

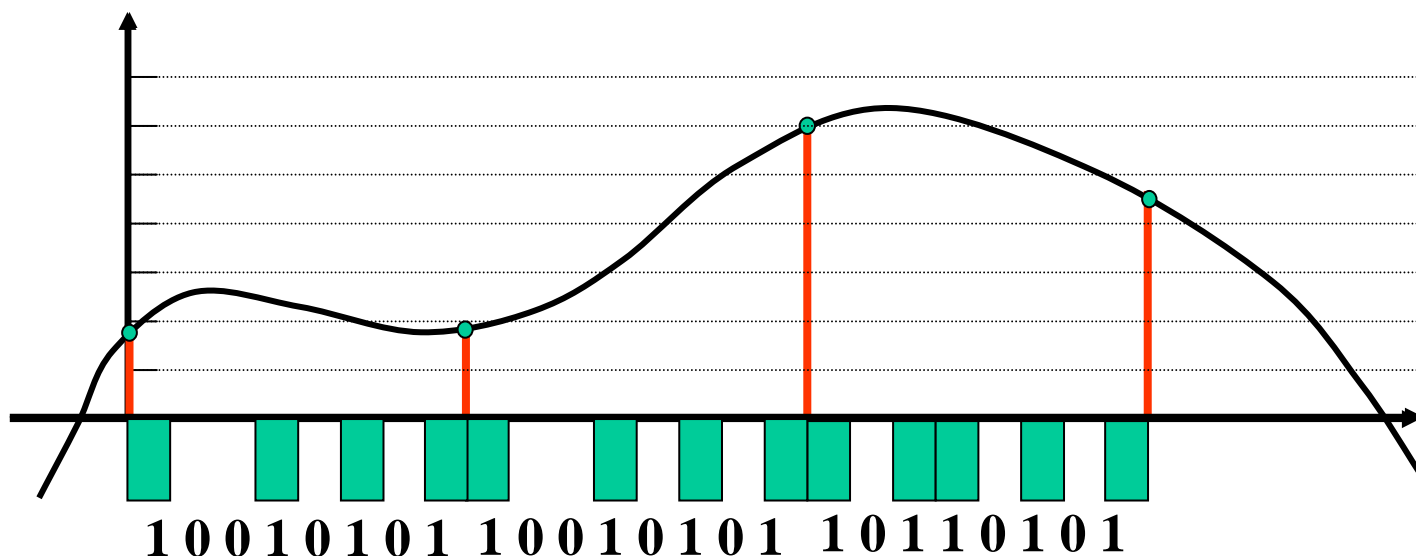
第五章 模拟信号的数字化

模拟消息在数字通信中首先要把它数字化，变成数字消息。模拟消息数字化有三大步骤：

- ① 首先是把模拟信号抽样，用时间离散的消息样本值表示时间连续信号；
- ② 然后对样本值进行量化，即把样本幅度值用有限数目的离散电平值近似；
- ③ 最后对这有限个量化电平值用数字编码；从而得到模拟消息的数字表示；

模拟信号数字化的性能指标:

- ① 数字化信号恢复成模拟信号后失真要小，或者说信噪比要高；
- ② 信号数字化的码率要低，有利于频带有效传输；



对于普通话音的PCM，采样频率8k，每个样本用8bit，于是码率为64k b/s；

§ 5.1 模拟信号的抽样

一、低通信号的抽样

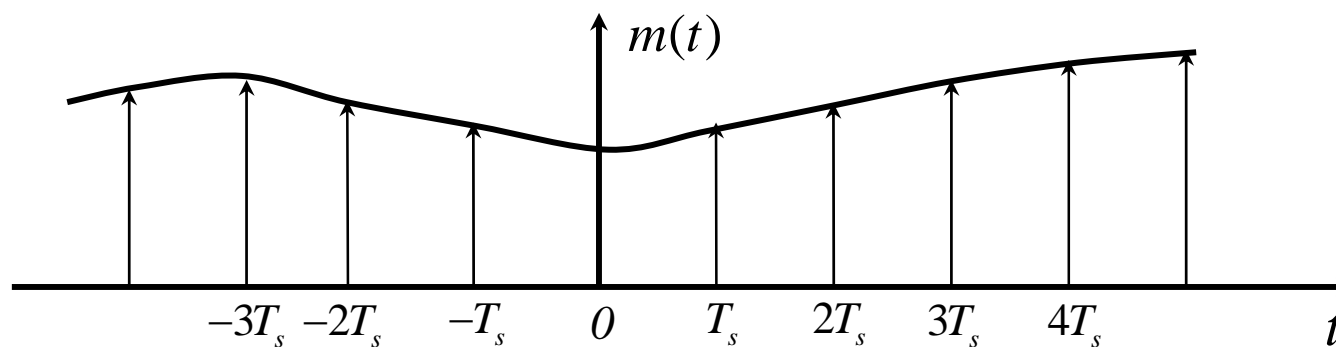


图5.1.1 低通信号采样

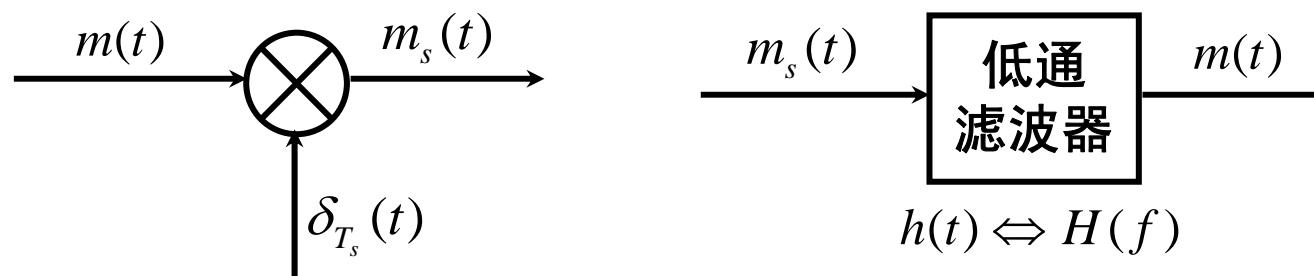


图5.1.2 低通信号采样和恢复

设 $m(t)$ 低通模拟信号, $\delta_{T_s}(t)$ 是脉冲序列

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

则

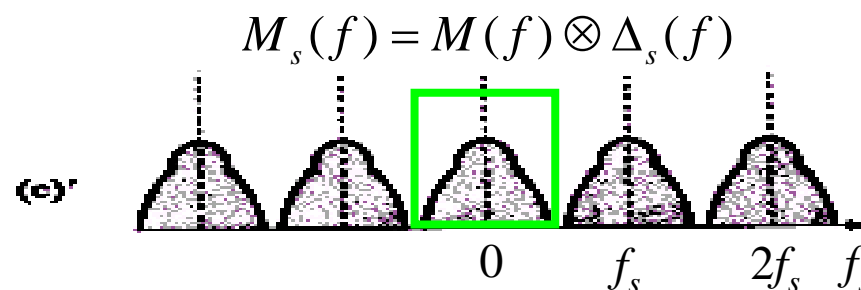
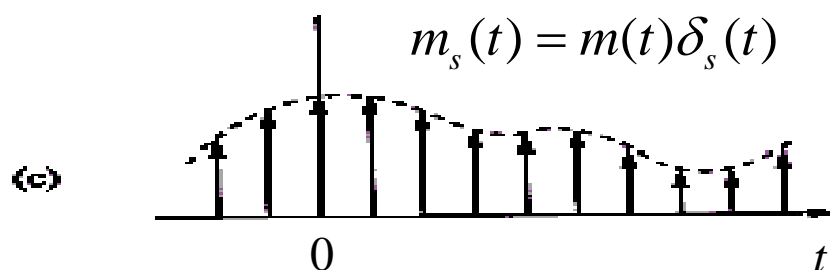
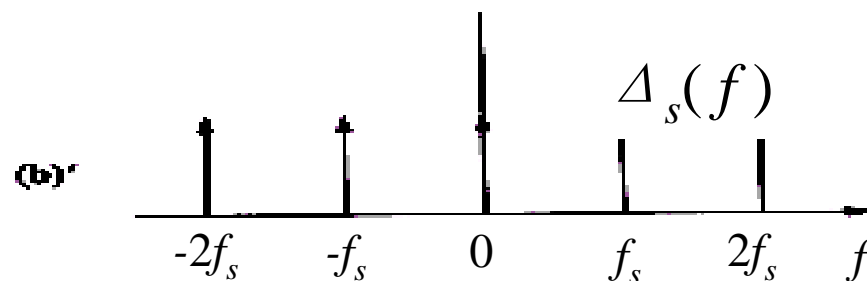
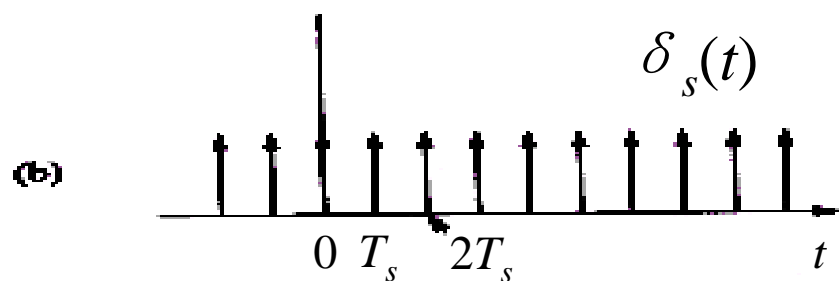
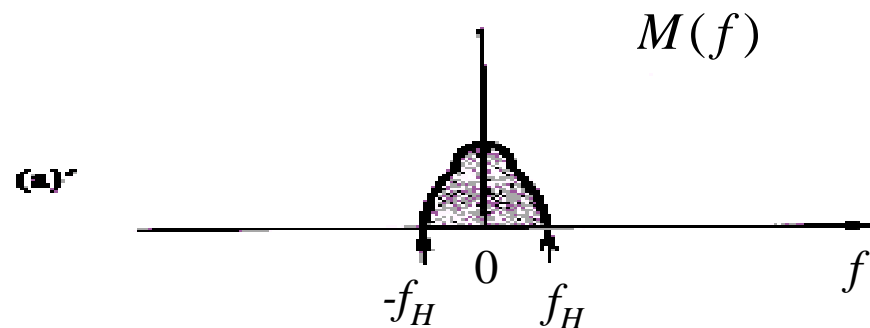
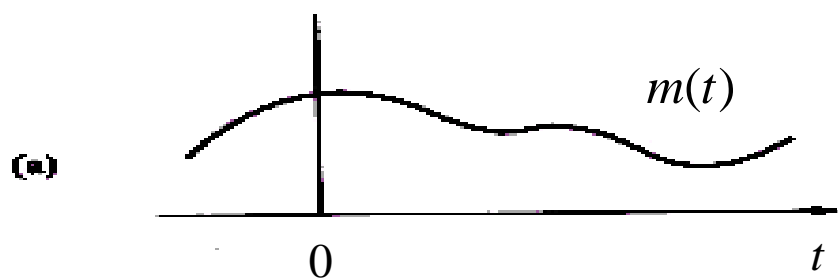
$$m_s(t) = m(t) \times \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(t) \delta(t - nT_s)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t) h(t - nT_0) \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} H\left(\frac{l}{T_0}\right) G\left(f - \frac{l}{T_0}\right) \quad (\text{泊松公式})$$

$$m_s(t) \Leftrightarrow M_s(f)$$

$$M_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M\left(f - \frac{l}{T_s}\right) = \frac{1}{T_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M(f - lf_s)$$

其中 $f_s = \frac{1}{T_s}, \quad M(f) \Leftrightarrow m(t)$

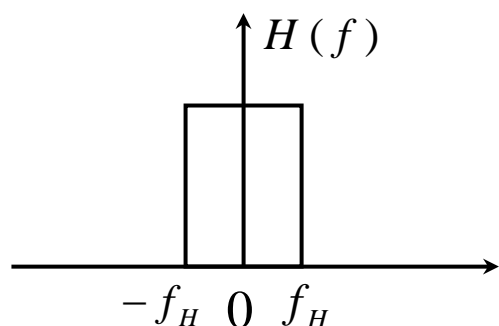


要使抽样序列 $m_s(t)$ 的频谱不相交迭，则要求 $f_s \geq 2f_H$ ，其中 f_H 是低通信号的带宽，即要求：

$$T_s \leq \frac{1}{2f_H}$$

被抽样信号恢复

为了从 $m_s(t)$ 中恢复出原来信号 $m(t)$ ，只要把 $m_s(t)$ 通过截止频率为 f_H 的低通滤波器。设低通滤波器脉冲响应为 $h(t)$ ，传递函数为 $H(f)$ ；



$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_H \\ 0 & |f| > f_H \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{\sin 2\pi f_H t}{\pi t} = 2f_H \operatorname{sinc}(2f_H t)$$

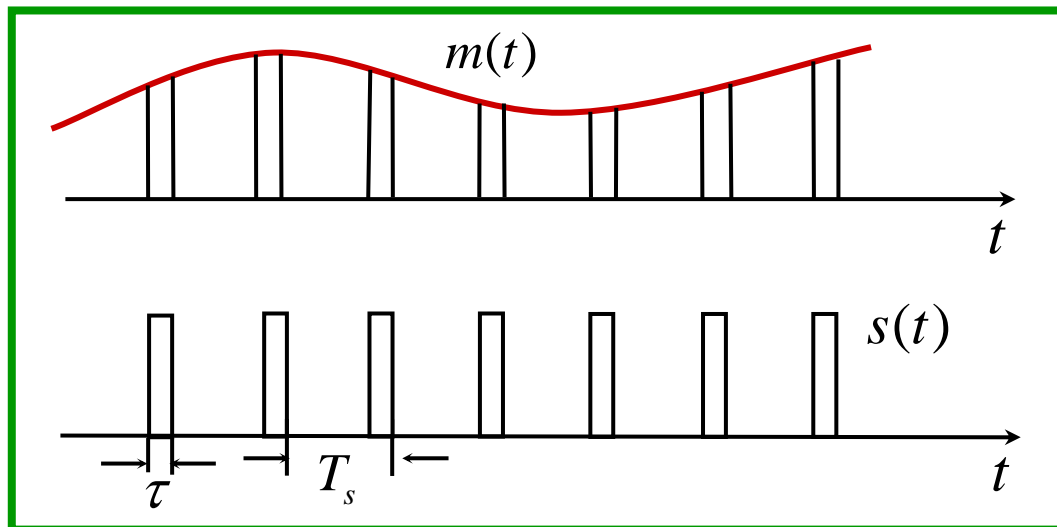
输出信号为：

$$m_s(t) \otimes h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \delta(t - nT_s) \otimes h(t)$$
$$= 2f_H \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \cdot \operatorname{sinc}[2f_H(t - nT_s)]$$

取 $2f_H = f_s$ ，

$$m_s(t) \otimes h(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \cdot \operatorname{sinc}[f_s(t - nT_s)]$$
$$= \frac{1}{T_s} m(t)$$

