第二章习题解答

2-3 一个带宽为 50Hz 的低通信号 $x(t)$ 以奈奎斯特速率抽样，抽样值如下所示：

$$x(nT_s)=\begin{cases}-1, & -4\le n<0\\ 1, & 0<n\le 4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

(1) 确定 $x(0.005)$；

(2) 此信号是功率型信号还是能量型信号？确定其功率或者能量值。

[解] (1) 由采样定理

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(kT_s)\operatorname{sinc}\left[2W(t-kT_s)\right]，\ T_s=\frac{1}{2W}=0.01(s)$$

$$x(0.005)=\sum_{k=1}^{4}\left[\operatorname{sinc}(0.5-k)-\operatorname{sinc}(0.5+k)\right]$$

$$=\operatorname{sinc}(-0.5)-\operatorname{sinc}(4.5)$$

$$=\frac{\sin(0.5\pi)}{0.5\pi}-\frac{\sin(4.5\pi)}{4.5\pi}=0.566$$

(2) 是能量有限型信号，由于 $\left\{\operatorname{sinc}(t-kT_s),k=0,\pm1,\cdots\right\}$ 是正交规范基，所以

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^2dx=\frac{1}{100}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left|x(kT_s)\right|^2=\frac{8}{100}。$$

2-11 带通信号 $x(t)=\operatorname{sinc}(t)\cdot\cos2\pi f_0t$ 通过具有脉冲响应 $h(t)=\operatorname{sinc}^2(t)\cdot\sin2\pi f_0t$ 的带通滤波器。利用输入信号和脉冲响应的低通等效表示形式，找出输出信号的低通等效形式，并由此确定输出信号 $y(t)$。

[解]

$$x(t)=\operatorname{sinc}(t)\cdot\cos2\pi f_0t\Rightarrow\hat{x}(t)=\operatorname{sinc}(t)\cdot\sin2\pi f_0t$$

$$x_l(t)=\operatorname{sinc}(t)$$

$$h(t)=\operatorname{sinc}^2(t)\cdot\sin2\pi f_0t\Rightarrow\hat{h}(t)=-\operatorname{sinc}^2(t)\cdot\cos2\pi f_0t$$

$$h_l(t)=\operatorname{sinc}^2(t)e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

$$y(t)=\mathrm{Re}\left[y_l(t)e^{j2\pi f_0 t}\right]$$

其中 $$y_l(t)=x_l(t)\otimes h_l(t)$$

$$Y_l(f)=\frac{1}{2}X_l(f)H_l(f)$$

$$X_l(f)=\begin{cases}1 & |f|<\frac{1}{2}\\ 0 & |f|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$H_l(f)=\begin{cases}(1-f)/j & 0\le f\le 1\\ (1+f)/j & -1\le f\le 0\end{cases}$$

所以 $$Y_l(f)=\begin{cases}(1-f)/2j & 0\le f<\frac{1}{2}\\ (1+f)/2j & -\frac{1}{2}\le f\le 0\end{cases}$$

$$y_l(t)=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}Y_l(f)e^{j2\pi ft}df$$

$$=\frac{1}{2j}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-f)e^{j2\pi ft}df+\frac{1}{2j}\int_{-\frac{1}{2}}^{0}(1+f)e^{j2\pi ft}df$$

$$=\frac{\sin\pi t}{\pi t}-\frac{1}{2\pi t}\sin\pi t+\frac{1}{2\pi^2t^2}-\frac{1}{2\pi^2t^2}(\cos\pi t)$$

$$=\frac{-j}{4\pi t}\sin\pi t-\frac{j}{4\pi^2t^2}(1-\cos\pi t)=j\left\{-\frac{1}{4\pi t}\sin\pi t+\frac{1}{4\pi^2t^2}(\cos\pi t-1)\right\}$$

$$y(t)=\left\{\frac{1}{4\pi^2t^2}(1-\cos\pi t)+\frac{1}{4\pi t}\sin\pi t\right\}\sin(2\pi f_0 t)$$

