# 信号与系统第七章试题答案

1. ① $H(z)=\dfrac{\frac{1}{3}}{1-0.5z^{-1}}+\dfrac{\frac{2}{3}}{1-2z^{-1}}$

$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h[n]|<+\infty \Longrightarrow$ 稳定 $\Longrightarrow 0.5<|z|<2$ 包含单位圆

$\Longrightarrow h[n]=\frac{1}{3}(0.5)^n u[n]-\frac{2}{3}(2)^n u[-n-1]$

② $x[n]=3-u[n]$

根据定理：某LTI系统冲激响应$h[n]$，其z变换为$H(z)$，则 $x[n]=a^n$ 通过该系统的输出为 $H(a)a^n$，其中$a$在$H(z)$收敛域内。

$3=3\cdot 1^n \xrightarrow{LTI} 3H(1)\,1^n=3\cdot 0=0$

$u[n] \xrightarrow{LTI} -\frac{1}{3}(0.5)^n u[n]+\frac{4}{3}(2)^n u[n]$

$x[n] \xrightarrow{LTI} \frac{1}{3}(0.5)^n u[n]-\frac{4}{3}(2)^n u[n]$

2. ① 根据上面定理，易知收敛域为$0.5<|z|<2$，稳定非因果。

② $a^n \xrightarrow{LTI} H(a)a^n \Longrightarrow H(-1)=1$

则 $H(z)=\dfrac{-1.5z^2}{(z+2)(z-0.5)}$

$\dfrac{H(z)}{z}=\dfrac{-1.5z}{(z+2)(z-0.5)}=\dfrac{-\frac{6}{5}}{z+2}+\dfrac{-\frac{3}{10}}{z-0.5}$

则 $H(z)=\dfrac{-\frac{6}{5}z}{z+2}+\dfrac{-\frac{3}{10}z}{z-0.5}=\dfrac{-\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}+\dfrac{-\frac{3}{10}}{1-0.5z^{-1}}$

$0.5<|z|<2$

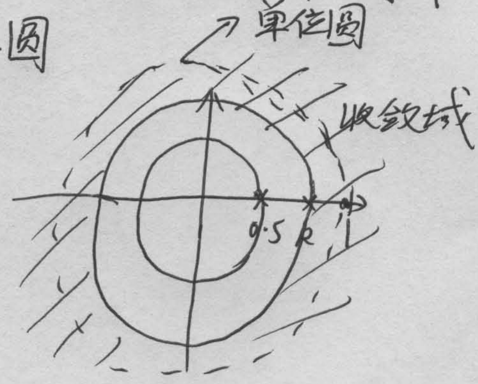
$h[n]=\frac{6}{5}2^n u[-n-1]-\frac{3}{10}(0.5)^n u[n]$

（注意收敛域为$0.5<|z|<2$）

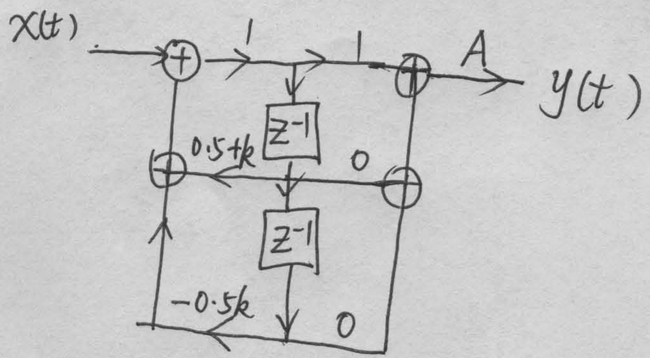
3. ① 因果系统 $\Rightarrow h[n]$ 右边序列 $\Rightarrow H(z)$ 收敛域为某圆外、

稳定 $\Rightarrow H(z)$ 收敛域包含单位圆

因果 + 稳定 $\Rightarrow 0.5<|k|<1$




② $$H(z)=\frac{A}{1-(0.5+k)z^{-1}+0.5kz^{-2}}$$




③ $x[n]=(-1)^n$

$$(-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n=y[n]$$

所以，$H(-1)\cdot(-1)=y[1]=-2 \Rightarrow H(-1)=2$，即

$$\frac{A}{[1-0.5\times(-1)][1-\frac{1}{3}(-1)]}=2 \Rightarrow A=2$$

4. $$\frac{X(z)}{z}=\frac{z}{z^2-2.5z+1}=\frac{z}{(z-2)(z-0.5)}=\frac{\frac{4}{3}}{z-2}-\frac{\frac{1}{3}}{z-0.5}$$

$$X(z)=\frac{\frac{4}{3}z}{z-2}-\frac{\frac{1}{3}z}{z-0.5}=\frac{\frac{4}{3}}{1-2z^{-1}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-0.5z^{-1}}$$