注意1：曲顶抽样



设采样脉冲序列为：

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(t - nT_s)$$

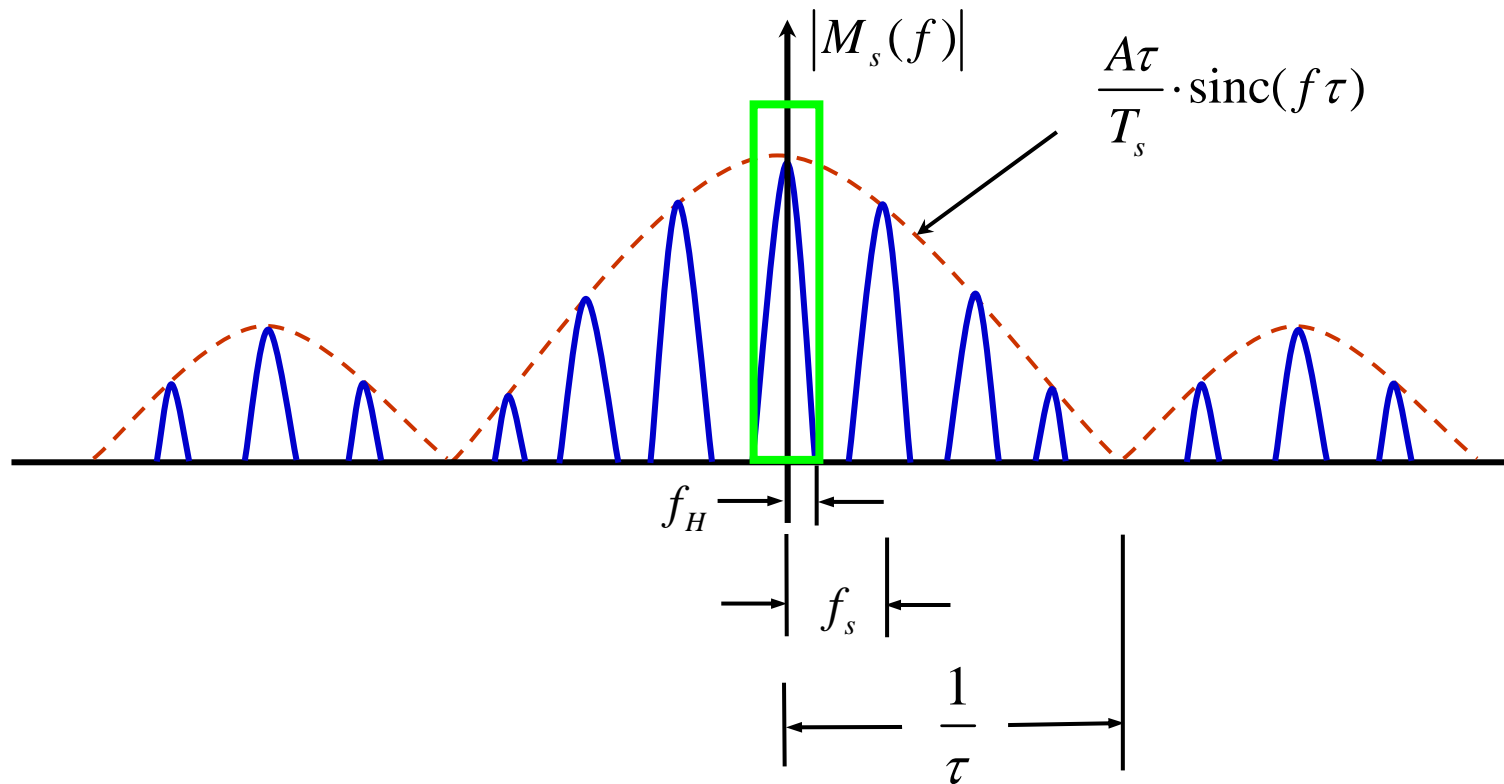
$$h(t) = \begin{cases} A & |t| \leq \tau/2 \\ 0 & |t| \geq \tau/2 \end{cases}$$

$$H(f) = A\tau \cdot \text{sinc}(f\tau)$$

于是

$$m_s(t) = m(t) \cdot s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(t) \cdot h(t - nT_s)$$

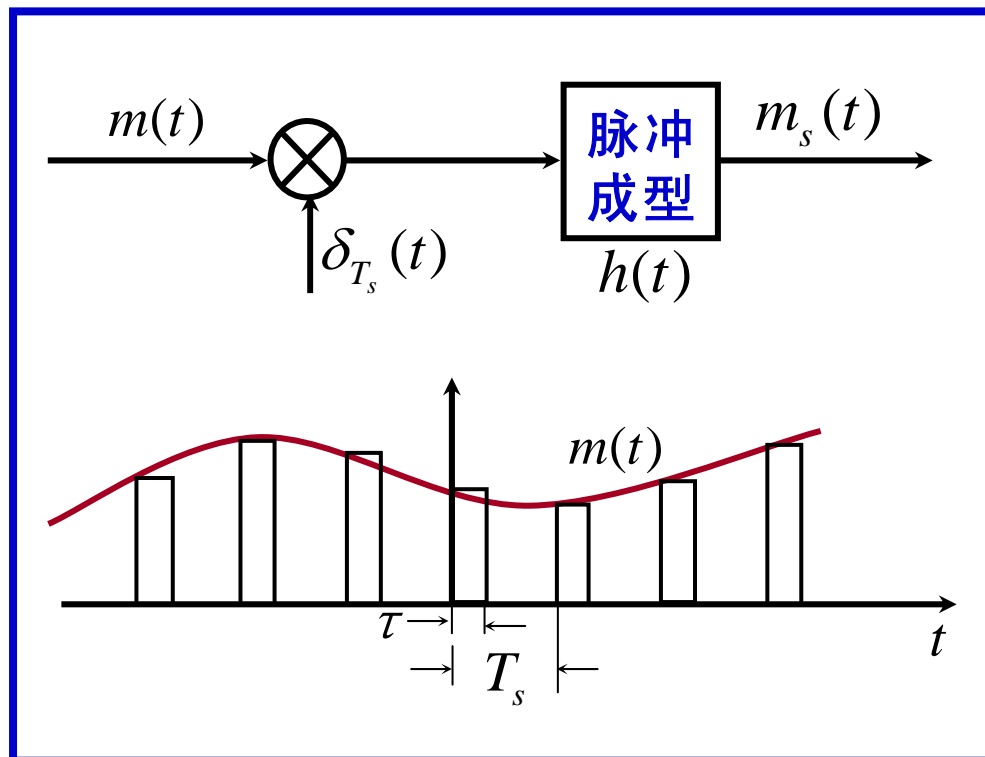
$$\begin{aligned} M_s(f) &= \frac{1}{T_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H(lf_s) \cdot M(f - lf_s) \\ &= \frac{A\tau}{T_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} M(f - lf_s) \cdot \text{sinc}(lf_s\tau) \end{aligned}$$



要求频谱不重迭: $f_s \geq 2f_H$, $T_s \leq \frac{1}{2f_H}$

用截止频率为 f_H 的低通滤波器, 可以滤出低通信号 $m(t)$ 。

注意2：平顶抽样



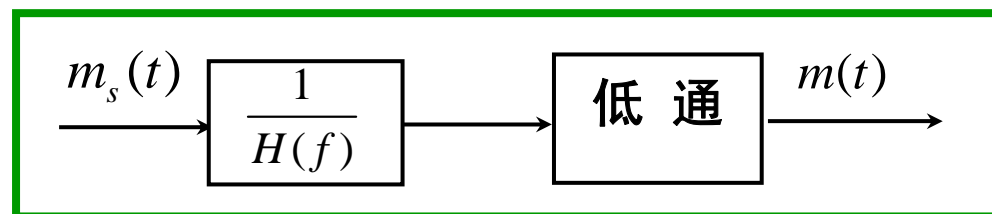
$$m_s(t) = h(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{\infty} m(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

$$M_s(f) = H(f) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T_s} M(f - nf_s)$$

$$H(f) \Leftrightarrow h(t)$$

$$\text{当 } h(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \tau \\ 0 & |t| > \tau \end{cases}$$

$$H(f) = \tau \operatorname{sinc}(\tau f)$$



如果 $f_s \geq 2f_H$ ，用截止频率为

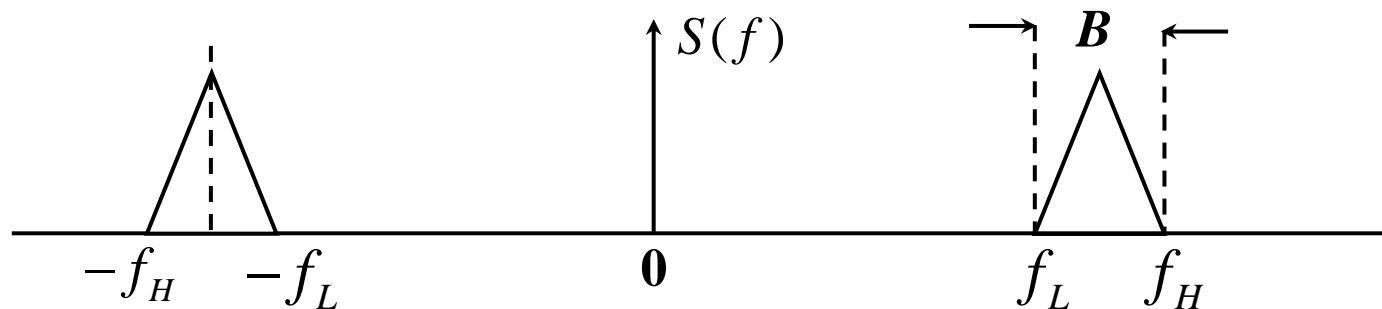
f_H 的滤波器滤出 $\frac{1}{T_s} H(f) M(f)$ 。

在低通滤波之前用频率响应为 $1/H(f)$ 的网络进行校正

二、带通信号的抽样

带通信号 $s(t)$ 的频谱 $S(f)$ 限制在 $f_L \leq |f| \leq f_H$,

带宽为 $B = f_H - f_L$



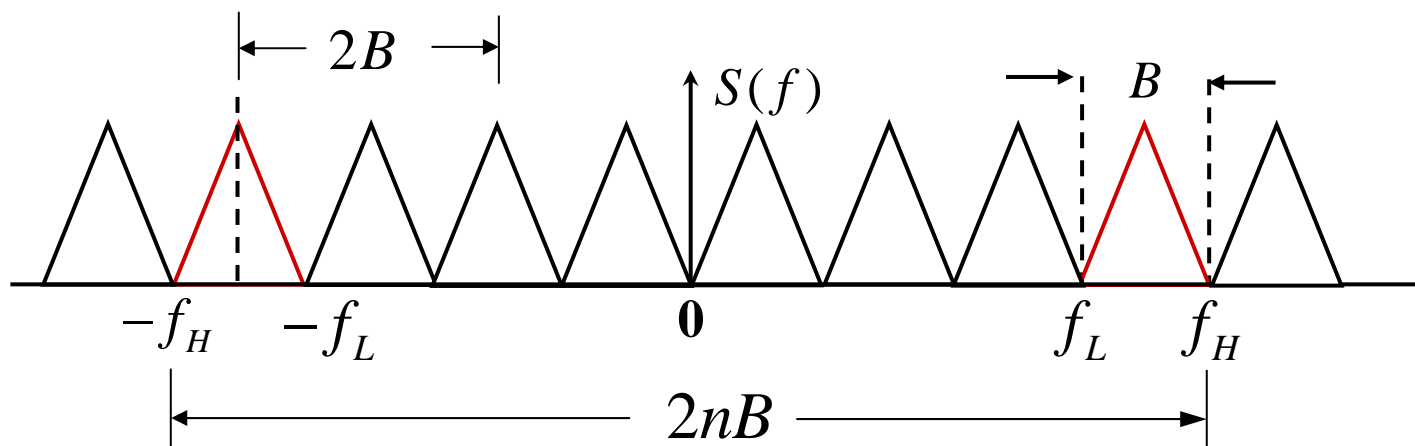
信号 $s(t)$ 经抽样频率为 f_s 的脉冲序列抽样后，它的频谱为：

$$\frac{1}{T_s} \sum_{l=-\infty}^{\infty} S(f - lf_s)$$

要求从抽样序列中不失真的恢复出原来信号 $s(t)$ ，则要求

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} S(f - nf_s) \text{ 不相重迭。}$$

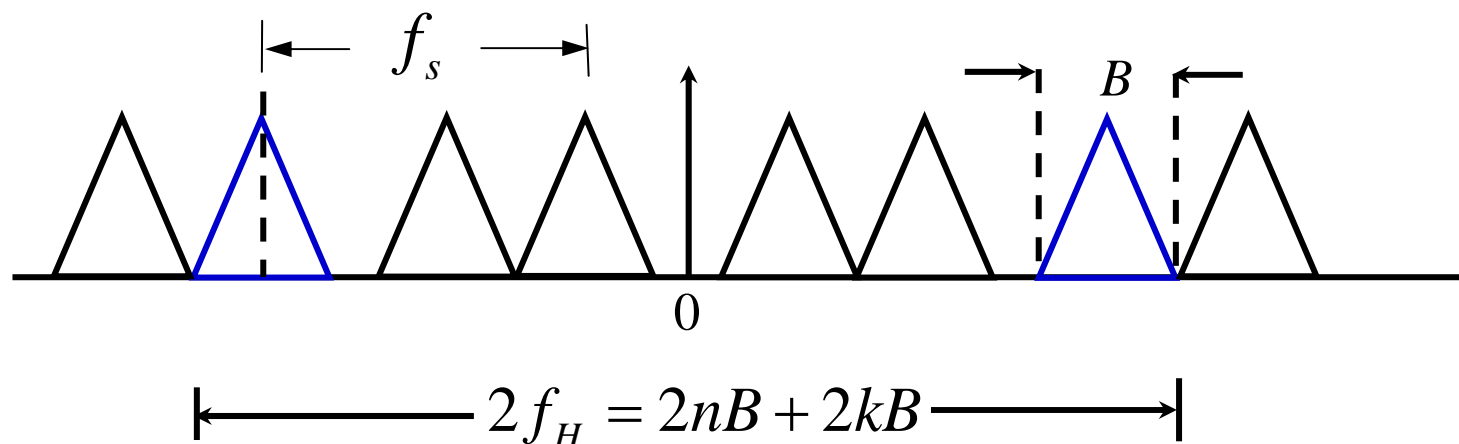
(1) 当 $2f_H = 2nB$



若选 $f_s = 2B$ ，或 $T_s = 1/2B$ ，则可以保证平移后的频谱不相重迭。

这时可以用通带为 $(f_L \sim f_H)$ 的带通滤波器选出这个带通信号。

(2) 当 $f_H = nB + kB$, $0 < k < 1$ 时



同样如果抽样频率 f_s 满足 $nf_s = 2f_H$, 则频谱搬移过程中不会发生重迭的。

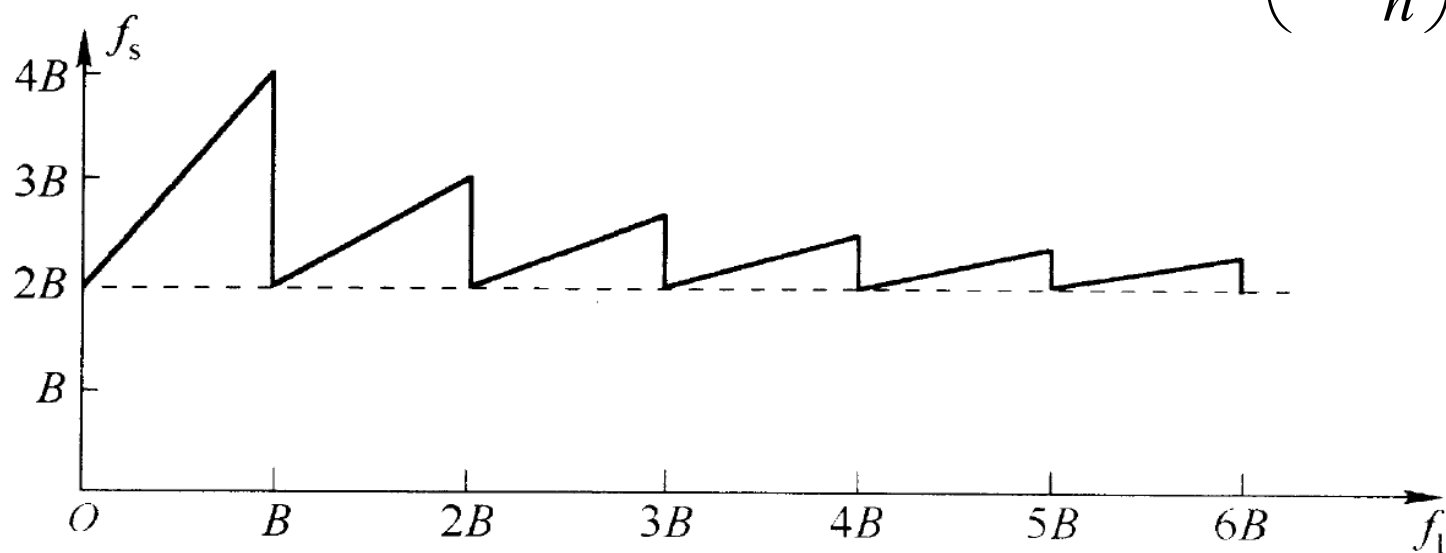
$$f_s = \frac{2f_H}{n} = 2B \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$f_s = \frac{2f_H}{n} = 2B \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

