

频率域的拉普拉斯算子

- 空域

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$$

- 频率域

$$H(u, v) = -4\pi^2(u^2 + v^2) = -4\pi^2 D^2(u, v)$$

- 频率域增强:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= F^{-1}\{F(u, v) - H(u, v)F(u, v)\} \\ &= F^{-1}\{[1 + 4\pi^2 D^2(u, v)]F(u, v)\} \end{aligned}$$

频率域拉普拉斯增强



a b

FIGURE 4.58

(a) Original, blurry image.

(b) Image enhanced using the Laplacian in the frequency domain. Compare with Fig. 3.38(e).

高提升与高频强调滤波

- 空域钝化模板与高提升滤波

$$g_{mask}(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y)$$

$$g(x, y) = f(x, y) + k * g_{mask}(x, y)$$

- 对应频域处理

$$f_{LP}(x, y) = F^{-1}[H_{LP}(u, v) F(u, v)]$$

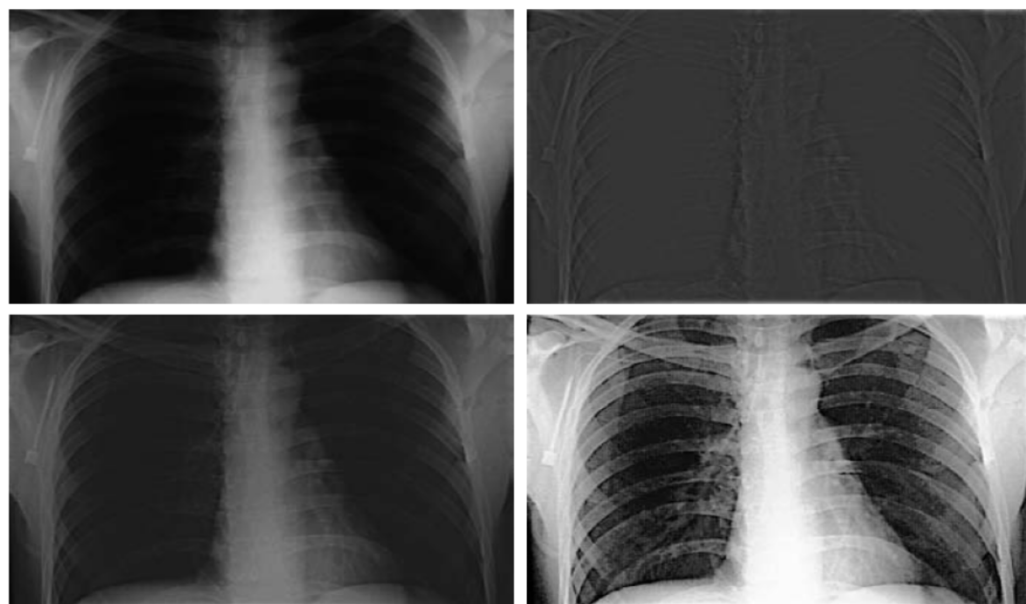
$$g(x, y) = F^{-1}\{[1 + k * [1 - H_{lp}(u, v)]] F(u, v)\}$$

- 或 $g(x, y) = F^{-1}\{[1 + k * H_{hp}(u, v)] F(u, v)\}$

高频强调滤波器

高频强调滤波例子

- 更一般形式: $g(x, y) = F^{-1} \{ [k_1 + k_2 * H_{hp}(u, v)] F(u, v) \}$



a b
c d

FIGURE 4.59 (a) A chest X-ray image. (b) Result of highpass filtering with a Gaussian filter. (c) Result of high-frequency-emphasis filtering using the same filter. (d) Result of performing histogram equalization on (c). (Original image courtesy of Dr. Thomas R. Gest, Division of Anatomical Sciences, University of Michigan Medical School.)

- $K1=0.5, K2=0.75$
- 直方图均衡
- 医学图像处理中，振铃现象是不可接受的，采用高斯滤波器可以避免振铃。

原图	高斯高通滤波结果
高斯高频强调滤波	对c进行直方图均衡结果

同态滤波

- 先对图像作对数运算，即变换到对数亮度域中——有时称为密度域。
密度域处理更符合人类视觉、听觉特性！

- 同态图像滤波 $f(x,y) \Rightarrow \boxed{\text{对数}} \Rightarrow \boxed{\text{增强处理}} \Rightarrow \boxed{\text{指数}} \Rightarrow g(x,y)$

- 图像的形成: $f(x, y) = i(x, y) \cdot r(x, y)$

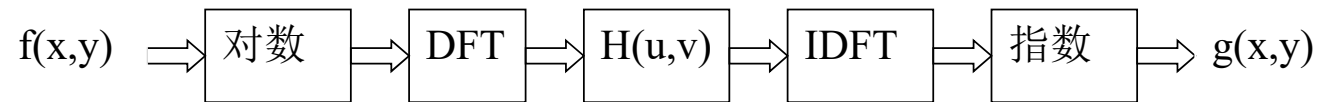
- 同态分析: $z(x, y) = \ln f(x, y) = \ln i(x, y) + \ln r(x, y)$

然后可采用以前讨论的各种增强方法对 $z(x,y)$ 进行增强处理，最后取指数

同态图像滤波

- 图像的照射分量通常由慢的空间变化来表征，而反射分量往往引起突变，特别是在不同物体的连接部分。
- 这些特性导致图像取对数后的傅里叶变换的**低频成分与照射相联系**，而**高频成分与反射相联系（近似地）**，因而可以采用不同方法衰减（增强）照射（反射）的贡献。

