DSP

——by XZQ

第1、2章---绪论、离散信号与系统

1. **数字信号处理的优势**：精度高、可靠性高、灵活性强、便于大规模集成化、便于加密处理、对低频信号尤为优越。
2. **模拟域和数字域的频率**对应关系：$\omega=\Omega T$
3. **两大类离散系统**（用差分方程描述）：
   - FIR（非递归型）：$y(n)=\sum_{i=0}^{N}a_ix(n-i)$
   - IIR（递归型）：$y(n)=\sum_{i=0}^{N}a_ix(n-i)+\sum_{i=1}^{N}b_iy(n-i)$
4. **留数法求Z反变换**（此外还有幂级数法、部分分式法）
   - 分母多项式z的阶次比分子多项式z的阶次高二阶或二阶以上：如果在围线C内有多阶极点而C外没有多阶极点，可以改求C外极点的留数之和并取负号。
   - 否则：要考虑∞点的留数
5. 一个因果稳定系统的传输函数的全部极点必须在单位圆内。（收敛域最外边极点的外边，需要包含单位圆）
6. **S平面到Z平面的映射关系**（$x_p(t)$的拉氏变换和$x(n)$的Z变换）：

   $$z=e^{sT}$$

   这是多对一的映射。
7. **Z平面判断系统频率响应**：绕着单位圆转

   $$H(e^{j\omega})=K\cdot\frac{\text{到各零点距离乘积}}{\text{到各极点距离乘积}}$$

   - 平面原点处的零极点不影响系统的幅频特性。
   - 极点主要影响幅频特性的峰值，越靠近单位圆，峰值越高越尖锐，极点在单位圆上时该点的频响将出现∞，在单位圆外系统不稳定。
   - 零点主要影响幅频特性的谷值，越靠近单位圆谷值越小，在单位圆上时幅度为零，零点可以在单位圆外。

第3章---DFT&FFT

1. **DFS**：离散周期序列，时域上是离散序列的周期延拓（卷积冲激串），频域上是周期性频谱的冲激串采样（乘以冲激串）

   $$\mathrm{DTFT}\left\{\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\delta(n-mN)\right\}=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

   $$\tilde{x}(n)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x(n-rN)=x(n)*\sum_{r=-\infty}^{+\infty}\delta(n-rN)$$

   $$\mathrm{DTFT}\left\{\tilde{x}(n)\right\}=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left(X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}\right)\times\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{N}k\right)$$

记$\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$，周期为$N$

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-nk}$$

$$\tilde{X}(k)=\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{nk}$$

其中，$W_N=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$

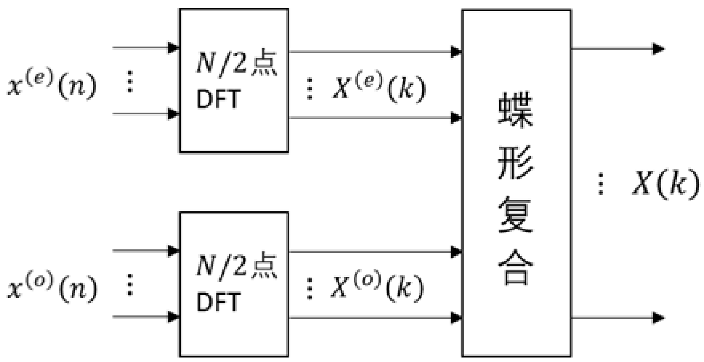
2. **DFT**：DFS的主值序列，在时域，频域都只取$\{0,1,...,N-1\}$
3. DFT的点数不应低于$x(n)$的长度。
4. 两个有限长序列，时域的循环卷积等于频域的相乘。为什么是循环卷积：本质上还是DFS取主值序列。
5. N点循环卷积：线性卷积结果以N为周期延拓后相加
6. **用循环卷积计算线性卷积**：
   - 重叠保留法：$x(n)$每段（有效）输入长为N，$h(n)$长为M，则$x(n)$每段长度为$N+(M-1)$，前面补$(M-1)$个零或者重叠。每一段进行$N+(M-1)$点循环卷积，保留后N个，直接拼接。
   - 重叠相加法：$x(n)$每段（有效）输入长为N，$h(n)$长为M，则$x(n)$每段长度为N（无重叠）。分段进行线性卷积，分段输出长为$N+(M-1)$。将首尾$(M-1)$点重叠相加，进行衔接。
7. **信号的频谱分析**：

