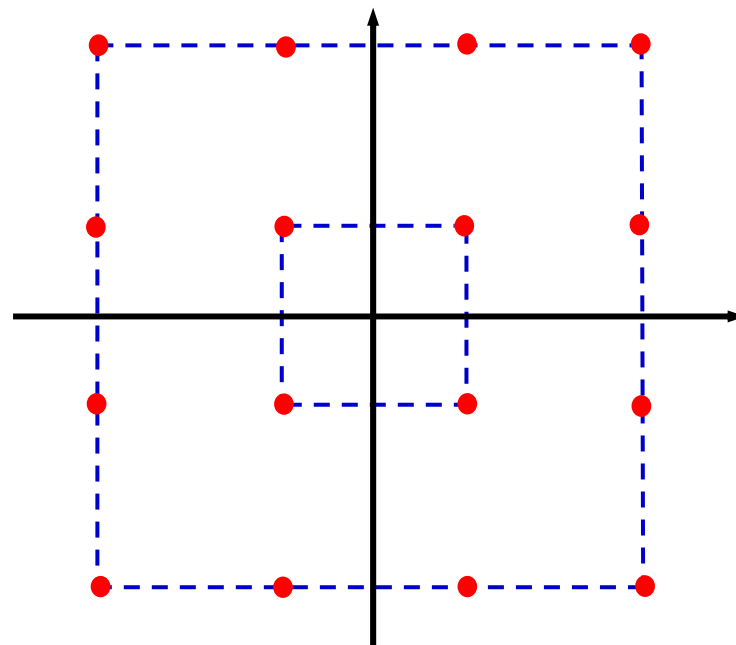
$$\varphi_1(t) = \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}} \quad \varphi_2(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}$$

所以

$$s_{i,j}(t) = i\sqrt{\pi} \cdot \varphi_1(t) + j\sqrt{\pi} \cdot \varphi_2(t)$$

$$\mathbf{s}_{i,j} = (i\sqrt{\pi}, j\sqrt{\pi})$$

$$\|\mathbf{s}_{i,j}\|^2 = (i^2 + j^2)\pi$$



双边功率谱密度为 $N_0/2$ 的白高斯噪声也可以表示成二部分组成,

$$n(t) = \hat{n}(t) + \tilde{n}(t)$$

其中

$$\hat{n}(t) = \sum_{j=1}^N n_j \varphi_j(t), \quad n_j = \int_0^T n(t) \varphi_j(t) dt$$

是 $n(t)$ 在这 N 维信号空间中的投影。

另一部分:

$$\tilde{n}(t) = n(t) - \hat{n}(t)$$

是与信号空间正交的分量。因为对任何 $\varphi_j(t)$, $j = 1, 2, \dots, M$

$$\int_0^T \tilde{n}(t) \varphi_j(t) dt = 0$$

$\hat{n}(t)$ 可以用矢量 (n_1, n_2, \dots, n_N) 表示。

分量 n_i 是**高斯随机变量**， n_i 的均值和协方差分别为：

$$E[n_i] = E\left[\int_0^T n(t)\varphi_j(t)dt\right] = 0$$

$$\begin{aligned} E[n_i n_j] &= \int_0^T \int_0^T E[n(t)n(\tau)]\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \\ &= \int_0^T \int_0^T \frac{N_0}{2} \delta(t-\tau)\varphi_i(t)\varphi_j(\tau)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \delta_{ij} \\ &= \begin{cases} \frac{N_0}{2} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \end{aligned}$$

N 维噪声矢量 $\hat{n}(t) = (n_1, n_2, \dots, n_N)$ 的概率分布为：

$$f(n) = \prod_{i=1}^N f(n_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp\left[-\sum_{i=1}^N \frac{n_i^2}{N_0}\right]$$

三、基函数相关解调

当发送是信号 $s_k(t)$ 时，接收到

$$r(t) = s_k(t) + n(t), \quad k = 1, 2, \dots, M$$

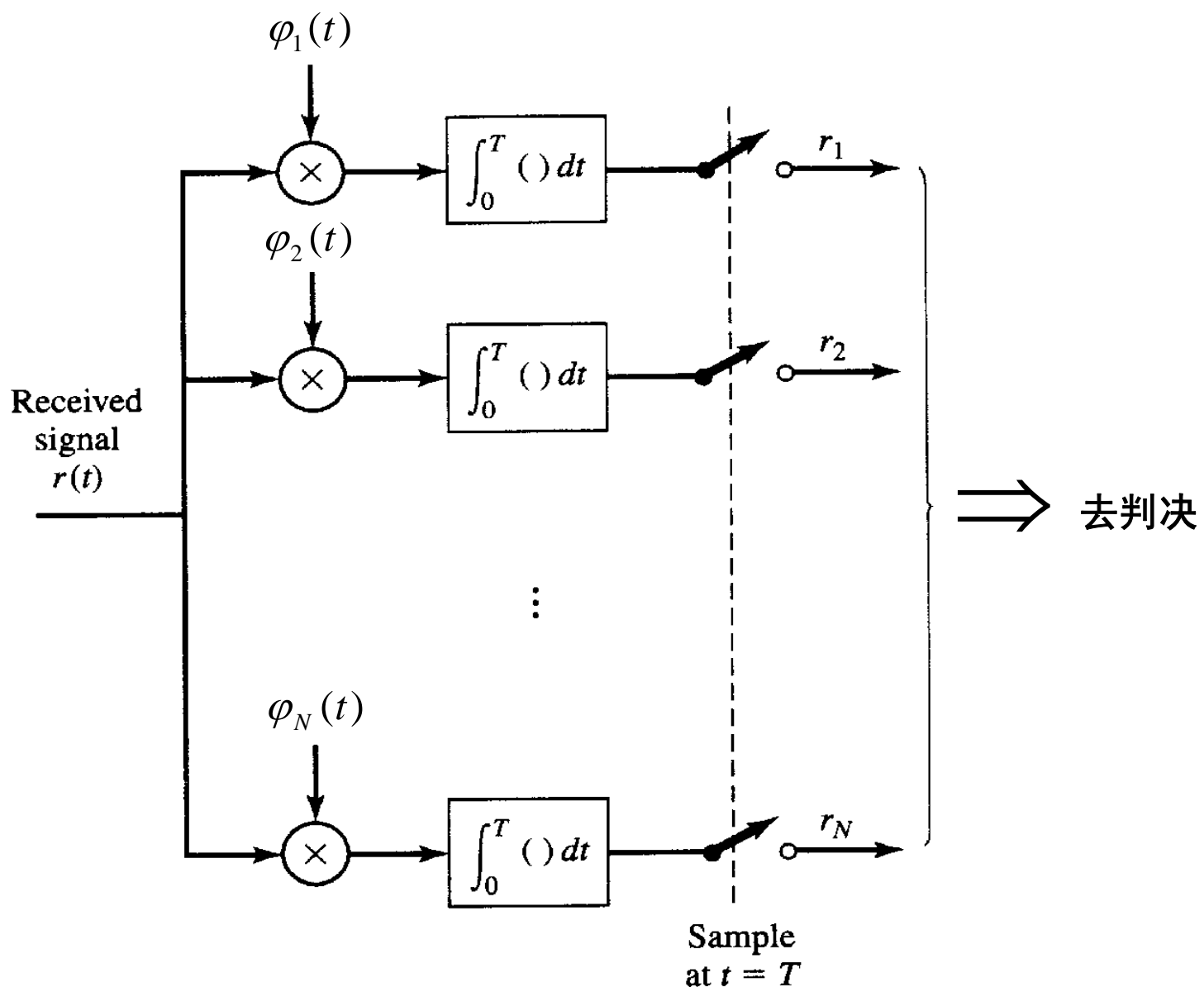
$r(t)$ 投影到 N 维信号空间，得到的矢量表示为 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$

$$r_i = \int_0^T r(t) \varphi_i(t) dt = s_{ki} + n_i \quad i = 1, 2, \dots, N$$

r_i 是均值为 s_{ki} ，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯随机变量，所以在发送 $s_k(t)$ 条件下，接收到 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ 的条件概率为：

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r} | s_i) &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N (r_k - s_{ik})^2 / N_0 \right\} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ - \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 / N_0 \right\} \end{aligned}$$

其中 $\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|$ ，表示矢量 $(\mathbf{r} - \mathbf{s}_i)$ 的长度。



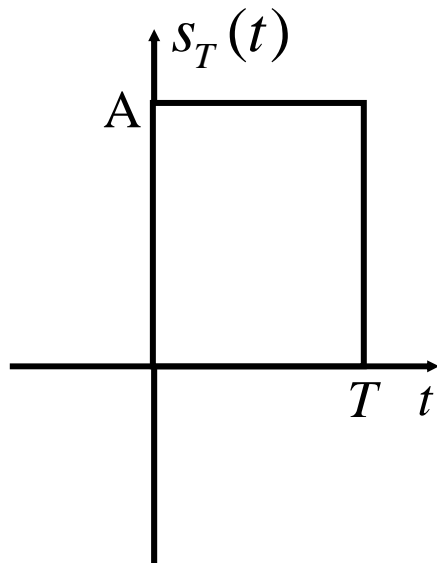
基函数相关解调器

$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ 是作出判决的充分统计量；也就是说作出正确判决的信息包含在矢量 \mathbf{r} 中，与噪声分量 $\tilde{n}(t)$ 无关。 $n(t) = \hat{n}(t) + \tilde{n}(t)$

$$\begin{aligned} E[\tilde{n}(t) \cdot r_i] &= E[\tilde{n}(t) \cdot s_{ki}] + E[\tilde{n}(t) \cdot n_k] = E[\tilde{n}(t) \cdot n_k] \\ &= E\left\{\left[n(t) - \sum_{j=1}^N n_j \varphi_j(t)\right] \cdot n_k\right\} \\ &= \int_0^T E[n(t) \cdot n(\tau)] \varphi_k(\tau) d\tau - \sum_{j=1}^N E(n_j \cdot n_k) \varphi_j(t) \\ &= \frac{N_0}{2} \varphi_k(t) - \frac{N_0}{2} \varphi_k(t) = 0 \end{aligned}$$

所以 $\tilde{n}(t)$ 和 $\{r_i\}$ 是不相关的。对于高斯变量，不相关就意味着相互独立，所以 $\tilde{n}(t)$ 和 $\{r_i\}$ 独立的。从而 $\{r_i\}$ 是一组充分统计量，给出的充分统计量的解调器是一组基函数相关器。

[例6.3.1] M 电平PAM传输，其中基本脉冲形状 $s_T(t)$ 为矩形，如图所示，加性噪声是零均值，白高斯噪声。求基函数 $\varphi(t)$ 和基函数相关解调器输出。



[解] 矩形脉冲能量为

$$E_s = \int_0^T s_T^2(t) dt = A^2 T$$

因为PAM信号集合具有维数 $N = 1$

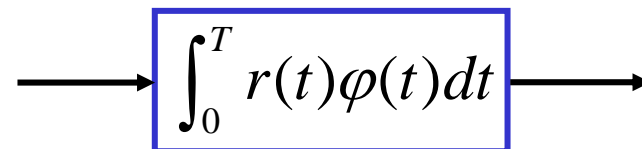
只有一个基函数 $\varphi(t)$,

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{A^2 T}} s_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

基函数相关型解调器输出为，

$$r = \int_0^T r(t) \cdot \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T r(t) dt$$

相关器变成了简单的积分器。



发送的第 m 电平基带脉冲可表示为，

$$s_m(t) = A_m s_T(t) = A_m \sqrt{A^2 T} \varphi(t) \square s_m \varphi(t)$$

则

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T [s_m(t) + n(t)] dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \left[\int_0^T s_m \cdot \varphi(t) dt + \int_0^T n(t) dt \right] = s_m + n \end{aligned}$$

其中

$$E[n] = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= E \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T n(t) n(\tau) dt d\tau \right\} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T E[n(t) n(\tau)] dt d\tau \\ &= \frac{N_0}{2T} \int_0^T \int_0^T \delta(t - \tau) dt d\tau = \frac{N_0}{2} \end{aligned}$$

所以

$$p(r | s_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -(r - s_m)^2 / N_0 \right\}$$

四、基函数匹配滤波器解调

基函数相关型解调是利用一组 N 个相关器构造出充分统计量提供给后面的检测判决装置。也可以用一组滤波器来代替相关器，这组 N 个滤波器的脉冲响应为：

$$h_k(t) = \begin{cases} \varphi_k(T-t), & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots, N$$

其中 $\varphi_k(t)$ 是信号空间的 N 个基函数。滤波器输出为

$$\begin{aligned} y_k(t) &= \int_0^t r(\tau) h_k(t-\tau) d\tau \\ &= \int_0^t r(\tau) \varphi_k(T-t+\tau) d\tau, \quad k = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

当 $t = T$ 时，这些匹配滤波器输出正好是 N 个基函数相关器的输出。

[定义] 当信号 $s(t)$ 是 $0 \leq t \leq T$ 上定义的函数，则脉冲响应为：

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

的滤波器称为是信号 $s(t)$ 的**匹配滤波器**。

匹配滤波器性质

[定理] 如果信号 $s(t)$ 受到AWGN干扰，则信号 $s(t)$ 通过与它相匹配的滤波器，可获得最大信噪比。

[证明] 设持续时间为 T 的信号 $s(t)$ 在信道上受到功率谱密度为 $\frac{N_0}{2}$ 的AWGN干扰，则接收到信号，

$$r(t) = s(t) + n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

设接收滤波器的脉冲响应 $h(t)$ 为，传递函数为 $H(f)$ ， $r(t)$ 通过滤波器后**输出为**，

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t r(\tau) h(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t s(\tau) h(t - \tau) d\tau + \int_0^t n(\tau) h(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{当 } t = T \quad y(T) &= \int_0^T s(\tau) h(T - \tau) d\tau + \int_0^T n(\tau) h(T - \tau) d\tau \\ &= y_s(T) + y_n(T) \end{aligned}$$

在时刻 $t = T$ 输出信噪比 (SNR) 为

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{N}\right)_o &= \frac{y_s^2(T)}{E[y_n^2(T)]} \\ E[y_n^2(T)] &= \int_0^T \int_0^T E[n(\tau)n(t)]h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T \delta(t-\tau)h(T-\tau)h(T-t)dtd\tau \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt \\ \left(\frac{S}{N}\right)_o &= \frac{\left|\int_0^T s(\tau)h(T-\tau)d\tau\right|^2}{\frac{N_0}{2} \int_0^T h^2(T-t)dt}\end{aligned}$$

由**Cauch-Schwartz不等式**，如 $g_1(t)$ 、 $g_2(t)$ 是平方可积函数则

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2(t)dt\right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_1^2(t)dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g_2^2(t)dt$$

等号在 $g_1(t) = c \cdot g_2(t)$ 时成立， c 为任意常数。

因此
$$\left(\frac{S}{N}\right)_o \leq \frac{\int_0^T s^2(\tau) d\tau}{N_o / 2} = \frac{2E_s}{N_o}$$

其中 E_s 为信号 $s(t)$ 的能量。上式的等号仅在

$$s(t) = c \cdot h(T - t), \quad 0 \leq t \leq T$$

或
$$h(t) = c \cdot s(T - t), \quad 0 \leq t \leq T$$

时成立时，也就是说滤波器 $h(t)$ 是信号 $s(t)$ 的匹配滤波器时，输出信噪比在时刻 $t = T$ 最大。 [证毕]

下面计算匹配滤波器的频率传递函数。

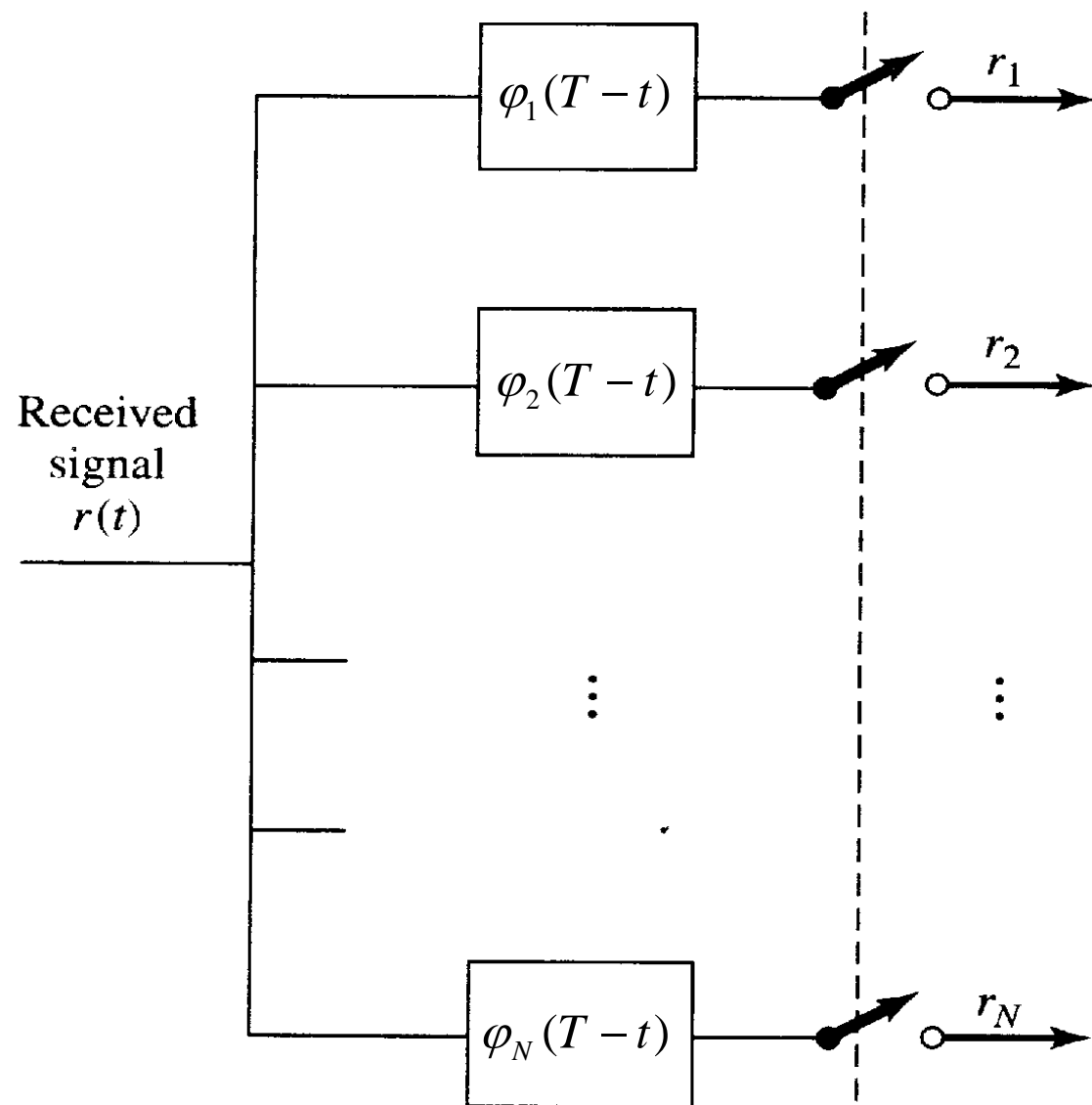
$$\begin{aligned} H(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_0^T c \cdot s(T - t) e^{-j2\pi ft} dt \\ &= \left[\int_0^T c \cdot s(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau \right] e^{-j2\pi fT} = c \cdot S^*(f) e^{-j2\pi fT} \\ H(f) &= c \cdot S^*(f) e^{-j2\pi fT} \end{aligned}$$

匹配滤波器的信号输出：

$$\begin{aligned} y_s(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) \cdot s(T-\tau)d\tau \\ &= R_s(t-T) \end{aligned}$$

在 $t = T$ 时， $y_s(T) = R_s(0)$ ，正是相关器在 $t = T$ 时的输出。

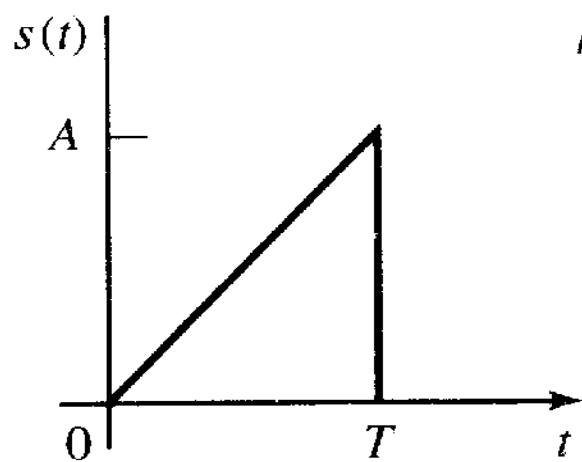
我们可以把基函数相关解调器用一组匹配滤波器代替，得到基函数匹配滤波解调器。



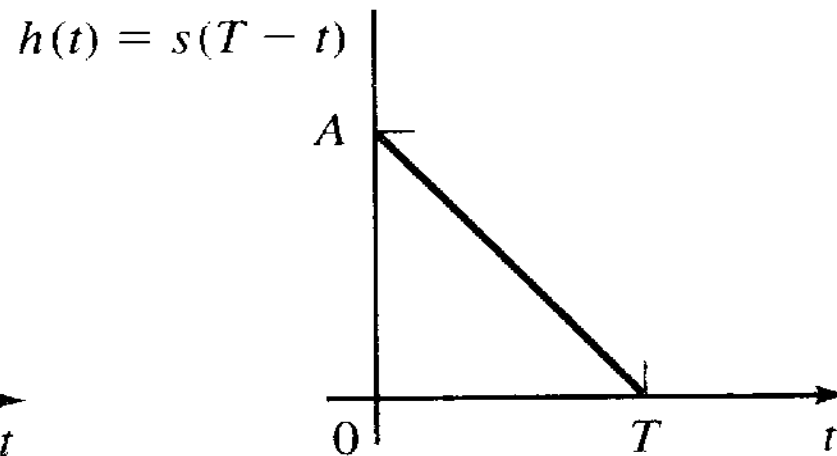
\Rightarrow 去检测

基函数匹配滤波解调器

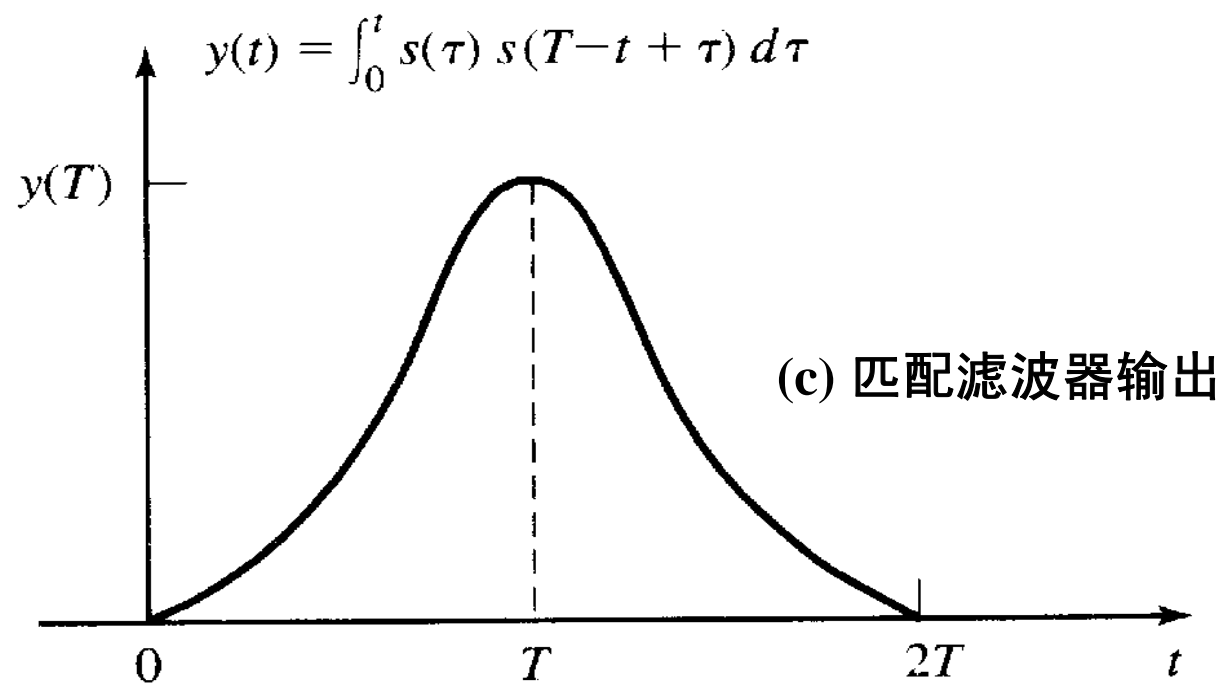
[例]