$n = 1,$ k 从 $0 \rightarrow 1,$ 则 f_s 从 $2B \rightarrow 4B$

$n = 2,$ k 从 $0 \rightarrow 1,$ 则 f_s 从 $2B \rightarrow 3B$

一般 $n \geq 1,$ k 从 $0 \rightarrow 1,$ 则 f_s 从 $2B \rightarrow 2B \left(1 + \frac{1}{n} \right)$



注意：低通信号的不重选抽样频率要求 $f_s \geq 2B$ ，带通信号则要求，

$$f_s = 2B \left(1 + \frac{k}{n} \right) \quad , \quad \text{等号要求比较严格成立。}$$

§ 5.2 模拟值的量化

量化是一种近似，即以一定精度来表示样本值。

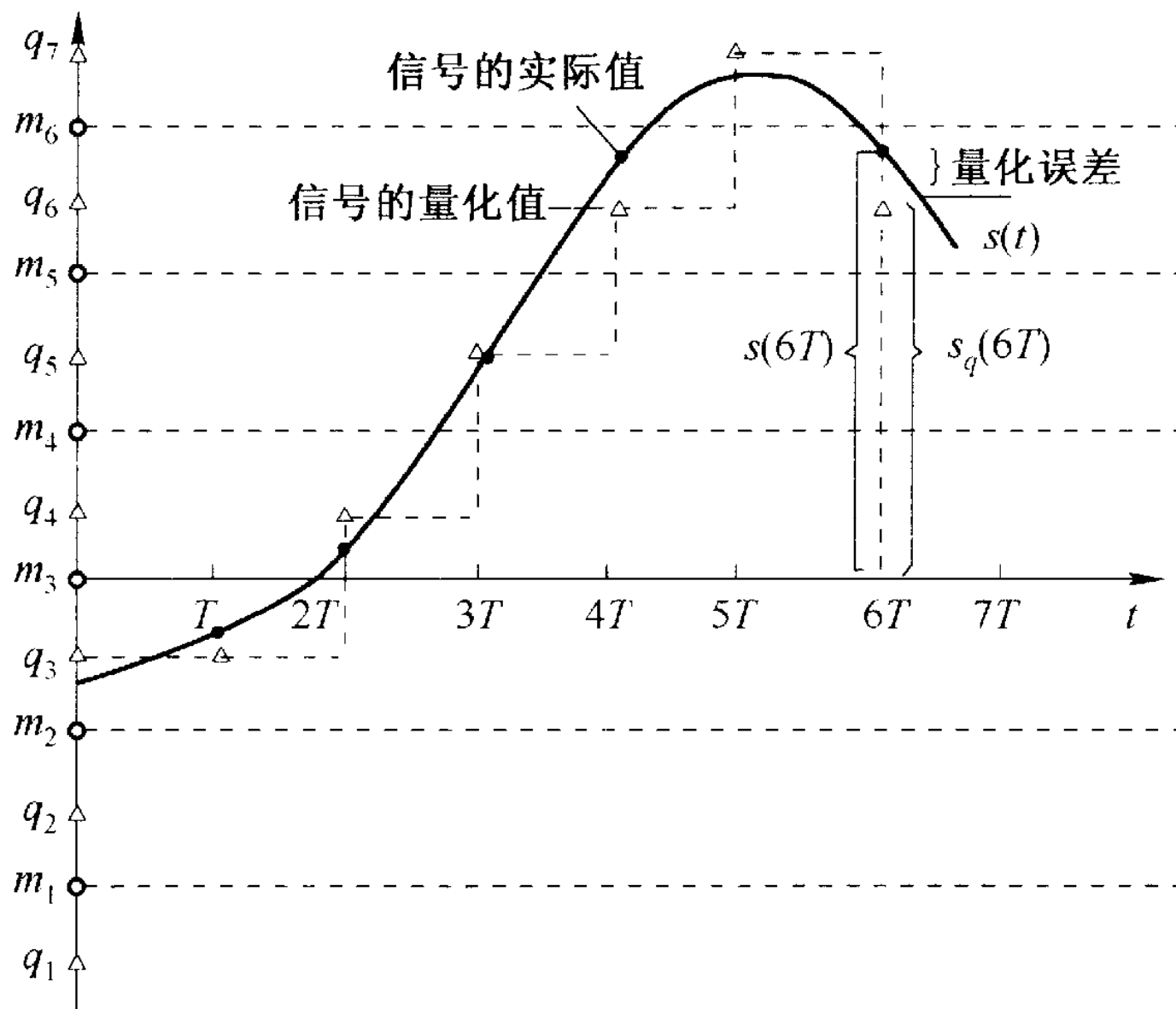
我们把连续样本值可能的取值区间分成 M 部分（ M 个子区间），落入某一子区间的样本值都用某一个固定的量化值（恢复值）表示。如图所示，采样值 $s(kT)$ 的取值范围为从 $m_0 = -\infty$ 到 $m_8 = \infty$ ，把 (m_0, m_8) 分成8部分。每个子区间中取一个代表点（恢复值），比如在 $[m_i, m_{i+1}]$ ，区间对应的代表点为 q_{i+1} ，于是

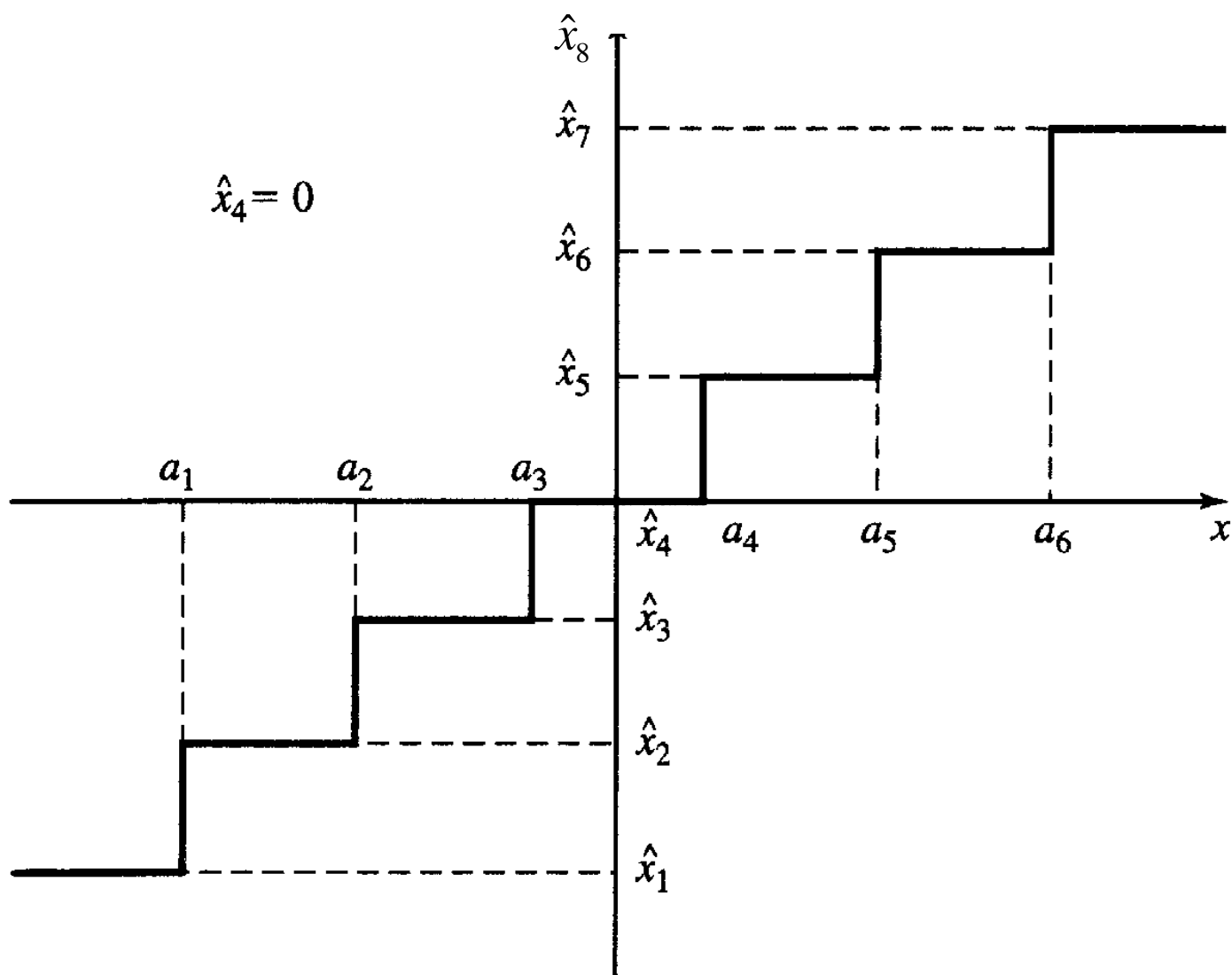
$$\hat{s}(kT) = q_{i+1}, \quad m_i \leq s(kT) < m_{i+1}$$

量化误差为： $\Delta = s(kT) - \hat{s}(kT)$

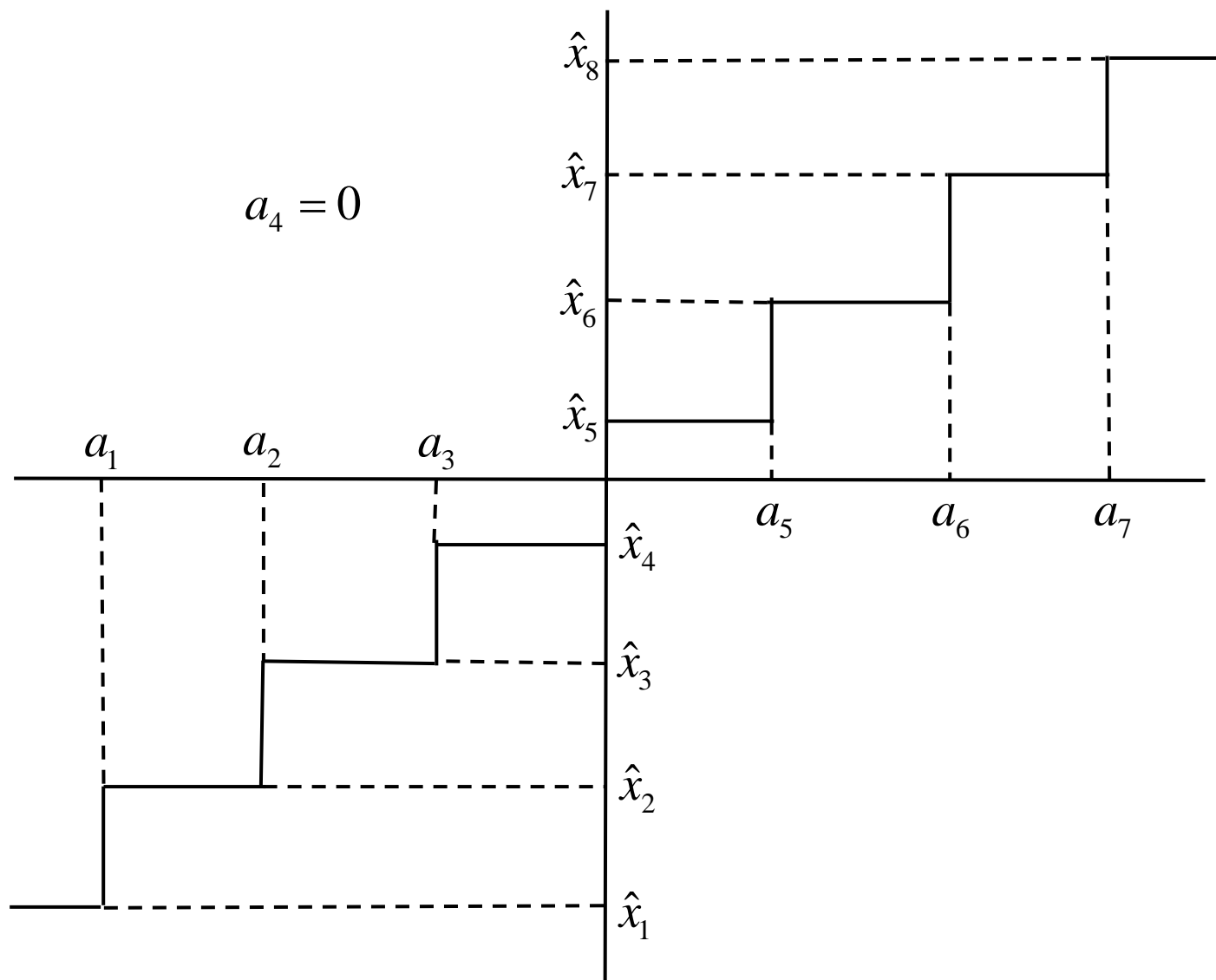
量化信噪比：

$$(SNR)_Q = \frac{P_s}{P_{N_Q}} = \frac{E[s^2(kT)]}{E[(s(kT) - \hat{s}(kT))^2]}$$