   频率分辨率：DFT分析频谱时的最小频率间隔

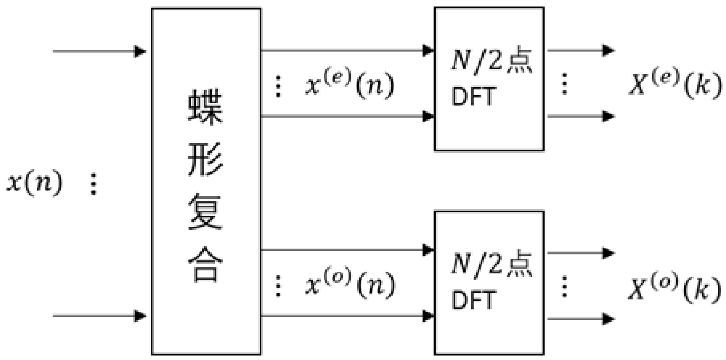
$$\Delta f=\frac{f_s}{N}=\frac{1}{NT}$$

   - 栅栏效应：离散化的频谱。增加DFT点数（补零）可以减轻，但是不会增加频谱分析精度。
   - 频域混叠
   - 频谱泄露：时域加窗，窗函数是有限长的，在频域上会有拖尾。频谱泄漏的存在必然会导致频域混叠。

   提高频谱准确程度：时域取样前滤波、选取恰当取样频率、增大窗函数长度、变换窗函数形状。
8. **FFT**：核心思想是，通过迭代，反复利用低点数的DFT完成高点数的DFT计算来降低运算量。**一次蝶形运算包含一次复乘和两次复加。**N点FFT，一共$\frac{N}{2}\log_2 N$次复乘，$N\log_2 N$次复加。
   - 基2-DIT-FFT



   - 基2-DIF-FFT



- 基2-DIT-IFFT

  DIT-FFT流图箭头倒转，旋转因子取共轭。由于IDFT公式前面有个系数$\frac{1}{N}$，所以每一级都要乘一个0.5的系数。

第4章-IIR滤波器设计

1. **滤波器性能指标**：①过渡带、②通带波动、③阻带最小衰减
2. **数字滤波器的设计过程**：
   1. 确定滤波器的性能指标
   2. 用一个因果系统的传输函数去逼近，可分为IIR和FIR
   3. 用一个有限精度的运算去实现这个传输函数，包括选择运算结构（直接型、正准型、级联型、并联型），合适的字长，有效的数字处理方法
3. **模拟原型设计法**：
   1. 设计模拟低通滤波器（原型低通滤波器）
   2. （模拟）频率变换：从低通到高通、带通、带阻
   3. 模拟-数字滤波器变换：冲激响应不变法、双线性变换法
4. $H(s)$的**零极点选择**：
   1. 根据不同的逼近函数，确定平方幅度响应$|H(j\Omega)|^2$的表达式。
   2. 根据$|H(j\Omega)|^2 = H(s)\cdot H(-s)|_{s=j\Omega}$，确定$H(s)\cdot H(-s)$表达式。
   3. **极点选取**：S平面左半平面的极点，以保证稳定。
   4. **零点选取**：为了最小相位延迟，取左半平面的零点，虚轴上偶次零点取一半。
5. **巴特沃斯滤波器**：Ω_c为3dB截止频率

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+(\Omega/\Omega_c)^{2N}}$$

   - 阶数N增大，通带内波动越小，过渡带越窄。
   - 低通滤波器的指标：通带截止频率Ω_p、3dB截止频率Ω_c、阻带起始频率Ω_s，通带衰减A_p(dB)，阻带衰减A_s(dB)
   - 根据给定指标$A_p, \Omega_p, A_s, \Omega_s$，计算满足的最小的$N$。
   - $p = \frac{s}{\Omega_c}$，归一化极点$p_k = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{\pi}{2}\frac{(2k+1)}{N}}$，取左半平面的极点，得到归一化传输函数$H(p)$。
   - 计算$H(s) = H(p)|_{p=\frac{s}{\Omega_c}}$
6. 切比雪夫滤波器：

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 C_N(\Omega/\Omega_p)}$$

   - 和巴特沃斯相比，同样的阶数，切比雪夫的阻带衰减更高。
   - 通带内等幅波动，N越大波动次数越多，通带外单调下降。
   - $2N$个极点位于S平面的一个椭圆上。