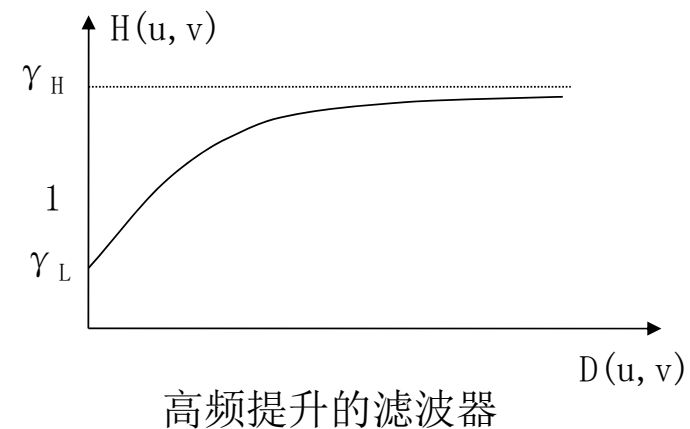
例：同态处理



其中

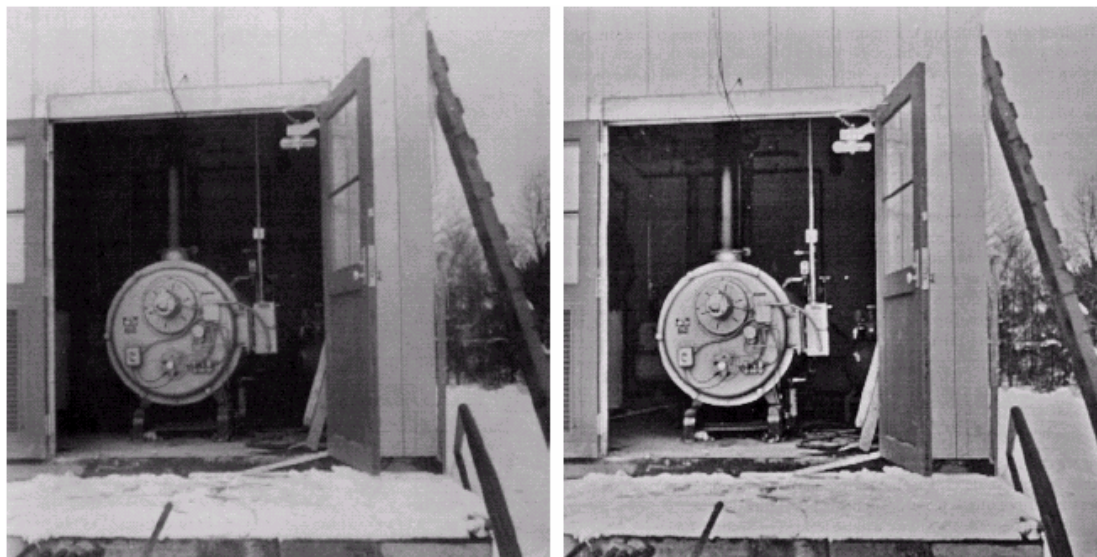
$$H(u,v) = (\gamma_H - \gamma_L) \left[1 - e^{-C \frac{D^2(u,v)}{D_0^2}} \right] + \gamma_L$$
$$D(u,v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

C用于控制滤波器的陡峭程度
若 $\gamma_L < 1$ 且 $\gamma_H > 1$ ，则衰减低频（照射），增强高频（反射），同时进行动态范围的压缩和对比度的增强。

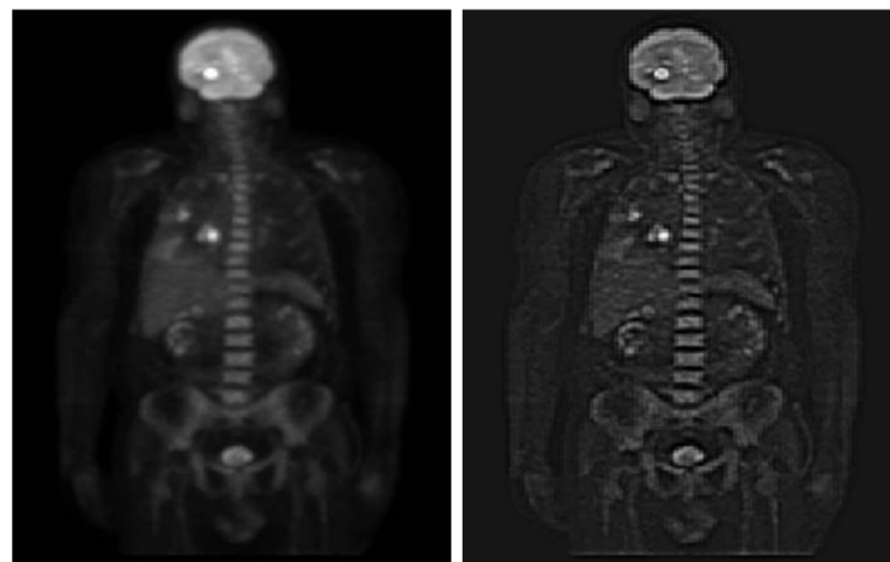


同态滤波的特点:

- (1) 由于需要进行对数和指数运算, 计算量大。
- (2) 对于加性噪声, 不能用同态滤波滤除。



同态图像滤波: (a) 原图, (b) 处理结果 $\gamma_H=2.0$, $\gamma_L=0.5$



(a) PET扫描图像 (b) 同态滤波增强的图像

选择性滤波

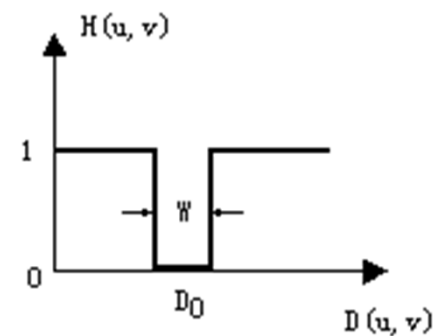
带阻滤波器

理想带阻

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{若 } D_0 - W/2 \leq D(u, v) \leq D_0 + W/2 \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$

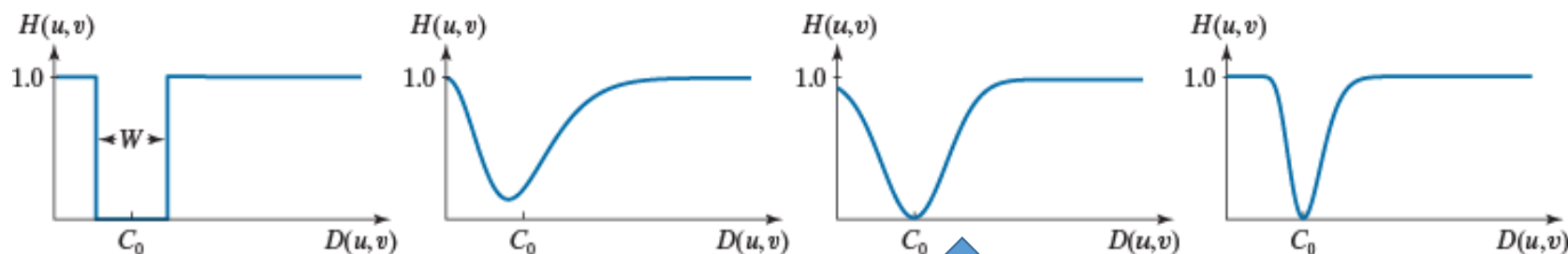
W 为阻带宽度, D_0 为阻带中心频率



理想带阻滤波器

高斯带阻滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - C_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$



理想带阻滤波器

高斯低通+高通滤波器

$$H(u, v) = 1 - e^{-\left[\frac{(D(u, v) - C_0)^2}{W^2} \right]}$$

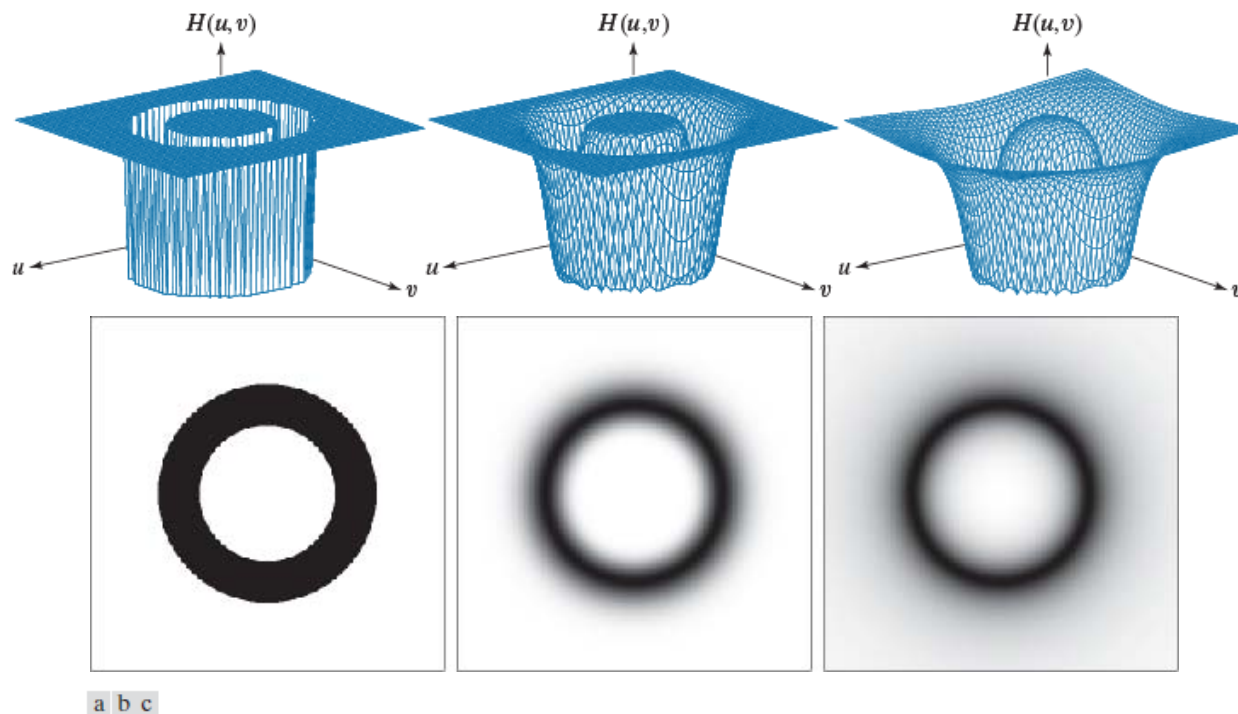
$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{D^2(u, v) - C_0^2}{D(u, v)W} \right]^2}$$