(a) 信号



(b) 匹配滤波器脉冲响应



(c) 匹配滤波器输出

注意：匹配滤波器的输出仅当 $t = T$ 时才和相关器输出相同，在其它时刻二者输出是不一样的。例如对于正弦信号，图中的实线表示相应匹配滤波器输出，而虚线表示对应相关器输出。

[例]
$$s(t) = \begin{cases} \cos 2\pi f_0 t & t \in [0, T] \\ 0 & t \notin [0, T] \end{cases}$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt = \frac{1 - e^{-j2\pi(f-f_0)T}}{-j4\pi(f-f_0)} + \frac{1 - e^{-j2\pi(f+f_0)T}}{-j4\pi(f+f_0)}$$

匹配滤波器的频率响应：

$$\begin{aligned} H(f) &= S^*(f) e^{-j2\pi fT} \\ &= \frac{[e^{j2\pi(f-f_0)T} - 1] e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f-f_0)} + \frac{[e^{j2\pi(f+f_0)T} - 1] e^{-j2\pi fT}}{j4\pi(f+f_0)} \end{aligned}$$

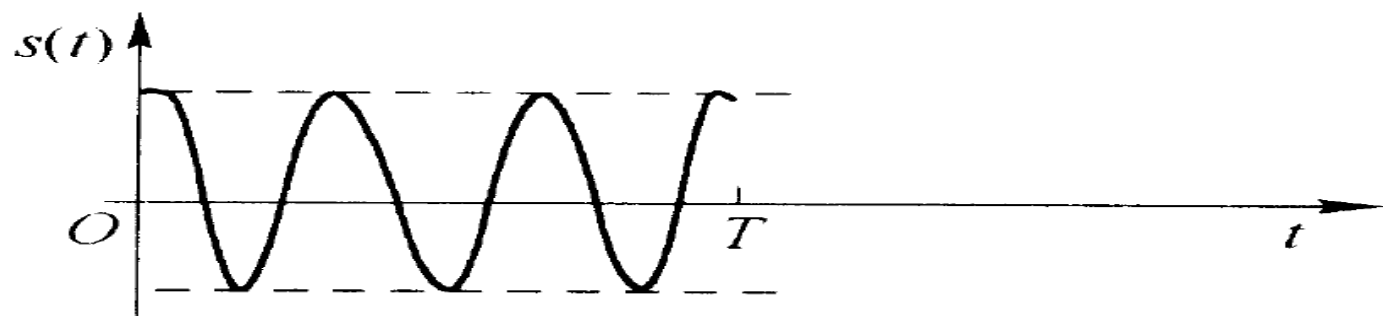
匹配滤波器的脉冲响应:

$$h(t) = s(T - t) = \cos 2\pi f_0(T - t) \quad t \in [0, T]$$

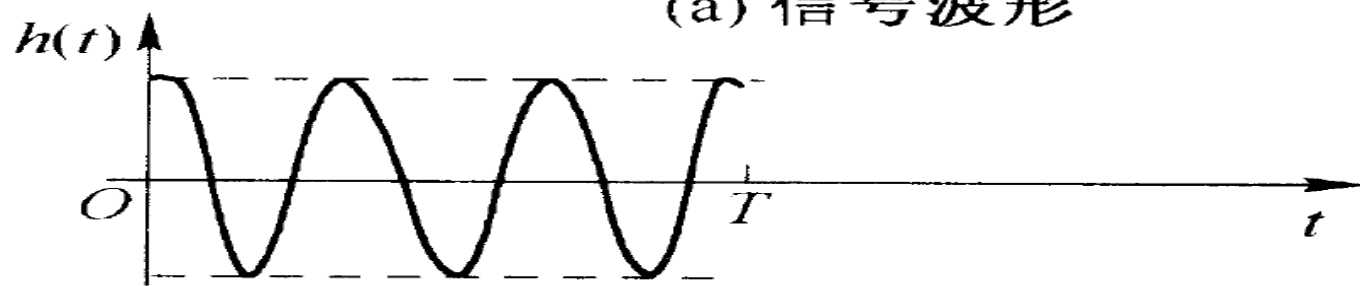
假设 $f_0 = N/T$

输出信号: $s_o(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)h(t - \tau)d\tau$

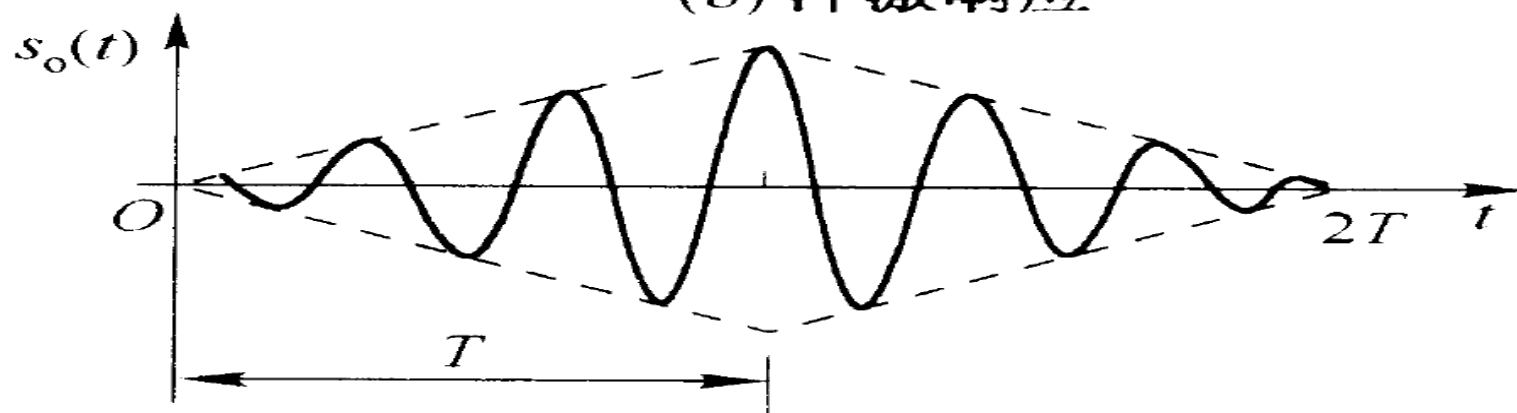
$$= \begin{cases} \frac{t}{2} \cos 2\pi f_0 t & 0 \leq t < T \\ \frac{2T - t}{2} \cos 2\pi f_0 t & T \leq t < 2T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



(a) 信号波形



(b) 冲激响应



(c) 输出波形

[例6.3.2] 在二进制基带传输系统中，可能发送二种波形

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

发送“0”

发送“1”

求其基函数匹配滤波解调器。

[解] 构成二维正交基：

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{TA^2}} s_1(t), \quad \varphi_2(t) = \sqrt{\frac{2}{TA^2}} s_2(t)$$

相应的匹配滤波器为，

$$h_1(t) = \varphi_1(T-t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{TA^2}}, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$
$$h_2(t) = \varphi_2(T-t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{TA^2}}, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当 $s_1(t)$ 发送时，匹配滤波器 $h_1(t)$ 在 $t = T$ 时输出信号值为，

$$y_{1s}(T) = \sqrt{\frac{A^2 T}{2}} = \sqrt{E_s}$$

E_s 为符号能量。而滤波器 $h_2(t)$ 在 $t = T$ 时输出信号值为，

$$y_{2s}(T) = 0$$

匹配型解调器输出采样矢量值为，

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2) = (\sqrt{E_s} + n_1, n_2)$$

其中 n_1 和 n_2 为噪声通过这二只匹配滤波器，在 $t = T$ 时的采样值；

$$n_1 = y_{1n}(T) = \int_0^T n(t) \varphi_1(t) dt$$

$$n_2 = y_{2n}(T) = \int_0^T n(t) \varphi_2(t) dt$$

$$E[n_1] = E[n_2] = 0, \sigma_{n_1}^2 = \sigma_{n_2}^2 = \frac{N_0}{2}$$

第一只匹配滤波的输出信噪比为，

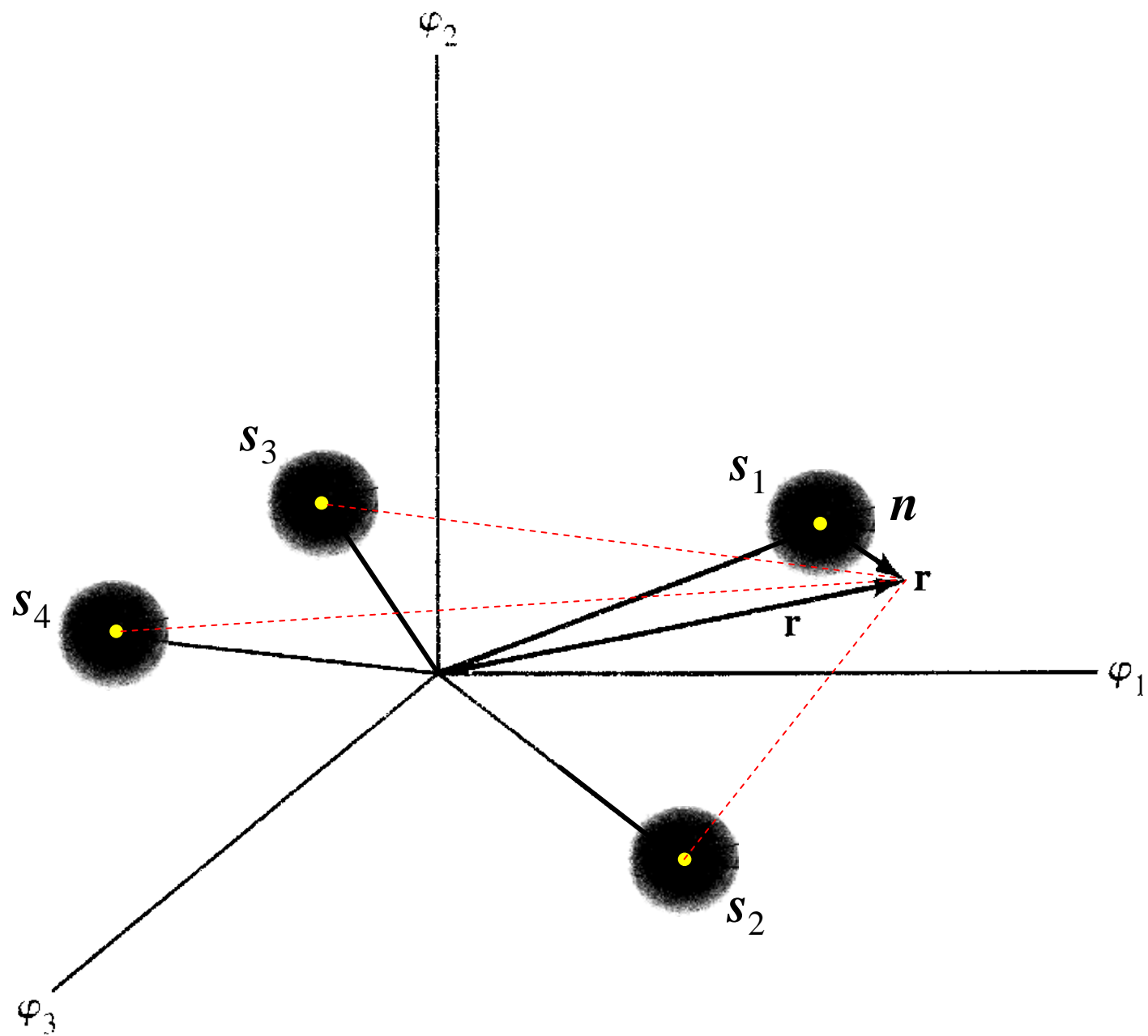
$$\left(\frac{S}{N} \right)_o = \frac{y_{1s}^2(T)}{\sigma_{n_1}^2} = \frac{2E_s}{N_0}$$

五、最佳检测判决器

对于AWGN上基带信号传输来说，无论是基函数相关解调，还是基函数匹配滤波解调，都产生一个判决矢量 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ ，接收信号中有关发送信号的全部有用信息包含在这个判决矢量中。

接收矢量是二项之和，一项是 \mathbf{s}_m ，即与发送信号波形有关的矢量，另一项是噪声矢量 \mathbf{n} ，它是噪声在信号空间的投影。把 \mathbf{s}_m 视做信号空间一点，

是 N 维信号空间一个随机矢量。它的每个分量是均值为0，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯变量，它可以表示为矢量 \mathbf{s}_m 上叠加一个球对称分布的噪声，形成了信号空间中以 \mathbf{s}_m 为中心的一个球状云团。



信号检测准则:

设 M 个信号为 $s_m(t), m = 1, 2, \dots, M$, 相应的先验概率为 $p(s_m)$ 。

如果我们没有收到 $r(t)$, 则我们总是估计 $p(s_m)$ 最大的哪个信号为最可能被发送。

如果我们收到 $r(t)$, 应该选使后验概率 $p(s_m | \mathbf{r})$ 最大的那个 s_m 为发送信号。这称为最大后验概率准则 (MAP) 。

$$p(s_m | \mathbf{r}) = \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \cdot p(\mathbf{s}_m)}{p(\mathbf{r})} , \quad p(\mathbf{r}) = \sum_{m=1}^M p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \cdot p(\mathbf{s}_m)$$

最大后验概率准则 (MAP) :

$$m_{MAP} = \arg \max_m \{ p(s_m | \mathbf{r}) \} \Leftrightarrow \arg \max_m \{ p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \cdot p(\mathbf{s}_m) \}$$

最大似然概率准则 (ML) :

$$m_{ML} = \arg \max_m \{ p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \}$$

当 M 个信号是先验等可能传送时, $p(s_m) = 1/M$, $m_{MAP} = m_{ML}$

由于**对数函数的单调性**，所以最大后验概率准则（MAP）也等价于：

$$\begin{aligned}\arg \max_m \{ p(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) \} &\Leftrightarrow \arg \max_m \{ \ln [p(\mathbf{s}_m | \mathbf{r})] \} \\ &\Leftrightarrow \arg \max_m \{ \ln p(\mathbf{s}_m) + \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \}\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2 / N_0 \right\} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ - \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 / N_0 \right\} \\ \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) &= \frac{-N}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2\end{aligned}$$

最大后验概率准则为：

$$\arg \max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{N}{2} \ln(\pi N_0) - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2 \right\}$$

$$\Leftrightarrow \arg \max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{1}{N_0} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 \right\}$$

当 M 个信号是先验等可能传送时， $p(\mathbf{s}_m) = 1/M$, $m_{MAP} = m_{ML}$
 最大似然概率准则 (ML) :

$$m_{ML} = \arg \max_m \{ p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) \}$$

$$\Leftrightarrow \arg \max_m \left\{ -\frac{1}{N_0} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2 \right\}$$

若记 $D_m \propto \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_m\|^2$

$$m_{ML} = \arg \min_m \{ D_m \}$$

最大似然概率准则 (ML) 等价于最小距离准则;

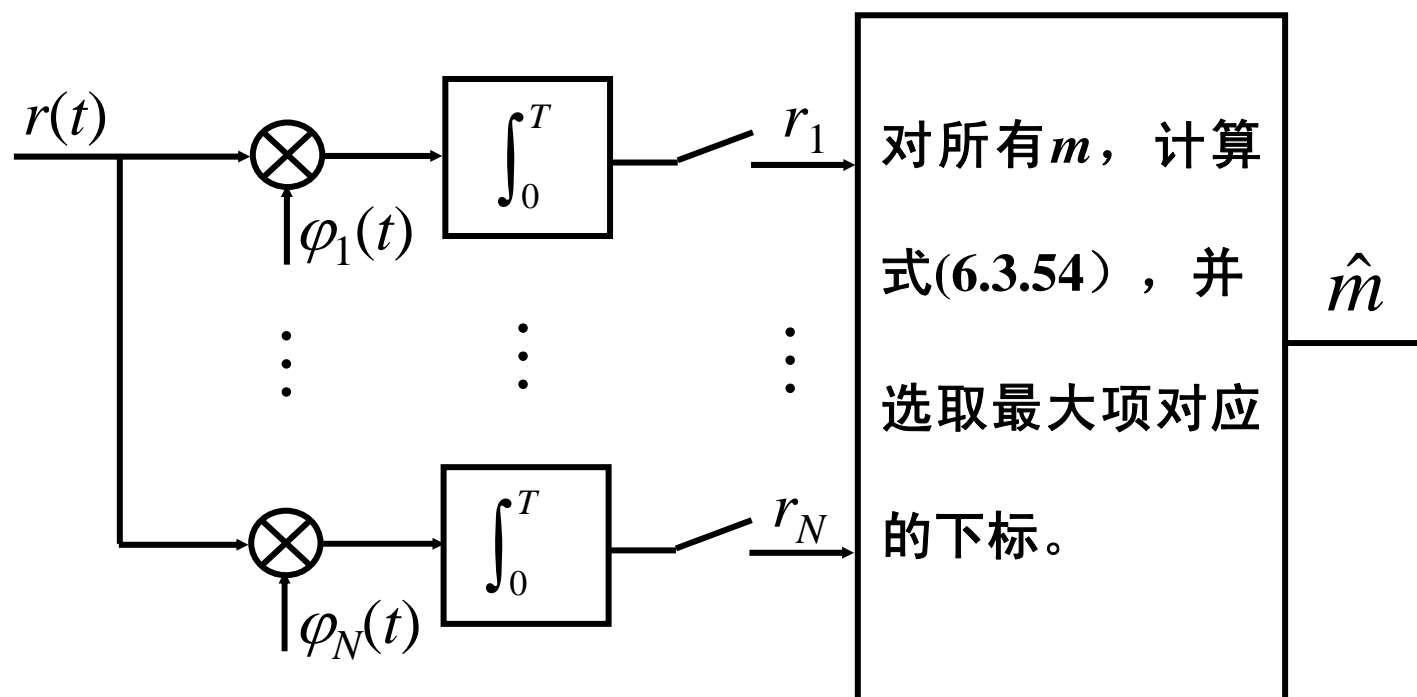
由于
$$\frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N (r_i - s_{mi})^2 = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N r_i^2 + \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N s_{mi}^2 - \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^N r_i s_{mi}$$

忽略与 m 无关项，得到最大后验概率准则等价于：

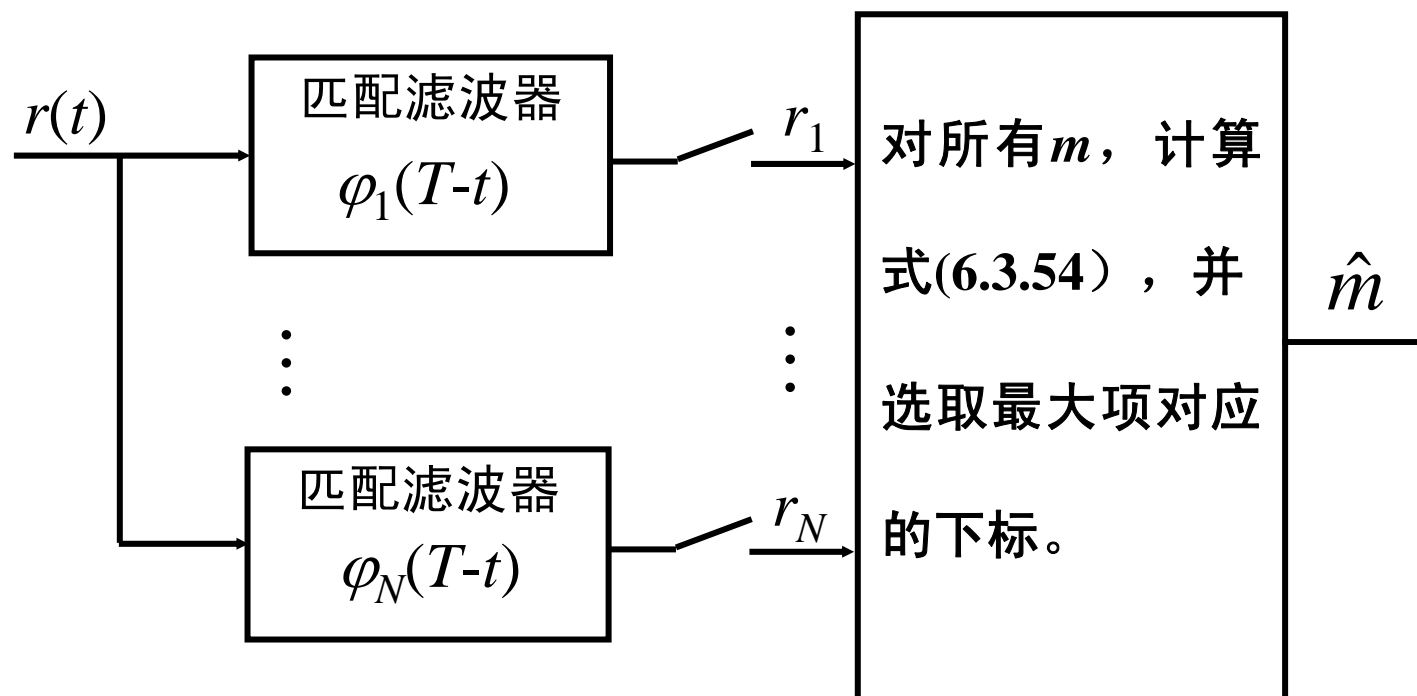
$$\begin{aligned} \arg \max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^N s_{mi}^2 + \frac{2}{N_0} \sum_{i=1}^N r_i s_{mi} \right\} \\ = \arg \max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{E_m}{N_0} + \frac{2}{N_0} (\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) \right\} \end{aligned} \quad (6.3.54)$$

其中 E_m 为信号 \mathbf{s}_m 的能量， $(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m)$ 为 \mathbf{r} 和 \mathbf{s}_m 的内积。