因为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x[n]|<+\infty \Rightarrow$ 稳定 $\Rightarrow 0.5<|z|<2$

$$h[n]=-\frac{4}{3}2^n u[-n-1]-\frac{1}{3}(0.5)^n u[n]$$

5. ⓐ 不能。有限长 $\Rightarrow$ 收敛域整个平面 $\Rightarrow$ 无极点

ⓑ 不能。绝对可和 $\Rightarrow$ 收敛域包括单位圆

而左边序列 $\Rightarrow$ 收敛域为 $\frac{1}{2}$ 极点里边 $\Rightarrow$ 不包括单位圆

ⓒ 可以。

ⓓ 可以。

6. ① $H(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}} = \dfrac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$

$= \dfrac{1-z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})}$

② 因果 $\Rightarrow$ $|z| > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

收敛域包含单位圆 $\Rightarrow$ 稳定

$$y[n] + \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n] - x[n-1]$$

③ $x[n] = 1 + e^{j\frac{\pi}{2}n} + e^{j\pi n}$

$$1^n \xrightarrow{LTI} H(1)\cdot 1^n = 0$$

$$e^{j\frac{\pi}{2}n} \xrightarrow{LTI} H(e^{j\frac{\pi}{2}})e^{j\frac{\pi}{2}n} = \frac{8j}{9-2j}e^{j\frac{\pi}{2}n}$$

$$e^{j\pi n} = (-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n = \frac{16}{5}(-1)^n$$

所以

$$x[n] \xrightarrow{LTI} \frac{8j}{9-2j}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{16}{5}(-1)^n$$

7. ① $y[n] - \frac{5}{6}y[n-1] + \frac{1}{6}y[n-2] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1]$

② $H(z) = \dfrac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$ 因果 $\Rightarrow$ $|z| > \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

收敛域包含单位圆 $\Rightarrow$ 稳定

③ $\widehat{Y(z)} - \frac{5}{6}\{z^{-1}\widehat{Y(z)} + y[-1]\} + \frac{1}{6}\{z^{-2}\widehat{Y(z)} + y[-2] + y[-1]z^{-1}\}$

$= (1-\frac{1}{4}z^{-1})\widehat{X(z)}$

将 $y[-1]=-1$  $y[-2]=0$  $\widetilde{X(z)}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$ 代入

$$\left(1-\tfrac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\tfrac{1}{3}z^{-1}\right)\widetilde{Y(z)}=1-\frac{5}{6}+\frac{1}{6}z^{-1}=\frac{1}{6}\left(1+z^{-1}\right)$$

$$\widetilde{Y(z)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{1}{6}\left[\frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right]$$

$$y[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n]-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n]$$

8. ① $y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]-\frac{1}{4}x[n-1]$

② $$H(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

因果 $\Rightarrow$ $|z|>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 稳定，所以

$$h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$$

③ 因为： $w[n]+\frac{1}{4}w[n-1]-\frac{1}{8}w[n-2]=x[n]$

所以： $$\widetilde{W(z)}+\frac{1}{4}\left\{z^{-1}\widetilde{W(z)}+w[-1]\right\}-\frac{1}{8}\left\{z^{-2}\widetilde{W(z)}+w[-2]+w[-1]z^{-1}\right\}=\widetilde{X(z)}$$

将 $w[-1]=0$  $w[-2]=8$  $\widetilde{X(z)}=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$ 代入

$$\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}\right)\widetilde{W(z)}=\frac{1}{1-z^{-1}}+1=\frac{2-z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\widetilde{W(z)}=\frac{2-z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{8}{9}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{8}{9}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

因果 $\Rightarrow$ $w[n]=\frac{8}{9}u[n]+\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]$

$$y[n]=w[n]-\frac{1}{4}w[n-1]$$

$$=\frac{8}{9}u[n]-\frac{2}{9}u[n-1]+\frac{8}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

$$+\frac{2}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{18}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u[n-1]$$

化简可得：$y[n]=\begin{cases}2 & n=0\\ \frac{2}{3}u[n-1]-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1] & n>0\end{cases}$

或 $y[n]=2\delta[n]+\frac{2}{3}u[n-1]-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$