2-19 设随机过程 $\xi(t)$ 可表示成

$$\xi(t)=2\cos(2\pi t+\theta)$$

式中 θ 是一个随机变量，且 $P(\theta=0)=P(\theta=\pi/2)=1/2$，试求 $E[\xi(t)]$ 以及 $R_\xi(0,1)$。

[解]

$$E[\xi(t)]=P(\theta=0)\cdot 2\cos(2\pi t)+P(\theta=\frac{\pi}{2})\cdot 2\cos(2\pi t+\frac{\pi}{2})$$
$$=\cos(2\pi t)-\sin(2\pi t)$$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi}(0,1) &= E[2\cos\theta \cdot 2\cos(2\pi+\theta)] \\
&= P(\theta=0)\cdot 4 + P(\theta=\frac{\pi}{2})\cdot 4\cos\frac{\pi}{2}\cos\frac{5\pi}{2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

2-25 将一个均值为零，功率谱密度为 $N_0/2$ 的高斯白噪声加到一个中心频率为 f_c，带宽为 B 的理想滤波器上，如图 P2-25 所示，

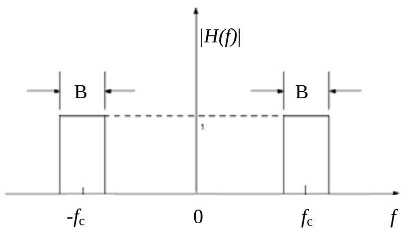


图 P2-25

（1） 滤波器输出噪声的自相关函数；

（2）写出输出噪声的一维概率密度函数；

［解］ 输出噪声功率谱为

$$
P_N(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f-f_c| < \frac{B}{2} \\ 0 & |f-f_c| \ge \frac{B}{2} \end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} P_N(f) e^{j2\pi f\tau} df \\
&= N_0 B \cdot \mathrm{sinc}(B\tau)\cdot \cos(2\pi f_c \tau)
\end{aligned}
$$

输出为高斯噪声，均值为 0，方差为 $\sigma^2 = N_0 B$，一维概率密度为

$$
f_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right\}
$$

2-30 若 $\xi(t)$ 是平稳随机过程，自相关函数为 $R_{\xi}(\tau)$，试求它通过图 P2-30 系统后的自相关函数及功率谱密度。

[解] 有图知，输出为

$$Y(t) = \xi(t) + \xi(t-T),$$

所以，输出的自相关函数为

$$
\begin{aligned}
E[Y(t_1)Y(t_2)] &= E[(\xi(t_1)+\xi(t_1-T))(\xi(t_2)+\xi(t_2-T))] \\
&= E[\xi(t_1)\xi(t_2)] + E[\xi(t_1-T)\xi(t_2)] \\
&\quad + E[\xi(t_1)\xi(t_2-T)] + E[\xi(t_1-T)\xi(t_2-T)] \\
&= 2R_\xi(\tau) + R_\xi(\tau-T) + R_\xi(\tau+T)
\end{aligned}
$$

而功率谱密度为

$$
\begin{aligned}
P_Y(f) &= \mathcal{F}[2R_\xi(\tau)+R_\xi(\tau-T)+R_\xi(\tau+T)] \\
&= P_\xi(f)(2+e^{-j2\pi fT}+e^{j2\pi fT}) \\
&= 2P_\xi(f)(1+\cos 2\pi fT)
\end{aligned}
$$

2-35 设两个平稳过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 之间有以下关系：

$$Y(t) = X(t)\cos(2\pi f_0 t+\Theta) - \hat{X}(t)\sin(2\pi f_0 t+\Theta)$$

其中 f_0 为常数，Θ 是 $[0,2\pi]$ 上均匀分布随机变量，Θ 与 $X(t)$ 统计独立。若已知 $X(t)$ 的功率谱密度如图 P2-35 所示，试求 $Y(t)$ 的功率谱密度，并画出其图形。