帶阻濾波器

TABLE 4.7

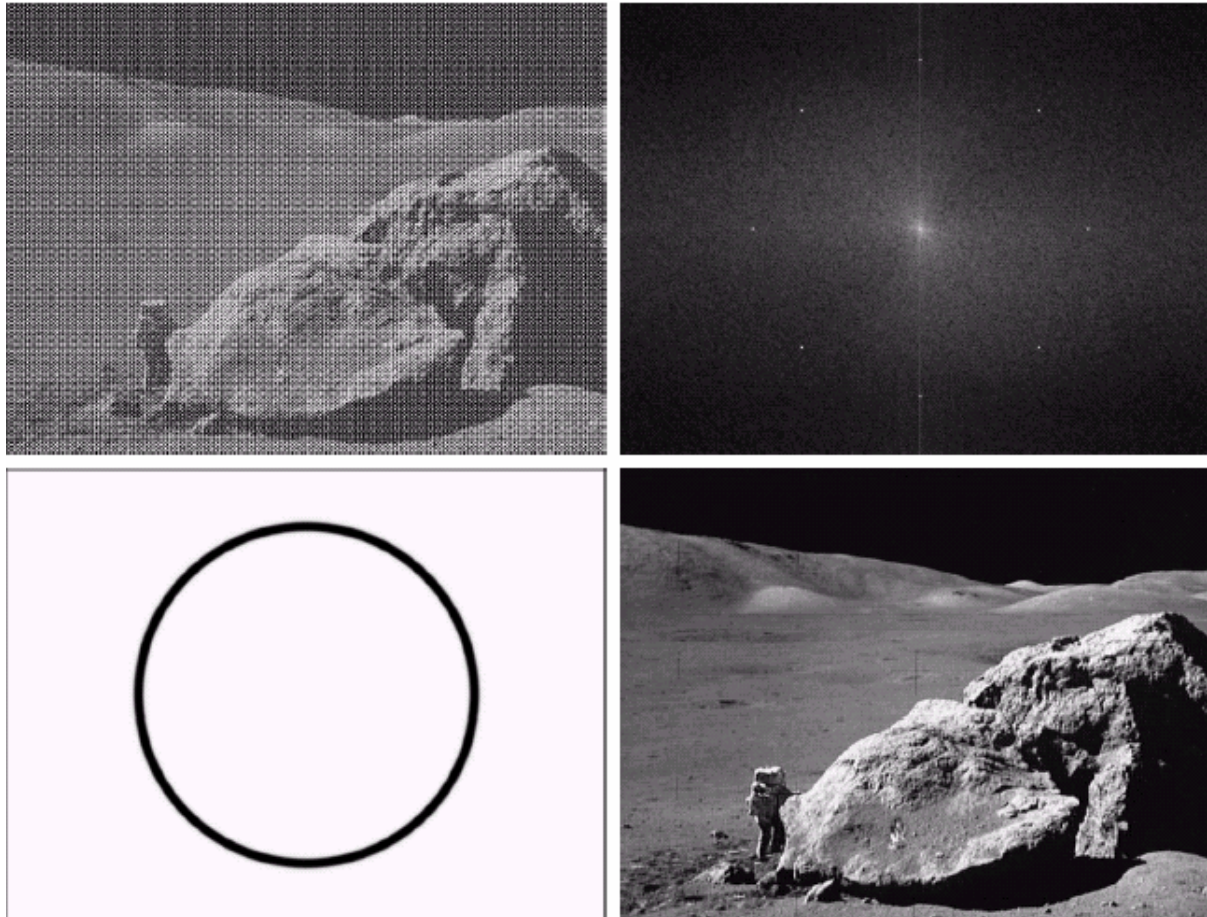
Bandreject filter transfer functions. C_0 is the center of the band, W is the width of the band, and $D(u,v)$ is the distance from the center of the transfer function to a point (u,v) in the frequency rectangle.

Ideal (IBRF)	Gaussian (GBRF)	Butterworth (BBRF)
$H(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{if } C_0 - \frac{W}{2} \leq D(u,v) \leq C_0 + \frac{W}{2} \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$	$H(u,v) = 1 - e^{-\left[\frac{D^2(u,v) - C_0^2}{D(u,v)W}\right]^2}$	$H(u,v) = \frac{1}{1 + \left[\frac{D(u,v)W}{D^2(u,v) - C_0^2}\right]^{2n}}$



a b c

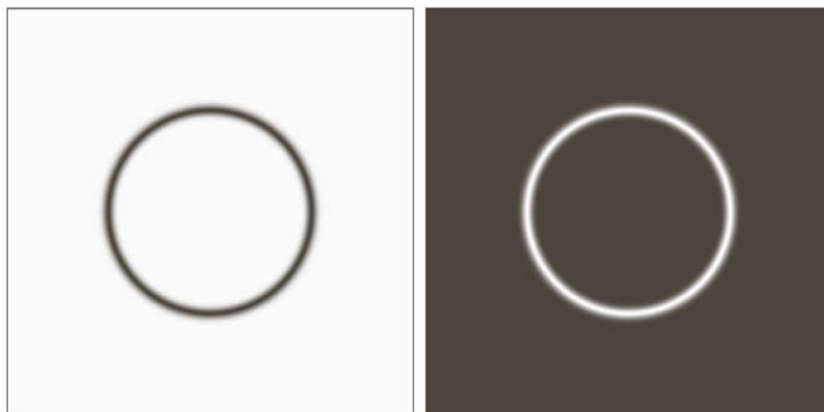
FIGURE 4.62 Perspective plots of (a) ideal, (b) modified Gaussian, and (c) modified Butterworth (of order 1) bandreject filter transfer functions from Table 4.7. All transfer functions are of size 512×512 elements, with $C_0 = 128$ and $W = 60$.