最大后验概率接收机是基函数相关器

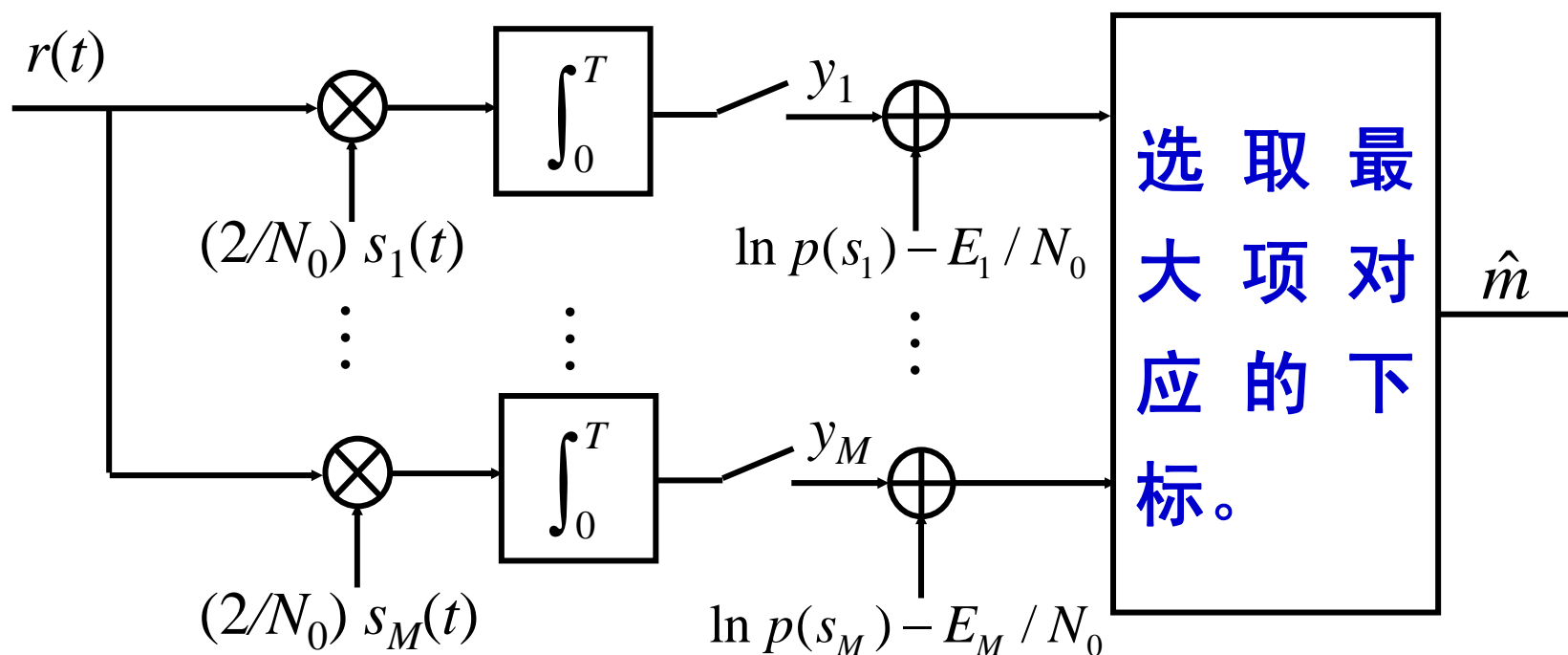


最大后验概率接收机是基函数匹配滤波器



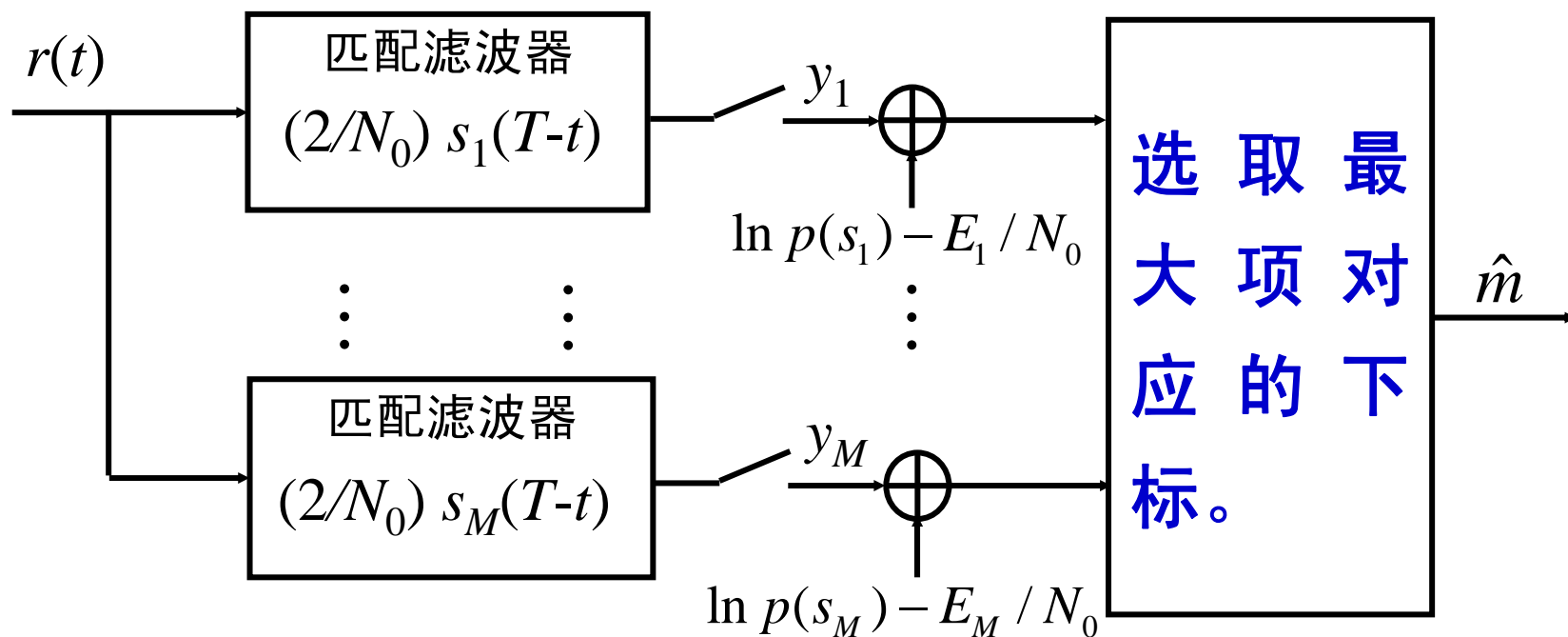
由于 $E_m = \int_0^T s_m^2(t) dt$, $(\mathbf{r}, \mathbf{s}_m) = \int_0^T r(t) s_m(t) dt$

MAP准则: $\arg \max_m \left\{ \ln p(\mathbf{s}_m) - \frac{E_m}{N_0} + \frac{2}{N_0} \int_0^T r(t) s_m(t) dt \right\}$



最大后验概率接收机是（信号）相关器

最大后验概率接收机是（信号）匹配滤波器



注意：基函数相关接收机的支路数 N 不大于信号相关接收机的支路数 M 。

[例6.3.3] 二进制基带信号的最佳接收

二个可能的信号为 $s_1(t), s_2(t), t \in [0, T]$; 对应信号点 $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2$ 为 ;

它们能量分别为 E_1, E_2 , N_0 先验概率为 $p, 1-p$; 加性白高斯噪

声的双边功率谱密度为 $\frac{2}{N_0}$, 求最佳的MAP检测器。
 [解] 接收到信号为: $r(t) = \{s_1(t) \text{ 或 } s_2(t)\} + n(t)$

信号空间表示为: $\mathbf{r} = \{\mathbf{s}_1 \text{ 或 } \mathbf{s}_2\} + \mathbf{n}$

最佳MAP接收机是
$$\begin{cases} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) \cdot p(\mathbf{s}_1) > p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) \cdot p(\mathbf{s}_2) & s_1 \text{ 发送} \\ p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) \cdot p(\mathbf{s}_1) < p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) \cdot p(\mathbf{s}_2) & s_2 \text{ 发送} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2)} > \beta & s_1 \text{ 发送} \\ \frac{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1)}{p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2)} < \beta & s_2 \text{ 发送} \end{cases}, \quad \text{其中 } \beta = \frac{1-p}{p}$$

或者

$$\begin{cases} \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) - \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) > \ln \beta & s_1 \text{ 发送} \\ \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) - \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) < \ln \beta & s_2 \text{ 发送} \end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_i) &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ -\sum_{i=1}^N (r_k - s_{ik})^2 / N_0 \right\} \\ &= \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} \exp \left\{ -\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 / N_0 \right\} \end{aligned}$$

所以

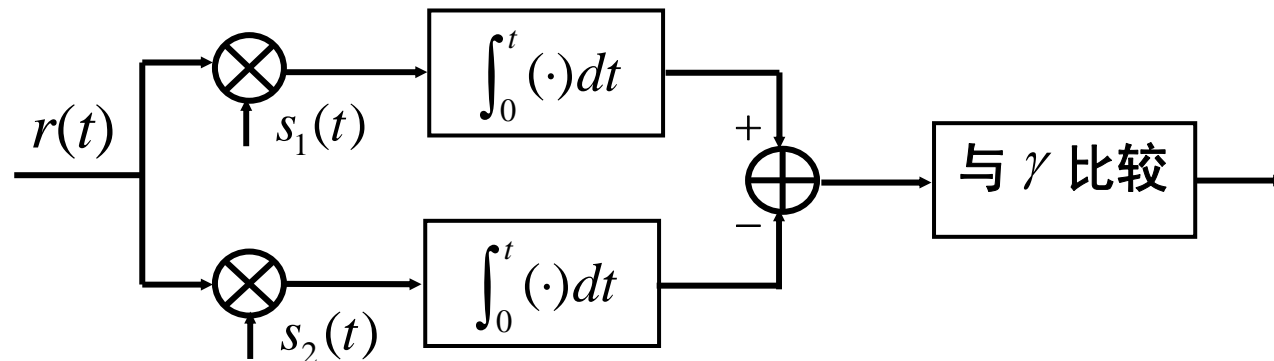
$$\ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_1) - \ln p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_2) = -\frac{1}{N_0} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^2 + \frac{1}{N_0} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|^2$$

由于

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_i\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i + \|\mathbf{s}_i\|^2 = \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_i + E_i$$

MAP检测:
$$\begin{cases} \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2 > (N_0 \ln \beta + E_1 - E_2)/2 & s_1 \text{发送} \\ \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1 - \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2 < (N_0 \ln \beta + E_1 - E_2)/2 & s_2 \text{发送} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \int_0^T r(t) \cdot s_1(t) dt - \int_0^T r(t) \cdot s_2(t) dt > \gamma \\ \int_0^T r(t) \cdot s_1(t) dt - \int_0^T r(t) \cdot s_2(t) dt < \gamma \end{cases}, \quad \text{其中 } \gamma = (N_0 \ln \beta + E_1 - E_2)/2$$



最大后验 (MAP) 检测: 选 s_m 使 $p(s_m) \cdot p(\mathbf{r} | s_m)$ 最大;

最大似然 (ML) 检测: 选 s_m 使 $p(\mathbf{r} | s_m)$ 最大;

最佳性证明

当信号先验概率分布已知时, 采用MAP准则可以使平均错误概率最小。

接收到矢量 $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_N)$ 是 N 维信号空间中一个点, 根据 \mathbf{r} 做出发送信号是哪一个人的判决, 相当于把信号空间划分成 M 个区域 R_m ,

$m = 1, 2, \dots, M$ 。若 \mathbf{r} 落入 R_i , 就判定发送的是信号 $s_i(t)$ 。如何划分使错误概率最小? 设发送的是 $s_m(t)$, 但接收到的矢量 \mathbf{r} 落到 R_m 以外, 判

决就出错误。所以在发送 $s_m(t)$ 条件下的错误概率为:

$$P(e | s_m) = \int_{R_m^c} p(\mathbf{r} | s_m) d\mathbf{r}$$

其中 R_m^c 为 R_m 的补空间。

平均错误概率为：

$$\begin{aligned}
 P(e) &= \sum_{m=1}^M p(\mathbf{s}_m) P(e | \mathbf{s}_m) \\
 &= \sum_{m=1}^M p(\mathbf{s}_m) \int_{R_m^c} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r} \\
 &= \sum_{m=1}^M p(\mathbf{s}_m) \left[1 - \int_{R_m} p(\mathbf{r} | \mathbf{s}_m) d\mathbf{r} \right] \\
 &= 1 - \sum_{m=1}^M \int_{R_m} p(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) \cdot p(\mathbf{r}) d\mathbf{r}
 \end{aligned}$$

为了平均错误概率最小，划分应该使在 R_m 中的点 \mathbf{r} 满足

$$p(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) \cdot p(\mathbf{r}) \geq p(\mathbf{s}_i | \mathbf{r}) \cdot p(\mathbf{r}), \quad i \neq m$$

即

$$p(\mathbf{s}_m | \mathbf{r}) \geq p(\mathbf{s}_i | \mathbf{r}), \quad i \neq m$$

这就是最大后验概率准则（MAP）。

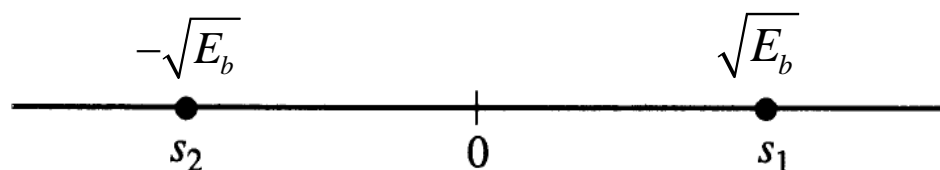
同样当 M 个信号先验等概分布时，采用ML准则可以使平均错误概率最小。

六、AWGN上信号检测的错误（误符号）概率计算

[例6.3.4] 二进制基带传输。二个等概、等能（ E_b ）的波形是

$$s_1(t) = g_T(t), \quad s_2(t) = -g_T(t),$$

$g_T(t)$ 是 $[0, T_b]$ 上任意脉冲，在其外为零。加性噪声 $n(t)$ 是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯随机变量。



$$\varphi(t) = g_T(t) / \sqrt{E_b}$$

$$r = \int_0^{T_b} r(t) \varphi(t) dt$$

如果信号 $s_m(t)$ 被传输，则从相关解调器（或匹配滤波解调器）获得的一维接收矢量为：

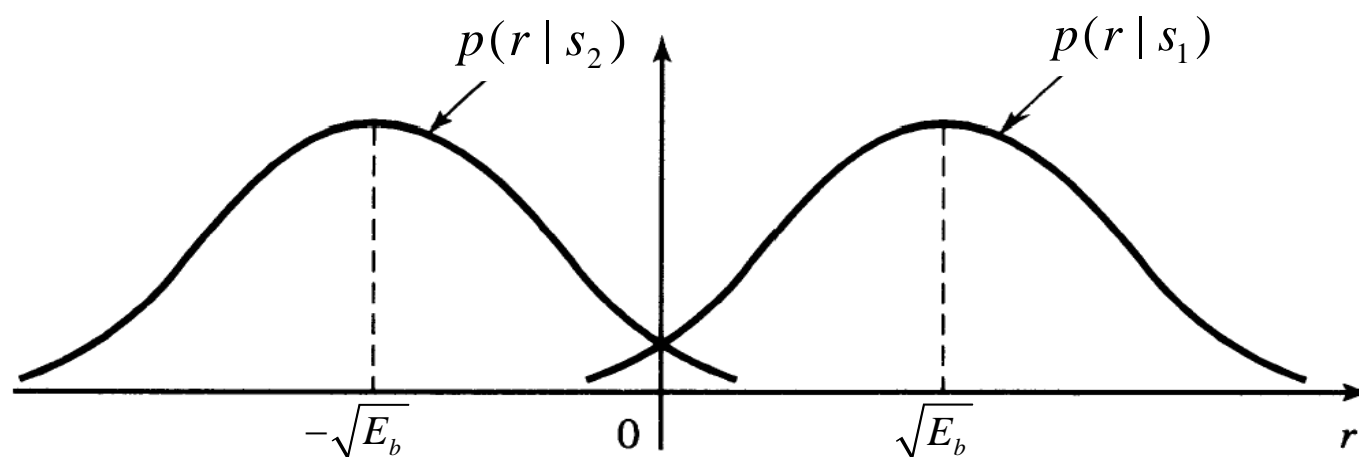
$$r = s_m + n = \pm \sqrt{E_b} + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的高斯随机变量。由于发送信号是等概、等能量的，所以MAP准则和ML准则等价，所确定的门限是 $\gamma = 0$ 。

$$\begin{array}{ll} \text{当 } r(s_1 - s_2) > 0, & \text{则选 } s_1, \\ \text{当 } r(s_1 - s_2) < 0, & \text{则选 } s_2 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \text{当 } r > 0, & \text{则选 } s_1, \\ \text{当 } r < 0, & \text{则选 } s_2 \end{array}$$

$$p(r | s_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right\}$$

$$p(r | s_2) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{(r + \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right\}$$



$$P(e | s_1) = \int_{-\infty}^0 p(r | s_1) dr = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{-\infty}^0 \exp \left\{ -\frac{(r - \sqrt{E_b})^2}{N_0} \right\} dr$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{2E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = Q \left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}} \right)$$

其中 $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-x^2/2} dx$

由于对称性，显然 $P(e | s_2) = \int_0^\infty p(r | s_2) dr = P(e | s_1)$

所以平均错误概率 $P_b = p(s_1)P(e | s_1) + p(s_2)P(e | s_2)$

$$= Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

在信号空间中， s_1 和 s_2 的距离 $d_{12} = 2\sqrt{E_b}$ ，所以

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right)$$

说明差错概率与信号点之间的距离有关。距离越大则错误概率越小。

但要求信号能量也越大。

[例6.3.5] 考虑例6.3.2中的二元等概、等能量正交信号:

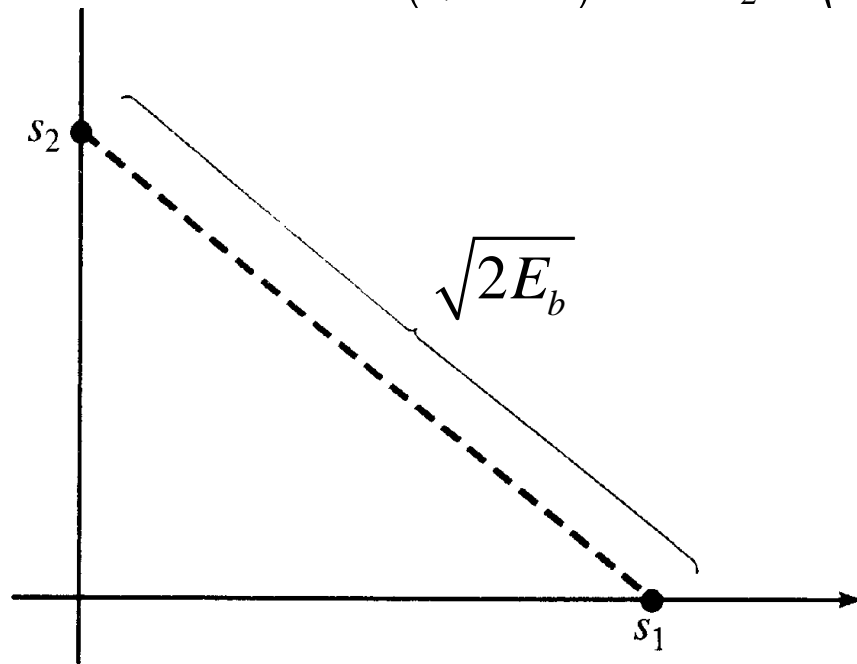
$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A, & \frac{T}{2} \leq t \leq T \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

发送“0”

发送“1”

信号空间中对应的信号点为:

$$s_1 = (\sqrt{E_b}, 0), \quad s_2 = (0, \sqrt{E_b}) \quad \text{其中 } E_b = \frac{A^2 T}{2}$$



假定发送信号 $s_1(t)$, 则在解调器输出的接收矢量为:

$$\mathbf{r} = [\sqrt{E_b} + n_1, n_2]$$

$$E[n_1] = E[n_2] = 0, \sigma_{n_1}^2 = \sigma_{n_2}^2 = \frac{N_0}{2}$$

在先验等概情况下，错误概率就是发生 $D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) > D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2)$ 的概率，即：

$$P(e | \mathbf{s}_1) = P\{D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) > D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) | \mathbf{s}_1\}$$

$$D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_1) > D(\mathbf{r}, \mathbf{s}_2) \iff \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1 + \|\mathbf{s}_1\|^2 > \|\mathbf{r}\|^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2 + \|\mathbf{s}_2\|^2$$

$$\iff \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1 < \mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_2 \iff E_s + n_1 \sqrt{E_s} < n_2 \sqrt{E_s}$$

所以

$$P(e | \mathbf{s}_1) = P\{n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}\}$$

因为 $(n_2 - n_1)$ 是均值为0，方差为 N_0 的高斯变量，所以

$$\begin{aligned} P\{n_2 - n_1 > \sqrt{E_b}\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_b}}^{\infty} e^{-x^2/2N_0} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \\ &= Q\left[\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right] = Q\left[\sqrt{\frac{d_{12}^2}{2N_0}}\right] \end{aligned}$$

对二进制正交信号来说，误码率与对映信号[例6.3.4]一样，但现在二个信号点之间距离是对映信号的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ，所以如果要达到与对映信号相同误码率，则信号能量要增加一倍。

[例6.3.6] 一般等能量、二进制基带信号在AWGN信道上传输

二个等能量信号 $s_1(t)$ 和 $s_2(t)$ ，先验概率为 p_1, p_2 $p_1 + p_2 = 1$ 。

在二维信号空间中对应的信号点为：

$$\mathbf{s}_1 = (s_{11}, s_{12}), \quad \mathbf{s}_2 = (s_{21}, s_{22}) \quad \|\mathbf{s}_1\|^2 = \|\mathbf{s}_2\|^2 = E_b$$

设发送信号 $s_1(t)$ ，则解调器输出接收矢量为：

$$\mathbf{r} = [s_{11} + n_1, s_{12} + n_2]$$

由MAP准则，差错概率是事件

$$P(e | s_1) = P \left\{ \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|^2 - \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^2 < N_0 \ln \frac{p_2}{p_1} \mid s_1 \right\}$$

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{s}_2\|^2 - \|\mathbf{r} - \mathbf{s}_1\|^2 = 2[\mathbf{r} \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2)] = 2\left\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) + \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2\right\}$$

条件差错概率

$$P(e | \mathbf{s}_1) = P\left\{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) < \frac{N_0}{2} \ln \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2\right\}$$

记

$$\xi \triangleq \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = n_1(s_{11} - s_{21}) + n_2(s_{21} - s_{22})$$

ξ 是高斯变量,

$$E(\xi) = 0$$

$$D(\xi) = \frac{N_0}{2}[(s_{11} - s_{21})^2 + (s_{21} - s_{22})^2] = \frac{N_0}{2}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2 \triangleq \sigma_\xi^2$$

所以

$$P(e | \mathbf{s}_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{-\infty}^a \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} dx$$

$$a = \frac{N_0}{2} \ln \frac{p_2}{p_1} - \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2$$

同样

$$P(e | \mathbf{s}_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi} \int_{a'}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\right\} dx$$

$$a' = \frac{N_0}{2} \ln \frac{p_2}{p_1} + \frac{1}{2}\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2$$

最后经整理，平均错误概率为：

$$P(e) = p_1 P(e | \mathbf{s}_1) + p_2 P(e | \mathbf{s}_2) \\ = p_1 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_b^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \right\} + p_2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{b'}^{\infty} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz \right\}$$

$$b = -\frac{a}{\sigma_{\xi}} = \sqrt{\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2} - \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\sqrt{\frac{2}{N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2}}$$

$$b' = \sqrt{\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2} + \frac{\ln \frac{p_1}{p_2}}{\sqrt{\frac{2}{N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2}}$$

当 $p_1 = p_2$ 时，差错概率仅和 $\sqrt{\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2}$ 有关，这时

$$P(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = Q(A)$$

$$A = \sqrt{\frac{1}{2N_0} \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2}$$

因为 $\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|^2 = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = 2E_b - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$

定义 $\rho = \frac{\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt}{E_b}, \quad |\rho| < 1$

则 $A = \sqrt{\frac{E_b(1-\rho)}{N_0}}$

当 $\rho = -1$ (即对映信号), $A = \sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}$ 为最大;

当 $\rho = 0$ 时, 二个信号正交, 这时 $A = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$ 。

[例6.3.7] M进制PAM的误符号概率计算

M进制PAM的信号形式为,

$$s_m(t) = A_m \cdot g_T(t), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

一维信号空间中M个信号点为,

$$s_m = A_m \cdot \sqrt{E_g}, \quad A_m = (2m-1-M), \quad m = 1, 2, \dots, M$$

其中 E_g 为 $g_T(t)$ 的能量。二个相邻信号点之间的距离为 $2\sqrt{E_g}$ 。

设信号的先验概率是相等的, 则平均信号能量为,

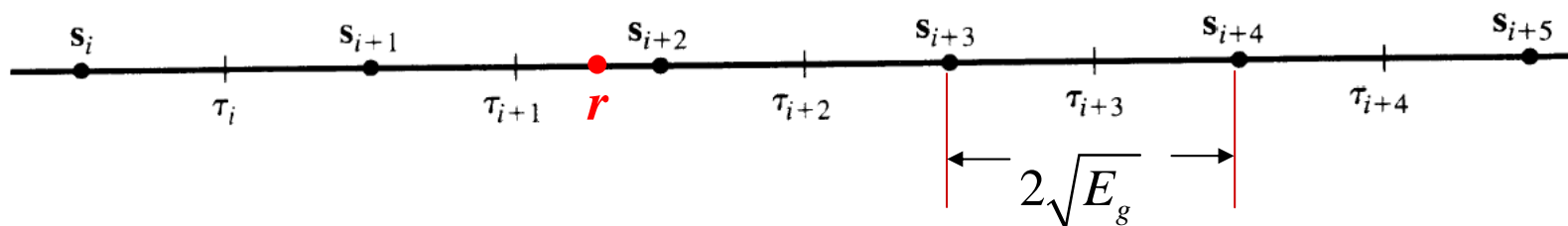
$$\begin{aligned} E_{av} &= \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M E_m = \frac{E_g}{M} \sum_{m=1}^M (2m-1-M)^2 \\ &= \frac{E_g}{M} \cdot \frac{M(M^2-1)}{3} = \left(\frac{M^2-1}{3} \right) E_g \end{aligned}$$

