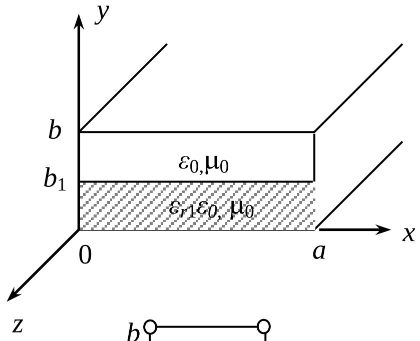
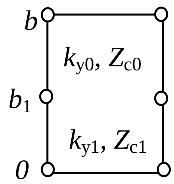
三、（10 分）用横向谐振导出部分填充介质的矩形波导的 TE 模色散关系 k_z～ω

解：





矩形波导 x 向均匀，

$$k_x = \frac{m\pi}{a}$$

y 向等效电路如右图

$$k_{y1} = \sqrt{\varepsilon_{r1}k_0^2 - k_x^2 - k_z^2} = \sqrt{\varepsilon_{r1}k_0^2 - (\frac{m\pi}{a})^2 - k_z^2}$$

$$k_{y0} = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_z^2} = \sqrt{k_0^2 - (\frac{m\pi}{a})^2 - k_z^2} \quad (\text{cm}^{-1})$$

$$Z_{c1} = \frac{1}{Y_{c1}} = \frac{\omega\mu_0}{k_{y1}}$$

$$Z_{c0} = \frac{1}{Y_{c0}} = \frac{\omega\mu_0}{k_{y0}}$$

利用横向谐振原理，取 $b=b_1$ 介质交界面为参考面

由 $\overset{\uparrow}{Z}+\overset{\downarrow}{Z}=0$ 可得色散方程

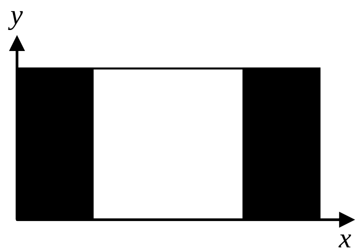
$$jZ_{c1}\tan k_{y1}b_1 + jZ_{c0}\tan k_{y0}(b-b_1) = 0$$

由 $\overset{\uparrow}{Y}+\overset{\downarrow}{Y}=0$ 可得色散方程

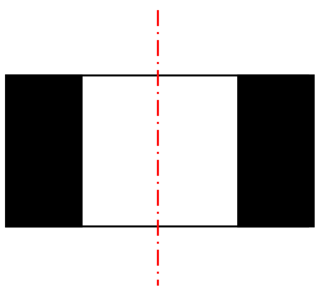
$$jY_{c1}\tan k_{y1}b_1 + jY_{c0}\tan k_{y0}(b-b_1) = 0$$

其中，Z_{c1}，Y_{c1}，k_{y1}，Z_{c0}，Y_{c0}，k_{y0} 如上

1. 如图所示为一个矩形波导的横截面，宽度为 a，高度为 b，$a=2b$，二侧各填充宽度为 $a/4$、相对介电常数为 ε_r 的介质。利用横向谐振原理，分别求奇对称 TE 模、偶对称 TE 模的色散关系式（考虑 $k_y = 0$ 的情况）。