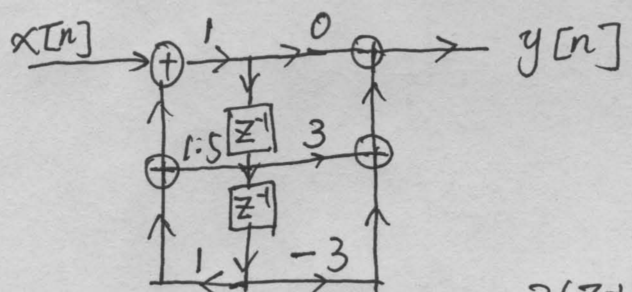
9. ① $H(z)=\dfrac{A(z-1)}{(z+0.5)(z-2)}$

因为 $a^n \xrightarrow{LTI} H(a)\cdot a^n$ （a属于收敛域时成立）

所以 $(-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n=-4(-1)^n$

即 $\dfrac{A(-1-1)}{(-1+0.5)(-1-2)}=-4 \Rightarrow A=3$

因为 $-1$ 在 $H(z)$ 收敛域内，所以收敛域为 $0.5<|z|<2$，非因果，稳定。

② 


③ $Y(z)=X(z)H(z)=\dfrac{3(z-1)}{(z+0.5)(z-2)}\cdot\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$=\dfrac{3(z^{-1}z^{-2})}{(1+0.5z^{-1})(1-2z^{-1})(1-z^{-1})}$

$=\dfrac{-\frac{6}{5}}{1+0.5z^{-1}}+\dfrac{\frac{6}{5}}{1-2z^{-1}}$

收敛域 $1<|z|<2$

$y[n]=-\frac{6}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{6}{5}(2)^n u[-n-1]$

10. ① $H(z)=\dfrac{1-z^{-1}}{1+\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}=\dfrac{1-z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

因果 $\Rightarrow$ 收敛域 $|z|>\frac{1}{2}$

② $h[n]=\frac{9}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

17. ① $H(z)=\dfrac{Az^n}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}$

因果序列初值定理

$$h[0]=\lim_{z\to+\infty}\frac{Az^n}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}=2 \Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ A=2 \end{cases}$$

则 $H(z)=\dfrac{2z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}=\dfrac{2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$

$$=\frac{-4}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{6}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$ 因果 $\Rightarrow$ 收敛域 $|z|>\frac{1}{2}$

则 $h[n]=\left[-4\left(\frac{1}{3}\right)^n+6\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]$

② 设 $x_1[n]=u[n]-\frac{1}{2}u[n-1]$，则

$$Y_1(z)=H(z)X_1(z)=\frac{2\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})\cancel{(1-\frac{1}{2}z^{-1})}(1-z^{-1})}$$

$$\cancel{=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \quad \frac{}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad \frac{}{1-z^{-1}}}$$

$$=\frac{2}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-z^{-1})}=\frac{-1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{3}{1-z^{-1}}$$

$y_1[n]=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+3u[n]$

设 $x_2[n]=\cos\pi n=(-1)^n$

$$(-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n=(-1)^n$$

$y[n]=y_1[n]+y_2[n]=-\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+3u[n]+(-1)^n$

12、① $y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=-\frac{2}{3}x[n]-\frac{2}{3}kx[n-1]$

② $H(z)=\dfrac{-\frac{2}{3}(1+kz^{-1})}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

因果 $\Rightarrow$ 收敛域 $|z|>\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ 稳定。

③ $\widetilde{Y(z)}-\frac{5}{6}\left(z^{-1}\widetilde{Y(z)}+y[-1]\right)+\frac{1}{6}\left(z^{-2}\widetilde{Y(z)}+y[-2]+y[-1]z^{-1}\right)$

$=-\frac{2}{3}(1+kz^{-1})\widetilde{X(z)}$

将 $y[-1]=2$ $y[-2]=0$ $\widetilde{X(z)}=\frac{1}{1+z^{-1}}$ 代入

$$\widetilde{Y(z)}=\frac{-\frac{2}{3}(1+kz^{-1})}{\left(1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}\right)(1+z^{-1})}+\frac{\frac{5}{3}-\frac{1}{3}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} \quad ①$$

假设 $\widetilde{Y(z)}=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{C}{1+z^{-1}}$

则C必须为0，否则 $y[n]$ 将出现 $C(-1)^n u[n]$ 项，不满足 $\lim\limits_{n\to+\infty} y[n]=0$ 条件。所以 $k=1$，使①中第一项分子分母的 $(1+z^{-1})$ 相消。当 $k=1$ 时，

$\widetilde{Y(z)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ $|z|>\frac{1}{2}$，所以

$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

13. ① $H(z)=\frac{1}{6}\left[\frac{1}{(1-0.25z^{-1})}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}\right]=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}$