7. **模拟频率变换**：
    - 对于带通和带阻滤波器，需要满足：$\Omega_{p_1}\Omega_{p_2}=\Omega_{s_1}\Omega_{s_2}$。
    - 如果不满足，需要调节参数：带通改Ω_s，带阻改Ω_p。让过渡带变窄。
8. **冲击响应不变法**：
    - 冲激响应准则：$h(n)=Th_a(nT)$
    - 只适用于**带限**或近似带限的模拟滤波器（**低通和带通**）。不带限或者阻带存在振荡，不适用。
    - 取样间隔T太长会产生较大的混叠失真
    - $\omega=\Omega T$，$z=e^{sT}$
9. **双线性变换法**：
    - 目前最普遍采用的设计方法，比冲激响应不变法简单，对滤波器类型没有限制，低通、高通、带通、带阻都可以直接设计。
    - 优点：不存在频域混叠失真；代价：引入了非线性（**相位失真**）
    - 想法：对模拟滤波器中的基本单元——积分器s^{-1}进行数字化实现

    $$s=\frac{2}{T}\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

    - **频率预畸变**：$\omega=\frac{2}{T}\tan\frac{\omega}{2}$
10. **IIR滤波器的实现结构**：
    - **直接**Ⅰ型：根据IIR定义式直接画；直接Ⅱ型：将Ⅰ型的两块交换位置。
    - **正准**Ⅰ型：将直接Ⅱ型相邻的两个z^{-1}合并成一个；正准Ⅱ型：转置定理。
    - **直接型和正准型的缺点**：系统频响对于零极点位置敏感（受有限字长效应影响大），尤其当滤波器阶次较高时。调节零极点不方便。
    - **级联型**：由一阶（实根）、二阶（共轭复根）子网络级联而成。便于调节零极点，但有误差传播。
    - **并联型**：支路互相独立，误差互不影响，对有限字长不敏感；可单独控制极点，不可调节零点

第5章-FIR滤波器设计

1. **IIR和FIR优缺点比较**：
    - IIR易于实现、**阶数低**，但无法直接达到线性相位
    - FIR可严格**线性相位**，**稳定**系统，但阶数高，延迟大
2. **恒相延时和恒群延时**：
    - 同时成立：$\theta(\omega)=-\frac{N-1}{2}\omega$，$h(n)$关于$\frac{N-1}{2}$偶对称
    - 仅恒群延时：$\theta(\omega)=\frac{\pi}{2}-\frac{N-1}{2}\omega$，$h(n)$关于$\frac{N-1}{2}$奇对称
    - 当$h(n)$偶对称、N为偶数，或者 当$h(n)$奇对称、N为奇数，$H(\pi)\equiv 0$，不能有高通部分
3. **线性相位FIR滤波器零点分布特性**：$z_i, z_i^*, \frac{1}{z_i}, \frac{1}{z_i^*}$
4. **窗函数法**：时域设计方法
    - **过渡带宽度**取决于窗谱的**主瓣**宽度。对某一特定窗函数，增大窗的宽度N可使过渡带变窄。
    - **波动**由窗谱的**旁瓣**引起，幅度取决于旁瓣相对幅度，多少取决于旁瓣数量。波动幅度强弱取决于窗函数。
    - **窗函数**影响过渡带宽、肩峰和波动大小。
    - 要求：主瓣宽度尽可能窄，以使过渡带尽量陡；最大旁瓣相对于主瓣尽可能小。两者相互矛盾。通常**增加主瓣宽度换取对旁瓣的抑制。**
    - 设计流程：①由阻带衰减确定窗函数类型；②由过渡带宽确定窗口长度N
    - 窗函数：矩形窗（-21dB，$\frac{1.8\pi}{N}$），汉宁窗（-44dB，$\frac{6.2\pi}{N}$），海明窗（-53dB，$\frac{6.6\pi}{N}$）
5. **频率取样法**：频域设计方法

- **缺点**：不能精确确定通带和阻带的边缘频率。
- 根据频域抽样点$H(k) = H_k \cdot e^{j\theta_k}$，用变换域内插公式得到频率响应$H(e^{j\omega})$
- 在截止频率ω_c处不跳变，人为插一个值，能够减小通带和阻带的波动，但会增加过渡带宽度。
- 如果不允许增加过渡带宽，又希望可以增加阻带衰减，可以增加取样点数N。