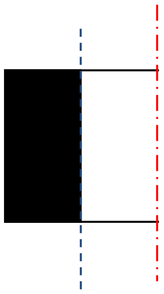


解：



$$k_{x1} = \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_z^2}$$

$$k_{x2} = \sqrt{k_0^2 - k_z^2}$$



取参考面为 $x=a/4$ 处

$$\overleftarrow{Z}+\overrightarrow{Z}=0$$

$k_y=0$，对于 TE 模，x 方向也是 TE 模：

$$Z_{c1}=\frac{\omega\mu}{k_{x1}}$$

$$Z_{c2}=\frac{\omega\mu}{k_{x2}}$$

$$k_{x1}=\sqrt{\varepsilon_r k_0^2-k_z^2}$$

$$k_{x2}=\sqrt{k_0^2-k_z^2}$$

$$k_0=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

（1）对称面开路：

$$jZ_{c1}\tan(k_{x1}a/4)+\frac{Z_{c2}}{j\tan(k_{x2}a/4)}=0$$

$$\frac{1}{k_{x1}}\tan(k_{x1}a/4)+\frac{1}{k_{x2}\tan(k_{x2}a/4)}=0$$

$$\tan(k_{x1}a/4)\tan(k_{x2}a/4)+\frac{k_{x1}}{k_{x2}}=0$$

$$\tan\left(\frac{a\sqrt{k_0^2-k_z^2}}{4}\right)\tan\left(\frac{a\sqrt{\varepsilon_r k_0^2-k_z^2}}{4}\right)+\frac{\sqrt{\varepsilon_r k_0^2-k_z^2}}{\sqrt{k_0^2-k_z^2}}=0$$

（2）对称面短路：

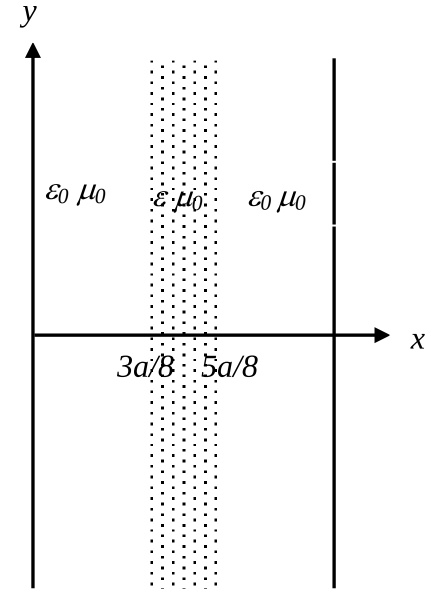
$$jZ_{c1}\tan(k_{x1}a/4)+jZ_{c2}\tan(k_{x2}a/4)=0$$

$$k_{x2}\tan(k_{x1}a/4)+k_{x1}\tan(k_{x2}a/4)=0$$

$$\sqrt{k_0^2 - k_z^2}\,\tan\left(\frac{a\sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_z^2}}{4}\right) + \sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_z^2}\,\tan\left(\frac{a\sqrt{k_0^2 - k_z^2}}{4}\right) = 0$$

$$\frac{\tan\left(\frac{a\sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_z^2}}{4}\right)}{\tan\left(\frac{a\sqrt{k_0^2 - k_z^2}}{4}\right)} + \frac{\sqrt{\varepsilon_r k_0^2 - k_z^2}}{\sqrt{k_0^2 - k_z^2}} = 0$$

2. 如图所示，一平行板波导相距为 a， $x<3a/8$ 和 $x>5a/8$ 区域是自由空间 (ε_0,μ_0)， $3a/8<x<5a/8$ 区域充满 (ε,μ_0) 的介质。假设波矢 k 在 $x-z$ 平面，波在 x 方向谐振，沿 z 向传播。



（1） 求该波导最低阶 TE 模（电场为 y 方向）的色散关系；

（2）若 $\varepsilon=9\varepsilon_0$ ， $a=2\text{cm}$ ，求截止频率。

解：（1）用传输线等效，TE 模的最低阶模，对称面为开路。

$$k_{x1}=\sqrt{k_1^2-k_z^2}=\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0-k_z^2}$$

$$k_{x2}=\sqrt{k_2^2-k_z^2}=\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0-k_z^2}$$

$$Y_1=\frac{k_{x1}}{\omega\mu_0},\quad Y_2=\frac{k_{x2}}{\omega\mu_0}$$

以 $x=3a/8$ 处为参考面，

$$\overleftarrow{Y}=-jY_1\,\text{ctg}(k_{x1}\frac{3a}{8}),\overrightarrow{Y}=jY_2\tan(k_{x2}\frac{a}{8})$$

由 $\overleftarrow{Y}+\overrightarrow{Y}=0$，

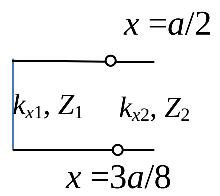
得色散方程： $-jY_1\,\text{ctg}(k_{x1}\frac{3a}{8})+jY_2\tan(k_{x2}\frac{a}{8})=0$