(a)被正弦噪声污染的图像, (b)图(a)的频谱图,
(c) 4阶巴特沃思带阻滤波器(白代表1), (d)滤波结果

帶通濾波器

$$H_{bp}(u, v) = 1 - H_{br}(u, v)$$



高斯帶阻和帶通濾波器

陷波滤波器

消除以 (u_0, v_0) 为中心, D_0 为半径的区域内的所有频率分量

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{若 } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{若 } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

其中 $D(u, v) = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2}$

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{若 } D_1(u, v) \leq D_0 \text{ 或 } D_2(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$$

$$D_1(u, v) = [(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2]^{1/2}$$

$$D_2(u, v) = [(u + u_0)^2 + (v + v_0)^2]^{1/2}$$

- 零相位陷波滤波器须对原点对称

陷波滤波器

- 若考虑多个陷波滤波器，则

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^Q H_k(u, v) H_{-k}(u, v)$$

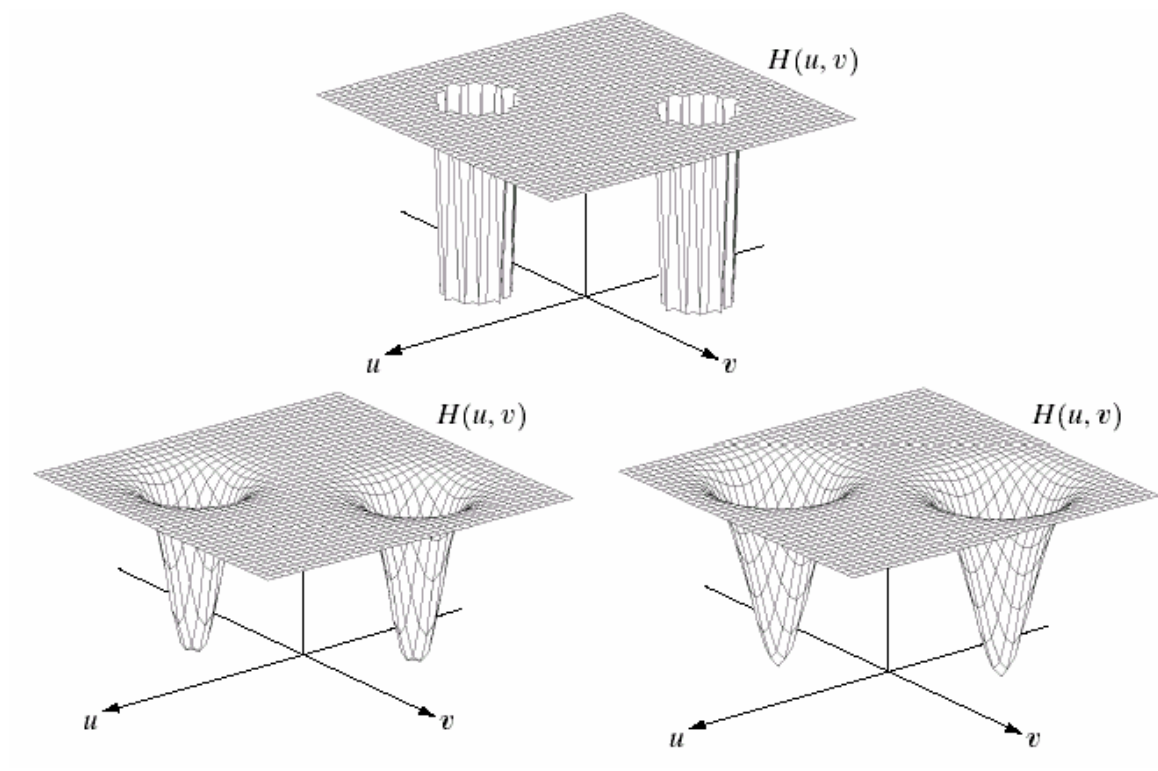
- 其中

$$D_k(u, v) = [(u - u_k)^2 + (v - v_k)^2]^{1/2}$$

$$D_{-k}(u, v) = [(u + u_k)^2 + (v + v_k)^2]^{1/2}$$

例：含三个陷波对的巴特沃思型陷波滤波器

$$H_{NR}(u, v) = \prod_{k=1}^3 \left[\frac{1}{1 + [D_{0k} / D_k(u, v)]^{2n}} \right] \left[\frac{1}{1 + [D_{0k} / D_{-k}(u, v)]^{2n}} \right]$$