量化特性曲线



量化特性曲线

一、均匀量化

设输入信号 X 的取值范围为 $[a, b]$ ，采用 M 电平均匀量化，量化间

隔为： $\Delta v = (b - a) / M$

当 $m_{i-1} \leq X < m_i$ 时，量化器输出：

$$\hat{X} = q_i$$

其中 $m_i = a + \Delta v \cdot i, \quad i = 1, 2, \dots, M$

$$m_0 = a, \quad m_M = b$$

量化误差值为： $\Delta = X - \hat{X}$

$$\begin{aligned} P_{N_Q} &= E \left[\left(X - \hat{X} \right)^2 \right] = \int_a^b (x - \hat{x})^2 \cdot p(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^M \int_{m_{i-1}}^{m_i} (x - q_i) p(x) dx \end{aligned}$$

若 X 是 $[-A, A]$ 上均匀分布的随机变量, 即

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2A} & -A \leq x \leq A \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

量化间隔: $\Delta v = \frac{2A}{M}$

量化恢复电平: $q_i = a + \Delta v \cdot i - \frac{\Delta v}{2}$, 即 $q_i = \frac{1}{2}(m_{i-1} + m_i)$

量化噪声功率: $P_{N_Q} = \frac{(\Delta v)^2}{12} = \frac{A^2}{3M^2}$

输入信号功率: $P_s = E[X^2] = \frac{A^2}{3}$

量化信噪比: $(SNR)_Q = M^2 = 20 \log M \quad (\text{db})$

固定的均匀量化器的最大缺点: 对小信号量化时信噪比变差。

二、最佳标量量化

对于一个随机变量的量化，称为是**标量量化**。如果我们知道随机变量的概率分布，则对于给定的量化电平数，我们可以构成**量化误差功率最小的最佳量化器**。

设随机变量 X 的概率分布为 $p_X(x)$ ，取值范围为 $(-\infty, \infty)$ 。 N 电平量化把实数轴分为 N 部分，

$$-\infty < a_1 < a_2 < a_3 \cdots < a_{N-1} < \infty$$

相应的恢复电平为： $\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \cdots, \hat{x}_N$,

平均量化误差功率：

$$D = \int_{-\infty}^{a_1} (x - \hat{x}_1)^2 p_X(x) dx + \sum_{i=1}^{N-2} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (x - \hat{x}_{i+1}) p_X(x) dx \\ + \int_{a_{N-1}}^{\infty} (x - \hat{x}_N)^2 P_X(x) dx$$

如何选定这 $2N-1$ 个变量，使 D 最小？

$$\frac{\partial}{\partial a_i} D = P_X(a_i) \left[(a_i - \hat{x}_i)^2 - (a_i - \hat{x}_{i+1})^2 \right] = 0$$

得到 $a_i = \frac{1}{2}(\hat{x}_i + \hat{x}_{i+1})$

量化的边界点等于相邻二个量化恢复值的平均数。

确定 $\{\hat{x}_i\}$ 值，

$$\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} D = \int_{a_{i-1}}^{a_i} 2(x - \hat{x}_i) P_X(x) dx = 0$$

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x \cdot p_X(x) dx}{\int_{a_{i-1}}^{a_i} p_X(x) dx} = \frac{\int_{a_{i-1}}^{a_i} x p_X(x) dx}{P\{a_{i-1} < X \leq a_i\}} \\ &= \int_{a_{i-1}}^{a_i} x \cdot \frac{P_X(x)}{P\{a_{i-1} < X \leq a_i\}} dx = E[X | a_{i-1} < X \leq a_i] \end{aligned}$$

最佳量化器的恢复值是条件均值，相当于分布质量线条的质心。

最佳标量量化器的二个必要条件，它们被称 **Lloyd-Max**条件：

- ① 量化区间的边界是相应二个量化恢复值的中点；
- ② 量化恢复值等于量化区间的质心位置；

最佳值不能用闭合公式表示，通常通过迭代方法逐次逼近。

[例5.2.1] 设高斯随机变量 $X \sim N(0, 400)$ 即

$$P_X(x) = \frac{1}{\sqrt{800\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{800}\right\} \quad -\infty < x < \infty$$

若采用 $N = 8$ 电平均匀量化，则边界点和恢复点为：

$$a_1 = -60, a_2 = -40, a_3 = -20, a_4 = 0, a_5 = 20, a_6 = 40, a_7 = 60$$

$$\hat{x}_1 = -70, \hat{x}_2 = -50, \hat{x}_3 = -30, \hat{x}_4 = -10, \hat{x}_5 = 10, \hat{x}_6 = 30, \hat{x}_7 = 50, \hat{x}_8 = 70$$

$$D = 33.38$$

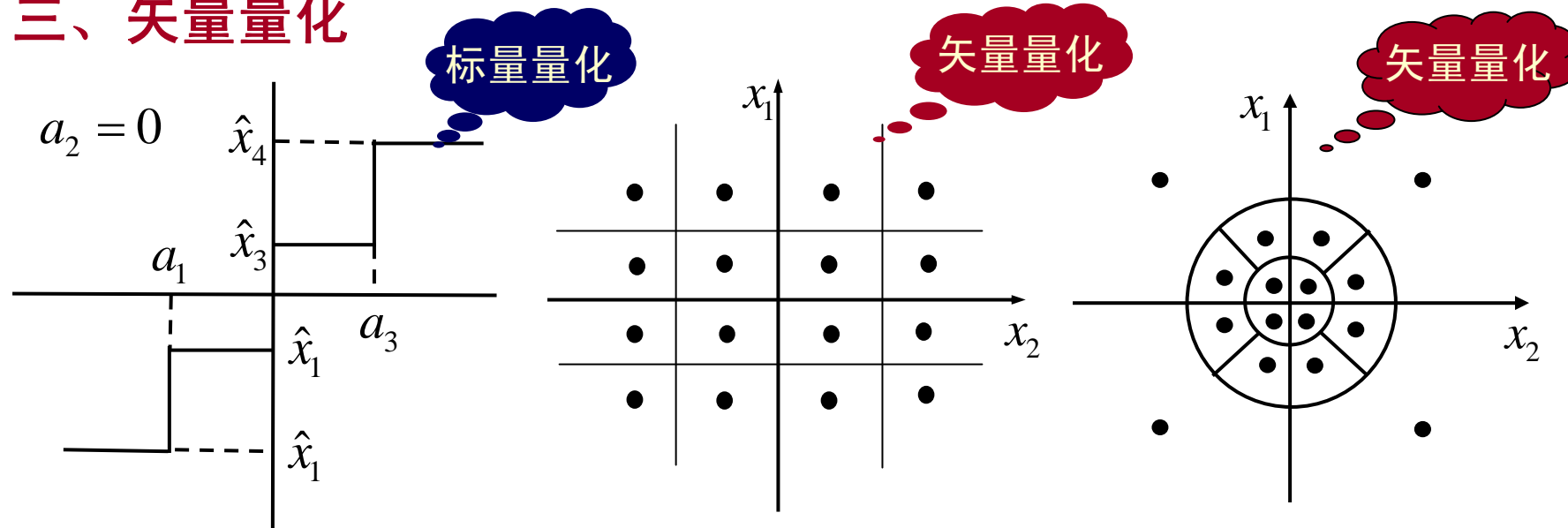
若采用 $N = 8$ 电平的最佳量化器，则边界点和恢复点为：

$$a_1 = -a_7 = -34.96, a_2 = -a_6 = -21, a_3 = -a_5 = -10.012, a_4 = 0$$

$$\hat{x}_1 = -\hat{x}_8 = -43.04, \hat{x}_2 = -\hat{x}_7 = -26.88, \hat{x}_3 = -\hat{x}_6 = -15.12, \hat{x}_4 = -\hat{x}_5 = -4.902$$

$$D = 13.816$$

三、矢量量化



每个样本值2比特量化

$$x_n \Rightarrow \hat{x}_n$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

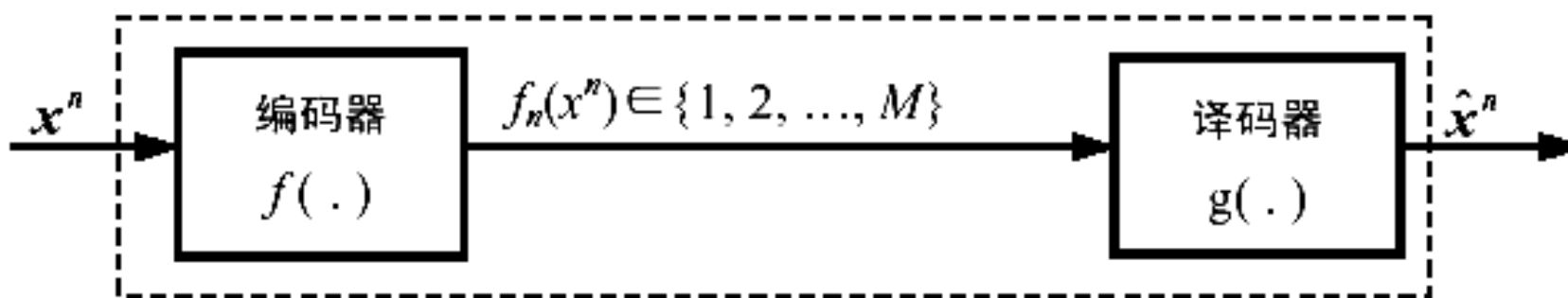
两个样本值4比特量化

$$(x_n, x_{n+1}) \Rightarrow (\hat{x}_n, \hat{x}_{n+1})$$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, \dots$

每次把 n 个信源样本值作为一组输入到量化器，进行 n 维矢量量化。

把 n 维空间 R^n 分划为 M 个区域 $\{R_i, 1 \leq i \leq M\}$ ，在每个区域中选一个再生恢复点 $\hat{x}_i^n \in R_i, 1 \leq i \leq M$ 。这 M 个再生恢复点组成一部码书， $C = \{\hat{x}_i^n, i = 1, 2, \dots, M\}$ 。每组长度为 n 的信源输出样本用矢量表示 $\mathbf{x}^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ，如果样本矢量 $\mathbf{x}^n \in R_i$ ，则这个样本矢量就量化成 \hat{x}_i^n



$$f(\mathbf{x}^n) = i, \quad \text{if } \mathbf{x}^n \in R_i$$

$$g(i) = \hat{x}_i^n, i = 1, 2, \dots, M$$

$$R = \frac{\log_2 M}{n} \text{ 比特/样本}$$

$$D = \frac{1}{n} \int_{R^n} (\mathbf{x}^n - \hat{\mathbf{x}}^n)^2 p(\mathbf{x}^n) d\mathbf{x}^n$$

四、非均匀量化

- ① 均匀量化的缺点在于对于小信号量化性能的变差；
- ② 最佳量化必须知道被量化量的概率分布，没有闭合的公式解；

语音信号：

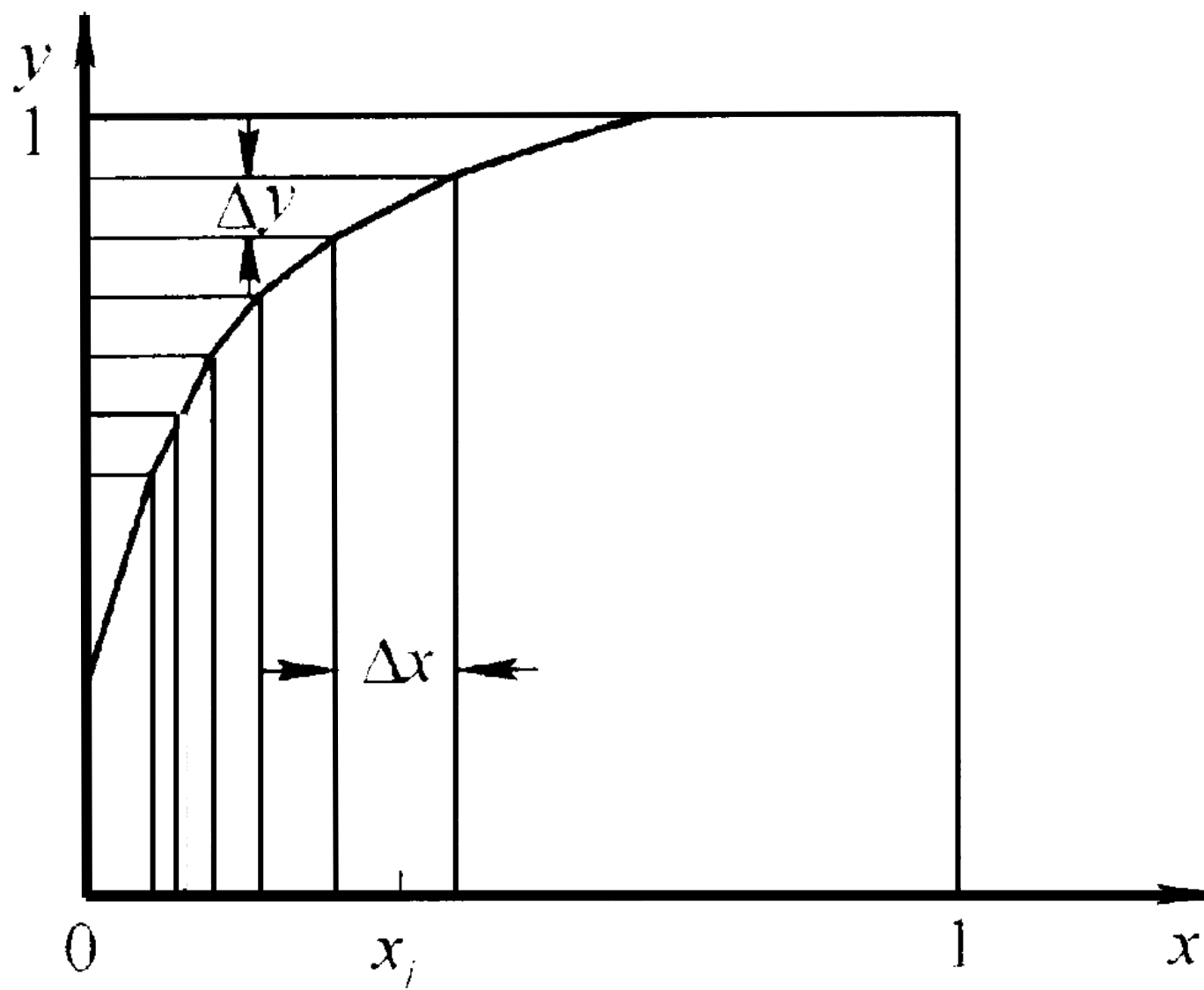
- ① 语音信号没有合适的概率分布近似；
- ② 语音信号中小信号的概率比较大；

非均匀量化：对小信号量化间隔变细，对于大信号量化间隔放大。

非均匀量化：先对输入信号 X 进行非线性变换（称为非线性压缩），

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y)$$

然后对 Y 实行均匀量化



理想压缩特性:

当量化区间分得细时, 可把每量化区间中的压缩特性曲线近似为直线,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = y' \quad \Delta x = \left(\frac{dx}{dy} \right) \cdot \Delta y$$