整理后得：
$$\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0-k_z^2}\,\text{ctg}(\frac{3a}{8}\sqrt{\omega^2\varepsilon_0\mu_0-k_z^2})-\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0-k_z^2}\tan(\frac{a}{8}\sqrt{\omega^2\varepsilon\mu_0-k_z^2})=0$$

（2）截止时， $k_z=0$， $k_{x1}=k_1=\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=k_0$， $k_{x2}=k_2=\omega\sqrt{\varepsilon\mu_0}=3k_0$， $Y_2=3Y_1$

$$k_0\,\text{ctg}(k_0\frac{3a}{8})-3k_0\tan(\frac{3a}{8}k_0)=0$$

$$\frac{k_0}{\tan(k_0\frac{3a}{8})}-3k_0\tan(\frac{3a}{8}k_0)=0$$



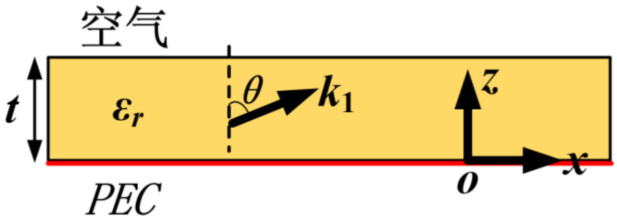
$$\tan(\frac{3a}{8}k_0)=\frac{\sqrt{3}}{3}\qquad \frac{3a}{8}k_0=\frac{\pi}{6}\qquad k_0=\frac{4\pi}{9a}\qquad \lambda_c=\frac{9a}{2}=9\text{cm}$$

$$f_c==\frac{c}{\lambda_c}=\frac{3\times10^8}{9\times10^{-2}}=0.333\times10^{10}\text{Hz}=3.33\text{GHz}$$

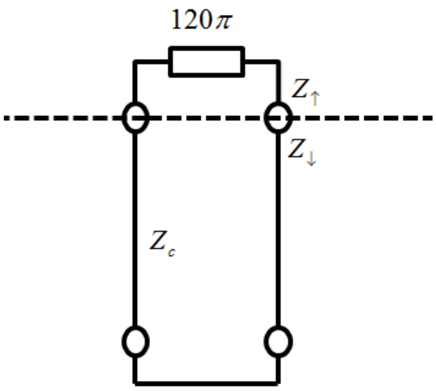
五、（15 分）介质底面有一完纯导体，如下图所示。介质的厚度为 t，相对介电常数为 $\varepsilon_r = 4$，有一以 θ 角度从介质内向介质外入射的平面波，电场指向 y 方向。

（1）当 θ 在何范围内，可以使得电磁功率无法辐射到自由空间远场区域？

（2）利用横向谐振条件列出该结构沿介质与空气交界面传播的 TE 波的色散方程。



解：（1）$\theta > \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}}\right) = \frac{\pi}{6}$ 　　3 分



（2）

$$Z_\uparrow = \frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}}$$ 3分

$$Z_\downarrow = j\frac{\omega\mu_0}{\sqrt{k_0^2\varepsilon_r - k_x^2}}\tan\left(\sqrt{k_0^2\varepsilon_r - k_x^2}t\right)$$ 3分

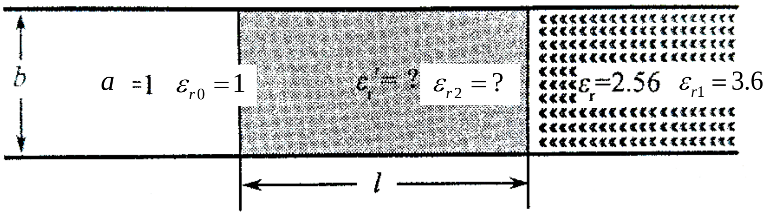
色散方程为：

$$\frac{1}{Z_\uparrow} + \frac{1}{Z_\downarrow} = 0$$ 3 分

化简可得

$$\frac{j\sqrt{4k_0^2 - k_x^2}}{\sqrt{k_0^2 - k_x^2}} = \tan\left(\sqrt{4k_0^2 - k_x^2}t\right)$$ 3 分