6. **FIR滤波器的实现结构**：
   - 对于$N-1$阶滤波器：在$z=0$处有$N-1$阶极点，在Z平面上有$N-1$个零点
   - 直接型：$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n}$
   - 级联型：$H(z)$因式分解成一阶/二阶因式乘积。每个子网络控制一对零点，可以独立调整，系统特性随**零点位置变化的灵敏度**优于横截型。所需的乘法运算量比直接型多。
   - 频率取样型：根据$H(k)$到$H(z)$的变换域内插公式，将$H(z)$的实现分为
     $\text{梳状滤波器} \times \text{无耗并联谐振器}$

     $$H(z) = \frac{1-z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-W_N^{-k} z^{-1}}$$

     理论上前者在单位圆上的零点和后者在单位圆上的极点能够抵消，但前者通过延时实现，是精确的，后者通过复乘实现，是不精确的。此时，零极点抵消不完全可能导致系统不稳定。需要将两者移到单位圆内。、

     优点：可以通过修改某一路的$H(k)$来调整频率响应；当$H(k)=0$较多时，可以减少支路数量；并行计算
   - 线性相位FIR滤波器：$h(n)$有奇对称或者偶对称的特性，利用这一点，系统结构比直接型少一半乘法器。

第6章-有限字长效应

1. **定点制**：在整个运算中小数点在数码中的位置不变，在符号位和数据位之间。L是数据的位数，表示寄存器长度为$L+1$位，或字长$L+1$位。 定点制在整个运算过程中，所有运算结果的绝对值都不超过1。

   补码表示中：最小的数-1，最大的数$1-2^{-L}$。
2. **定点运算的缺点**：①动态范围小；②舍入/截断产生的百分比误差随着数的绝对值的减小而增加。
3. **浮点制**：$x = \pm M \times 2^{\pm c}$

   规格化的尾数$\frac{1}{2} \leq M < 1$。

   加法为将较小的一个数的尾数右移，直到两数的指数相同，然后尾数相加。 乘法为尾数相乘，指数相加。

   浮点制的**尾数字长**决定它的**运算精度**，而**指数字长**决定了它的**动态范围**。优点为增加动态范围和提高处理精度。硬件实现时成本根本增加，处理速度减慢。
4. **量化间距**：$q = 2^{-L}$
5. **量化误差**：$e = Q[x] - x$
   - 舍入：$-\frac{q}{2} \leq e \leq \frac{q}{2}, \quad m_e = 0, \quad \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$
   - 截尾：$-q \leq e \leq 0, \quad m_e = -\frac{q}{2}, \quad \sigma_e^2 = \frac{q^2}{12}$
6. 寄存器字长每增加**一位**，信噪比近似提高**6dB**。
7. **极点灵敏度**：系数b_k引起极点z_i位置的变化率：$\frac{\partial z_i}{\partial b_k}$
8. IIR**滤波器系数的有限字长带来的误差**：直接型误差 >级联型误差 >并联型误差 。

9. **极限环振荡**：
    - 颗粒型极限环振荡：没有输入后，衰减到一定幅度范围
    - 溢出振荡：加法器溢出，正数突变为负数

第7章-多抽样率系统

1. **模拟域方法的主要缺点**：由于 D/A和 A/D环节会引入信号重构和量化噪声，因此使信号产生失真。
2. 抽取后仍符合抽样定理的条件要求（2倍最高频率）则不会引入失真。一般需要在抽取操作之前对信号进行限带处理。频谱展宽变为D倍，幅度变为$1/D$。抽取后不产生混叠失真，原信号x(n)的带宽必须限制在$[-\pi/D,\pi/D]$内。
3. 以整数因子I内插，得到了一个抽样率提高I倍的信号，频谱收缩变为$\frac{1}{I}$，幅度变为I倍。却存在**一个镜像失真**的信号，需要用增益为I的低通滤波。
4. **多抽样率系统的高效实现**：
    - 多相实现：将FIR滤波器的$h(n)$分为M组，每组长度为L。L为抽取/内插倍率。
    - 直接实现：令分组数$M=1$，分组长度$L=N$，退化为直接型。再利用抽取/内插的流图。
    - 线性相位FIR的高效结构：直接实现的基础上，根据$h(n)$对称性，减少一半乘法器。