压缩器的输入、输出限制在0-1之间。对于Y轴是均匀量化, 当0-1区间被均匀分成N部分时, 则 $\Delta y = 1/N$, 所以

$$\Delta x = \left(\frac{dx}{dy} \right) \Delta y = \frac{1}{N} \frac{dx}{dy}$$

要求当输入 x 较小时 $\Delta x \propto x$

则, $\frac{dx}{dy} = kx \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = ky + c$

$x = 0 \not\Rightarrow y = 0$

由边界条件 $x = 1, y = 1$, 所以理想压缩特性

$$y = 1 + \frac{1}{k} \ln x$$

理想压缩特性:

$$y = 1 + \frac{1}{k} \ln x$$

理想压缩特性不满足: $x = 0 \Rightarrow y = 0$ 要求对理想特性作修正。

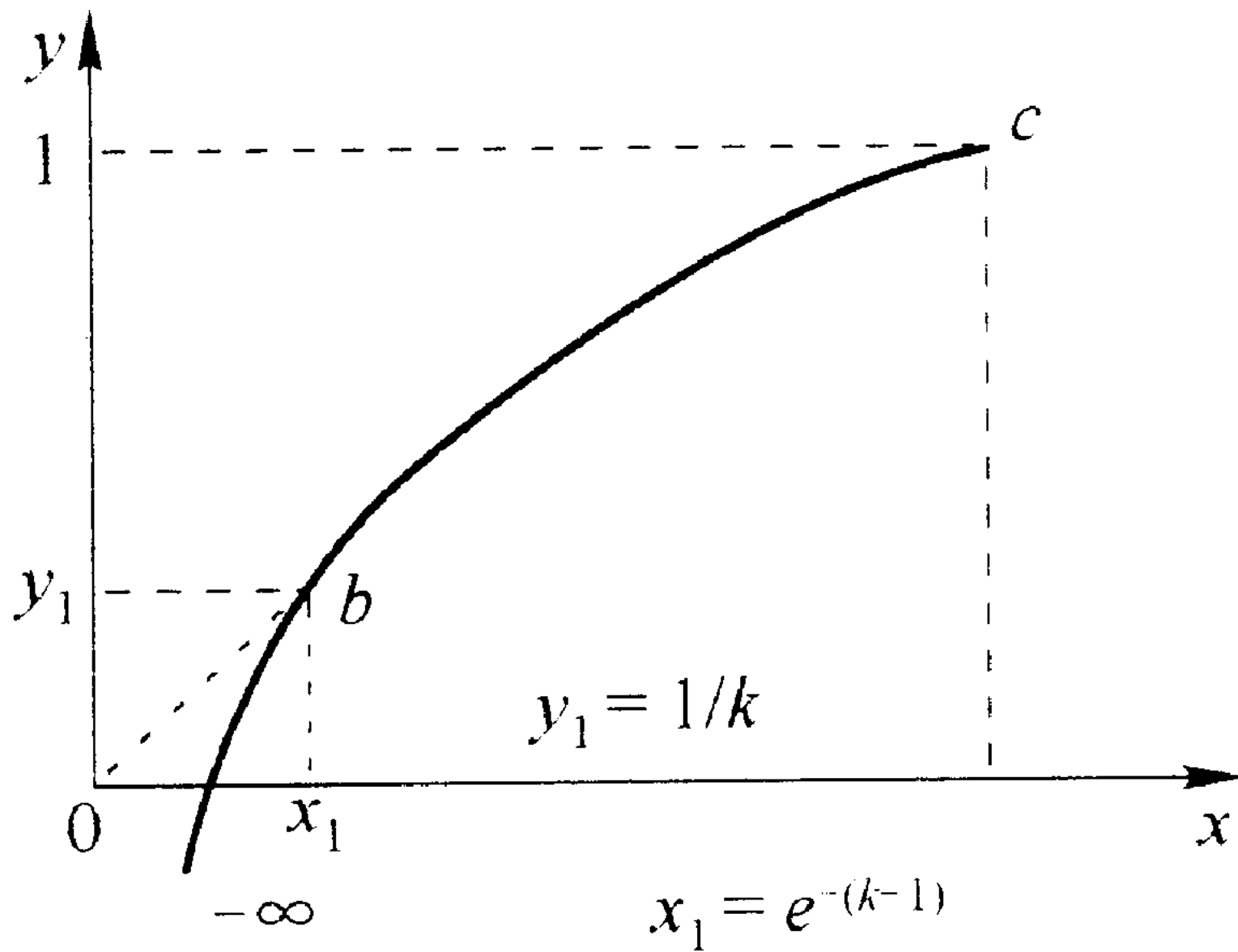
① A律压缩

$$y = \begin{cases} \frac{Ax}{1 + \ln A} & 0 < x \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(Ax)}{1 + \ln A} & \frac{1}{A} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

其中 x 为归一化输入信号, y 为归一化输出信号, A 为压缩常数。

$$x = \frac{\text{压缩器输入电平}}{\text{压缩器输入的最大电平}}$$

$$y = \frac{\text{压缩器输出电平}}{\text{压缩器输出最大电平}}$$



从原点 o 到曲线作切线 ob ，用这直线段 ob 代替原来相应的曲线段。

切点在 (x_1, y_1) ，在该点理想压缩曲线 $y = 1 + \frac{1}{k} \ln x$ 的斜率为，

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1} = \frac{1}{kx_1}$$

直线 ob 的方程为： $y = \frac{x}{kx_1}$

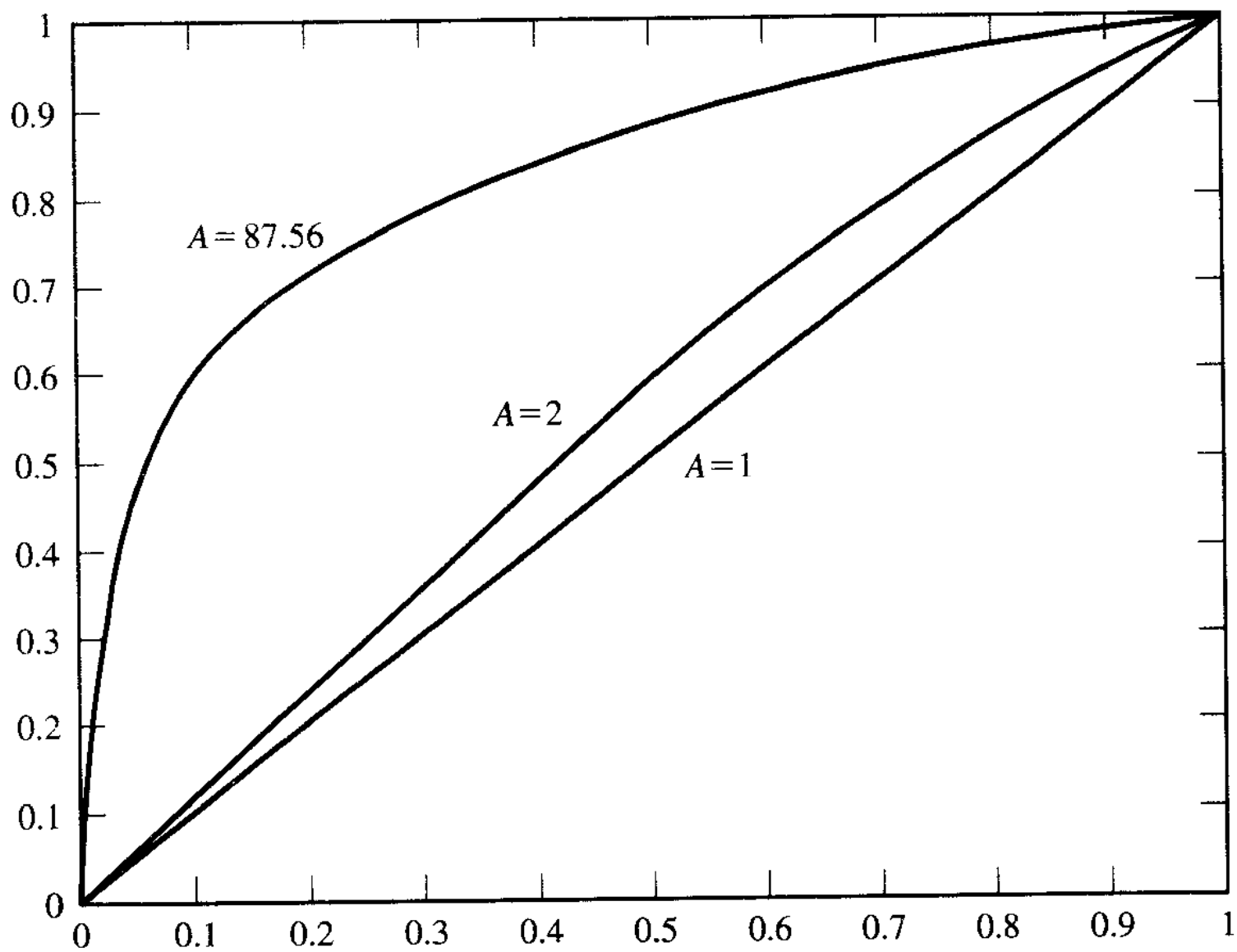
在切点处的纵坐标 y_1 满足， $y_1 = 1 + \frac{1}{k} \ln x_1 = \frac{1}{k}$

所以， $x_1 = e^{1-k} \square \frac{1}{A} \Rightarrow k = 1 + \ln A$

于是修正后的压缩特性为：

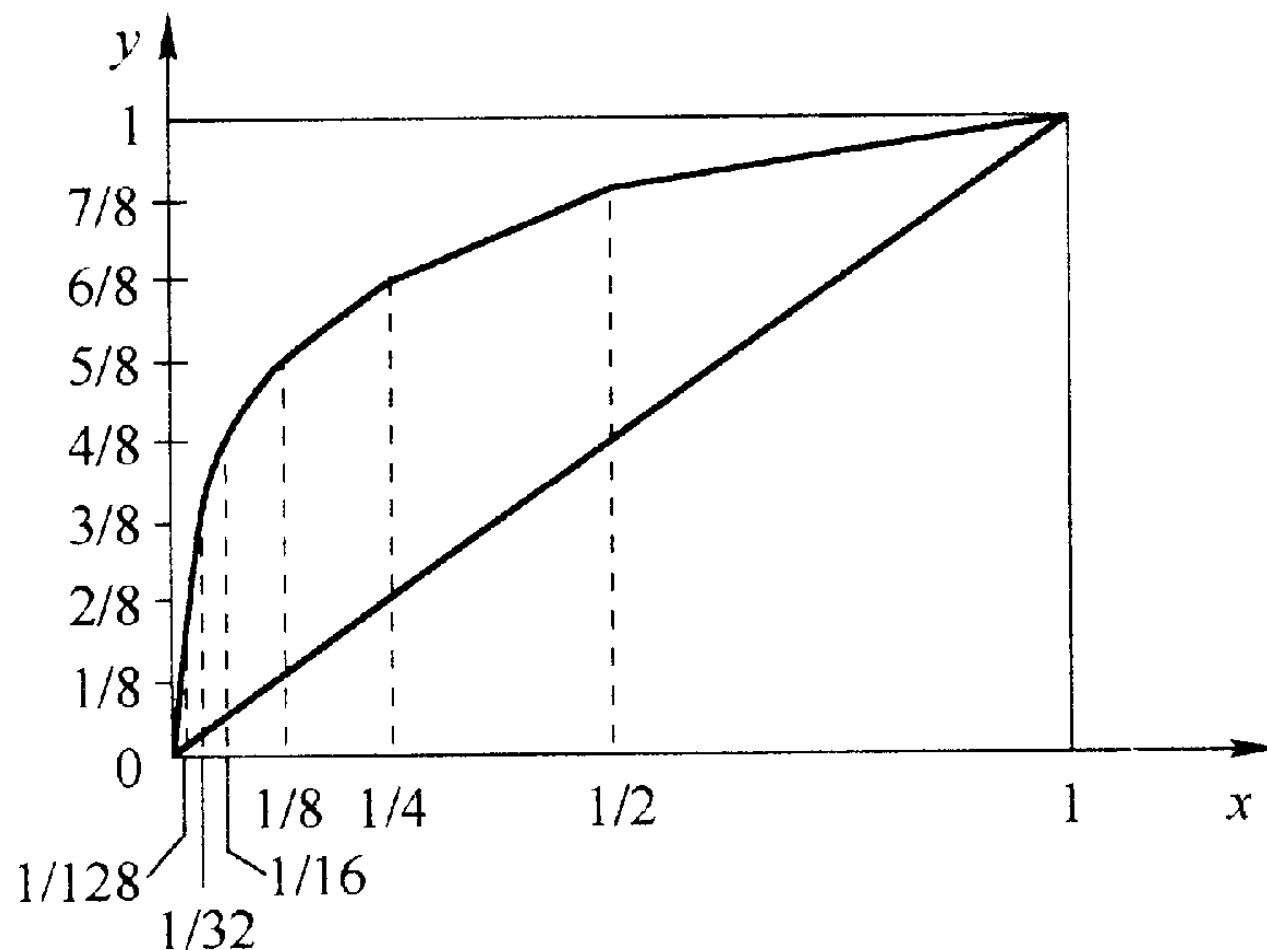
$$y = \begin{cases} \frac{Ax}{1 + \ln A} & 0 < x \leq \frac{1}{A} \\ \frac{1 + \ln(Ax)}{1 + \ln A} & \frac{1}{A} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