四、（20 分）一段填充空气的矩形波导要与一段横截面相同、填充介质（相对介电常数 $\varepsilon_{r1} = 3.6$）的矩形波导连接，中间借助于一段 1/4 波长变换器进行匹配，求匹配波导填充介质的相对介电常数 ε_{r2} 及变换器的长度 l。已知 a=2.5 cm，f=10 GHz，工作模式为 TE_{10} 模。（$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$，$\sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 120\pi\ (\Omega)$）



解：

空气中工作波长 $\lambda_0 = c/f = 3\ \text{cm}$

对于三个区域中的 TE_{10} 模，由横向谐振原理可得：$k_x = \pi/a$

纵向（z 方向）用传输线等效

空气中，$k_{z0} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}$，

空气中特征阻抗：$Z_{c0} = \frac{\omega\mu_0}{k_{0z}} = \frac{\omega\mu_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}} = \frac{120\pi}{0.8}\quad(\Omega)$

（上式利用了 $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$，　　$\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$）

电介质中，　$k_{z1} = \sqrt{\varepsilon_{r1}\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{r1}-(\lambda_0/2a)^2}$

特征阻抗：$Z_{c1} = \frac{\omega\mu_0}{k_{z1}} = \frac{\omega\mu_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{r1}-(\lambda_0/2a)^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r1}-(\lambda_0/2a)^2}} = \frac{120\pi}{1.8}\quad(\Omega)$

匹配段电介质中，　$k_{z2} = \sqrt{\varepsilon_r'\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r'-(\lambda_0/2a)^2}$

特征阻抗：$Z_{c2} = \frac{\omega\mu_0}{k_z'} = \frac{\omega\mu_0}{\frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_{r2}-(\lambda_0/2a)^2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{r2}-0.36}}\quad(\Omega)$

对于 1/4 波长变换器，有：$Z_{c2}^2 = Z_{c0}Z_{c1}$，即：$\frac{(120\pi)^2}{\varepsilon_{r2}-0.36} = \frac{120\pi}{0.8}\cdot\frac{120\pi}{1.8}$，

解得：$\varepsilon_{r2} = 1.8$

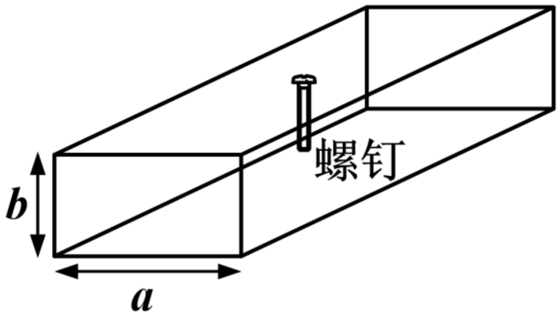
由此得匹配段的波导波长为 $\lambda_{g2} = \frac{2\pi}{k_{z2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_{r2}-(\lambda_0/2a)^2}} = \frac{3}{1.2} = 2.5\ \text{(cm)}$

所以匹配段（变换器）的长度 l 为 $l = \lambda_{g2}/4 = 0.625\ \text{(cm)}$

三、（15 分）矩形波导长边 a = 22.86 mm，宽边 b = 10.16 mm。

（1）试求该波导 TE_{10} 模式的截止频率 f_c、截止波长 λ_c、单模工作频段，作出 TE_{10} 模式在波导横截面上的电场矢量分布图。

（2）矩形波导无限长，在长边中心插入一螺钉，当螺钉足够长时，会形成 LC 串联谐振，作出此时矩形波导及螺钉的等效电路图；假设 L = 10 nH，C = 25.2 fF，试求解 10 GHz 时螺钉所在面处的反射系数大小，并作出在波导单模工作频率的**反射系数幅度示意图**。



解：（1）

$$f_c = \frac{c}{2a} = 6.56\ \text{GHz} \qquad 2分$$

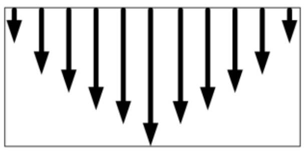
$$\lambda_c = 2a = 45.72\ \text{mm} \qquad 1分$$