平均比特能量: $E_{bav} = E_b / \log M$

平均功率为: $P_{av} = \frac{E_{av}}{T} = \frac{M^2-1}{3} \cdot \frac{E_g}{T}$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= g_T(t) / \sqrt{E_g} \\ r &= \int_0^{T_b} r(t) \varphi(t) dt \end{aligned}$$

对于等概先验分布来说MAP和ML相同，这时最佳判决准则是按最小距离原则，即接收信号离哪个信号点最近就判定为发送信号，所以门限点的设置如图；



设发送的是第 m 电平信号，于是解调器输出是：

$$r = s_m + n = \sqrt{E_g} \cdot A_m + n$$

其中 n 是零均值，方差为 $\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2}$ 的高斯噪声。

当 $m \neq 1$ 和 M 时，判决错误概率等于 $|r - s_m| > \sqrt{E_g}$ 的概率。所以

$$\begin{aligned} P(e | s_m) &= P\{|r - s_m| > \sqrt{E_g}\} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi N_0}} \int_{\sqrt{E_g}}^{\infty} \exp\left\{-\frac{x^2}{N_0}\right\} dx = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right) \end{aligned}$$

当 $m=1$ 和 M 时，判决错误概率为，

$$P(e | s_1) = P\left\{r - s_1 > \sqrt{E_g}\right\}$$

$$P(e | s_m) = P\left\{r - s_M < -\sqrt{E_g}\right\}$$

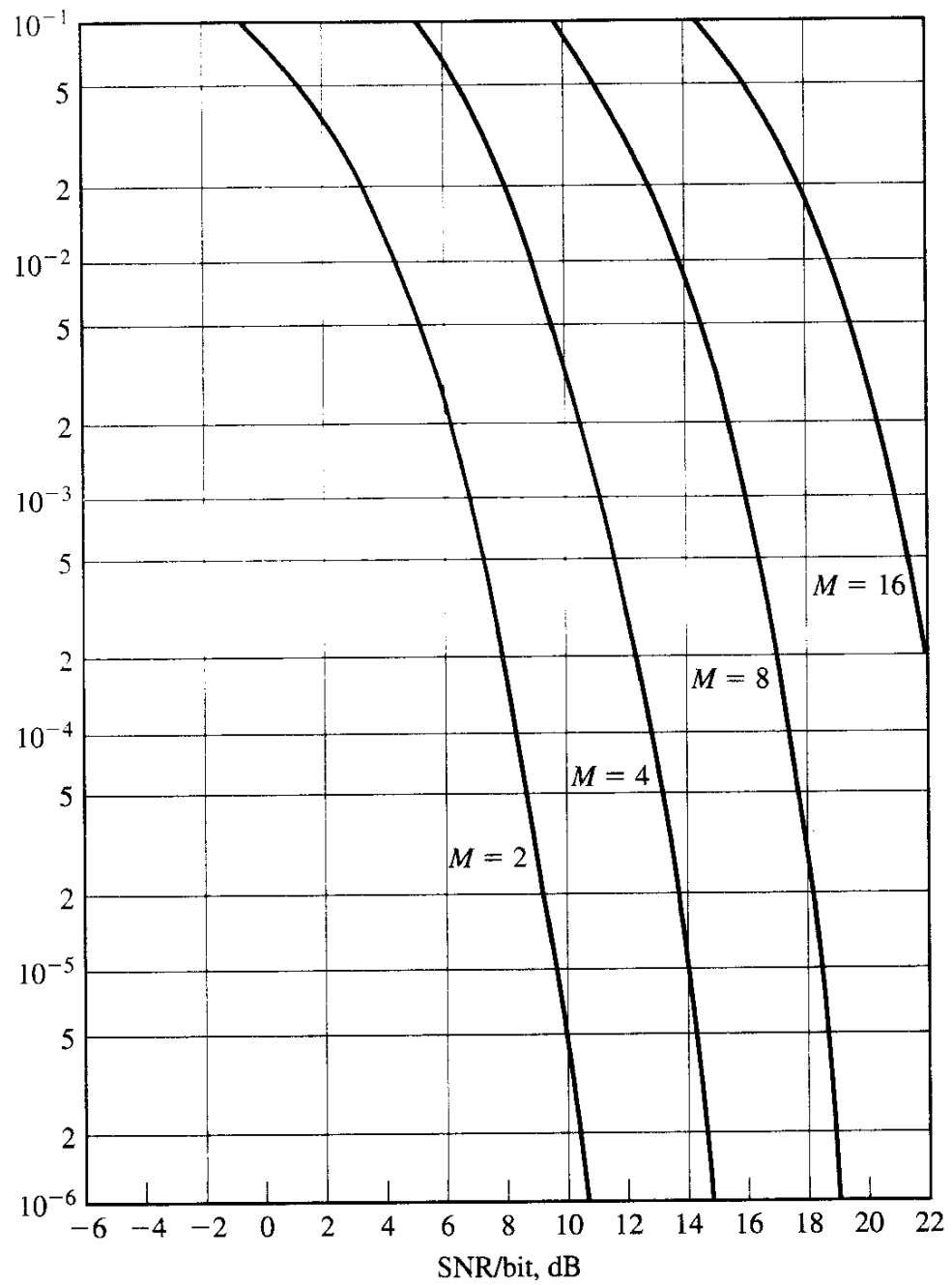
由于 $P(e | 1) + P(e | s_M) = 2Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$

所以平均错误概率为

$$P_M(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

由于 $E_g = \frac{3}{M^2 - 1} E_{av}$

所以 $P_M(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M^2 - 1)N_0}}\right)$



[例6.3.8] M 进制正交信号的错误概率

对于 M 个等概、等能量 (E_s) 的正交信号 $s_m(t), m = 1, 2, \dots, M$, 它们在信号空间中表示为:

$$\mathbf{s}_m = (0, 0, \dots, \sqrt{E_s}, 0, \dots, 0)$$

↓ 第 m 位

最佳检测器是选择与接收到矢量 \mathbf{r} 内积最大的信号矢量 \mathbf{s}_m 为发送信号矢量; 设 \mathbf{s}_1 为发送信号则解调器输出矢量为:

$$\mathbf{L} = (\sqrt{E_s} + n_1, n_2, \dots, n_M)$$

n_1, n_2, \dots, n_M 为零均值, 方差为 $\frac{N_0}{2}$ 的独立高斯变量,

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_1 = \sqrt{E_s} (\sqrt{E_s} + n_1)$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{s}_m = n_m \sqrt{E_s} \quad m \neq 1$$

所有相关器输出上除以 $\sqrt{E_s}$, 不会影响错误概率,

于是第一只相关器输出的概率密度为：

$$p_1(r_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{(r_1 - \sqrt{E_s})^2}{N_0} \right\}$$

其它 $(M - 1)$ 只相关器输出的概率密度为：

$$p_m(n_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0}} \exp \left\{ -\frac{n_m^2}{N_0} \right\}, \quad m = 2, 3, \dots, M$$

所以正确接收概率为

$$P_c(M) = \int_{-\infty}^{\infty} p \{ n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 \mid r_1 \} p_1(r_1) dr_1$$

因为 $\{n_k\}$ 是独立的

$$p \{ n_2 < r_1, n_3 < r_1, \dots, n_M < r_1 \mid r_1 \} = \prod_{m=2}^M p \{ n_m < r_1 \mid r_1 \}$$

由于

$$p \{ n_m < r_1 \mid r_1 \} = \int_{-\infty}^{r_1} p_m(x_m) dx_m$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2r_1^2/N_0}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx = 1 - Q \left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}} \right)$$

所以

$$P_c(M) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - Q \left(\sqrt{\frac{2r_1^2}{N_0}} \right) \right]^{M-1} p_1(r_1) dr_1$$

$$P_e(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 1 - [1 - Q(x)]^{M-1} \right\} \exp \left[-\frac{(x - \sqrt{2E_s / N_0})^2}{2} \right] dx$$

比较不同数字调制方式的性能，采用**误比特率**与**比特信噪比**。

对于 $M = 2^k$ 个等可能个正交信号，**比特能量**与**符号能量**关系为，

$E_s = kE_b$ 。下面推导**误比特率**与**误符号率**的关系：

对正交信号来说，任何一个信号，比如 s_1 ，它错成其它 $(M-1)$ 个信号是等可能的，所以每种错误形式的概率为，

$$\frac{P_M}{M-1} = \frac{P_M}{2^k-1}$$

在 k 个比特中有 n 个比特错误的错误形式总共有 C_k^n 种，所以出现 n 个比特错误的概率为 $C_k^n \cdot P_M / (2^k - 1)$ ，符号错误引起的平均错误比特数为：

$$\bar{n} = \sum_{n=1}^k n C_k^n \frac{P_M}{2^k-1} = k \frac{2^{k-1}}{2^k-1} P_M$$

误比特率为：
$$P_b = \frac{\bar{n}}{k} = \frac{2^{k-1}}{2^k} P_M \approx \frac{1}{2} P_M, \quad k \gg 1$$

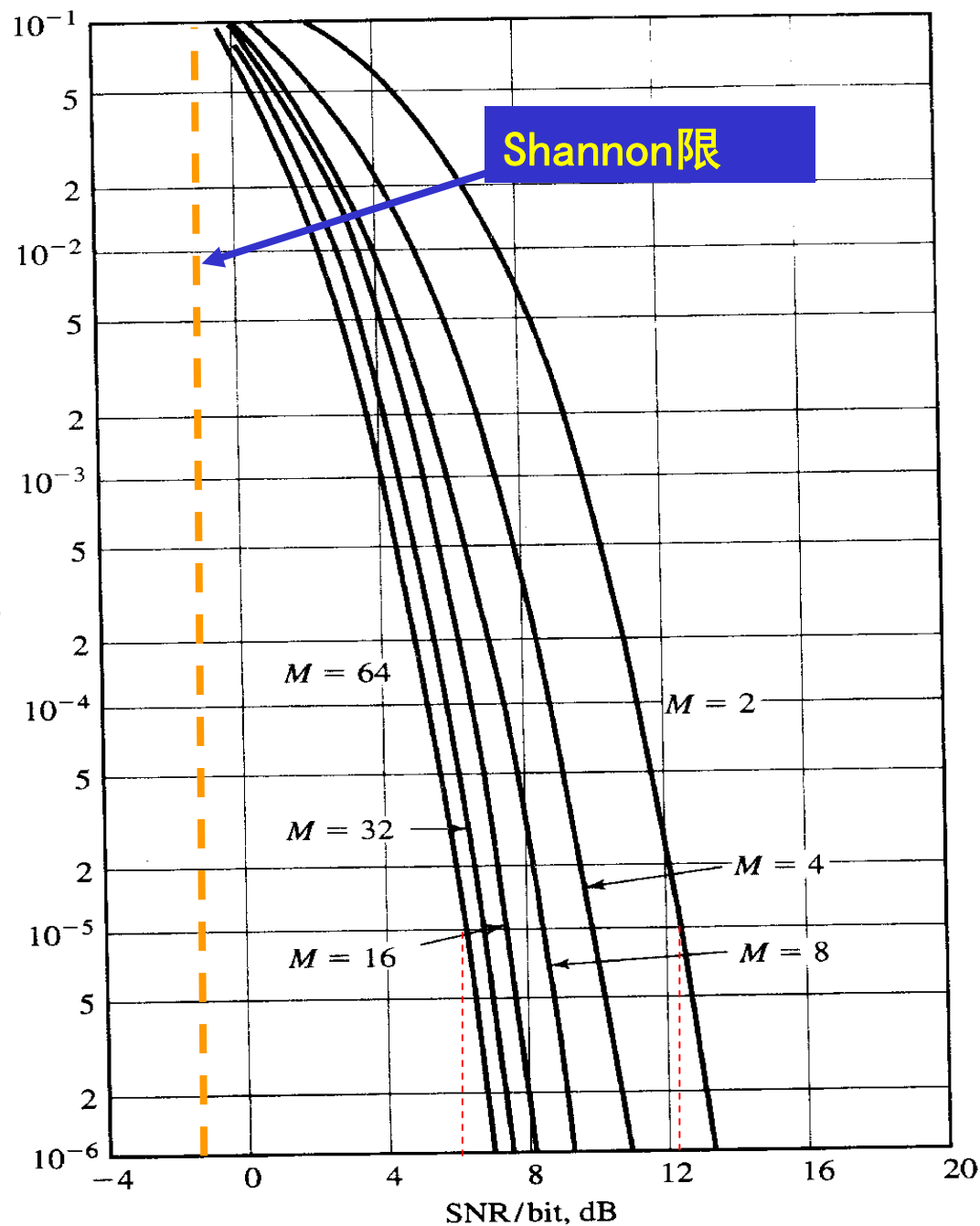


图6.3.16给出了M进制正交调制的比特错误概率与比特信噪比的关系。

当 $M = 2$ 时, $P_b = 10^{-5}$

要求比特信噪比略大于

12db, 而对 $M = 64$ 于

在同样误比特率下仅要求比特信噪比等于6db

左右。

可以证明，当 $M = 2^k \rightarrow \infty$ 时，误比特率

$$P_b < 2e^{-k(\sqrt{E_b/N_0} - \sqrt{\ln 2})^2}$$

所以当 $k \rightarrow \infty$ 时，只要 $E_b/N_0 > \ln 2 = 0.697$ (-1.6db)，
则 $P_b \rightarrow 0$ 。

§ 6.4 数字基带信号通过带限信道传输

在 § 6.3 节中我们考虑了基带信号在加性白高斯噪声 ($AWGN$) 信道上传输问题，导出了最佳解调方式和检测准则，计算了差错概率。

$AWGN$ 信道是没有带宽限制的，所以在上节中我们可以把基带信号选成矩形脉冲形状，或者把基本脉冲选成具有有限持续期 T 的形式。这种脉冲形状在通带有限的系统中都是要受到失真的，所以一般不能采用。实际信道如电话信道、微波视距信道、卫星信道、移动通信和水下声波通信中信道带宽均受到严格限制。

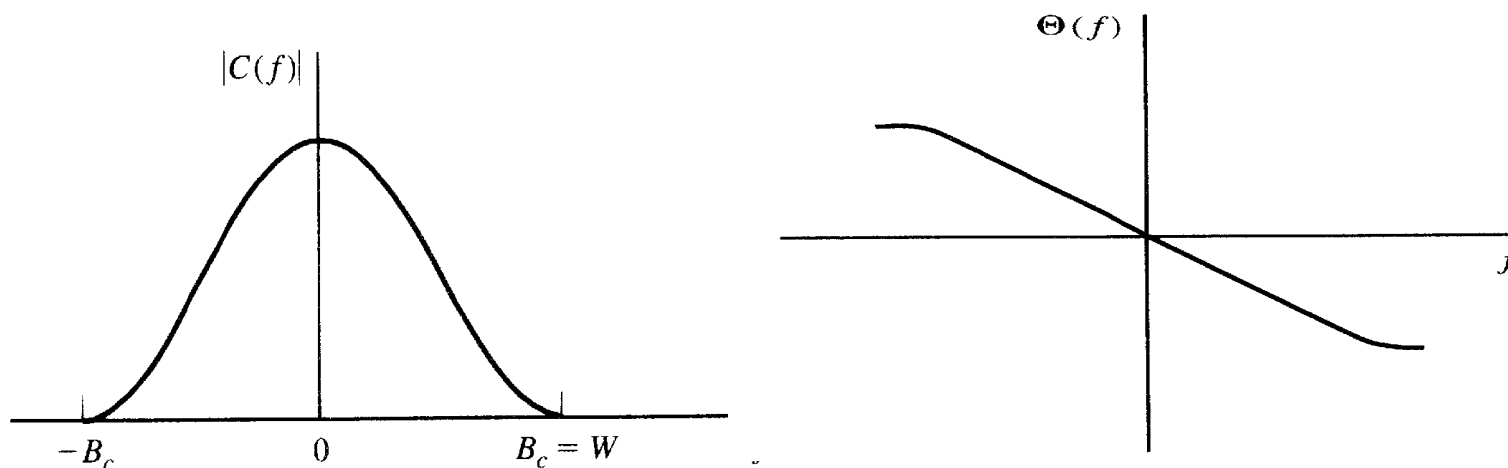
在这节我们以线性带限滤波器作为信道模型，来研究基带信号在带限信道上传输所可能发生的现象——即码间干扰，以及码间干扰对通信性能的影响，并讨论如何通过信号设计来克服码间干扰。

一、数字信号通过带限信道传输

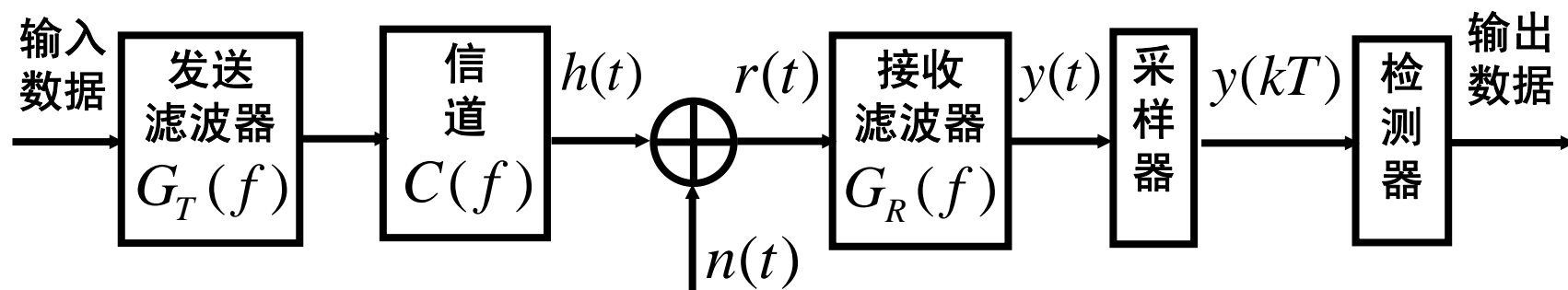
线性带限信道可以用脉冲响应为 $c(t)$ ，传递函数为 $C(f)$ 的线性滤波器来模型，其中

$$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} c(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

带限基带信道是指，

$$C(f) = 0, \quad |f| > B_c$$


若要求信号波形 $g_T(t)$ 在带宽为 B_c 的信道上传输，通常要求选择信号带宽 W 等于信道带宽，即 $W = B_c$ 。



信号波形 $g_T(t)$ 通过信道的输出为

$$h(t) = c(t) \otimes g_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau) \cdot g_T(t - \tau) d\tau$$

频域表示为: $H(f) = C(f)G_T(f)$

信道输出还要受到加性白高斯噪声 $n(t)$ 的干扰, 所以解调器输入为,

$$r(t) = h(t) + n(t)$$

匹配滤波器解调可获得最大输出信噪比, 所以接收滤波器的频率响应为:

$$G_R(f) = H^*(f)e^{-j2\pi ft_0}$$

其中 t_0 是时间延迟, 表示滤波器输出的采样时刻。

匹配滤波器输出的信号分量在 t_0 的采样值为，

$$y_s(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = E_h$$

匹配滤波器输出高斯噪声是均值为零，功率谱密度为

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2} |H(f)|^2$$

匹配滤波器输出噪声功率为：

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0 E_h}{2}$$

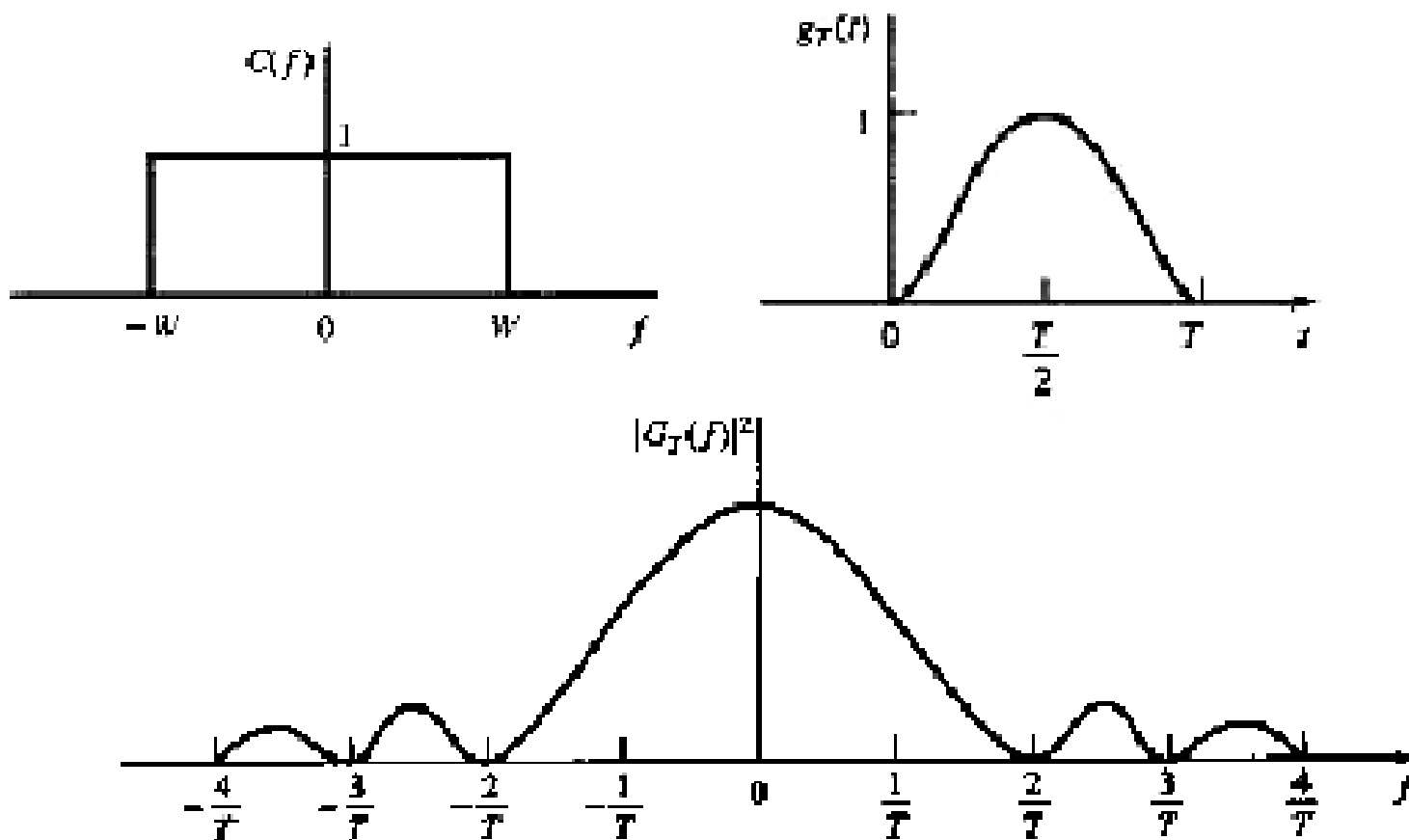
匹配滤波器输出信噪比为

$$\left(\frac{S}{N} \right)_0 = \frac{E_h^2}{N_0 E_h / 2} = \frac{2E_h}{N_0}$$

[例6.1.1] 设信号脉冲 $g_T(t)$ 为

$$g_T(t) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{T}{2} \right) \right], \quad 0 \leq t \leq T$$