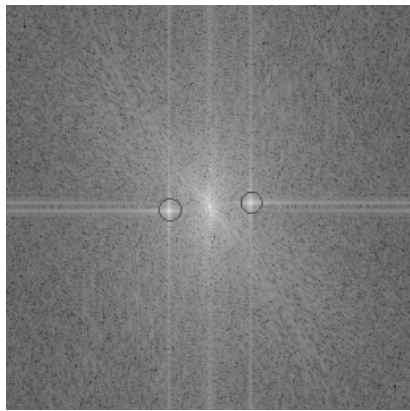


陷波滤波器：（a）理想型（b）巴特沃思型
（c）高斯型

陷波滤波器实例



(a) 受条纹干扰的图像

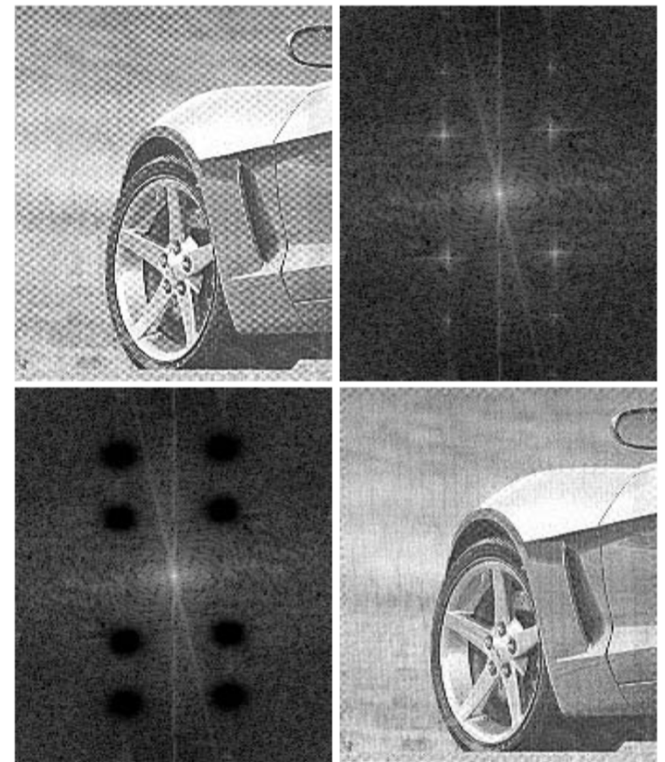


(b) 频谱图



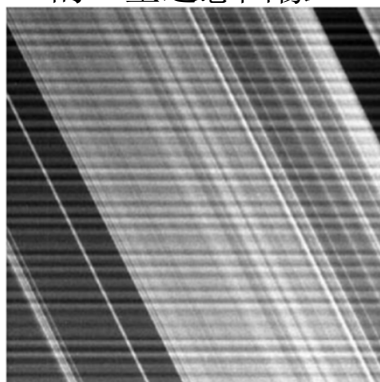
(c) 陷波滤波后的图

正弦型干扰及其理想陷波滤波

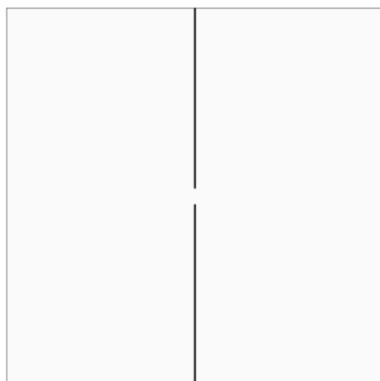
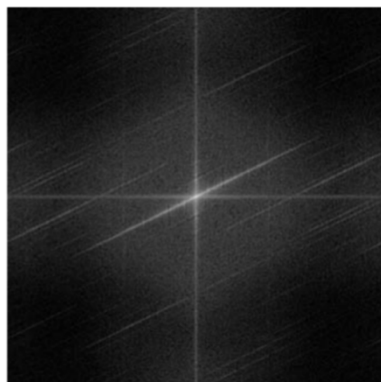


陷波滤波器实例

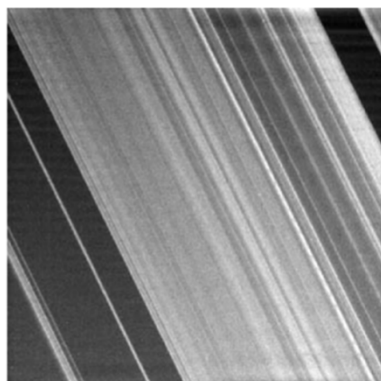
(a) 有水平条纹干扰的卫星遥感图像



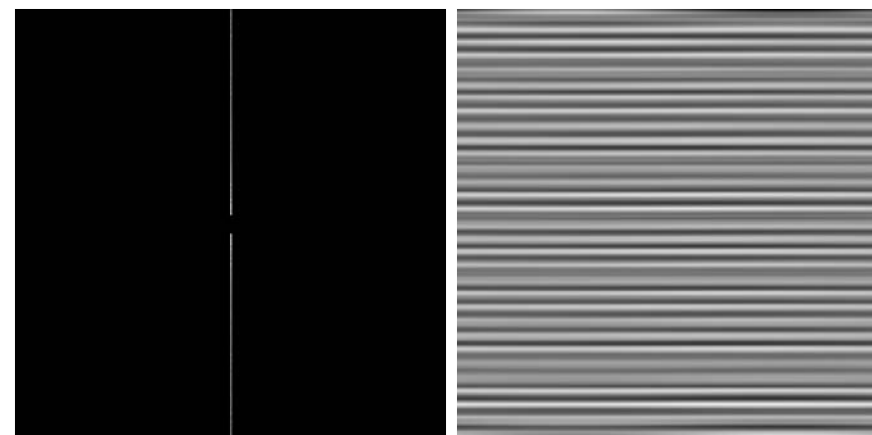
(b) 图 (a) 的频谱图



(c) 陷波滤波器(白色为1, 黑色为0)



(d) 陷波滤波后的图



左：陷波带通滤波器(白色为1, 黑色为0),
(右) 获得的周期干扰图

FIGURE 4.66
(a) Result (spectrum) of applying a notch pass filter to the DFT of Fig. 4.65(a).
(b) Spatial pattern obtained by computing the IDFT of (a).