A是调节压缩特性的参数，实际中选 $A = 87.56$



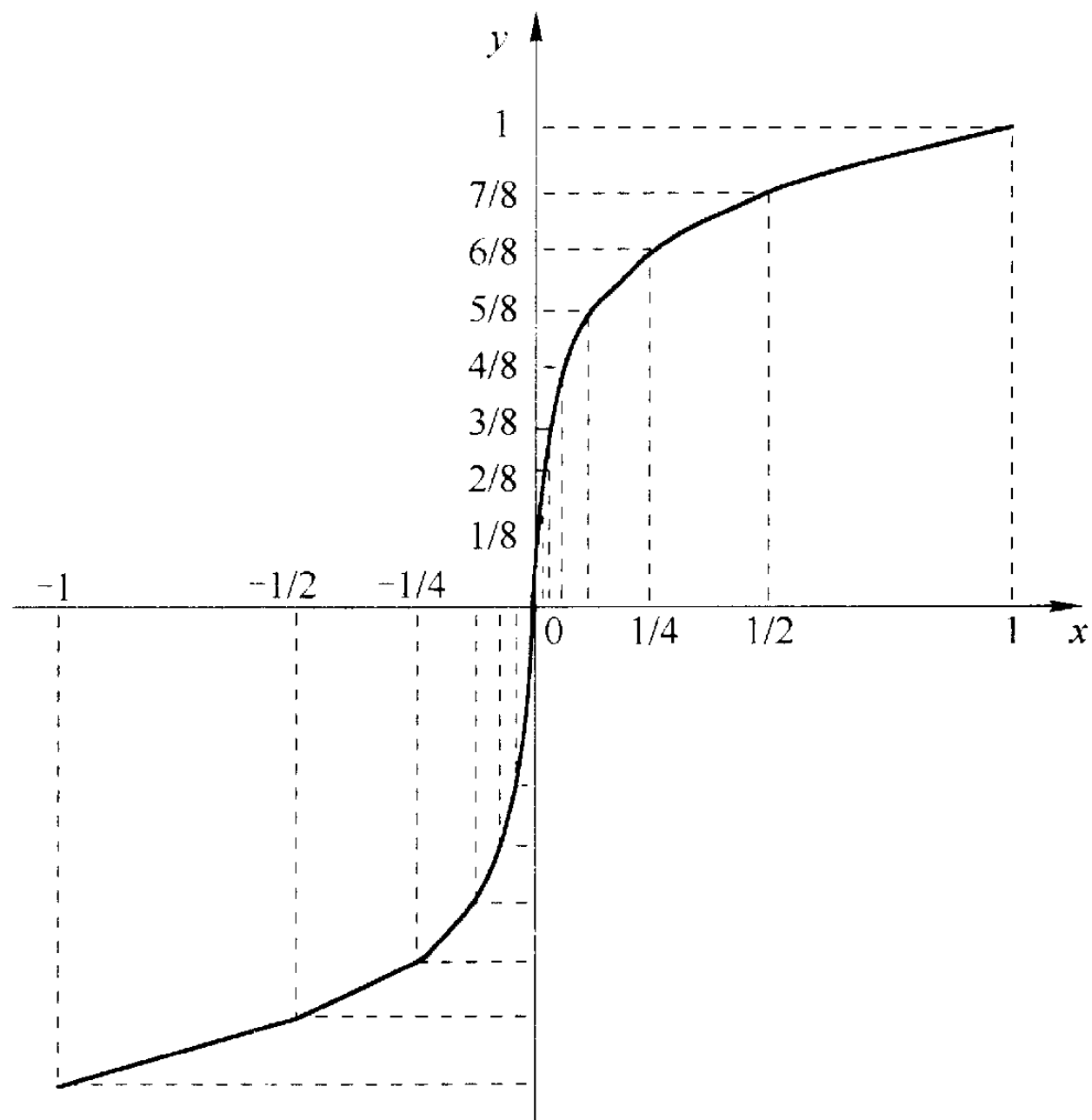
② 13折线近似——A律压缩的近似实现

为了用电路来实现A律压缩，只能用折线来近似。13折线近似是一种比较巧妙、理想的近似。轴在 $(0, 1)$ 区间中不均匀地分为8段，用8段折线来近似。



y 值	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{8}$	1
按 A 律算出的 x 值	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{60.6}$	$\frac{1}{30.6}$	$\frac{1}{15.4}$	$\frac{1}{7.79}$	$\frac{1}{3.93}$	$\frac{1}{1.98}$	1
按折线近似的 x 值	0	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
折线段号	1	2	3	4	5	6	7	8	
折线斜率	16	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

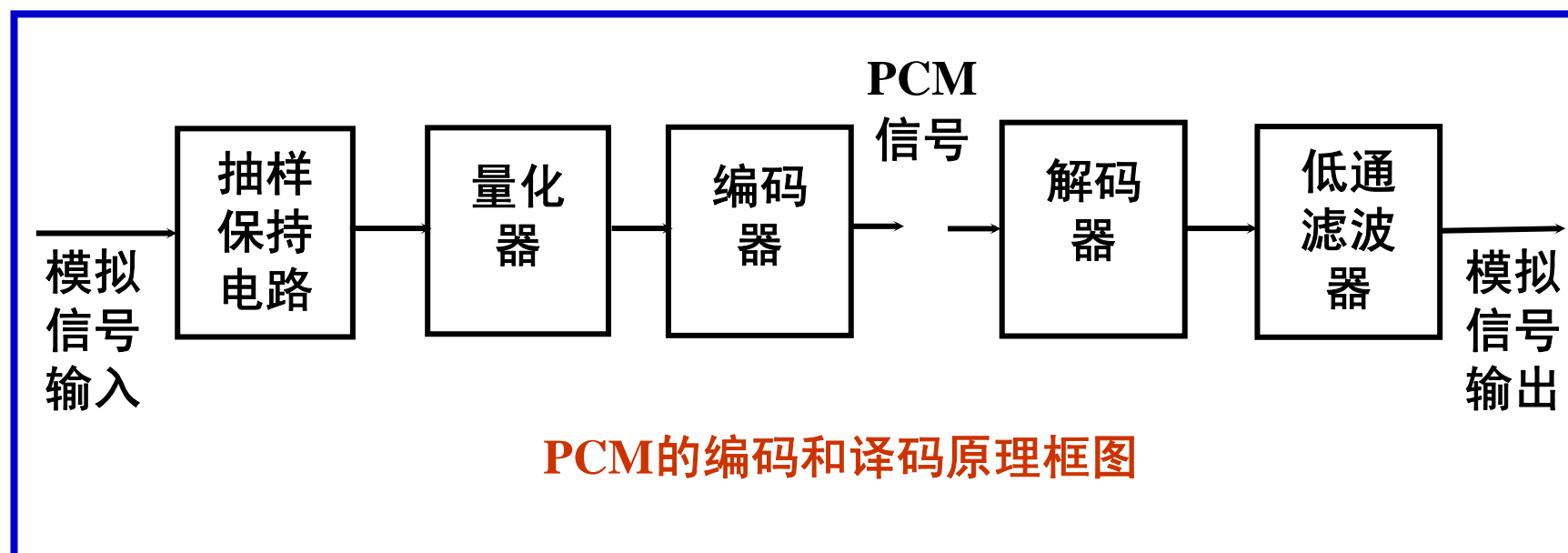
第一段和第二段折线斜率相同，是一条直线，另外考虑到在区间上A律压缩曲线是奇对称的，所以折线近似也应该是奇对称的。在第一象限中第一段和第二段折线与第三象限中第一段，第二段折线的斜率都等于16，所以这四段折线事实上是一条直线，因此总共只要用13条折线可以近似区间上的A律压缩特性。

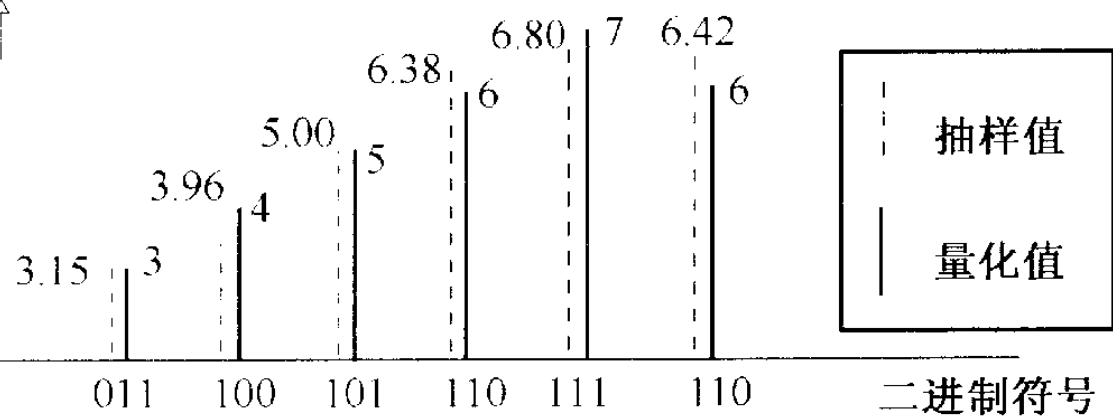
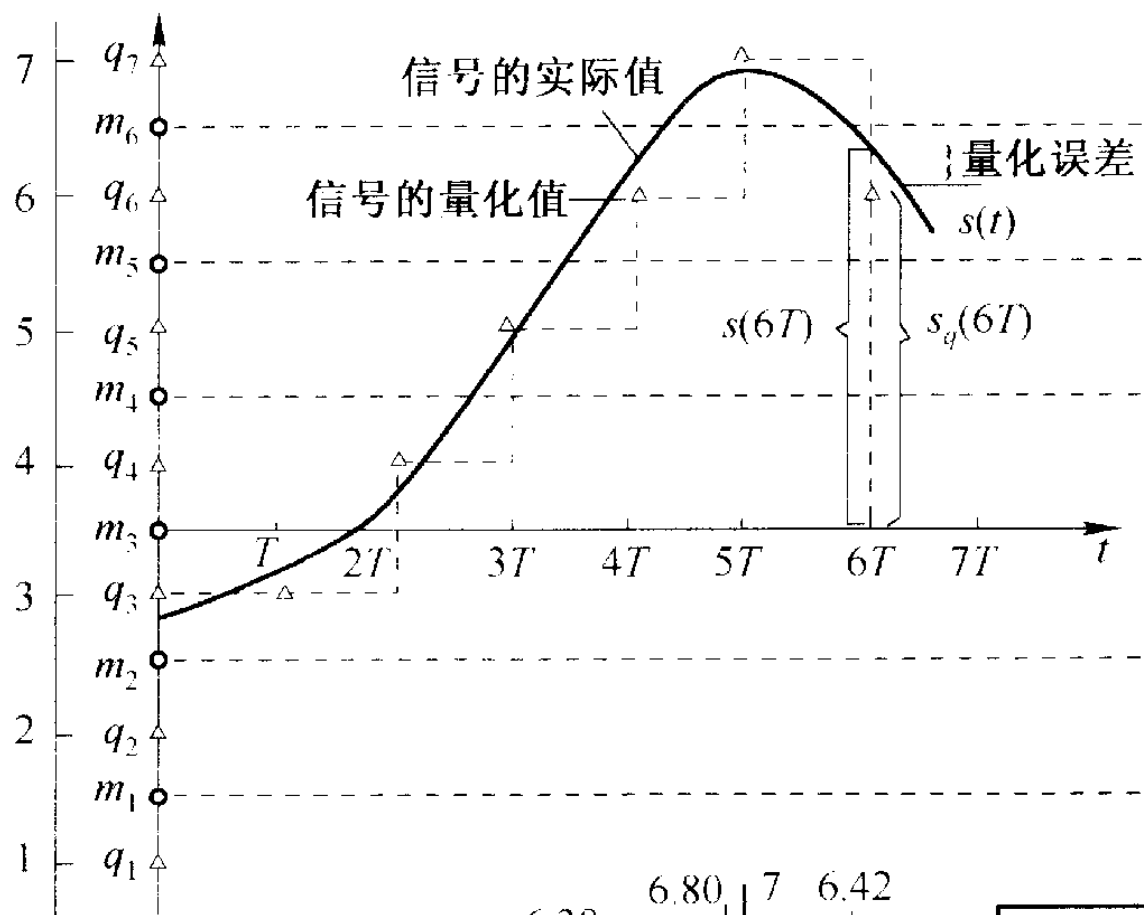


§ 5.3 脉冲编码调制 (PCM)

一、PCM的基本原理

量化后的信号已经是时间离散、数值离散的数字信号，接下来就要对这些数字信号进行编码。常用二进制符号表示它。通常把模拟信号**抽样、量化，直到变成二进制符号**的过程称为脉冲编号调制PCM。





二、自然二进制码与折迭二进制码

量化值序号	量化电压极性	自然二进制码	折迭二进制码
15	正极性	1111	1111
14		1110	1110
13		1101	1101
12		1100	1100
11		1011	1011
10		1010	1010
9		1001	1001
8		1000	1000
7	负极性	0111	0000
6		0110	0001
5		0101	0010
4		0100	0011
3		0011	0100
2		0010	0101
1		0001	0110
0		0000	0111

折迭码的一个**优点**是对于小电平信号（绝对值小），若发生一个“比特”错误所产生的误差比自然码小。

A律量化的PCM用8个比特表示一个样本值。 编码采用折迭码，也就是由一个比特表示极性，正负极性编码对称。

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$$

C_1 ：表示极性，“1”表示正极性，“0”表示负极性；

$C_2C_3C_4$ ：段落码，表示样本落到（0, 1）中8个量化区域中哪一

$C_5C_6C_7C_8$ ：段内码；每一段等间隔分为16个量化间隔；

段落序号	段落码 $C_2C_3C_4$
8	111
7	110
6	101
5	100
4	011
3	010
2	001
1	000

量化序号	段内码 $C_5C_6C_7C_8$
15	1111
14	1110
13	1101
12	1100
11	1011
10	1010
9	1001
8	1000
7	0111
6	0110
5	0101
4	0100
3	0011
2	0010
1	0001
0	0000

第一段落中的量化间隔最小，为

$$\Delta = \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2048}$$

如果用 $\Delta = 1/2048$ 作为度量单位，则各段的起始电平为：

段落序号	1	2	3	4	5	6	7	8
起始电平	0	16Δ	32Δ	64Δ	128Δ	256Δ	512Δ	1024Δ
段内量化区间长度	Δ	Δ	2Δ	4Δ	8Δ	16Δ	32Δ	64Δ

[例5.3.1] 设输入抽样值为 $U = +1270\Delta$ ，用13折线A律特性编成8位码。这8位码分别用 $C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8$ 表示：

① 确定极性码 C_1 ：因输入信号 U 是正极性的，所以 $C_1 = 1$ ；

② 确定段落码 $C_2C_3C_4$ ：输入样本 U 落到第8段，所以段落码为：

$$C_2C_3C_4 = 111$$

③ 段内码 $C_5C_6C_7C_8$ ：在第8段内，量化间隔为 64Δ ，由于

$$(1024 + 3 \times 64)\Delta < U < (1024 + 4 \times 64)\Delta$$

U 处于第8段落中序号为3的量化间隔中，所以段内码为

$$C_5C_6C_7C_8 = 0011,$$

整个码字为：

$$C_1C_2C_3C_4C_5C_6C_7C_8 = 11110011$$

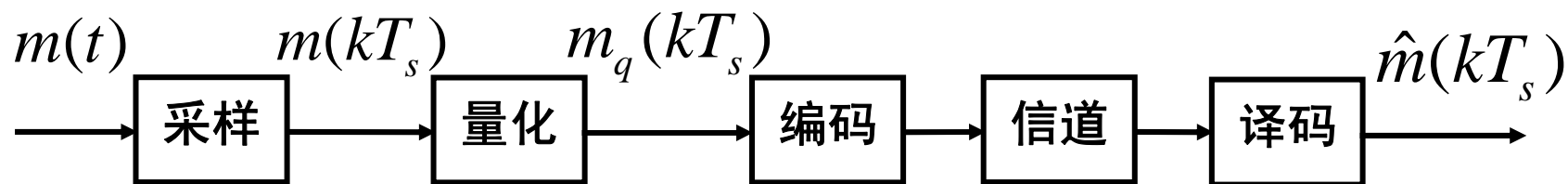
相应恢复电平为量化区间的中间值，即 $(1024 + 3.5 \times 64)\Delta = 1248\Delta$

量化误差为：

$$|1248\Delta - 1270\Delta| = 22\Delta$$

三、PCM系统的噪声性能

假定信号样本值是取值在 $(-A, A)$ 中的均匀分布随机变量，并采用 M 电平均匀量化器。PCM信号传输过程如图



PCM接收端译码器输出可表示为：

$$\hat{m}(kT_s) = m(kT_s) + n_q(kT_s) + n_c(kT_s)$$

其中 $m(kT_s)$ 采样值，是信号分量， $n_q(kT_s)$ 是由量化误差引起的噪声， $n_c(kT_s)$ 是由信道误码引起的噪声，所以输出信噪比为，