理想带限信道频率传递函数 $C(f)$ 如图示



[解] 信号脉冲频谱为,

$$G_T(f) = \frac{T}{2} \frac{\sin \pi fT}{\pi fT (1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi fT}$$
$$= \frac{T}{2} \cdot \frac{\text{sinc}(fT)}{(1 - f^2 T^2)} e^{-j\pi fT}$$

信道输出的频谱为,

$$H(f) = C(f) G_T(f)$$
$$= \begin{cases} G_T(f) & |f| \leq W \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

滤波器输出信号幅度

$$E_h = \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-W}^W \frac{(\sin \pi fT)^2}{f^2 (1 - f^2 T^2)^2} df$$
$$= \frac{T}{(2\pi)^2} \int_{-WT}^{WT} \frac{\sin^2 \pi \alpha}{\alpha^2 (1 - \alpha^2)} d\alpha$$

输出噪声方差为，

$$\sigma_n^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \frac{N_0 E_h}{2}$$

所以输出信噪比为，

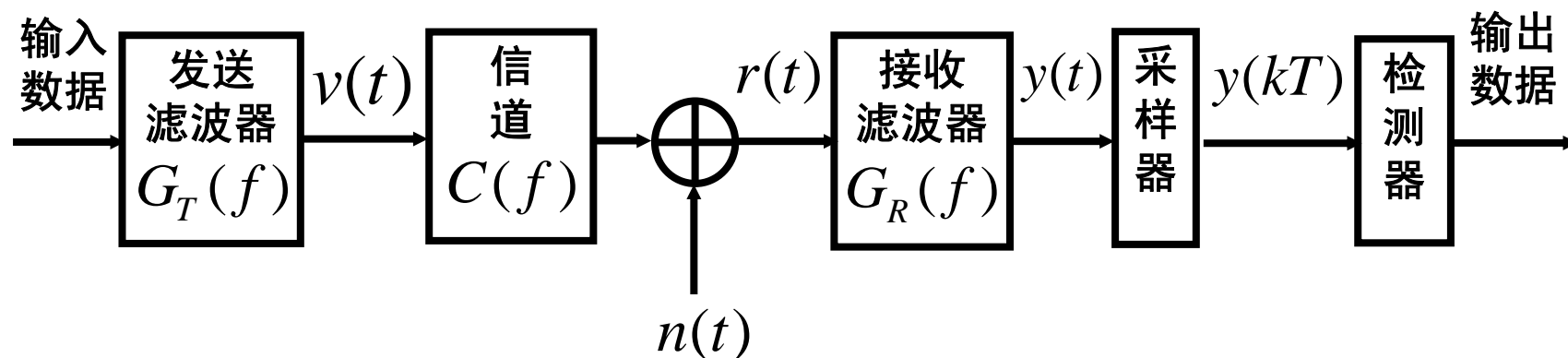
$$\left(\frac{S}{N} \right)_0 = \frac{2E_h}{N_0}$$

从本例可见发送信号能量中，仅一部分通过信道到解调器。当信道带宽 $W \rightarrow \infty$ 时，匹配滤波器输出的信号分量达到极大，等于

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = \int_0^T |g_T(t)|^2 dt$$

二、码间干扰

带限PAM系统的方框图



$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT), \quad \{a_n\} \text{ 是 } M \text{ 进制幅度电平序列;}$$

$$r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT) + n(t)$$

$$h(t) = c(t) \otimes g_T(t)$$

频率传递函数为 $G_R(f)$ 的线性接收滤波器，它的输出为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + \xi(t)$$

$$x(t) = h(t) \otimes g_R(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

$$\xi(t) = n(t) \otimes g_R(t)$$

接收滤波器输出每隔 T 时间采样，采样值为

$$y(mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(mT - nT) + \xi(mT)$$

简写为

$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_{m-n} + \xi_m = x_0 \cdot a_m + \sum_{n \neq m} a_n x_{n-m} + \xi_m$$

$$y_m \triangleq y(mT) \quad x_m \triangleq x(mT) \quad \xi_m \triangleq \xi(mT)$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

a_m — 所需要的符号

有用
信号

码间
干扰

噪声
干扰

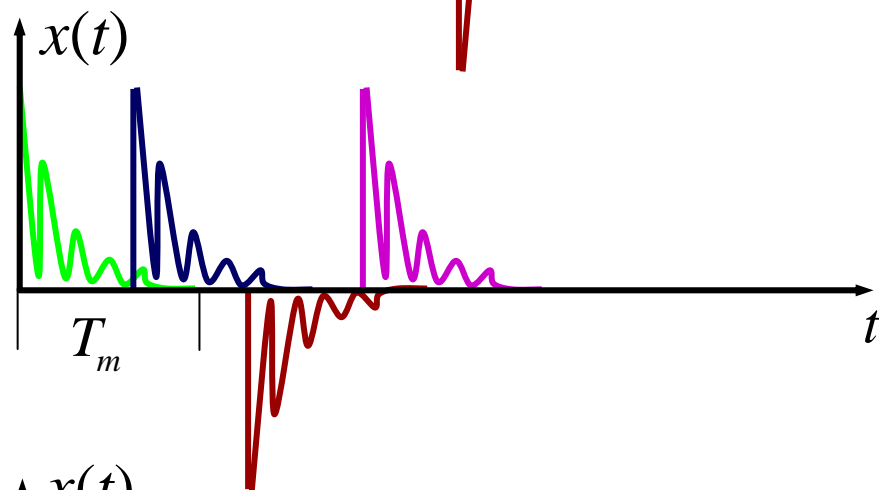
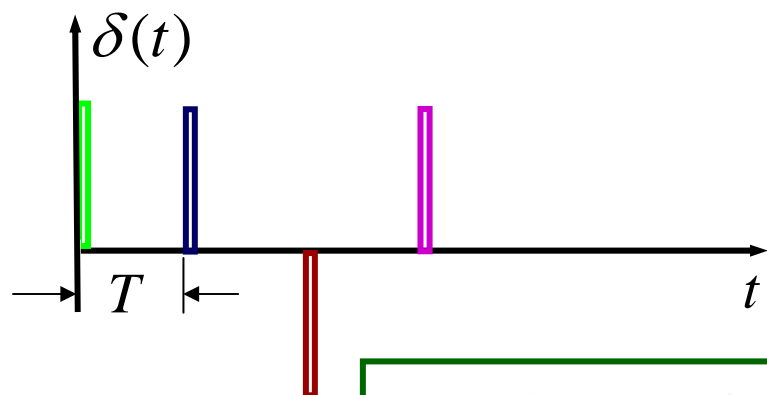
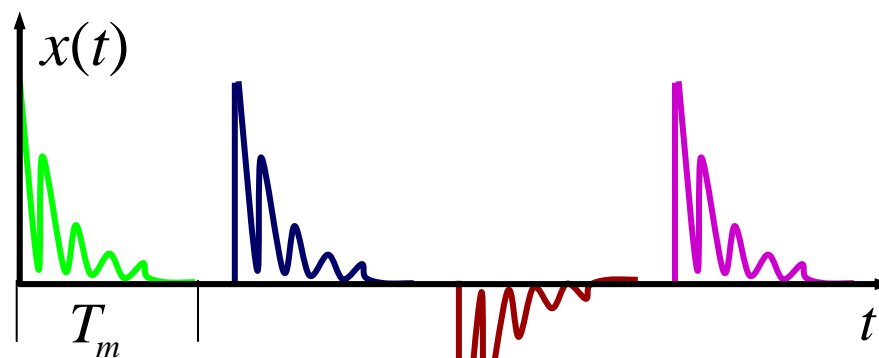
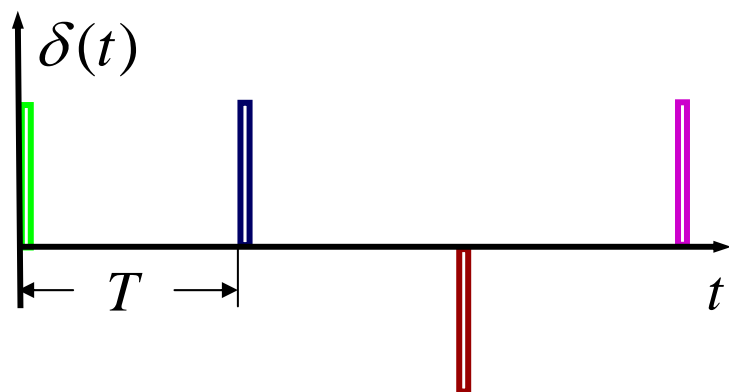
当接收滤波器与接收信号 $h(t)$ 相匹配时，则 x_0 为

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \\ &= \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 \cdot |C(f)|^2 df = E_h \end{aligned}$$

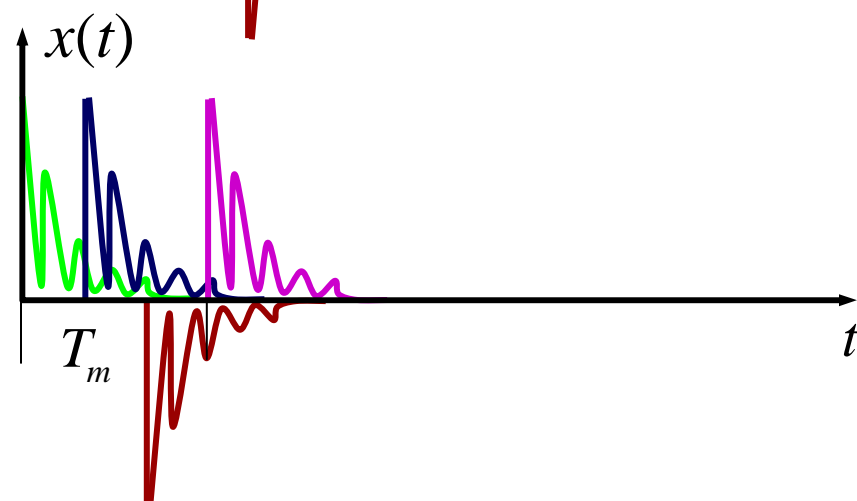
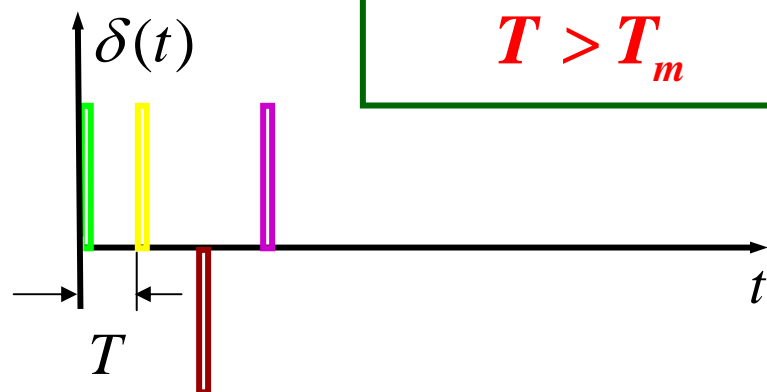
$$\sum_{n \neq m} a_n x_{n-m} \quad \text{— 码间干扰 (ISI)}$$

$$\xi_m \quad \text{— 零均值，方差为 } \sigma_{\xi}^2 = \frac{N_0}{2} E_h \text{ 的高斯噪声}$$

通过适当地设计接收滤波器和发送滤波器，可以使得对 $n \neq 0$ 时， $x_n = 0$ ，从而可以消除码间干扰。



无码间干扰条件
 $T > T_m$



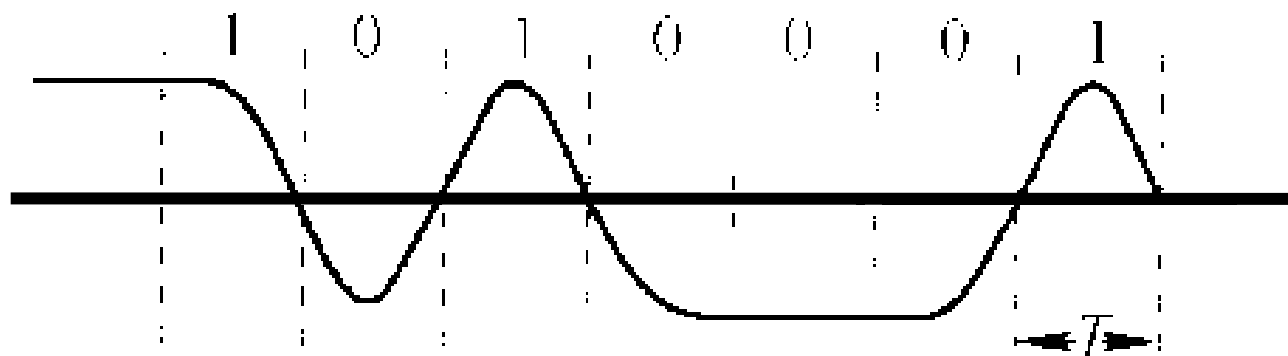
三、眼图

在数字通信中码间干扰和噪声干扰影响信号码元的正确接收，使通信性能恶化。在系统设计中要尽量减小两者对接收的影响，这是通信系统设计和调试中最重要的任务。

码间干扰和噪声干扰的大小可以用示波器观察到。我们把接收信号波形接到示波器的垂直输入上，水平扫描置于码元传输速率 $1/T$ ，这样在示波器屏幕上显示出许多接收信号码元重迭在一起的波形。

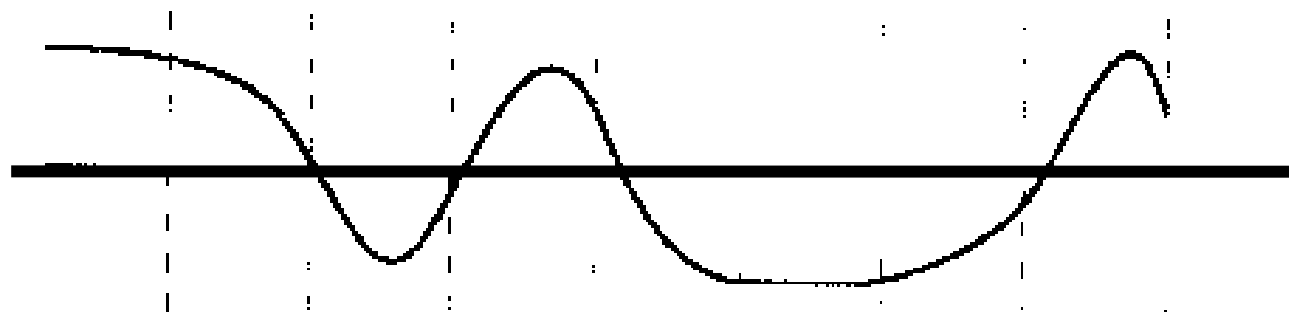
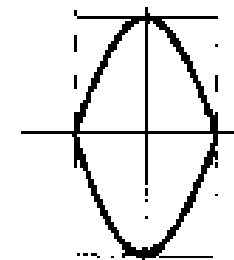
对于二进制双极性信号，当无码间干扰和噪声干扰时，迭加波形形状犹如一只睁开的“眼睛”；若存在码间干扰，由于多条不规则的波形迭加使“眼睛”张开程度变小，严重的码间干扰会使“眼睛”完全闭上。

信号波形

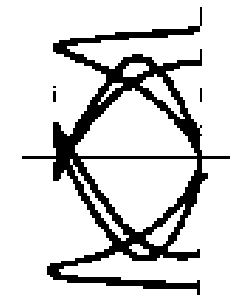


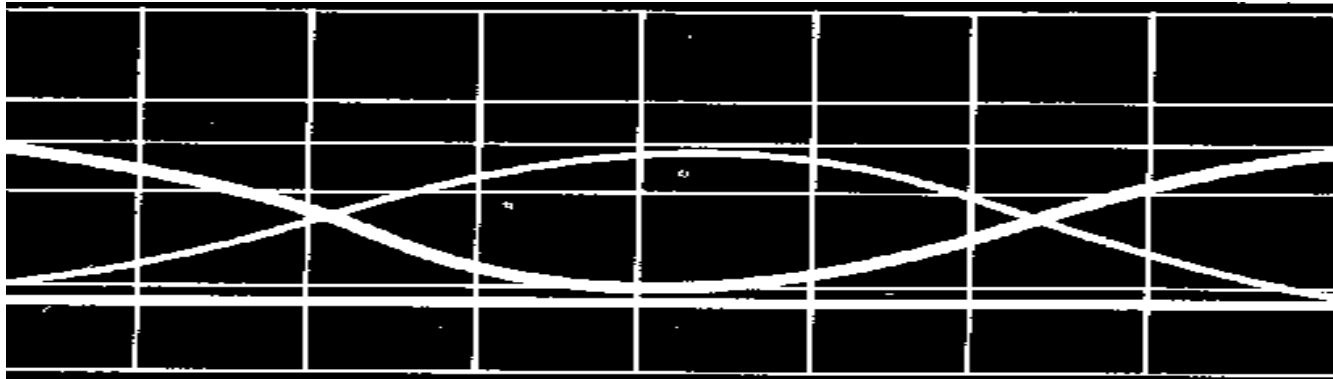
(a) 无失真时

眼图

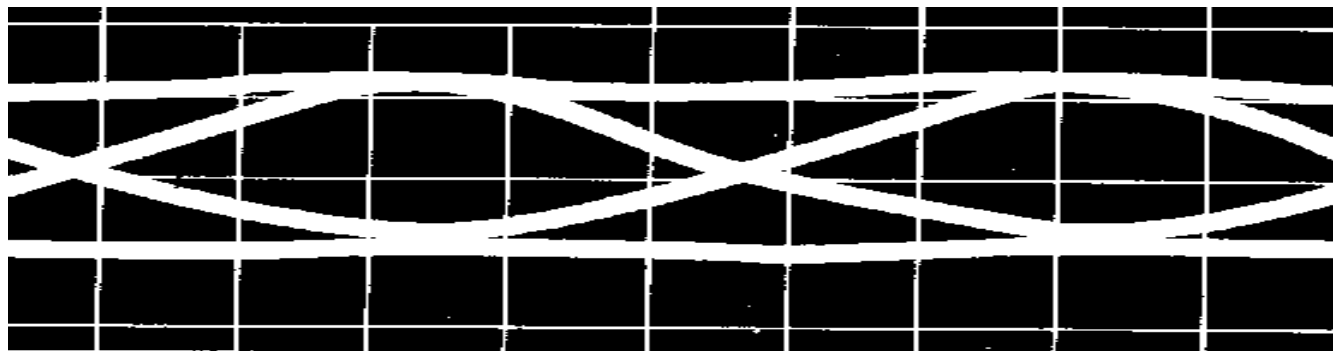


(b) 有失真时

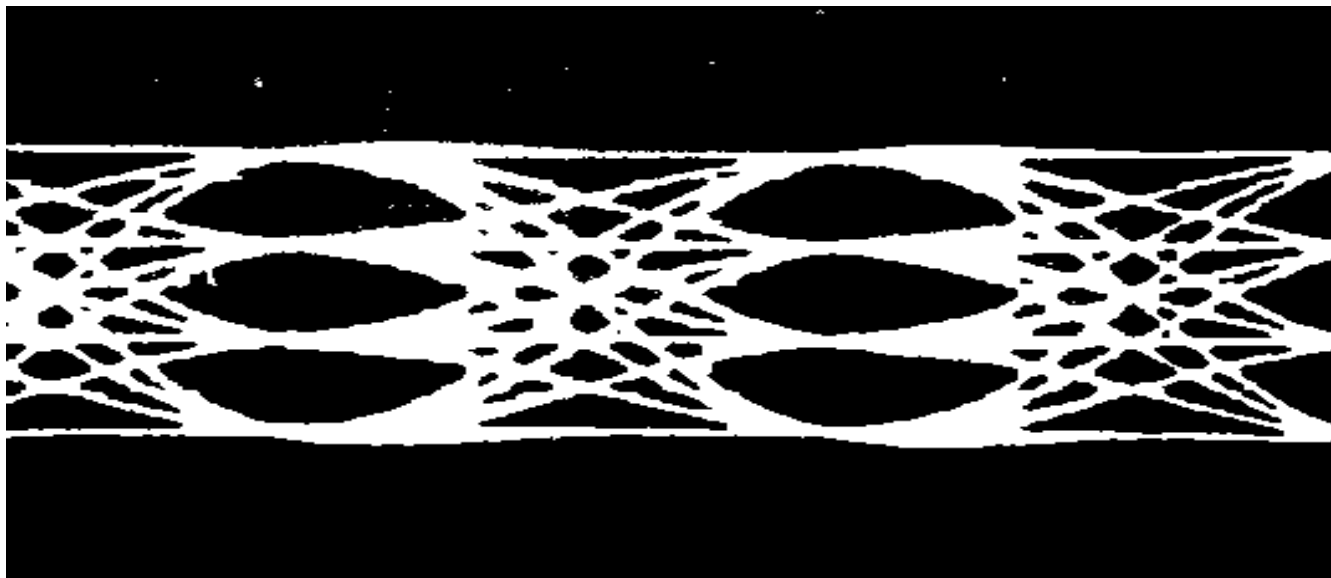




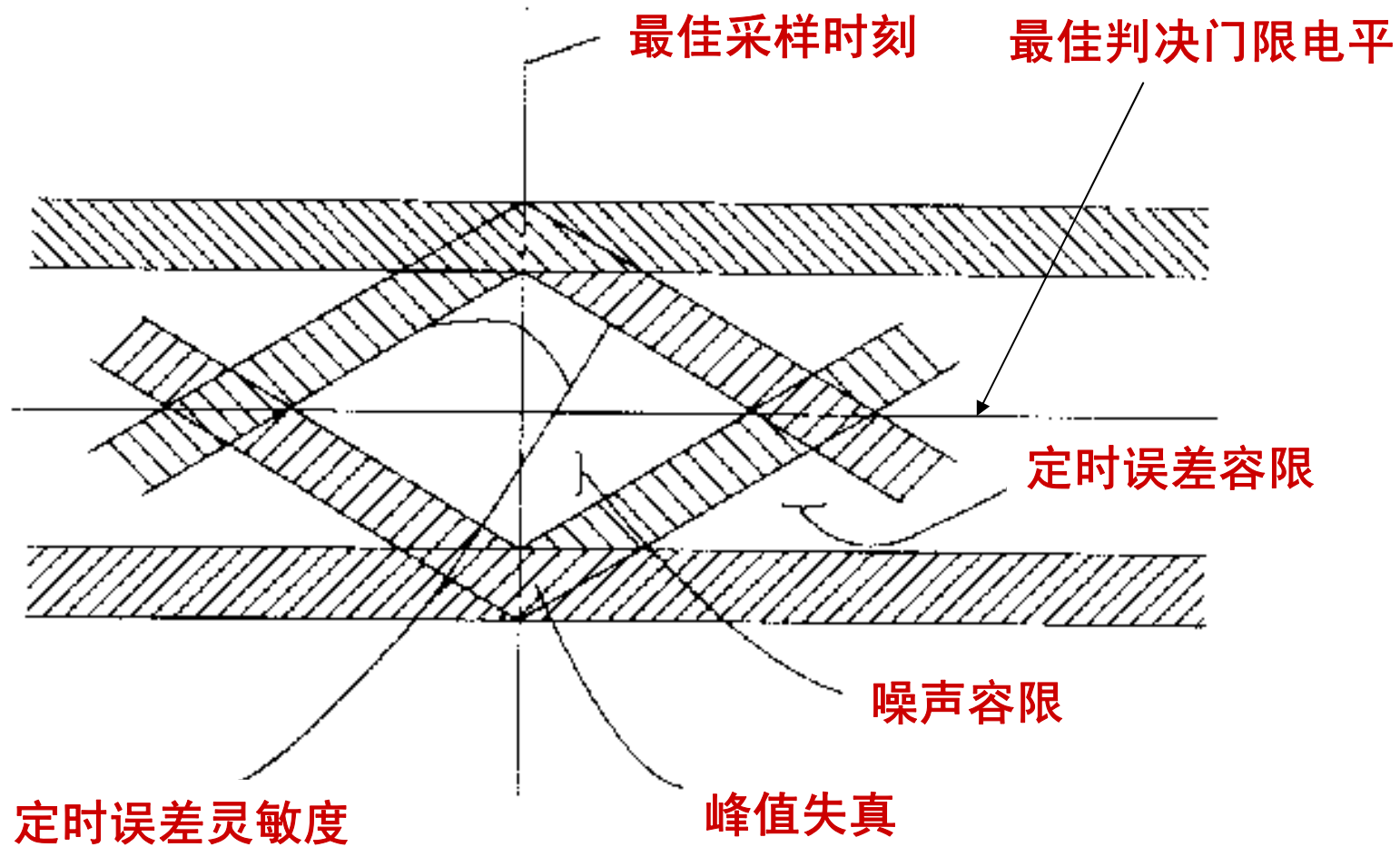
二进制无噪声
情况；



二进制有噪声
情况；



4进制PAM的
眼图；



- 1、“眼睛”张开最大时刻是最佳采样时刻；
- 2、中间水平横线表示最佳判决门限电平；
- 3、阴影区的垂直高度表示接收信号峰值失真范围；

- 3、水平横线上非阴影区间长度的一半表示定时误差容限；而“眼睛”斜边的斜率表示定时灵敏度，斜率越大，对定时误差灵敏度越高；
- 4、在无噪声时，眼睛张开程度，即抽样时刻上下阴影区间距离一半表示噪声容限；若在抽样时刻，噪声值大于这个容限，则发生误判；