离散傅里叶变换的实现

- 二维DFT的可分性

$$F(u, v) = \sum_{x=0}^{M-1} e^{-j2\pi ux/M} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N} = \sum_{x=0}^{M-1} F(x, v) e^{-j2\pi ux/M}$$

- 其中：
$$F(x, v) = \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi vy/N}$$

- 二维DFT可通过两个依次按照行和列的一维DFT变换来得到，这是一个重要的简化。
- 先计算每一行的一维DFT，再沿着计算结果的每一列进行一维DFT

用DFT算法计算IDFT

- 由 $MNf^*(x, y) = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} F^*(u, v) e^{-j2\pi(ux+vy)/N}$ 可知，如果将 $F^*(u, v)$

代入DFT，将获得 $MNf^*(x, y)$ 。由此容易得到真正需要的 $f(x, y)$

快速Fourier变换 (FFT)

- 一. FFT算法原理
 - DFT正变换

$$F(u) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) W_N^{ux} \quad , \quad u=0,1,\dots,N-1$$

其中

$$W_N = e^{-j2\pi / N}$$

DFT计算每个**F(u)**都要做**N**次复数乘法和**N-1**次加法,共要进行**N*N**次乘法和**N*(N-1)**次加法

• FFT导出

- 设**N**为**2**的正整数次幂:

$$N = 2^n$$

- 设**M**为一正整数, 使

$$N = 2M$$

- 则有:

$$F(u) = \frac{1}{2M} \sum_{x=0}^{2M-1} f(x) W_{2M}^{ux} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_{2M}^{u(2x)} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_{2M}^{u(2x+1)} \right]$$

- 由于 $W_{2M}^{2ux} = e^{-(j2\pi/2M)2ux} = e^{-(j2\pi/M)ux} = W_M^{ux}$

- 故 $F(u) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_M^{ux} + \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_M^{ux} W_{2M}^u \right]$

- 定义:
$$F_{\text{even}}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x) W_M^{ux}, \quad u=0,1,\dots,M-1$$

$$F_{\text{odd}}(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1) W_M^{ux}, \quad u=0,1,\dots,M-1$$

- 则有:
$$F(u) = \frac{1}{2} [F_{\text{even}}(u) + F_{\text{odd}}(u) W_{2M}^u]$$

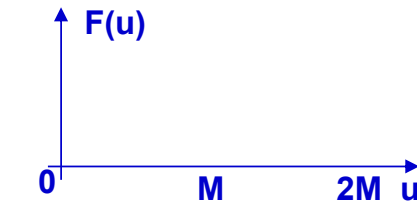
- 由于 $W_M^{u+M} = W_M^u$ 和 $W_{2M}^{u+M} = -W_{2M}^u$

- 代入上式, 得
$$F(u+M) = \frac{1}{2} [F_{\text{even}}(u) - F_{\text{odd}}(u) W_{2M}^u]$$

- 设 N ($N = 2^n$) 点 **FFT** 需要的乘法和加法次数分别为 $m(n)$ 和 $a(n)$, 则

$$m(n) = 2m(n-1) + 2^{n-1} \quad n \geq 1$$

$$a(n) = 2a(n-1) + 2^n \quad n \geq 1$$



*两个一半长度的**DFT**序列计算, 外加一半数目的乘法(另一半可共用), 和全部数目的加法

- 由于 **$n=0$** ,时 **$2^n=1$** ,单点的**DFT**为其本身, $m(0) = 0, a(0) = 0$

- 故
$$m(n) = \frac{1}{2} 2^n \log_2(2^n) = \frac{1}{2} N \log_2 N \quad n \geq 1$$

$$a(n) = 2^n \log_2(2^n) = N \log_2 N \quad n \geq 1$$

- 计算量的减少:

- 如 **$N=1024$** , 乘法次数的减少量:
即只有原来的约**1/200**

$$\frac{N^2}{\frac{1}{2} N \log_2 N} = \frac{2N}{\log_2 N} = 204.8$$

- 加法次数只有原来的约**1/100**

- 二. 快速**Fourier**反变换 (**IFFT**)

- $$F^{-1}\{F(u)\} = f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} F(u) \exp[j2\pi ux / N] \quad , \quad \mathbf{x=0,1,...,N-1}$$

两边取共轭
$$f^*(x) = N \times \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} F^*(u) \exp[-j2\pi ux / N]$$

- 对于二维情况

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \exp[j2\pi(ux + vy) / N]$$

, x,y=0,1,...,N-1

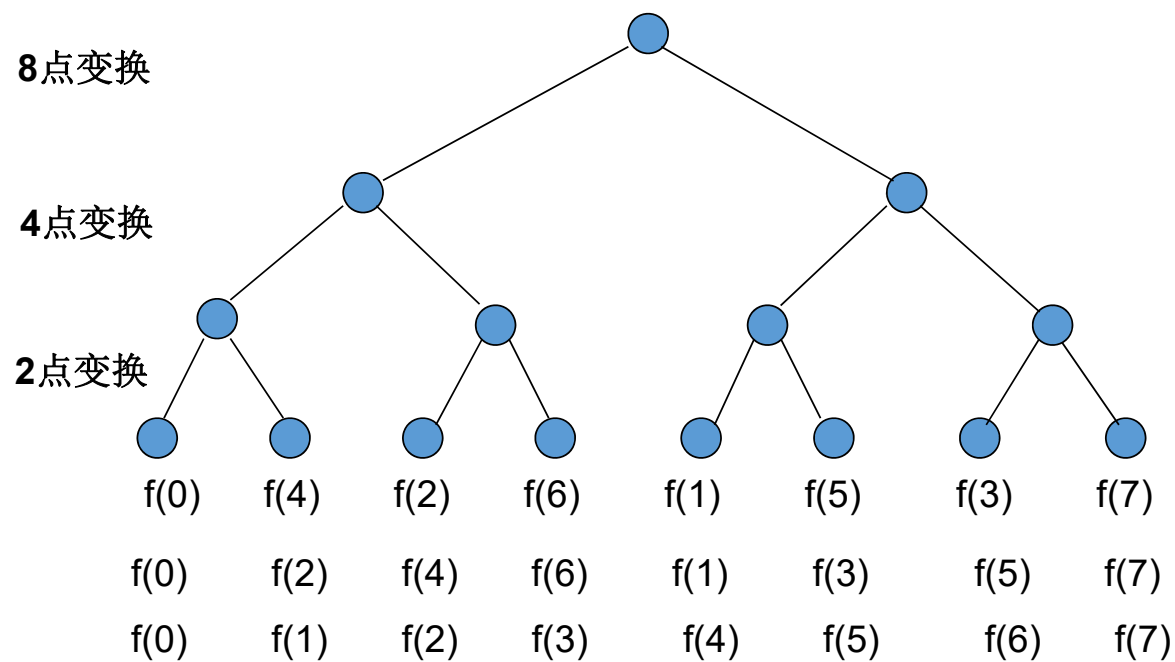
$$f^*(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} \sum_{v=0}^{N-1} F^*(u, v) \exp[-j2\pi(ux + vy) / N]$$