第二个模式为TE_{20}模

$$f_{c1} = \frac{c}{a} = 13.12\ \text{GHz}$$

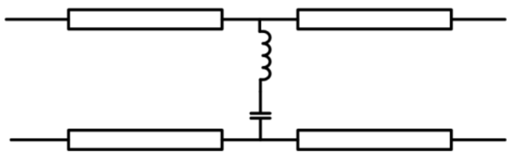
故单模工作频段为[6.56 GHz, 13.12 GHz]　　2分

$$k_z = \sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2}:$$



2 分

（2）



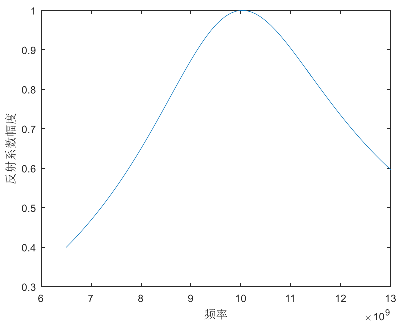
2 分

$$Z_{in} = Z_c \parallel \left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right), Z_c = \frac{\omega \mu_0}{k_z}$$ 2分

$$\Gamma = \frac{Z_{in} - Z_c}{Z_{in} + Z_c}$$ 2分

10GHz 处，$|\Gamma| = 1$ 1 分

反射系数幅度示意图：



1 分

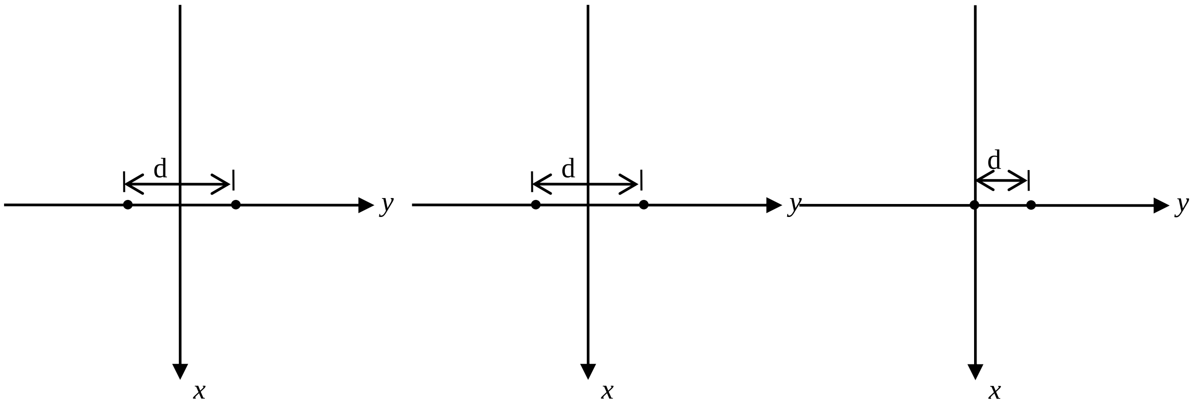
六.（15 分）画出两辐射单元（偶极子天线）组成的天线阵在 xoy 面的辐射方向图，并给出理论依据。

1）（5 分）d=λ/2, ψ=π;

2) （5 分）d=λ/2, ψ=0;

3) （5 分）d=λ/4, ψ=π/2

d 为两单元天线间距，ψ为两单元天线激励电流相位差，假定两单元天线激励电流相等。



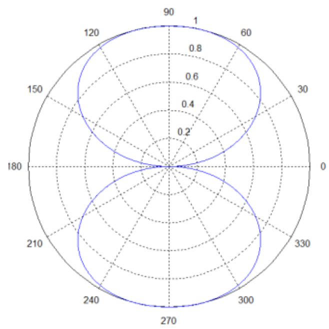
1）d=λ/2, ψ=π　　　　2） d=λ/2, ψ=0　　　　3）d=λ/4, ψ=π/2