四、无码间干扰带限信号设计准则——Nyquist准则

无码间干扰的充要条件是：
$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

定理：函数 $x(t)$ 满足

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

的充要条件是它的Fourier变换 $X(f)$ 满足

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right) = T$$

[证明]
$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi ft} df$$

所以

$$\begin{aligned}x(nT) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi fnT} df \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{(2m-1)/2T}^{(2m+1)/2T} X(f) e^{j2\pi fnT} df \\&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-1/2T}^{1/2T} X\left(f + \frac{m}{T}\right) e^{j2\pi fnT} df \\&= \int_{-1/2T}^{1/2T} Z(f) e^{j2\pi fnT} df\end{aligned}$$

其中

$$Z(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right)$$

显然 $Z(f)$ 是周期为 $1/T$ 的周期函数，所以可以展开为Fourier级数

$$Z(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} z_n e^{-j2\pi nfT}$$

其中

$$z_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} Z(f) e^{-j2\pi nfT} df$$

所以 $z_n = Tx(-nT)$

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z_n = \begin{cases} T & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow Z(f) = T \Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right) = T$$

证毕

下面对于带限信道作一些讨论：

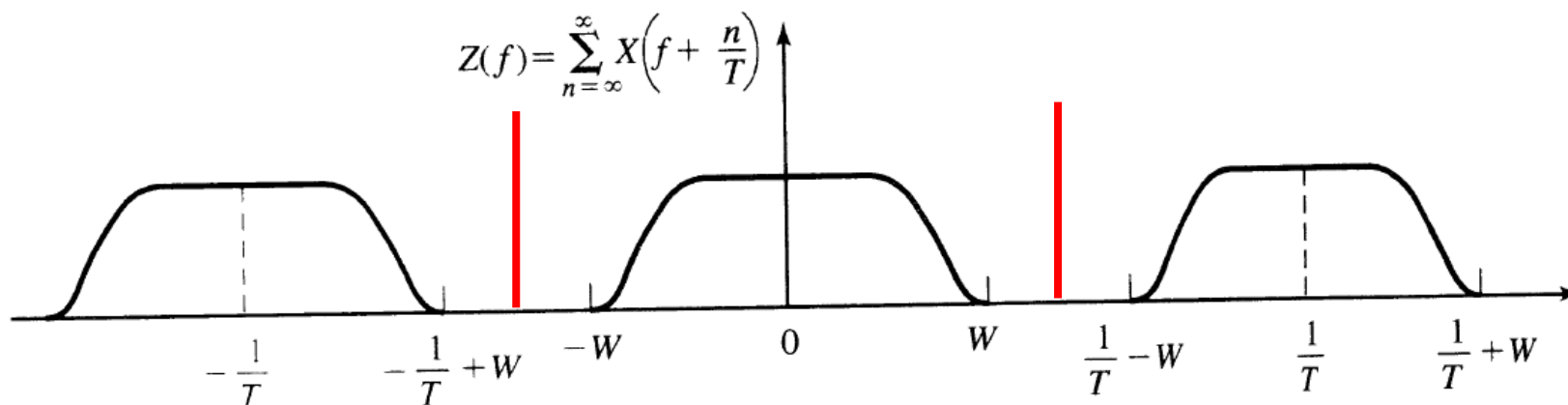
$$X(f) = G_T(f)C(f)G_R(f)$$

假定 $C(f) = 0, |f| > W$; 则 $X(f) = 0, |f| > W$,

因为 $Z(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{n}{T}\right)$ 是 $X(f)$ 的平移、迭加。

(1) 如果 $T < \frac{1}{2W}$, 即 $\frac{1}{T} > 2W$ 。

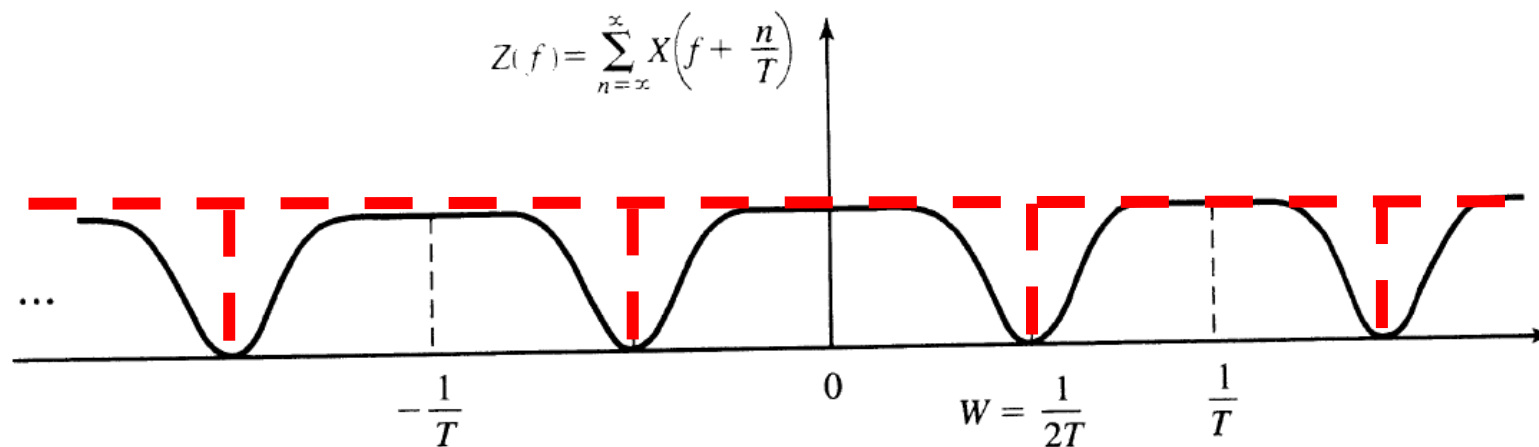
不管 $X(f)$ 形状如何, 不可能保证 $Z(f) = T$, 所以不可能设计一个无码间干扰系统。



(2) 如果 $T = \frac{1}{2W}$, 即 $\frac{1}{T} = 2W$ (称为Nyquist码率) 。

$$\text{于是仅当 } X(f) = \begin{cases} T & |f| < W \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

才可能保证 $Z(f) = T$



$$X(f) \Leftrightarrow x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$$

二个实现上的困难:

① $x(t) = \text{sinc}\left(\frac{t}{T}\right)$ 是非因果的，因而是不可实现的。但我们

可以通过引入延时 t_0 ，使 $t < 0$ 时 $\text{sinc}\left(\frac{(t-t_0)}{T}\right) \approx 0$ ，从而可以认为是因果的，可以实现。

② 随 t 的增加，的拖尾按 $1/t$ 衰减，这个衰减太慢。因为任何采样时钟总有误差，很小的采样时刻误差 Δ ，可能引起最大码间干扰量为：

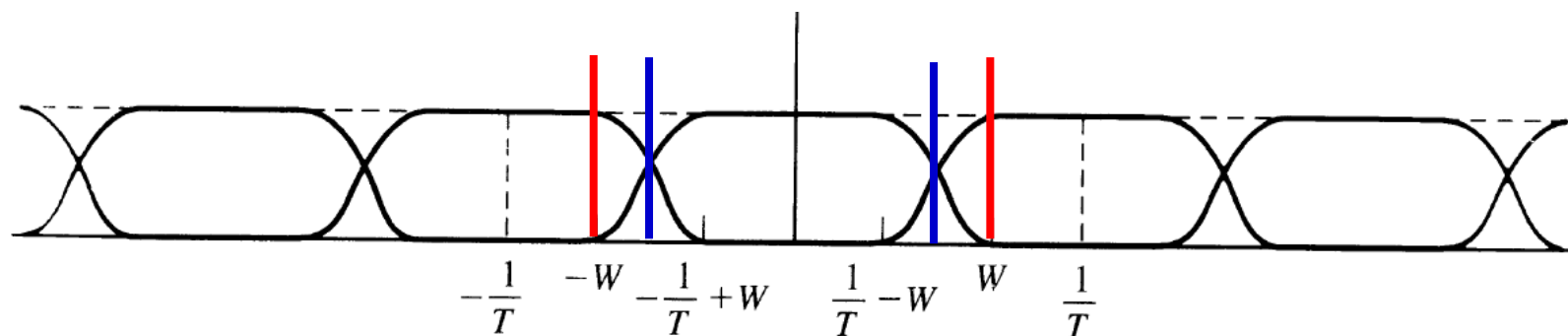
$$\sum_{n \neq m} \left| \frac{a_n \cdot \Delta}{(m-n)T + \Delta} \right|$$

由于 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是发散的，所以可能引起很大的码间干扰，这是致命弱点。

只有在理想情况下（采样时刻无误差）才能实现无码间干扰传输。

(3) 如果 $T > \frac{1}{2W}$, 即 $\frac{1}{T} < 2W$ 。

可以设计 $X(f)$ 使 $Z(f) = T$ 。



从上面讨论可知符号率 R_B 不能大于二倍的信道带宽 $2W$, 所以信道
传输符号的最高码率为

$$\frac{R_B}{W} = 2 \quad \text{波特/赫}$$

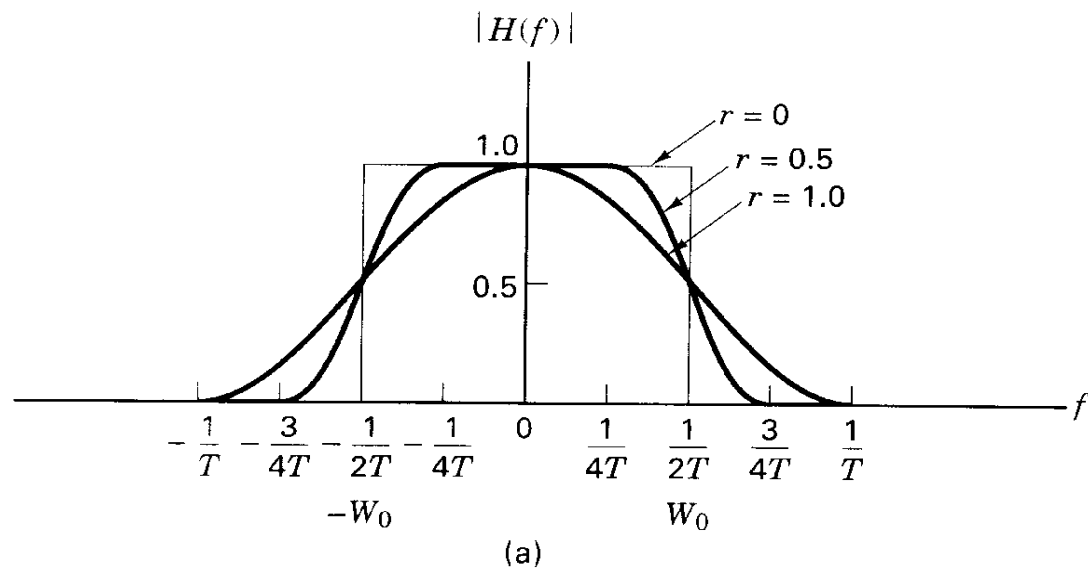
五、升余弦频谱信号

具有升余弦频谱的信号是**最常用的无码间干扰波形**。它的谱如下式：

$$X_{rc}(f) = \begin{cases} T, & 0 \leq |f| \leq (1-\alpha)/2T \\ \frac{T}{2} \left[1 + \cos \frac{\pi T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right], & \frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \\ 0, & |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

其中 α 称为滚降因子， $0 \leq \alpha \leq 1$ 。相应的时域波形为

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sin \pi t/T}{\pi t/T} \cdot \frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1 - 2\alpha^2 t^2/T^2} \\ &= \text{sinc}(t/T) \cdot \frac{\cos(\pi \alpha t/T)}{1 - 2\alpha^2 t^2/T^2} \end{aligned}$$

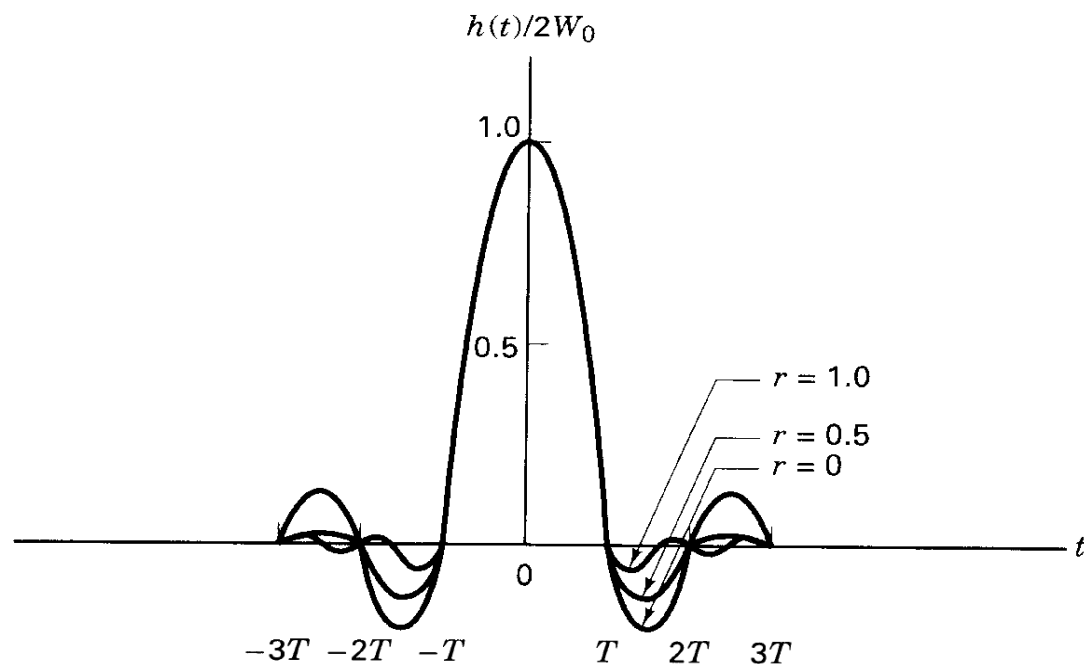


这时信道带宽是

$$W = \frac{1+\alpha}{2T}$$

每赫传输的符号数为

$$\frac{1/T}{(1+\alpha)/2T} = \frac{2}{1+\alpha}$$



升余弦信号的拖尾按

$1/t^3$ 趋于零。

当信道频率传递函数是理想矩形时，

$$C(f) = \begin{cases} 1 & |f| < W \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

要求发送和接收滤波器级联起来满足系数为 α 的升余弦滚降特性，

$$X_{rc}(f) = G_T(f)G_R(f), \quad |f| \leq W$$

符号间隔 T 满足 $T > \frac{1+\alpha}{2W}$

若接收滤波器是匹配滤波器，则

$$G_R(f) = G_T^*(f)$$

所以

$$X_{rc}(f) = |G_T(f)|^2$$

取

$$G_T(f) = \sqrt{|X_{rc}(f)|} \cdot e^{-j2\pi ft_0}$$

其中 t_0 是考虑到因果性的延时。升余弦频谱特征被收发滤波器对分。

五、具有零码间干扰的数字PAM系统的差错概率

当PAM系统采用升余弦频谱信号作为基本信号波形时，在带限信道中不会产生码间干扰。接收机匹配滤波器输出的接收信号样本为：

$$y_m = x_0 \cdot a_m + \xi_m$$

其中
$$x_0 = \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = E_g$$

ξ_m 是加性高斯噪声，它的平均值为零，方差为

$$\sigma_{\xi}^2 = E_g \cdot N_0 / 2$$

一般 a_m 以等概率取 M 个对称等间隔电平。对于这种无码间干扰的 M 进制PAM系统，它的检测差错概率为公式：

$$P_M(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{2E_g}{N_0}}\right)$$

平均能量与基本脉冲能量关系为：

$$E_g = \frac{3}{M^2 - 1} E_{av}$$

所以

$$P_M(e) = \frac{2(M-1)}{M} Q\left(\sqrt{\frac{6E_{av}}{(M^2-1)N_o}}\right)$$

§ 6.5 部分响应系统——具有受控码间干扰的带限系统

一、双二元信号脉冲

利用具有升余弦频谱的信号可以在带限信道上实现零码间干扰传输，

但是它的缺点是降低了符号率，降低了频谱利用率。我们可以采用部分响应技术，通过有意识地引入可受控的码间干扰来消除码间干扰的影响，使符号率达到Nyquist码率。
设计发送和接收滤波器，使得

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0, 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

与Nyquist定理一样，函数 $x(t)$ 满足上式的充要条件是：

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} X\left(f + \frac{m}{T}\right) = T + Te^{-j2\pi fT} \square Z(f) , \quad 0 < f < \frac{1}{T}$$

对于带宽为 W 的信号 $x(t)$ ，当 $T < \frac{1}{2W}$ 时，不可能满足上充要条件；

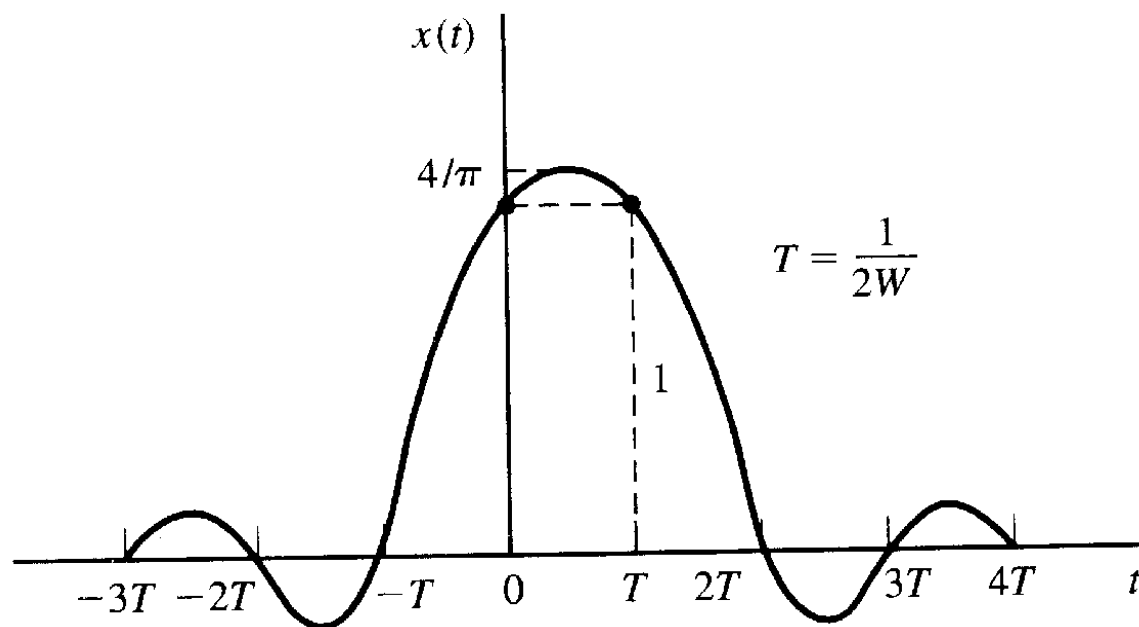
当 $T = \frac{1}{2W}$ 时，

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} \left[1 + e^{-j\frac{\pi f}{W}} \right] & |f| < W \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{W} e^{-j\frac{\pi f}{2W}} \cdot \cos\left(\frac{\pi f}{2W}\right) & |f| < W \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

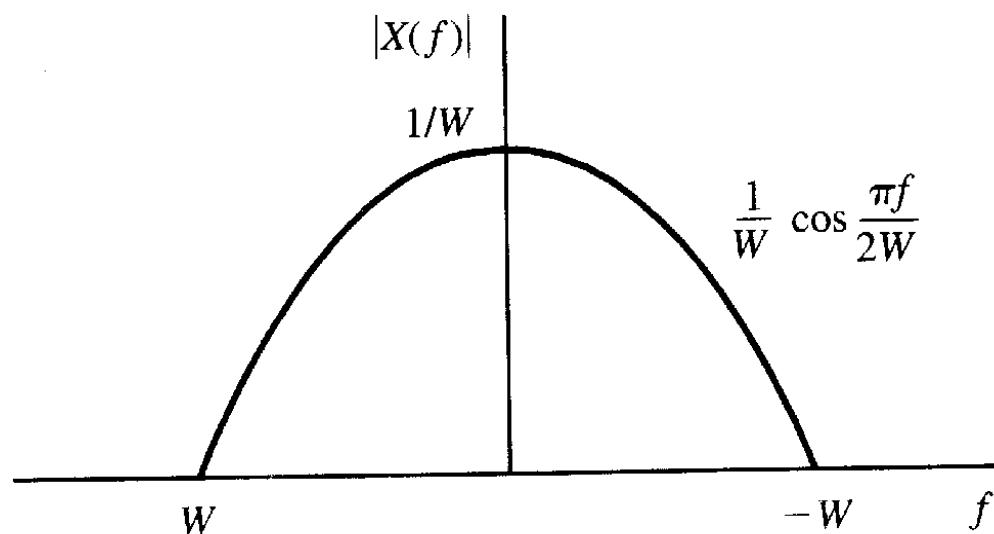
满足上充要条件。相应的时域波形为：

$$x(t) = \text{sinc}(2Wt) + \text{sinc}[2Wt - 1]$$

这种脉冲 $x(t)$ 称为**双二进制信号脉冲**（Duobinary Signal Pulse）



$x(t)$ 的拖尾以 $1/t^2$ 趋于零，所以采样时刻误差所产生的码间干扰是很小的。



$$\int_{-W}^W |X(f)| df = 4/\pi$$

二、带有受控码间干扰数据的检测

采用双二进制信号作为基本脉冲波形的部分响应系统中，接收滤波器和发送滤波器设计得满足：

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = |X(f)|^{\frac{1}{2}}$$

其中 $X(f)$ 是双二进制信号频谱。如果发送序列是 $a_n \in \{-1, 1\}$ ，则接收端匹配滤波器输出为，

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + \xi(t)$$

在 $t = mT$ 的采样值为，

$$y_m = y(mT) = a_m + a_{m-1} + \xi_m$$

其中 ξ_m 为高斯噪声样本值，显然前一时刻传输的数据值强烈地影响当前的采样输出。

记
$$b_m = a_m + a_{m-1}$$

若 a_m 以等概率取 ± 1 , b_m 可能取值为 $-2, 0, 2$, 相应的概率为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$,

两种消除码间干扰方法:

(1) 接收端做减法

如果我们知道在 $m-1$ 时刻 a_{m-1} 的值, 则在第 m 时刻可以从 b_m 中减去 a_{m-1} , 从而可以消除前一符号对当前采样值的影响, 正确检测出 a_m 。然后在下一时刻 $m+1$, 再从 b_{m+1} 中减去 a_m , 消除 a_m 的影响, 正确检测 a_{m+1} 。如此递推可以正确检测出整个序列。