- 而对图像

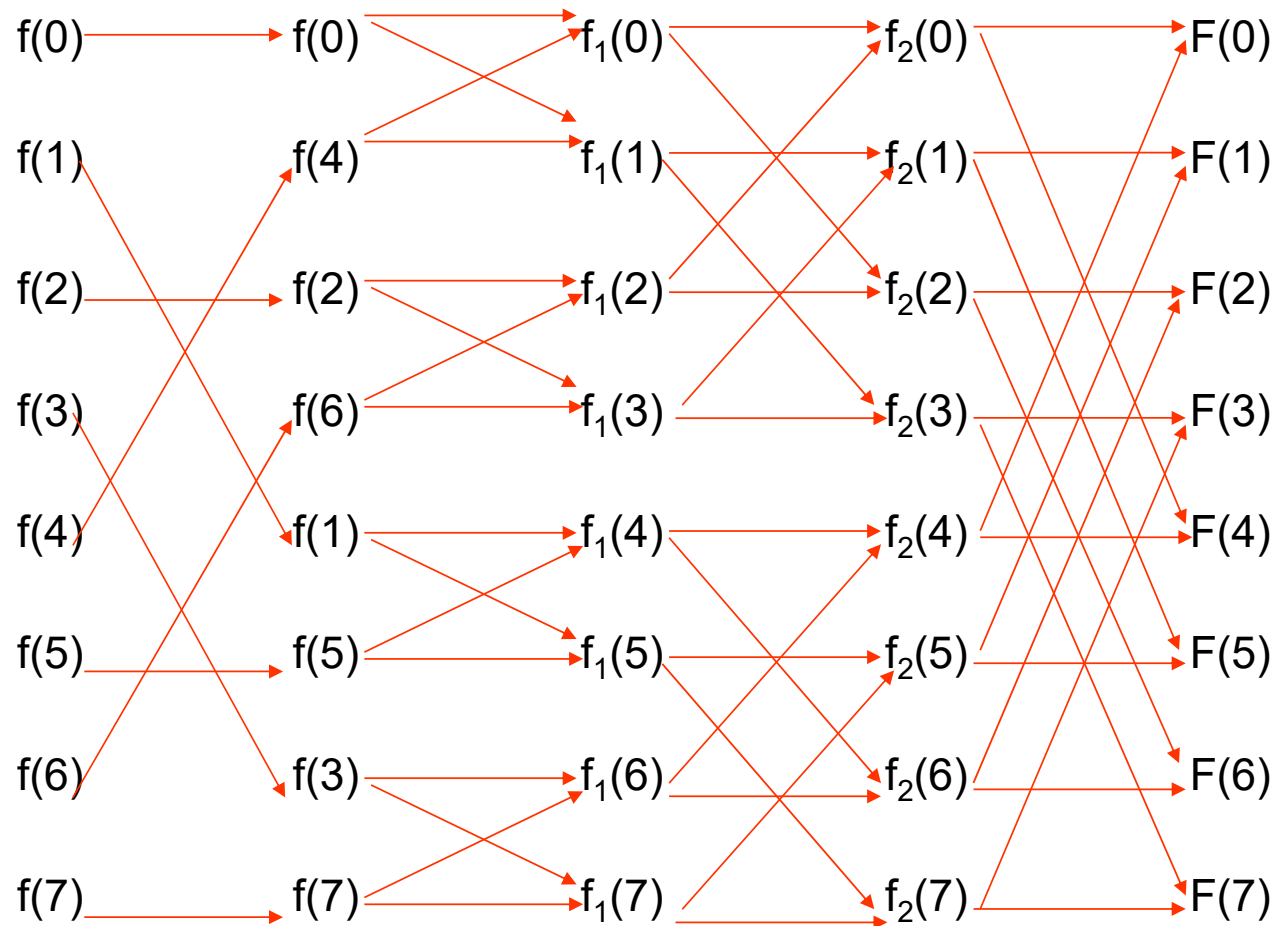
$$f(x, y) = f^*(x, y)$$

• 三. FFT算法的实现

- 先对输入进行排序:可用二进制序号高低反转进行定序
 - 如, $6 = (110)_2$, 倒序后为 $(011)_2 = 3$, 故排在第3位



FFT蝶形运算流程



课后作业

- 习题4.10, 4.26, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.47
- 上机作业（二选一）：
 - 1. 实现一个 2D图像的FFT算法，并将频谱移到图像中心；
 - 2. 实现一个傅里叶频率域滤波方法，对一幅图像进行高频提升滤波。