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{E[m^2(kT_s)]}{E[n_q^2(kT_s)] + E[n_c^2(kT_s)]}$$

(1) 先不考虑信道误码引起的噪声：

M 电平均匀量化所引起的量化噪声功率为，

$$E[n_q^2(kT_s)] = \frac{(\Delta v)^2}{12}, \quad \Delta v = \frac{2a}{M}$$

信号样本功率： $E[m^2(kT_s)] = \frac{(M \Delta v)^2}{12}$

输出信噪比： $\frac{P_s}{P_N} = M^2$

若采用 N 比特量化： $M = 2^N$ ，

输出信噪比： $\frac{P_s}{P_N} = 2^{2N}$

(2) 考虑信道误码引起的噪声：

假设信道的误比特率为 P_b ，则一个样本的 N 个比特构成的码字错误概率 $P_e \leq NP_b$ 。通常 P_b 很小，所以在一个码字的 N 个比特中错 2 个或 2 个以上比特的概率非常小，可以近似认为每个码字如果出错，则错误也只有一个比特构成。

若样本 N 个比特采用自然编码，不同位的权值是不一样的。这 N 位的权值分别为 $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{N-1}$ ，如果一个码字出了错，则均方误差值为：

$$\begin{aligned} E[\Delta^2] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (2^{i-1} \cdot \Delta v)^2 \\ &= \frac{2^{2N} - 1}{3N} \cdot (\Delta v)^2 \\ &\approx \frac{2^{2N}}{3N} \cdot (\Delta v)^2 \end{aligned}$$

码字错误概率为 $P_e \approx NP_b$ ，平均每隔 $T_a = T_s / P_e = T_s / NP_b$ 时间发生一个样本码字错误。**信道误码引起的噪声功率为：**

$$\begin{aligned} E[n_c^2(kT)] &= E[\Delta^2] \cdot P_e = \frac{2^{2N}}{3N} \cdot (\Delta v)^2 \cdot NP_b \\ &= \frac{2^{2N}}{3} \cdot (\Delta v)^2 \cdot P_b \end{aligned}$$

考虑到信道误码后，PCM的**输出信噪比**为

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{E[m^2(kT_s)]}{E[n_q^2(kT_s)] + E[n_c^2(kT_s)]} = \frac{2^{2N}}{1 + 4P_e \cdot 2^{2N}}$$

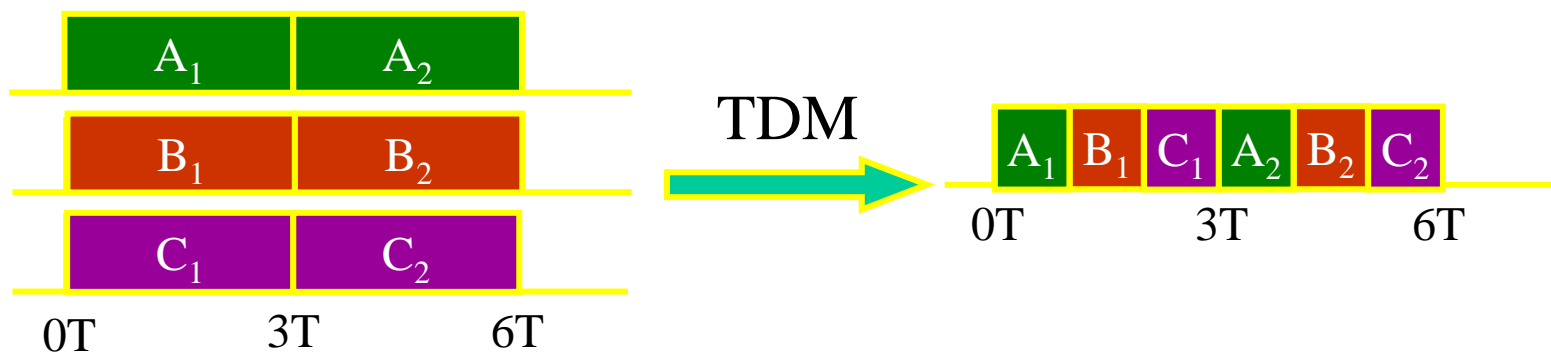
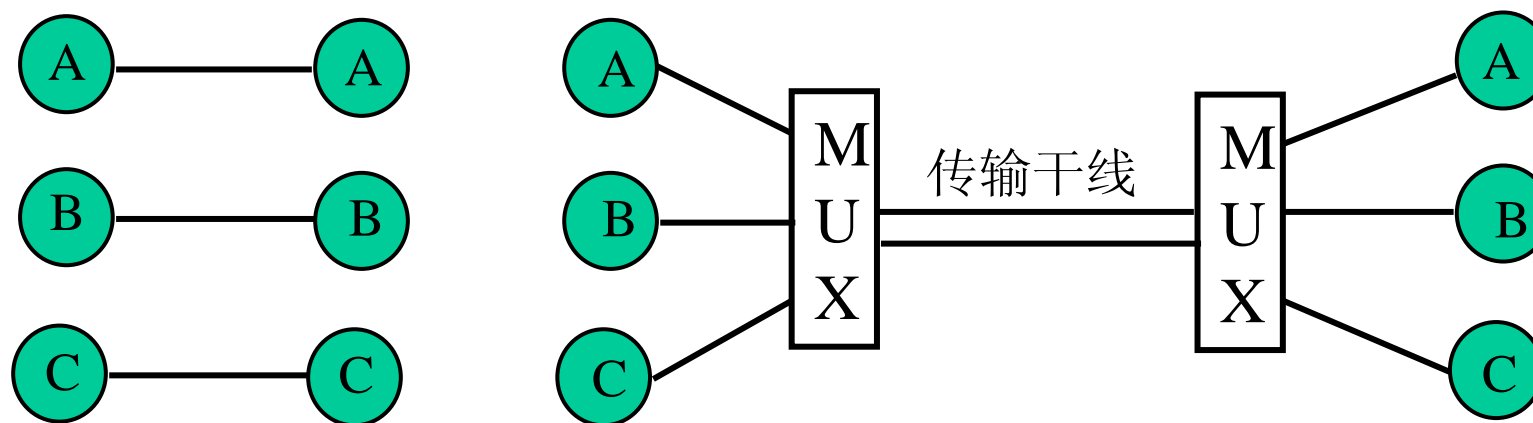
在大信噪比时，**信道误码较小**， $4P_e \cdot 2^{2N} \ll 1$

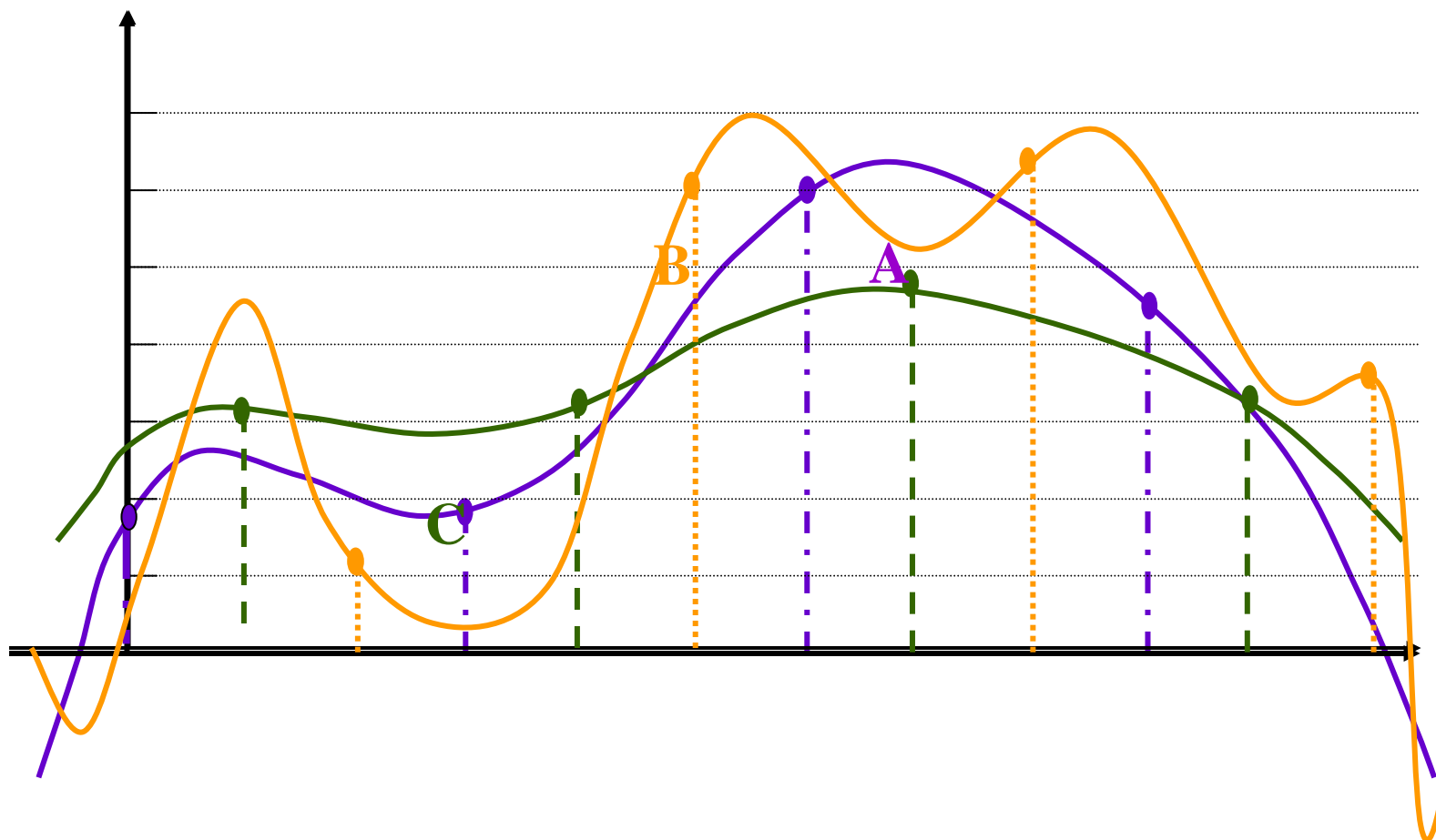
$$\frac{P_s}{P_N} = 2^{2N}$$

信道误码较大时， $4P_e \cdot 2^{2N} \gg 1$

$$\frac{P_s}{P_N} = \frac{1}{4P_e}$$

四、PCM的时分复用



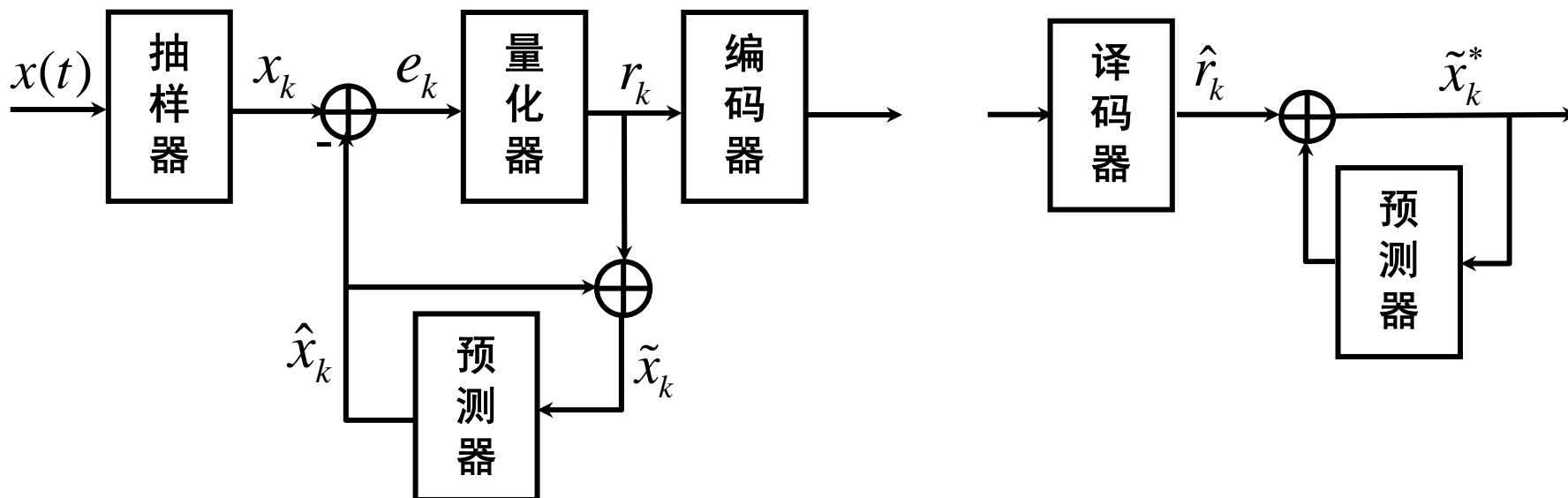


普通话音的PCM，采样频率8k，每个样本用8bit，码率为64k b/s；
若3路复用，则码率为192k b/s；

§ 5.4 差分脉冲编码调制 (DPCM) 和增量调制 (ΔM)

一、差分脉冲编码调制 (DPCM) 原理

利用**信源记忆性**，用前面的样本预测后面的样本，可以改善PCM的性能。使在相同量化电平数目下，量化误差减少；或者在相同量化误差下使量化电平数 M 减少，从而降低码率。DPCM技术正是**利用以前的样本值来预测当前样本值，然后对样本值与预测值的差值进行量化**，这样可以减少量化电平数。



如果调制和解调上的预测器相同，而且信道传输没有误码，则

$$\hat{r}_k = r_k, \quad \tilde{x}_k^* = \tilde{x}_k$$

当采用 p 级线性预测器时：

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^p a_i \tilde{x}_{k-i}$$

DPCM误差
为，

$$\begin{aligned} q(k) &= x_k - \tilde{x}_k^* = x_k - \tilde{x}_k \\ &= (\hat{x}_k + e_k) - (r_k + \hat{x}_k) \\ &= (e_k - r_k) \end{aligned}$$

DPCM是一种有记忆的量化器。最佳线性预测器的预测系数 $\{a_i\}$ 可以通过使均方预测误差最小求得。

$$\begin{aligned} D &= E \left[X_n - \sum_{i=1}^p a_i X_{n-i} \right]^2 \\ &= R_X(0) - 2 \sum_{i=1}^p a_i R_X(i) + \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p a_i a_j R_X(i-j) \end{aligned}$$