缺点是误码永远传播。

(2) 发送端预编码

发送端要传输的数据序列 $\{d_n\}$ 是由“0”、“1”组成的序列。对

$\{d_n\}$ 进行预编码, 得到预编码序列 $\{p_n\}$

$$p_m = d_m \ominus p_{m-1} \quad m = 1, 2, \dots$$

然而对 $\{p_n\}$ 进行极性变换（映射）

$$p_m = 0 \rightarrow a_m = -1$$

$$p_m = 1 \rightarrow a_m = 1$$

或者说 $a_m = 2p_m - 1$

用序列 $\{a_m\}$ 去调制波形进行传输。接收滤波器的采样输出为

$$\begin{aligned} b_m &= a_m + a_{m-1} = 2p_m - 1 + 2p_{m-1} - 1 \\ &= 2(p_m + p_{m-1} - 1) \end{aligned}$$

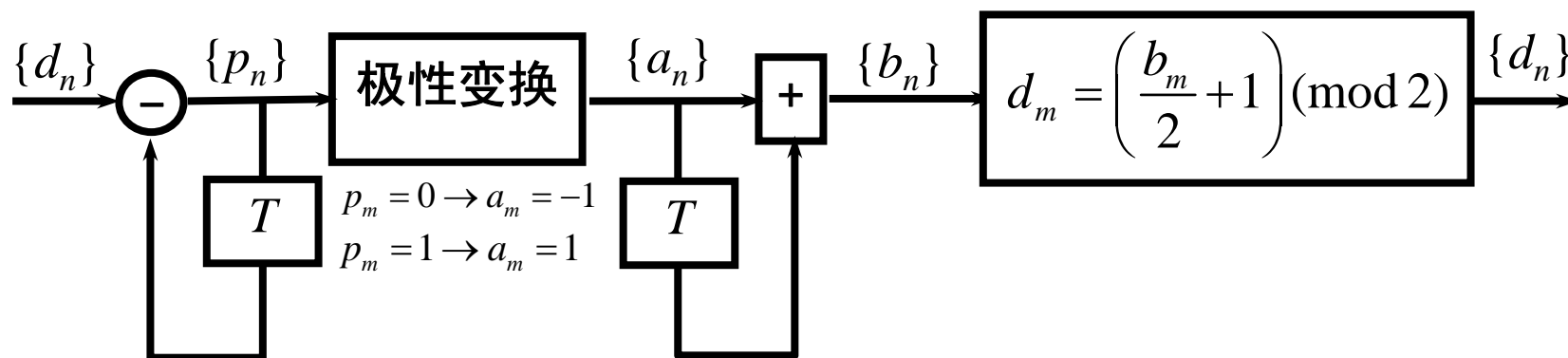
所以 $p_m + p_{m-1} = b_m / 2 + 1$

因为 $d_m = p_m \oplus p_{m-1}$

所以 $d_m = \frac{b_m}{2} + 1 \mod 2$

即当 $b_m = \pm 2$ 时, $d_m = 0$; 当 $b_m = 0$ 时, $d_m = 1$;

带预编码的双二进制传输系统的原理框图



数据序列 d_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
预编码序列 p_n	0	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	0
发送序列 a_n	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	1	-1
接收到序列 b_n		0	0	0	2	0	-2	-2	0	2	2	2	0	0	2	0
译出序列 d_n		1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1

当出现加性噪声时，接收滤波器采样输出为

$$y_m = b_m + \xi_m$$

这时把 y_m 和二个门限“+1”和“-1”去比较，对 d_m 作出判决

$$d_m = \begin{cases} 1 & -1 < y_m < 1 \\ 0 & |y_m| > 1 \end{cases}$$

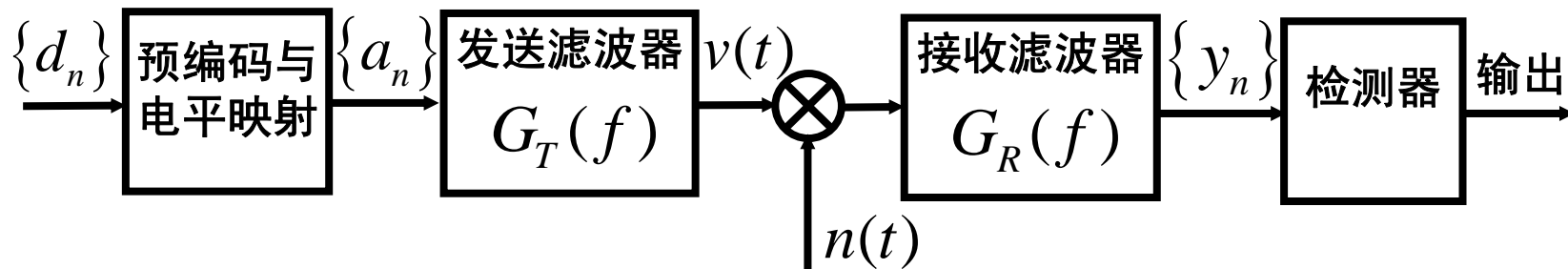
平均功率

$$\begin{aligned} P_{av} &= \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df \\ &= \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-W}^W |X(f)| df \\ &= \frac{4}{\pi T} E(a_m^2) \end{aligned}$$

三、采用部分响应信号的数字PAM差错概率

2电平数据序列经过预编码，再映射成2个可能的幅度电平 $\{\pm d\}$ ，然后经频率传递函数为 $G_T(f)$ 的发送滤波器调制输出。

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g_T(t - nT)$$



$$|G_T(f) \cdot G_R(f)| = |X(f)|$$

其中 $X(f)$ 是双二进制信号频谱，所以

$$\begin{aligned} y_m &= a_m + a_{m-1} + \xi_m \\ &= b_m + \xi_m \end{aligned}$$

$$y_m = b_m + \xi_m$$

b_m 可能取值为 $-2d, 0, 2d$, 相应的概率为 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

ξ_m 是零均值高斯噪声, 它的方差为

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W |X(f)| df = \frac{2N_0}{\pi}$$

因为 $d_m = 0 \Leftrightarrow b = \pm 2d$

$$d_m = 1 \Leftrightarrow b = 0$$

按距离最近检测准则
$$d_m = \begin{cases} 1 & -d < y_m < d \\ 0 & |y_m| > d \end{cases}$$

误码率为:

$$P_e = \frac{1}{2} P(|y_m| > d | b_m = 0) + \frac{1}{4} \{ P(|y_m| < d | b_m = 2d) + P(|y_m| < d | b_m = -2d) \}$$

$$< \frac{3}{4} P(|y_m| > d | b_m = 0)$$

$$P(|y_m| > d | b_m = 0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma_\xi^2}} \int_d^\infty \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma_\xi^2}\right) dx = 2Q\left(\frac{d}{\sigma_\xi}\right)$$

$$P_e = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\pi d^2}{2N_0}}\right)$$

$$P_{av} = \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-W}^W |G_T(f)|^2 df = \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-W}^W |X(f)| df$$

$$= \frac{4}{\pi T} E(a_m^2) = \frac{4d^2}{\pi T}$$

$$P_e = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{\pi^2 E_{av}}{8N_0}}\right)$$

与AWGN信道下 PAM差错概率相比较，发现采用部分响应信号后性能损失2.1 db。这是由于部分响应系统是有记忆系统，我们的检测方法忽略了记忆性，可以通过对整个序列的最大似然检测来挽回这个损失。

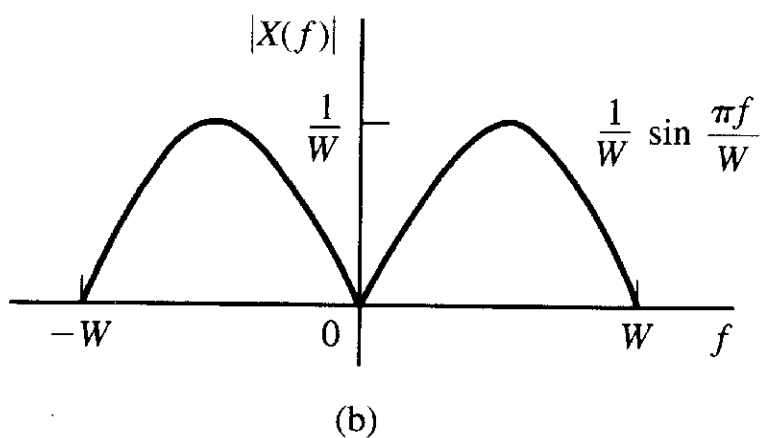
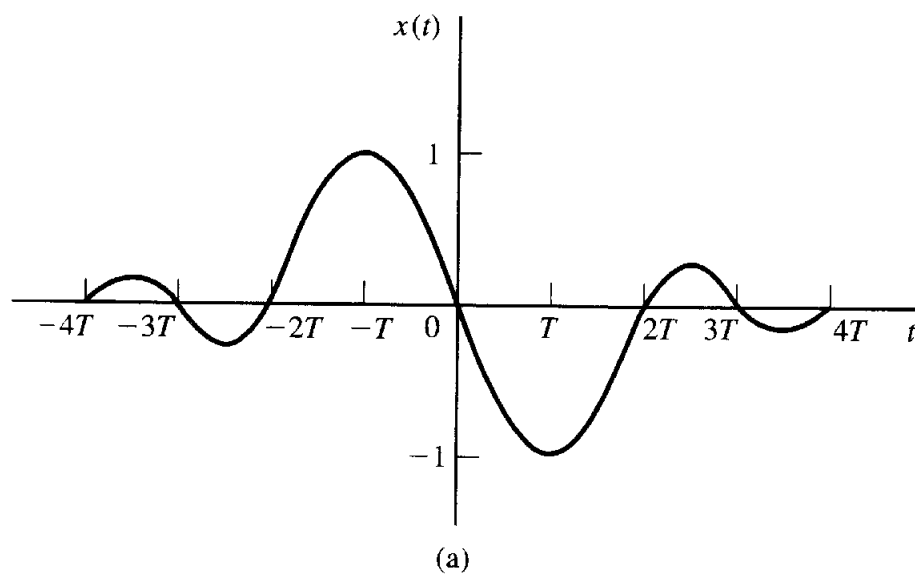
四、其它部分响应系统

修正双二进制信号波形为

$$x(t) = \frac{\text{sinc}(t+T)}{T} - \frac{\text{sinc}(t-T)}{T}$$

$$X(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} [e^{j\pi f/W} - e^{-j\pi f/W}] = \frac{j}{W} \sin \frac{\pi f}{W} & |f| < W \\ 0 & |f| > W \end{cases}$$

$$x\left(\frac{n}{2W}\right) = x(nT) = \begin{cases} 1 & n = -1 \\ -1 & n = 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



对于采用修正双二进制信号波形的部分响应系统，它的预编码，译码都和双二进制信号类似，采用修正双二进制信号的 M 电平 PAM 的误码率也相同

§ 6.6 在出现信道失真情况下的系统设计

在 § 6.4和 § 6.5节中我们讨论了无码间干扰设计准则，要求发送滤波器、接收滤波器和信道组合起来满足升余弦频谱，或双二进制信号频谱：

$$G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R(f) = X_{rc}(f)$$

在前二节中我们把 $C(f)$ 作为带宽为 W 的理想矩形，同时其相位谱为线性。在这种情况下我们得出最佳系统是发送滤波器和接收滤波器对分 $X_{rc}(f)$ 。

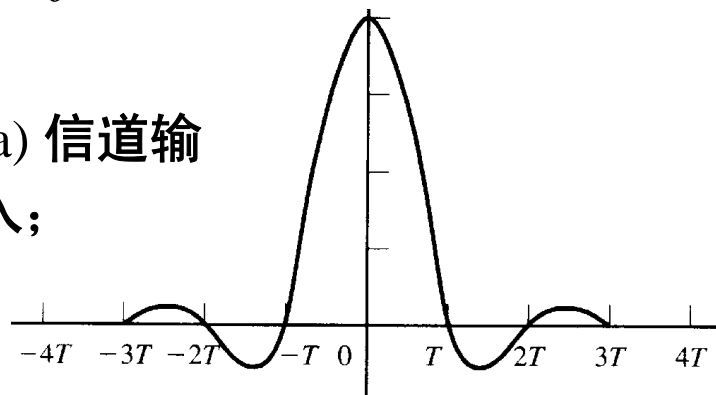
当 $C(f)$ 并非理想，可能有幅度失真，即在 $|f| < W$ 中， $|C(f)|$ 并非常数；也可能有相位失真，即相位谱 $\Theta(f)$ 是非线性。

非线性的相位谱会造成非均匀的群延时，

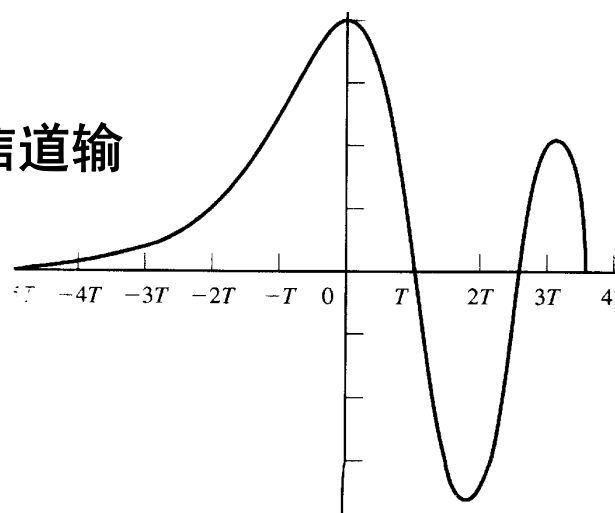
$$\tau(f) = -\frac{1}{2\pi} \frac{d\Theta(f)}{df}$$

下图表示一个升余弦频谱波形通过一个理想幅频特性，但相频特性是 f 的二次函数的信道，其输出波形严重畸变，造成严重码间干扰。

(a) 信道输入；

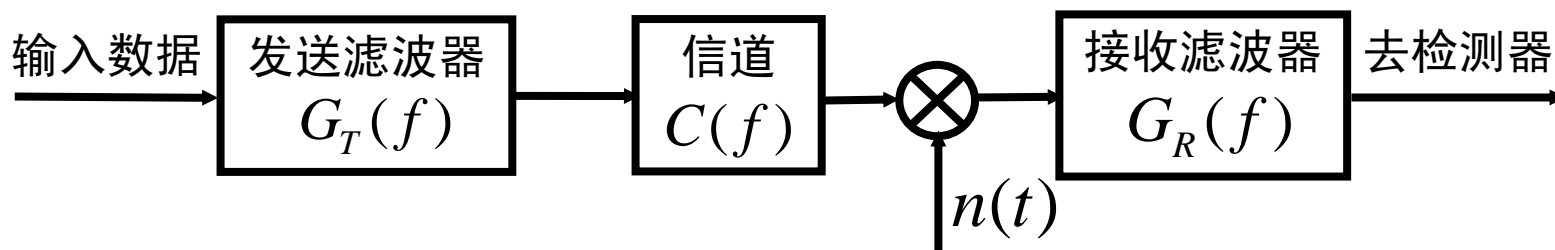


(b) 信道输出；



考虑二个问题。首先考虑当信道非理想、但是确知的情况下，发送和接收滤波器的设计；其次考虑信道特性是未知时，如何设计信道均衡器，使它能自动或自适应地校正信道失真。

一、信道特性已知时，发送和接收滤波器的设计



为了免除码间干扰，要求发送滤波器，信道和接收滤波器级联满足：

$$G_T(f)C(f)G_R(f) = X_{rc}(f)e^{-j\pi ft_0}, \quad |f| < W$$

其中 $X_{rc}(f)$ 是升余弦频谱，它保证在采样时刻无码间干扰， t_0 是延时，它保证发送滤波器和接收滤波器物理可实现性。接收滤波器输出噪声可表示成

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t-\tau)g_R(\tau)d\tau$$

$n(t)$ 是接收滤波器的输入噪声。 $n(t)$ 是零均值，功率谱为 $S_n(f)$ 的噪声，则 $\xi(t)$ 均值也为零，它的功率谱密度为：

$$S_{\xi}(f) = S_n(f) \cdot |G_R(f)|^2$$

对二进PAM系统，接收机匹配滤波器输出采样为

$$y_m = x_0 \cdot a_m + \xi_m = a_m + \xi_m$$

其中 $x_0 = \int_{-W}^W |X_{rc}(f)| df$ 被归一化到 $a_m = \pm d$,
1,

ξ_m 表示噪声，它的方差为

$$\sigma_{\xi}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |G_R(f)|^2 df$$

差错概率为 $P_e = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{d}{\sigma_{\xi}}}^{\infty} e^{-y^2/2} dy = Q\left(\sqrt{\frac{d^2}{\sigma_{\xi}^2}}\right)$

发送滤波器的传输特性选为：

$$G_T(f) = \frac{\sqrt{X_{rc}(f)}}{C(f)} e^{-j2\pi ft_0}$$

于是
$$G_T(f) \cdot C(f) = \sqrt{X_{rc}(f)} \cdot e^{-j2\pi ft_0}$$

接收滤波器应设计成与被接收信号脉冲相匹配的形式，所以

$$G_R(f) = \sqrt{X_{rc}(f)} \cdot e^{-j2\pi ft_r}$$

因此
$$\sigma_\xi^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |G_R(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W |X_{rc}(f)| df = \frac{N_0}{2}$$

平均发送功率
$$P_{av} = \frac{E(a_m^2)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} g_T^2(t) dt = \frac{d^2}{T} \int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df$$

$$d^2 = P_{av} \cdot T \left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \right]^{-1}$$

$$\frac{d^2}{\sigma_\xi^2} = \frac{2P_{av}T}{N_0} \left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \right]^{-1}$$

对于非理想带限信道，在 $|f| < W$ 时，往往 $|C(f)| < 1$

使得

$$\left[\int_{-W}^W \frac{X_{rc}(f)}{|C(f)|^2} df \right]^{-1} < 1$$

降低了信噪比。对于理想带通信道，当 $|f| < W$ ， $|C(f)| = 1$ ，这时没有性能恶化。必须注意这种性能恶化完全是由于信道的幅频畸变引起，而相位畸变已由发送滤波器补偿。

[例6.6.1] 设信道的幅频特性为，

$$|C(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{W}\right)^2}} \quad |f| < W$$

其中 $W = 4800 \text{ Hz}$ ，加性噪声是零均值，白高斯噪声，功率谱密度为 $\frac{N_0}{2} = 10^{-15} \text{ W/Hz}$ ，在此信道上传输码率为 4800 bit/s 的二进数据，试确定接收滤波器和发送滤波器特性。

[解] $W = \frac{1}{T} = 4800H_z$, 采用 $\alpha = 1$ 的升余弦频谱脉冲, 于是

$$X_{rc}(f) = \frac{T}{2} [1 + \cos(\pi T |f|)] = T \cos^2 \left(\frac{\pi |f|}{9600} \right)$$

$$|G_T(f)| = \sqrt{T \left[1 + \left(\frac{f}{W} \right)^2 \right]} \cos \frac{\pi(f)}{9600} \quad |f| < 4800H_z$$

$$|G_R(f)| = \sqrt{T} \cos \frac{\pi |f|}{9600} \quad |f| < 4800H_z$$

$$|G_T(f)| = |G_R(f)| = 0 \quad |f| > 4800H_z$$

二、信道均衡器

在实际中，信道频率特性是未知的，或者是时变的。这时我们可以把发送滤波器设计成具有平方根升余弦频谱特性，

$$G_T(f) = \begin{cases} \sqrt{X_{rc}(f)} e^{-j2\pi ft_0} & |f| < W \\ 0 & |f| > W \end{cases}$$

接收滤波器 $G_R(f)$ 与 $G_T(f)$ 匹配，即

$$|G_T(f)| \cdot |G_R(f)| = X_{rc}(f)$$

由于信道非理想，所以合成频率传递函数

$$X(f) = G_T(f) \cdot C(f) \cdot G_R(f)$$

产生码间干扰。接滤波器输出为

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + \xi(t)$$

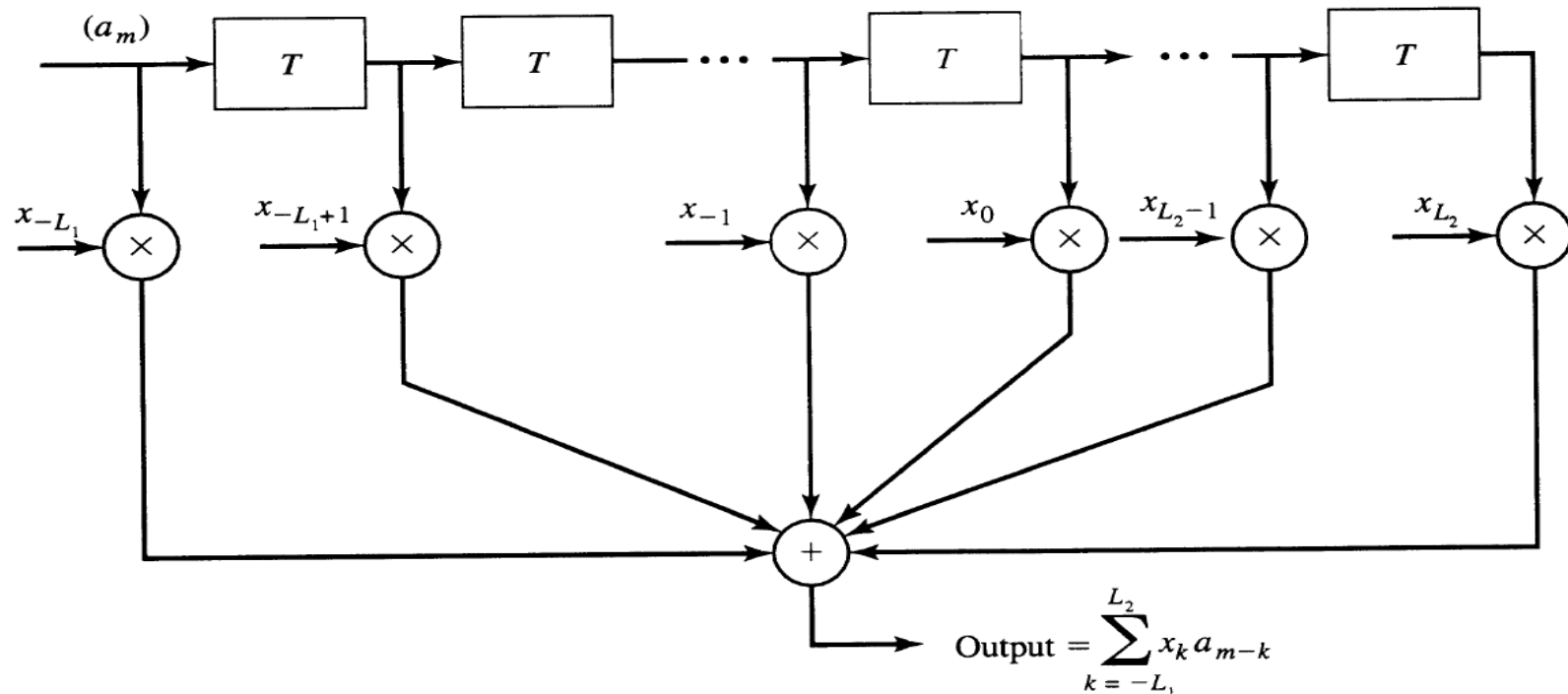
其中

$$x(t) = g_T(t) \otimes c(t) \otimes g_R(t)$$

接收滤波器输出采样为

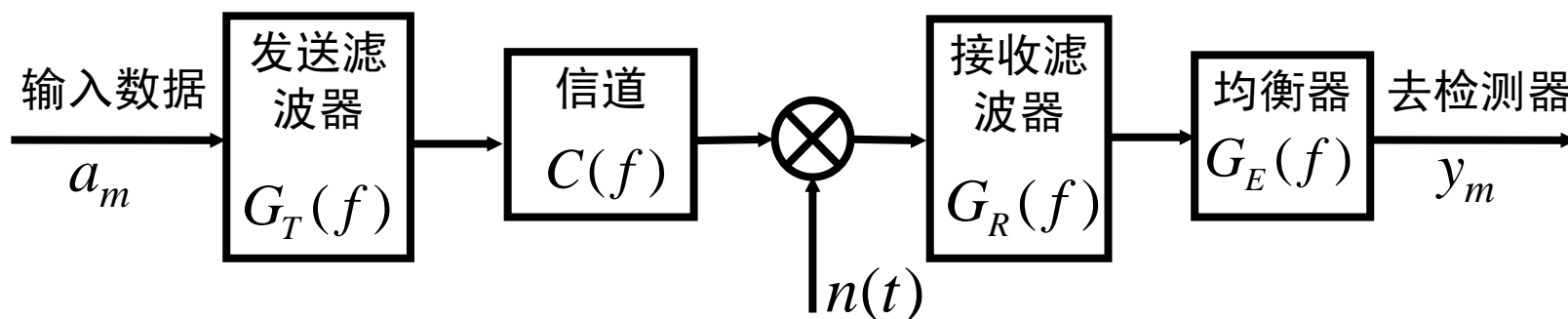
$$y_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x_{m-n} + \xi_m = x_0 a_m + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq m}}^{\infty} a_n x_{m-n} + \xi_m$$