解：1）两个辐射单元

$$|E_\theta| \sim \cos(\frac{kd\sin\theta\sin\varphi+\psi}{2})$$

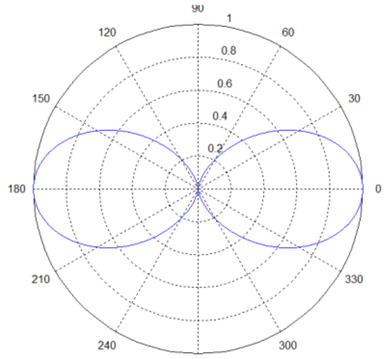
d =λ/2, ψ=π; *kd*=π，H 面对应θ=π/2，所以此时

$$|E_\theta| \sim |\cos(\frac{\pi}{2}\sin\varphi+\frac{\pi}{2})|$$



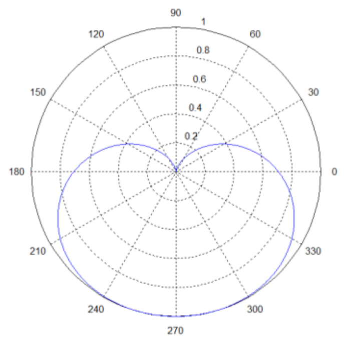
2）d=λ/2, ψ=0，*kd*=π

$$|E_\theta| \sim \cos(\frac{\pi}{2}\sin\varphi)$$



3）d=λ/4, ψ=π/2，*kd*=π/2

$$|E_\theta| \sim \cos(\frac{\pi}{4}\sin\varphi+\frac{\pi}{4})$$

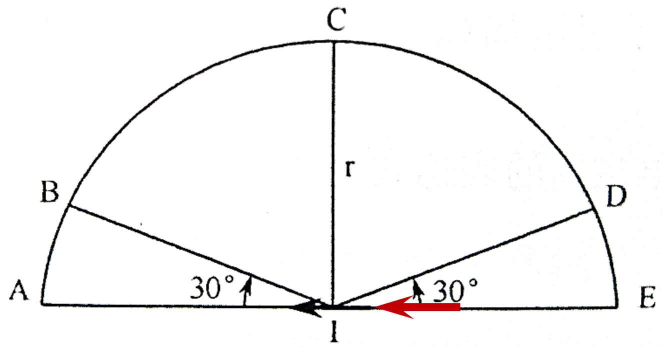


在 x-y 平面做出相应图即可。

五、（20 分）已知一电流元长 l=1cm，其上电流 I=1A，工作频率 f=300MHz。

（1）设电流元平放在纸面上，求距离 r=100m 处 A，B，C，D，E 各点的电场强度（幅度数值）并在图上标示出极化方向。

（2）若电流元垂直纸面，其余条件不变，再求各点电场强度大小及标明极化方向。



解：

因为 f = 300 MHz，所以 λ = 1 m，r = 100 m，$r >> \lambda/2\pi$，即 A，B，C，D，E 各点在电基本振子的远场区。

$$\mathbf{E} = \boldsymbol{\theta}_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{jkle^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta ,$$

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{kl}{4\pi r} \sin\theta = 120\pi \frac{l}{2\lambda r} \sin\theta = \frac{60\pi l}{\lambda r} \sin\theta = 0.01884 \sin\theta \ \text{(V/m)} = 18.84 \sin\theta \ \text{(mV/m)}$$

（1） A 点：θ=0°，E_A = 0

B 点：θ=30°，$|E_B|$= 9.42 mV/m

C 点：θ=90°，$|E_C|$= 18.84 mV/m

D 点：θ=150°，$|E_D|$= 9.42 mV/m

E 点：θ=180°，E_E= 0

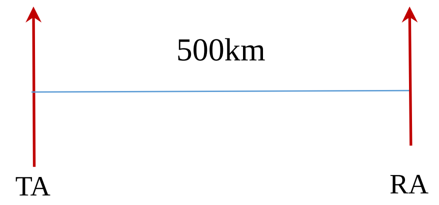
A，B，C，D，E 各点的极化方向为图中各点的圆弧切线方向，即把红色箭头当成正 z 方向，各点的**θ方向**