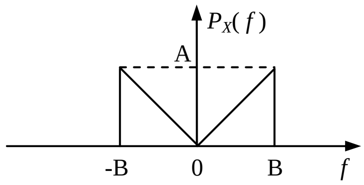


图 P2-35

[解] $Y(t) = \left[X(t)\cos\theta - \hat{X}(t)\sin\theta\right]\cos 2\pi f_0 t$

$$-\left[X(t)\sin\theta + \hat{X}(t)\cos\theta\right]\sin 2\pi f_0 t$$

记 $Z(t) = X(t)\cos\theta - \hat{X}(t)\sin\theta$

$$\hat{Z}(t) = \hat{X}(t)\cos\theta - \hat{\hat{X}}(t)\sin\theta = X(t)\sin\theta + \hat{X}(t)\cos\theta$$

所以 $Y(t) = Z(t)\cos 2\pi f_0 t - \hat{Z}(t)\sin 2\pi f_0 t$

$$R_Y(\tau) = E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]$$

$$= R_Z(\tau)\cos 2\pi f_0\tau - \hat{R}_Z(\tau)\sin 2\pi f_0\tau$$

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau)\cos^2\theta + R_X(\tau)\sin^2\theta$$

$$-E\left[X(t)\hat{X}(t+\tau)\right]\cdot\overline{\cos\theta\cdot\sin\theta} - E\left[\hat{X}(t)X(t+\tau)\right]\cdot\overline{\cos\theta\cdot\sin\theta}$$

$$= R_X(\tau)$$

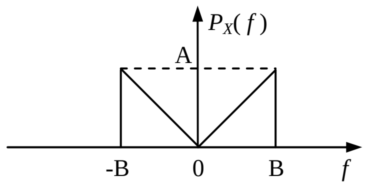
所以 $P_Z(f)=P_X(f)$

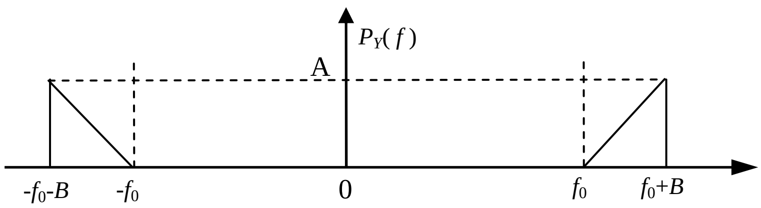
$$P_Y(f)=F\left[R_Y(\tau)\right]$$

$$=\frac{P_Z(f-f_0)+P_Z(f+f_0)}{2}-\left[-j\,\mathrm{sgn}(f)P_Z(f)\right]\otimes\frac{\delta(f-f_0)-\delta(f+f_0)}{2j}$$

$$=\frac{P_Z(f-f_0)}{2}\left[1+\mathrm{sgn}(f-f_0)\right]+\frac{P_Z(f+f_0)}{2}\left[1-\mathrm{sgn}(f+f_0)\right]$$

$$=\begin{cases}P_Z(f-f_0) & f_0\le f\le f+B\\ P_Z(f+f_0) & -B-f_0\le f\le -f_0\\ 0 & -f_0\le f\le f_0\end{cases}$$





2-37 定义随机过程 $X(t)=A+Bt$，其中 A、B 是互相独立的随机变量，并且在[-1, 1]上均匀分布。求 $m_X(t)$ 与 $R_X(t_1,\ t_2)$ 。

[解] $X(t)=A+Bt$

$$E\left[X(t)\right]=E\left[A\right]+E\left[Bt\right]=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[(A+Bt_1)(A+Bt_2)\right]$$

$$=E\left[A^2\right]+E\left[B^2\right]t_1t_2$$

$$=\frac{1}{3}(1+t_1t_2)$$