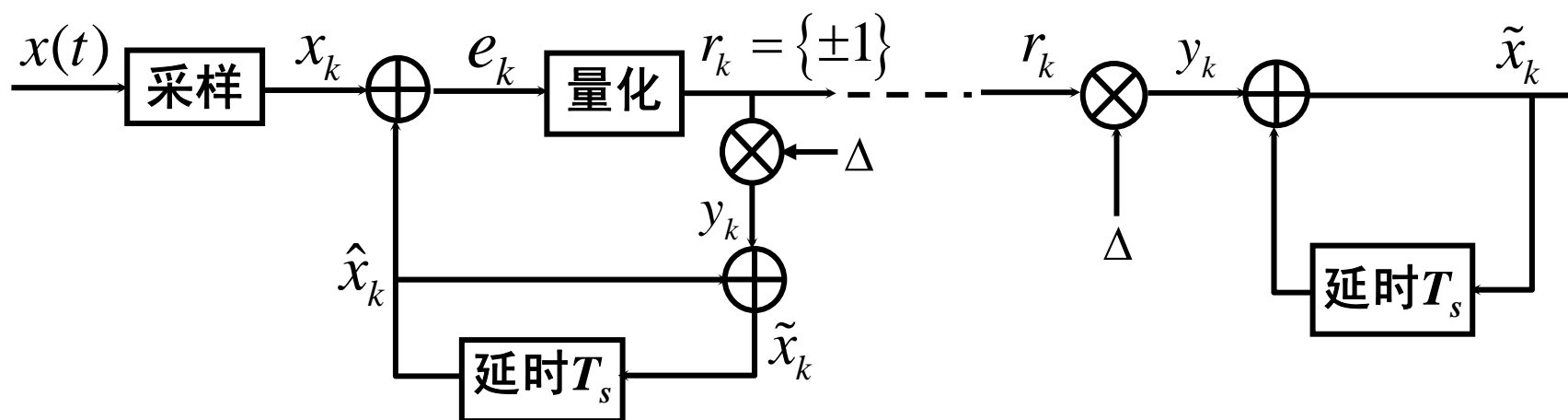
为了求 D 的极小值，可通过令偏导数等于零，

$$\frac{\partial D}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\sum_{i=1}^p a_i R_X(i-j) = R_X(j) \quad 1 \leq j \leq p$$

二、增量调制 (ΔM)

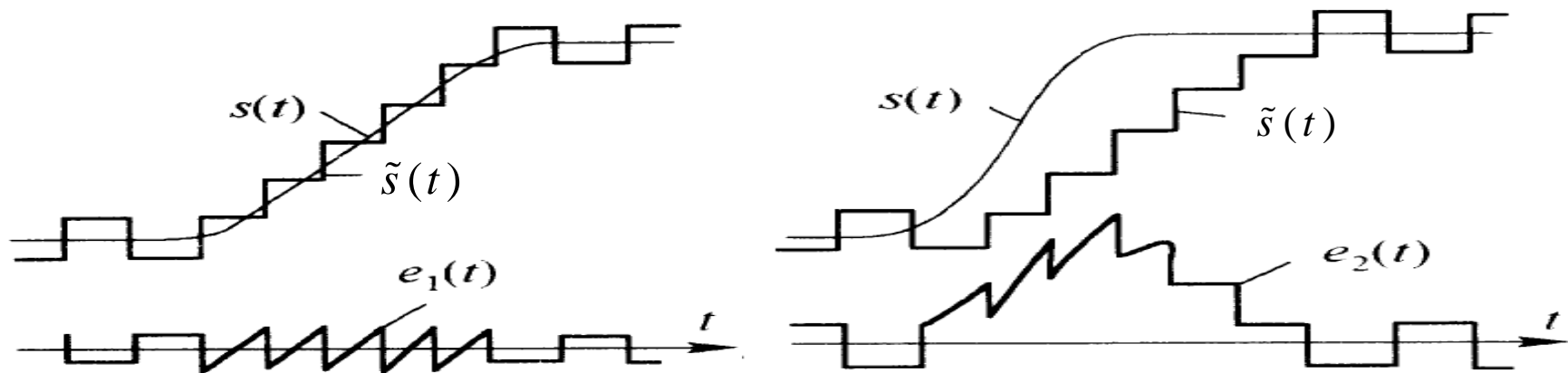
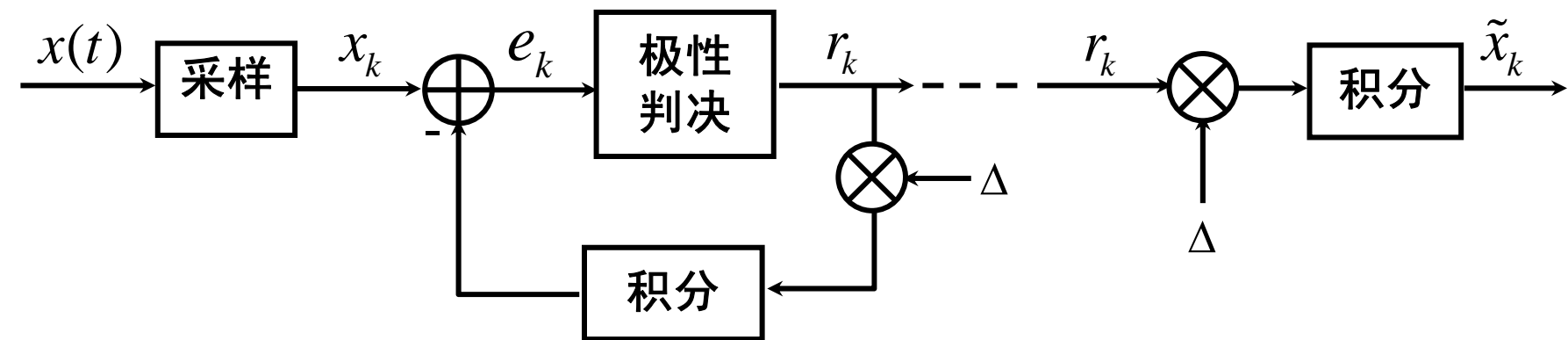
增量调制 (ΔM) 是一种最简单的DPCM，其中量化器的量化电平数取为2，预测器是一个延时一个抽样间隔的延时器。



信道传输无误码时，ΔM的解调输出为 \tilde{x}_k 。

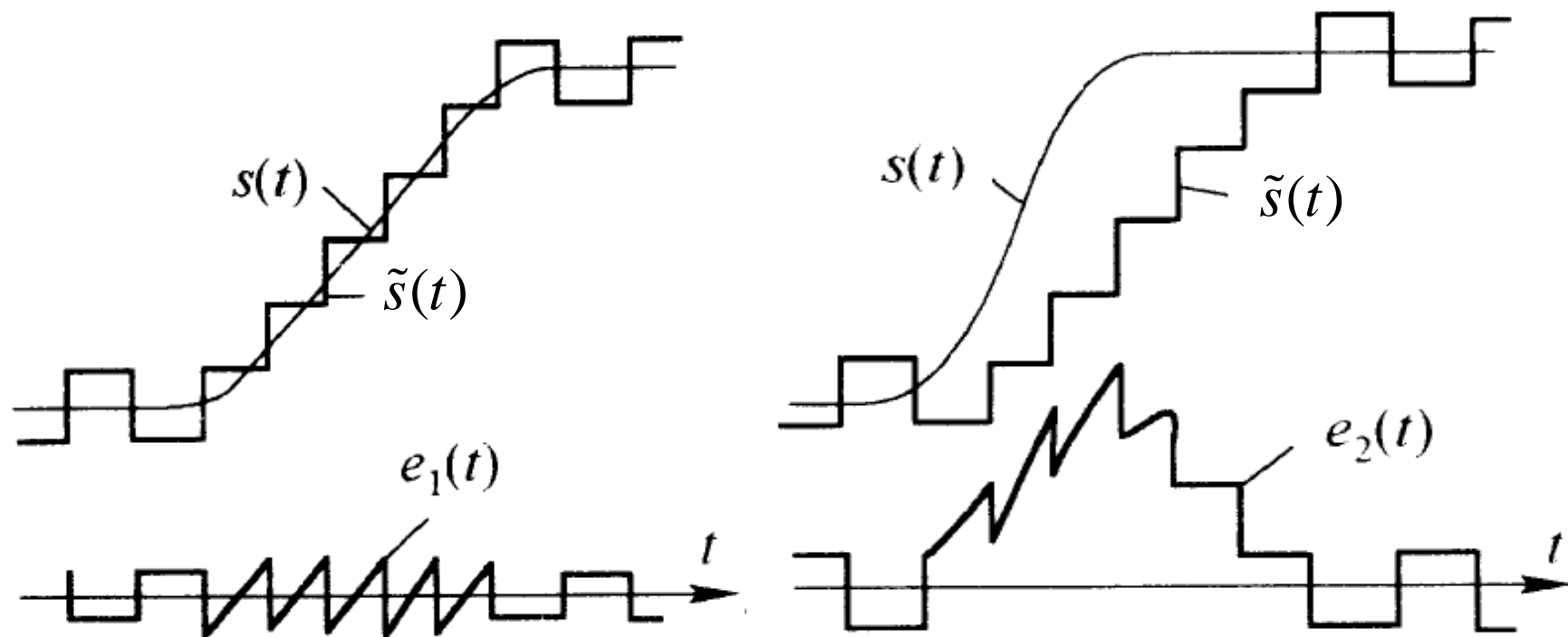
$$\hat{x}_k = \tilde{x}_{k-1} ,$$
$$\tilde{x}_k = y_k + \tilde{x}_{k-1} = \sum_{i=0}^k y_i$$

实际上 \tilde{x}_k 是对 y_k 的累加，可以用积分器代替它。



增量调制的失真（噪声）分二种情况；

- ① 当采样频率较高时，阶梯波形跟得上原来信号的变化，这时的失真称为**颗粒量化噪声**（granular noise）
- ② 当阶梯波形跟不上原来信号变化时，这时失真较大，称为**过载量化噪声**。



不发生过载噪声条件:

$$\left| \frac{dx(t)}{dt} \right|_{\max} \leq \frac{\Delta}{T_s} = \Delta \cdot f_s$$

例如对于正弦信号:

$$s(t) = A \sin 2\pi f_k t$$

$$A \cdot 2\pi f_k \leq \Delta \cdot f_s \quad \text{或} \quad A \leq \frac{\Delta \cdot f_s}{2\pi \cdot f_k}$$

增量调制的噪声性能

假定输入信号为频率 f_k 的正弦信号，为了保证不产生过载量化噪声，要求正弦波最大幅度不超过，

$$A_{\max} = \frac{\Delta}{2\pi} \cdot \frac{f_s}{f_k}$$

信号功率为：

$$P_{s_o} = \frac{A_{\max}^2}{2} = \frac{\Delta^2}{8\pi^2} \cdot \frac{f_s^2}{f_k^2}$$

颗粒量化噪声看成是在 $(-\Delta, \Delta)$ 上均匀分布的随机变量，噪声功率为：

$$E[e^2(t)] = \int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 \cdot p(e) de = \frac{1}{2\Delta} \int_{-\Delta}^{\Delta} e^2 de = \frac{\Delta^2}{3}$$

由于采样周期为 T_s ，可以认为颗粒量化噪声功率密度在 $(0, f_s)$ 中均匀，

$$P_e(f) = \frac{\Delta^2}{3f_s}, \quad 0 < f < f_s$$

增量调制解调后低通滤波的带宽满足：

$$f_k \leq f_L \leq f_s$$

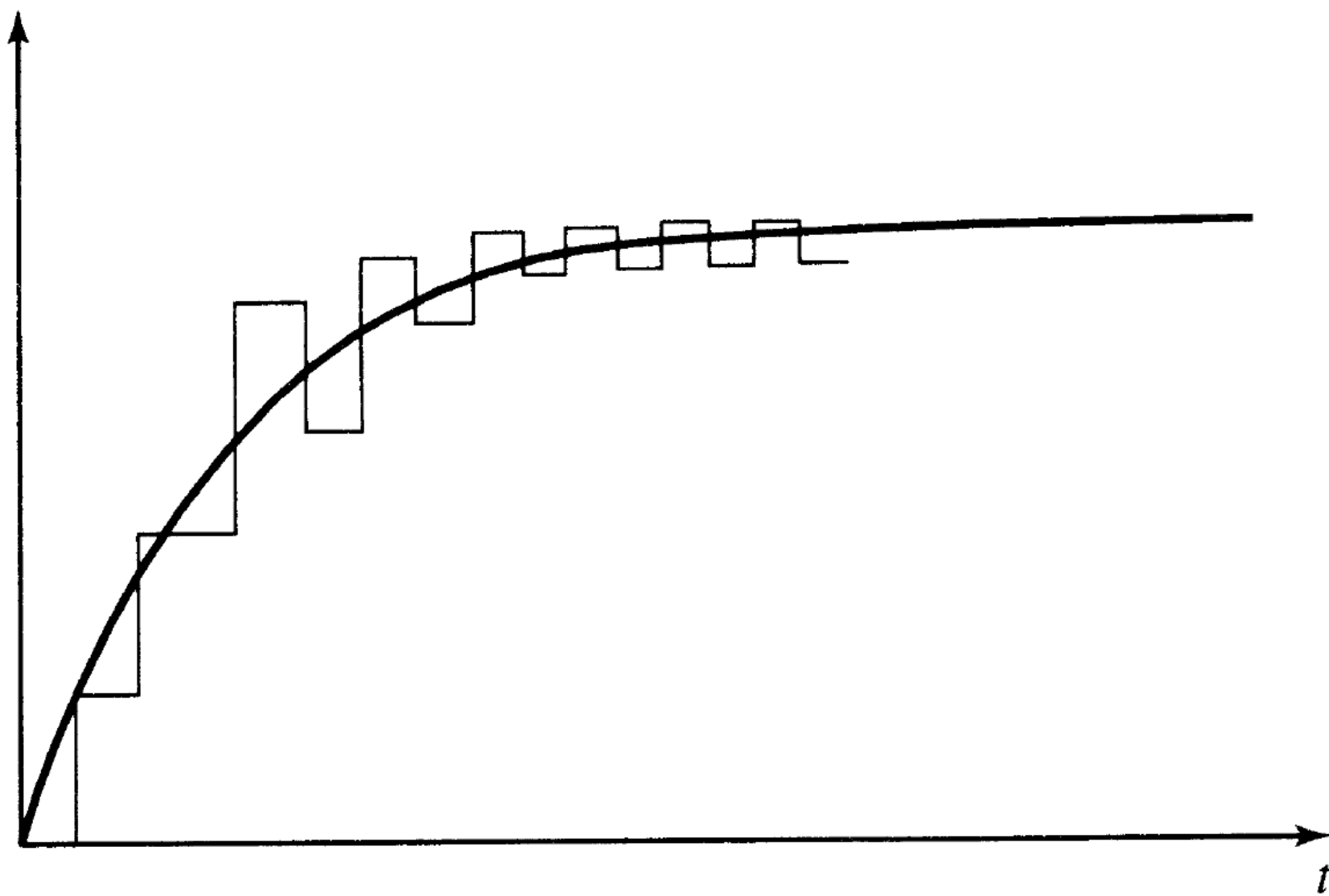
低通滤波后的输出噪声功率为，

$$P_{N_o} = \frac{\Delta^2 f_L}{3f_s}$$

增量调解调后的输出信噪比为：

$$\frac{P_{S_o}}{P_{N_o}} = \frac{3}{8\pi^2} \left(\frac{f_s^3}{f_k^2 \cdot f_L} \right)$$

输出信噪比与采样频率的三次方成比例，所以对于用于语音编码的增量调制，要求采样频率 f_s 在几十 kH_z / s 以上。一般来说的增量调制的码率比PCM低，但语音质量也不如 PCM好。现在也出现一些改进的增量调制技术，如自适应和调制等。



自适应增量调制的波形图