（2） 若电流元垂直纸面向外，则 A，B，C，D，E 各点在 H 平面上，θ=90°，各点场强相同，且为最大值$|E_{max}|$= 18.84 mV/m，极化方向均垂直于纸面向内。

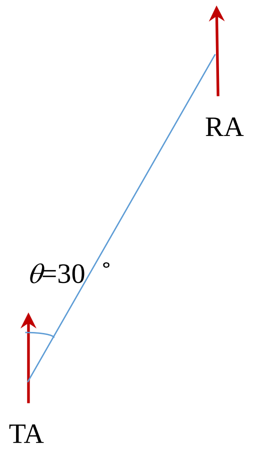
六、(21 分) 两个无耗、电小尺寸偶极子天线平行放置相距 500 km，一个作发射，一个作接收，两天线之间连线与偶极子垂直，即 $\theta = 90°$，发射天线发射功率 1 kW，频率 200 MHz，求：（1） 在两天线连线方向上的天线增益。

（2）接收天线能接收到多少功率？

（3）若两天线连线与偶极子不垂直，比如 $\theta = 30°$ 则此时接收天线能接收到多少功率？



(第 1,2 小题)



(第 3 小题)

解：

（1）$\theta = 90^\circ$，$\mathrm{G}_D = \dfrac{3}{2}\sin^2\theta = 1.5$

（2）$f = 200\mathrm{MHz},\ \lambda = \dfrac{c}{f} = 1.5\mathrm{m}$

天线有效面积：$A_e = \dfrac{G_D\lambda^2}{4\pi} = 0.2686\ (\mathrm{m}^2)$

到达接收处电磁波功率率密度：$\langle S_r \rangle = G_D \dfrac{P}{4\pi r^2} = 4.775\times 10^{-10}\ (\mathrm{W/m}^2)$

接收天线能接收到功率：$\mathrm{P}_R = A_e \langle S_r \rangle = 1.28\times 10^{-10}\ (\mathrm{W})$

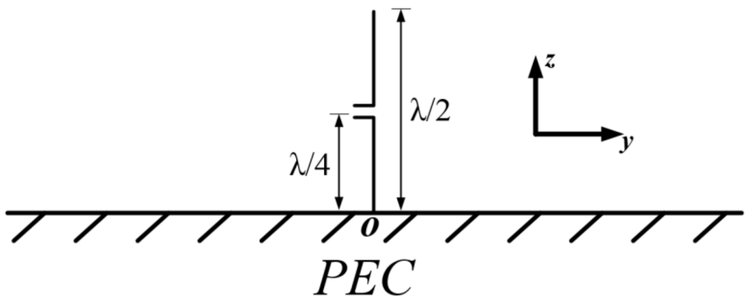
（3）$\theta = 30^\circ$，发射天线 $\mathrm{G}_{TD} = \dfrac{3}{2}\sin^2\theta = \dfrac{3}{8}$，接收天线 $\mathrm{G}_{RD} = \dfrac{3}{2}\sin^2\theta = \dfrac{3}{8}$

所以此时接收天线能接收到功率：$\mathrm{P}_R' = \dfrac{1}{16}\mathrm{P}_R = 8\times 10^{-12}\ (\mathrm{W/m}^2)$

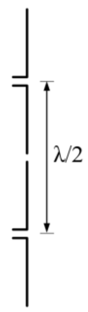
六、（15 分）垂直放置于无限大理想导体平面上的半波对称振子天线，如下图所示，坐标原点在天线与地平面交点。求：

（1）用镜像原理，求天线空间方向函数（提示：需求出二元阵的阵因子）。

（2）画出 *yoz* 平面上电场的辐射方向示意图。



解：（1）由镜像原理，在上半空间的辐射场，可以等效为二元阵分析，如下图所示：



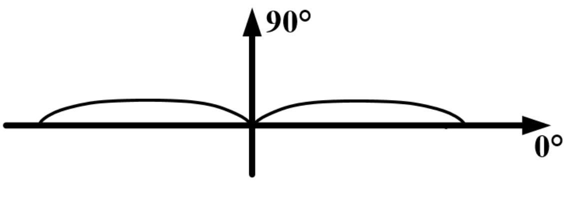
由方向图乘积定理，得方向函数：

$$\vec{E}_1=\vec{\theta}_0\eta_0\frac{jI_0e^{-jk(r-\frac{1}{4}\lambda\cos\theta)}}{2\pi r\sin\theta}\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)$$ 3分

$$\vec{E}_2=\vec{\theta}_0\eta_0\frac{jI_0e^{-jk(r+\frac{1}{4}\lambda\cos\theta)}}{2\pi r\sin\theta}\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)$$ 3分