上式中间项是码间干扰。在任何实际系统中码间干扰的影响总是有限的，所以我们假定对 $n < -L_1$ 和 $n > L_2$ ，有 $x_n = 0$ ，也就是说码间干扰长度为 $L_1 + L_2$ 。我们可以用长度为 $L_1 + L_2 + 1$ 节有限冲脉响应滤波器作为等效的离散时间信道模型，



(1) 线性均衡器

在接收滤波器 $G_R(f)$ 后面接一个参数可以调节的线性滤波器来补偿信道的不理想性。一般根据对信道的测量来调节这些参数。这种滤波器称为**信道均衡器**。信道均衡器分为预置式的和自适应的。对于时不变信道，在通信开始阶段，通过发送一系列已知的训练序列，接收机调节好均衡器参数，之后在通信过程中就不再变化；对于时变信道，则要在通信过程中不断测试信道，自行调节均衡器参数。



为了消除码间干扰，要求

$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)} = \frac{1}{|C(f)|} \cdot e^{-j\Theta_C(f)}, \quad |f| \leq W$$

也就是说 $|G_E(f)| = 1/|C(f)|$

$$\Theta_E(f) = -\Theta_C(f)$$

所以均衡器是信道 $C(f)$ 的逆滤波器，它迫使码间干扰为零，所以这种均衡器称为迫零均衡器。这时均衡器输出为

$$y_m = a_m + \xi_m$$

其中 ξ_m 是零均值高斯噪声，其功率为

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi}^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) \cdot |G_R(f)|^2 \cdot |G_E(f)|^2 df \\ &= \int_{-W}^W \frac{S_n(f) \cdot |X_{rc}(f)|}{|C(f)|^2} df \end{aligned}$$

若

$$S_n(f) = \frac{N_0}{2}$$

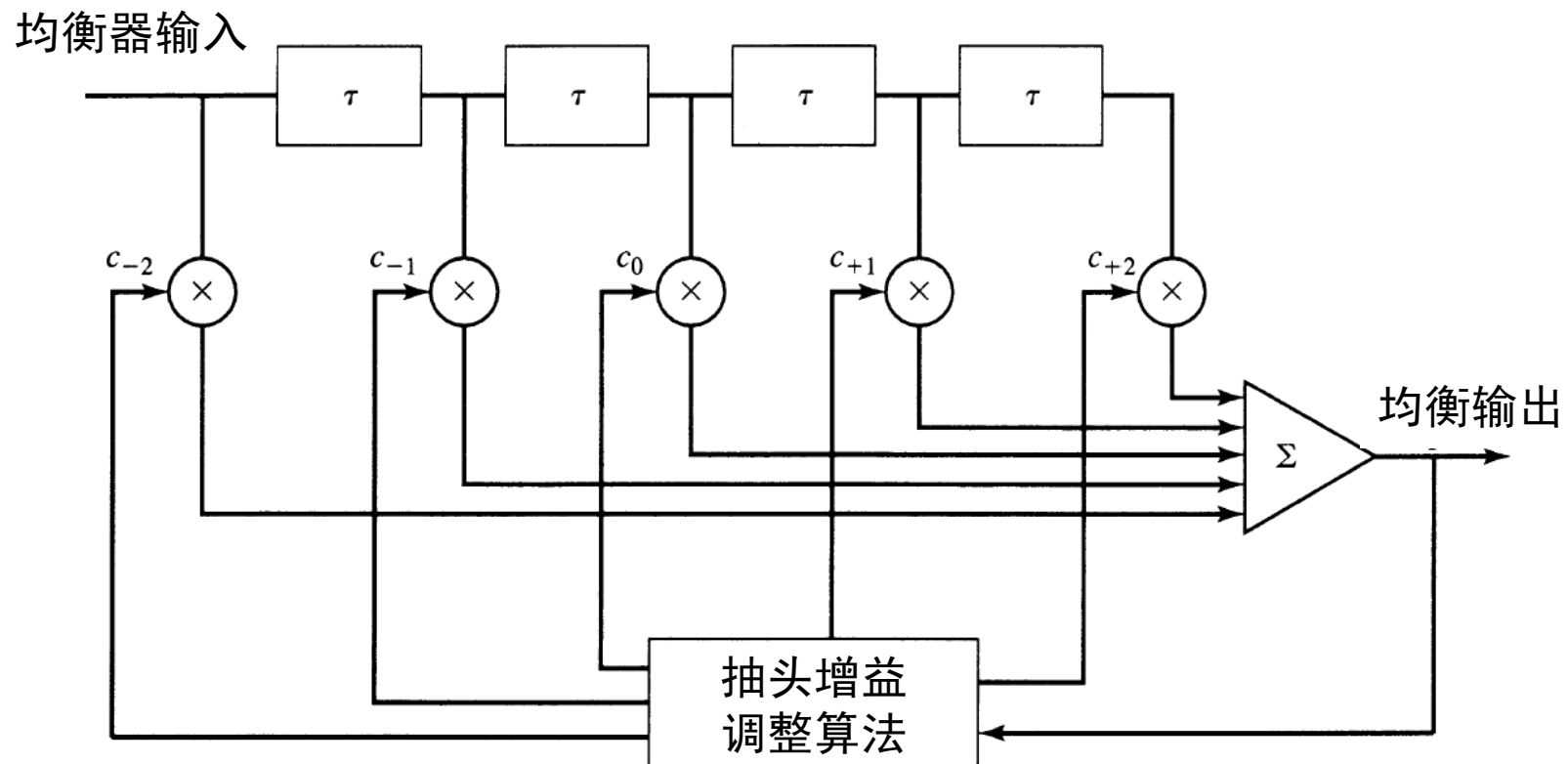
则

$$\sigma_{\xi}^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-W}^W \frac{|X_{rc}(f)|}{|C(f)|^2} df$$

一般来说迫零均衡器使噪声功率增大。

(2) 线性均衡器的时域实现 — 横向滤波器

具有 $2N+1$ 个抽头系数的横向滤波器是一种参数易调的线性滤波器。



横向滤波器的频率传递函数为

$$G_E(f) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{-j2\pi nTf}$$

脉冲响应为

$$g_E(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \delta(t - nT)$$

发送滤波器、信道和接收滤波器的组合频率传递函数为

$$X(f) = G_T(f) C(f) G_R(f)$$

脉冲响应为

$$x(t) \Leftrightarrow X(f)$$

$x(t)$ 经均衡器输出脉冲响应为

$$q(t) = \sum_{n=-N}^N c_n x(t - nT)$$

按间隔 T 的采样值为

$$q(mT) = \sum_{n=-N}^N c_n x(mT - nT) = \begin{cases} 1 & m = 0 \\ 0 & m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

可以用矩阵形式写为 $\mathbf{X}\mathbf{c} = \mathbf{q}$

\mathbf{X} 为 $(2N+1) \times (2N+1)$ 矩阵, 它的元素 $x_{i,j} = x(iT - jT)$; \mathbf{c} 是均衡器抽头系数构成的矢量, $\mathbf{c}^T = (c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_0, \dots, c_N)$; \mathbf{q} 为一个 $(2N+1)$ 维矢量, $\mathbf{q}^T = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 。

[例6.6.1] 设接收到带码间干扰的脉冲响应 $x(t)$ 的非零采样值为

$$\begin{aligned} x(-2T) &= 0.125, & x(-T) &= 0.25, & x(0) &= 1 \\ x(T) &= 0.5, & x(2T) &= 0.25, \end{aligned}$$

试确定5抽头均衡器的抽头值及均衡后的脉冲响应 $y(t)$ 的采样值。

[解] 若采用 5 抽头均衡器, 设抽头矢量为

$$\mathbf{c}^T = (c_{-2}, c_{-1}, c_0, c_1, c_2)$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{q}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.25 & 0.125 & 0 \\ 0.25 & 0.5 & 1 & 0.25 & 0.125 \\ 0 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^T = (0, 0, 1, 0, 0)$$

解出 $\mathbf{c}^T = (-0.112, -0.189, 1.271, -0.582, -0.027)$

均衡以后脉冲响应的采样值为:

$$q(-4T) = -0.0139 \quad q(-3T) = -0.052 \quad q(-2T) = 0 \quad q(-T) = 0$$

$$q(0) = 1 \quad q(T) = 0 \quad q(2T) = 0 \quad q(3T) = -0.159 \quad q(4T) = 0.007$$

用5个抽头的均衡器只能保证信号码元前后各二点的码间干扰为零，离得更远的采样点仍有可能为非零。具有 $2N+1$ 个抽头的均衡器只能保证当前码元采样为1，前后各 N 个抽样点上的码间干扰为零。

迫零算法不可能完全消除码间干扰；另外迫零算法原则上是寻找逆滤波器来补偿信道失真，即设法寻找信道均衡器，满足

$$G_E(f) = \frac{1}{C(f)}$$

结果所获得的均衡器可能使噪声增强。实际上迫零算法根本没有考虑到噪声。下面考虑到噪声。

可以采用最小均方误差准则（MMSE）来设计均衡器。设 $y(t)$ 是包含有噪声的均衡器输入，经均衡器后，输出为：

$$z(t) = \sum_{n=-N}^N c_n y(t - nT)$$

$$z(mT) = \sum_{n=-N}^N c_n y(mT - nT)$$

希望在 mT 时刻均衡器输出为所需要的发送符号 a_m ，而误差为

$$\{e_m\} = \{z(mT) - a_m\}$$

要求使均方误差为最小，

$$\begin{aligned} E[z(mT) - a_m]^2 &= E\left[\sum_{n=-N}^N c_n y(mT - nT) - a_m\right]^2 \\ &= \sum_{n=-N}^N \sum_{k=-N}^N c_n c_k R_Y(n - k) - 2 \sum_{k=-N}^N c_k R_{AY}(k) + E(a_m^2) \end{aligned}$$

$$R_Y(n - k) \triangleq E[y(mT - nT) y(mT - kT)]$$

$$R_{YA}(k) \triangleq E[y(mT - kT) \cdot a_m]$$

对 c_k 求导，并置导数为零，可求出最佳抽头系数应满足，

$$\sum_{n=-N}^N c_n R_Y(n-k) = R_{YA}(k) \quad k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$$

从上面 $2N+1$ 个方程中解出 $c_k, k = 0, \pm 1, \dots, \pm N$

用矩阵表示 $\mathbf{R}_Y \cdot \mathbf{c} = \mathbf{R}_{YA}$

\mathbf{R}_Y 为 $(2N+1) \times (2N+1)$ 矩阵，它的第 i 行、第 j 列元素为 $R_Y(i-j)$;

$$\mathbf{R}_{YA}^T = (R_{YA}(-N), \dots, R_{YA}(0), \dots, R_{YA}(N))$$

$$\mathbf{c}^T = (c_{-N}, c_{-N+1}, \dots, c_{N-1}, c_N)$$

因此最小均方误差解为：

$$\mathbf{c}_{opt} = \mathbf{R}_Y^{-1} \mathbf{R}_{YA}$$

实际上接收端并不知道自相关系数 $R_Y(n)$ 和交叉相关系数 $R_{YA}(k)$, 可以通过在发送端发送测试信号, 在接收端用时间平均来估计 $R_Y(n)$ 和 $R_{YA}(k)$, 即

$$\hat{R}_Y(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(kT - nT) y(kT)$$

$$\hat{R}_{YA}(n) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K y(kT - nT) \cdot a_k$$

$\hat{R}_Y(n)$, $\hat{R}_{AY}(n)$ 代替 $R_Y(n)$ 和 $R_{YA}(k)$, 解出方程。

(3) 自适应线性均衡器

实际上最佳系数矢量不用通过矩阵求逆求得，而是通过迭代方式求出最佳系数矢量。最简单的迭代方法是最速下降法，叙述如下：

多变量标量函数， $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$

梯度方向 $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N} \right)$

与梯度相反的方向就是 $f(\mathbf{x})$ 减小最快的方向。

为了求出 $f(\mathbf{x})$ 的极小值，可以任取一点 \mathbf{x}_0 作为初始值，计算在 \mathbf{x}_0 点的梯度方向 \mathbf{g}_0 ，然后在负梯度方向给一个改变量 $\Delta \cdot \mathbf{g}_0$ ，得到

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 - \Delta \cdot \mathbf{g}_0$$

其中 Δ 是每次改变量的步长。然后再在点 \mathbf{x}_1 的负梯度方向改变，如此迭代进行下去。

设在第 k 次迭代时在点 \mathbf{x}_k ，该点的梯度方向为 \mathbf{g}_k ，于是在负梯度方向上给点 \mathbf{x}_k 一个改变量 $\Delta \cdot \mathbf{g}_k$ ，得到

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \Delta \cdot \mathbf{g}_k$$

为了保证迭代收敛到 $f(\mathbf{x})$ 的最小值位置 \mathbf{x}_{opt} ，步长 Δ 不能太大，使得当 $k \rightarrow \infty$ ， $\mathbf{g}_k \rightarrow 0$ ，从而 $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_{opt}$ 。另外如果 Δ 太小则收敛速度很慢。

用最速下降法求均衡器最佳抽头系数时，标量函数就是均方误差：

$$f(\mathbf{c}) = E \left[z(mT) - a_m \right]^2$$

在 \mathbf{c} 点梯度方向 $\mathbf{g}(\mathbf{c}) = \mathbf{R}_Y \cdot \mathbf{c} - \mathbf{R}_{YA}$

在逐次迭代中，第 $k+1$ 次迭代的抽头值为

$$\mathbf{c}_{k+1} = \mathbf{c}_k - \Delta \cdot \mathbf{g}_k$$

其中 $\mathbf{g}_k = \mathbf{R}_Y \cdot \mathbf{c}_k - \mathbf{R}_{YA}$

实际上 \mathbf{R}_Y 和 \mathbf{R}_{YA} 也是不知道的，但由于

$$\frac{\partial E[z(mT) - a_m]^2}{\partial c_i} = 2E\left[\left(\sum_{n=-N}^N c_n y(mT - nT) - a_m\right) \cdot y(mT - iT)\right]$$
$$= 2E[e_m \cdot y(mT - iT)]$$

其中**误差值** $e_m = \sum_{n=-N}^N c_n y(mT - nT) - a_m$

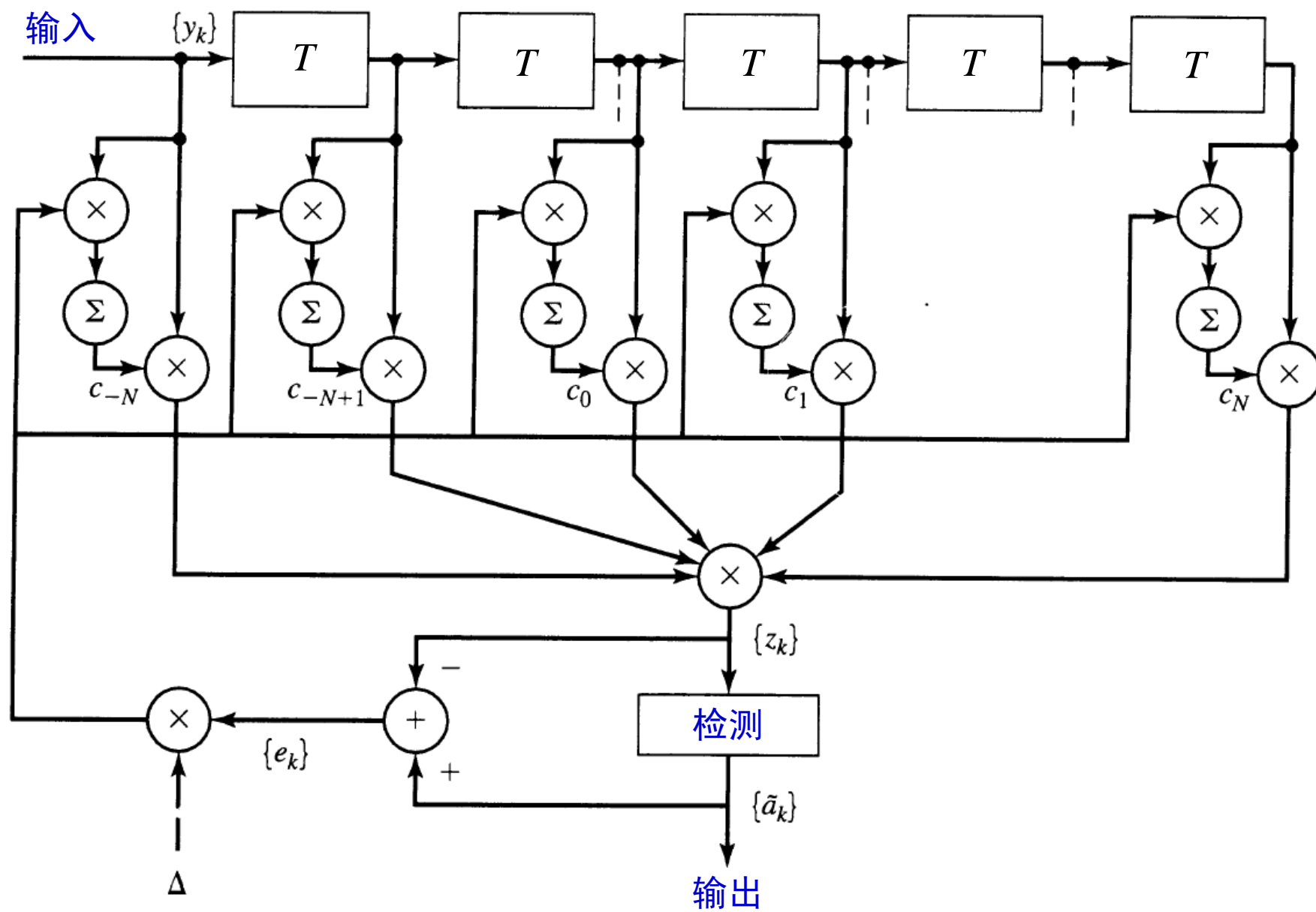
梯度矢量 $\mathbf{g} = 2E[e_m \cdot \mathbf{y}(mT)]$

$$\mathbf{y}^T(mT) = (y(mT + NT), y(mT + (N-1)T), \dots, y(mT - NT))$$

可以把下式作为第 m 次迭代时**梯度矢量的估计值**

$$\hat{\mathbf{g}}_m = e_m \cdot \mathbf{y}(mT)$$

其中系数2，归入到步长 Δ 。



第六章小结

- 1、介绍了几种基本的基带信号，以及相应的频谱计算。
- 2、为使基带信号适合于在基带信道上传输，待传的数字序列要经过线路编码（或称调制编码），使数字码型序列满足某些频谱特征要求和传输效率要求。如AMI码，HDB3码，双相码，CMI码，Miller码，和nBmB。
- 3、加性白高斯噪声(AWGN)信道是一种仅存在加性高斯噪声影响，不存在信道带宽限制的信道。在AWGN信道上接收到信号需经过解调和检测，才能恢复成所发送符号。解调把接收到的信号恢复成最佳的成型基带脉冲；检测是通过采样、判决，确定波形所代表的符号。
- 4、介绍了信号空间的概念，把信号视为 N 维矢量空间中的矢量，而接收到的噪声中与信号空间正交的分量是与解调无关的分量，因此接收信号 $r(t) = s(t) + n(t)$ 中与解调有关的充分统计量是 $r(t)$ 在信号空间中的投影。这种投影运算可以用基函数相关器或等价地用匹配滤波器来实现。

5、与信号 $s(t)$ 相匹配的匹配滤波器的脉冲相应为，

$$h(t) = \begin{cases} s(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

由此可得到相应的频率传递函数。在所有线性滤波器中，当输入信号为 $r(t) = s(t) + n(t)$ 时，与 $s(t)$ 相匹配的匹配滤波器能获得最大输出信噪比。

6、常用的最佳检测准则有两个，一个称为最大后验概率(MAP)准则，另一个称为最大似然(ML)准则。当发送信号等概率时，最大后验概率(MAP)准则等价于最大似然(ML)准则。在高斯噪声情况下，最大似然准则相当于最短距离准则，也就是把离接收信号在信号空间中投影最近的信号点判为发送信号。进一步若各个信号都是等能量的，则最大似然准则就是最大相关准则，也就是选与接收到信号最大相关的信号判为发送信号。

- 7、介绍了AWGN信道上几种基本基带信号传输的误符号率计算。包括对映信号、正交信号、一般的等能量二进制信号、 M 进制PAM和 M 进制正交信号。信号空间中信号点分得越开，则误符号率越小。因此当符号能量受限时， M 越大则误符号率越大；而对 M 进制正交信号，由于当 M 增大时，信号空间维数变大，使得信号点之间的距离反而变大，所以误符号率减小，但是这是以系统带宽增加为代价。
- 8、带限信道是指频带宽度有限的信道。一般带限信道在带内并非理想（理想是指幅频特性是理想矩形，相频特性是理想线性）。带限信道对于信号传输的影响除了减小接收信号的能量外，更主要的是引起码间干扰(ISI)。
- 9、介绍了对于数字通信系统测试和调试具有重要意义的“眼图”。
- 10、介绍了无码间干扰传输的奈奎斯特准则，当信道带宽为 W (Hz)时，无码间干扰传输的最高符号传输率为 $2W$ （称为奈奎斯特码率）。利用升余弦频谱信号可以实现任意低于 $2W$ 波特的无码间干扰传输，代价是降低了频带利用率。

- 11、部分响应系统有意识地引入可控的码间干扰来消除码间干扰，使得符号率达到奈奎斯特码率。实现部分响应系统的一个重要技术是利用预编码消除误码扩散。采用部分响应系统的一个缺点是误符号率有所增加。
- 12、在利用升余弦频谱信号或利用部分响应系统的数字传输系统中，最佳系统设计要求发送滤波器与接收滤波器的级联频率响应等于升余弦频谱或部分响应系统频谱，而且收、发滤波器对分此频谱，以满足匹配滤波器的要求。
- 13、对于固定的、而且已知特性的非理想带限信道，为了消除由于信道非理想所引起的严重码间干扰，要求收、发滤波器与信道级联后满足升余弦频谱特征，而且接收滤波器要设计成与被接收到信号相匹配形式。
- 14、对于时变的或特性未知的非理想带限信道，可以采用均衡器或自适应均衡器来消除码间干扰，这时接收、发送滤波器仍按理想带限信道情况设计。

- 15、可以用有限脉冲响应滤波器作为码间干扰信道的离散时间模型。迫零(FZ)均衡器是非理想带限信道 $C(f)$ 的逆滤波器，它使码间干扰为零，但迫零均衡器会使噪声功率增加。
- 16、线性时域均衡器可以用横向滤波器实现。如果横向滤波器的抽头设计得使码间干扰值为零，则称为迫零算法；如果均衡器设计得使输出均方误差最小，则称为最小均方误差(MMSE)算法。
- 17、均衡器的最佳抽头值可以通过迭代、递归方式求出，不一定需要周期地发送测试信号。这种自适应均衡器适用于参数时变的非理想带限信道。