$h[n]$ 因果 $\Rightarrow$ 收敛域 $|z|>0.5\Rightarrow$ 稳定

② $y[n]-\frac{3}{4}y[n-1]+\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{1}{3}x[n]-\frac{1}{8}x[n-1]$

③ $Y(z)=H(z)X(z)=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{8}z^{-1}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{3}z^{-1})}$

$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

$y[n]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$

14. ① $H(j\omega)=\frac{2}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3}$

$H(s)=\frac{2}{s^2+4s+3}=\frac{2}{(s+1)(s+3)}$ 因果 $\Rightarrow Re\{s\}>-1$

$h(t)=e^{-t}u(t)-e^{-3t}u(t)$

② $s^2\widetilde{Y}(s)-sy(0)-y'(0)+4[s\widetilde{Y}(s)-y(0)]+3\widetilde{Y}(s)=2X(s)$

将 $y(0)=1$　$y'(0)=-1$，$X(s)=\frac{1}{s}$ 代入

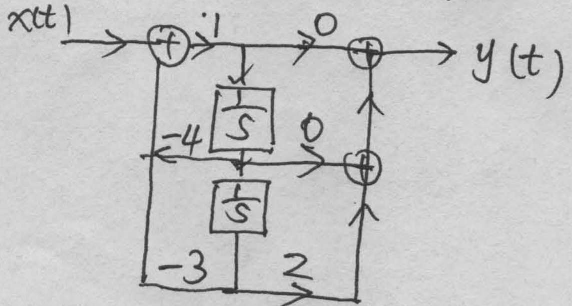
$$(s^2+4s+3)\widetilde{Y}(s)=\underbrace{\frac{2}{s}}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{s+3}_{\text{零输入响应}}$$

$$\widetilde{Y}(s)=\frac{2}{s(s+1)(s+3)}+\frac{1}{s+1}$$

$$=\frac{\frac{2}{3}}{s}+\frac{-1}{s+1}+\frac{\frac{1}{3}}{s+3}+\frac{1}{s+1}$$

$$y(t)=\underbrace{\frac{2}{3}u(t)-e^{-t}u(t)+\frac{1}{3}e^{-3t}u(t)}_{\text{零状态响应}}+\underbrace{e^{-t}u(t)}_{\text{零输入响应}}$$

③




15. ① 设阶跃响应 $s[n]$ 的Z变换为 $S(z)$，则

$$S(z)=\frac{H(z)}{1-z^{-1}}\qquad |z|>1$$

由 $h[n]$ 是因果序列易推出 $s[n]$ 也是因果序列，利用因果序列终值定理，有

$$s[+\infty]=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{H(z)}{1-z^{-1}}=\lim_{z\to1}zH(z)$$

$$=H(z)\big|_{z=1}$$

② $$H(z)=\frac{3z^2}{(z-\frac{1}{3})(z-\frac{1}{2})}=\frac{3}{(1-\frac{1}{3}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

$$=\frac{-6}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{9}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{2}\ (\text{因果序列})$$

$h[n] = -6\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n] + 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

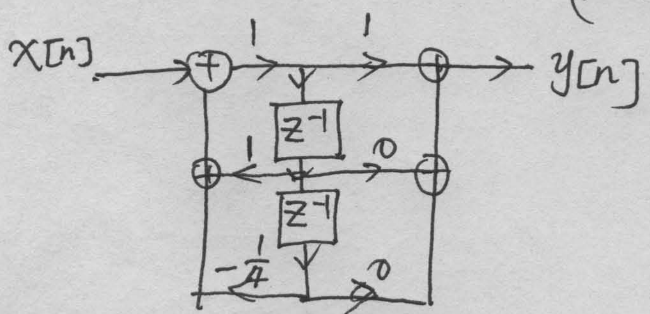
③ $x[n] = 1^n + (-1)^n$

$1 \xrightarrow{LTI} H(1) = 9$

$(-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n = \frac{3}{2}(-1)^n$

$x[n] \xrightarrow{LTI} 9 + \frac{3}{2}(-1)^n$

16. ① $k=\frac{1}{2}$ 代入 $H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$




$H(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$.

因为 $n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$

则 $-n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$ ①

因为: $\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ ②

② - ① 得:

$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \xrightarrow{z} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2}$

② $(-1)^n \xrightarrow{LTI} H(-1)(-1)^n \Rightarrow H(-1) = -2 \Rightarrow k = -\frac{4}{3}$

收敛域应包含-1，所以$0.5<|z|<\frac{4}{3}$，非因果。