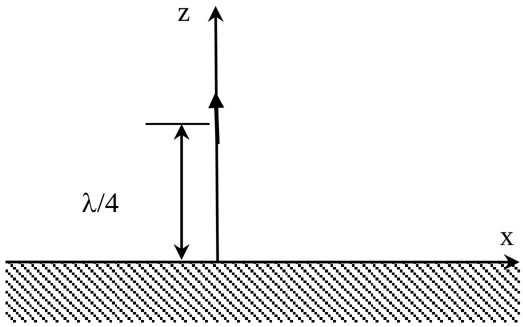
$$F(\theta)=F_1(\theta)F_a(\theta)=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}\bullet\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)=\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}$$ 4 分

（2）E 面（包含 z 轴的平面）：



5 分

3． 电偶极子长度为 l，电流振幅为 I，垂直放置在无限大导体平面上，与导体平面相距为λ/4，如图所示，求：



1）该电偶极子的远区辐射电场和磁场

2）辐射的方向性函数

解： 电偶极子的场分布为

$$\boldsymbol{E}=\theta_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIle^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta \quad , \quad \boldsymbol{H}=\varphi_0\frac{jkIle^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta$$

根据镜象法，原问题等效为一源阵。以天线处有原点

$$\boldsymbol{E}=\theta_0\left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIle^{-jkr}}{4\pi r}\sin\theta_1+\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIle^{-jkr_2}}{4\pi r_2}\sin\theta_2\right)$$

$$\approx\theta_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIl}{4\pi r}\sin\theta(e^{-jkr}+e^{-jkr_2})$$

$$r_2=r+2h\cos\theta=r+\frac{\lambda}{2}\cos\theta$$

$$\boldsymbol{E}=\theta_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIl}{4\pi r}\sin\theta e^{-jkr}\left(1+e^{-jk\frac{\lambda}{2}\cos\theta}\right)$$

$$=\theta_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{jkIl}{2\pi r}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)e^{-jk(r+\frac{\lambda}{4}\cos\theta)}\ (\text{V/m})$$

$$H=\varphi_0\frac{jkIl}{2\pi r}\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)e^{-jk(r+\frac{\lambda}{4}\cos\theta)}\ (\text{A/m})$$

$$F(\theta,\varphi)=\sin\theta\cos\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)$$

也可以地面为原点：

$$\boldsymbol{E} = q_0\left(\sqrt{\frac{m}{e}}\frac{jkIle^{-jkr_1}}{4pr_1}\sin q_1 + \sqrt{\frac{m}{e}}\frac{jkIle^{-jkr_2}}{4pr_2}\sin q_2\right)$$

$$\text{»}\ q_0\sqrt{\frac{m}{e}}\frac{jkIl}{4pr}\sin q(e^{-jkr_1} + e^{-jkr_2})$$

$$r_2 = r + h\cos q,\quad r_1 = r - h\cos q$$

$$\boldsymbol{E} = q_0\sqrt{\frac{m}{e}}\frac{jkIl}{4pr}\sin q(e^{jkh\cos q} + e^{-jkh\cos q})$$

$$= q_0\sqrt{\frac{m}{e}}\frac{jkIl}{2pr}\sin q\cos\left(\frac{p}{2}\cos q\right)e^{-jkr}\ (\text{V/m})$$

$$H = j\ _{\boldsymbol{0}}\frac{jkIl}{2pr}\sin q\cos\left(\frac{p}{2}\cos q\right)e^{-jkr}\ (\text{A/m})$$

$$F(q,j) = \sin q\cos\left(\frac{p}{2}\cos q\right)$$