

# 第五章 图像复原与重建

我们所看到的事物并不是事物本身……物体本身是什么对我们而言完全是未知的，并且远离我们的感知。除了对物体的感知，我们什么也不知道。

——康德

# 主要内容

- 退化/复原的线性模型
- 噪声模型
- 空间域与频率域降噪
- 图像退化的线性位置不变模型
- 退化函数的估计方法
- 几种图像复原方法
- 投影重建图像

# 基本概念

- 退化的典型表现为：模糊、失真、噪声等
- 退化的原因：大气湍流，散焦，光学系统中失真和衍射，传感器非线性，相对运动、摄像时扫描线非线性……
- 先研究图像退化（质量下降）的原因，再利用图像退化的先验知识，建立相应的复原函数，从而恢复降质图像的本来面目。
  - 因此，图像恢复要将退化过程模型化，再采用相反的过程恢复图像的本来面貌。

# 退化的例子I



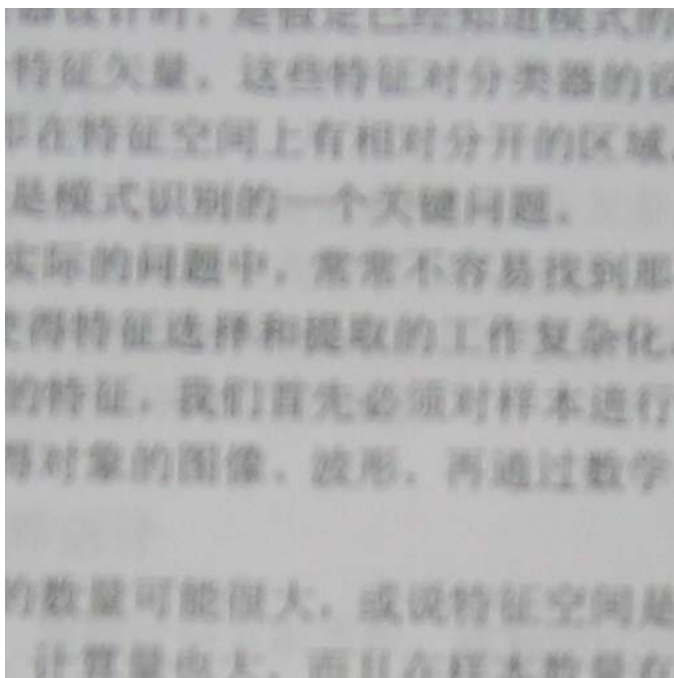
(a) 轻微湍流



(b) 剧烈湍流

大气湍流引起图像模糊

## 退化的例子II

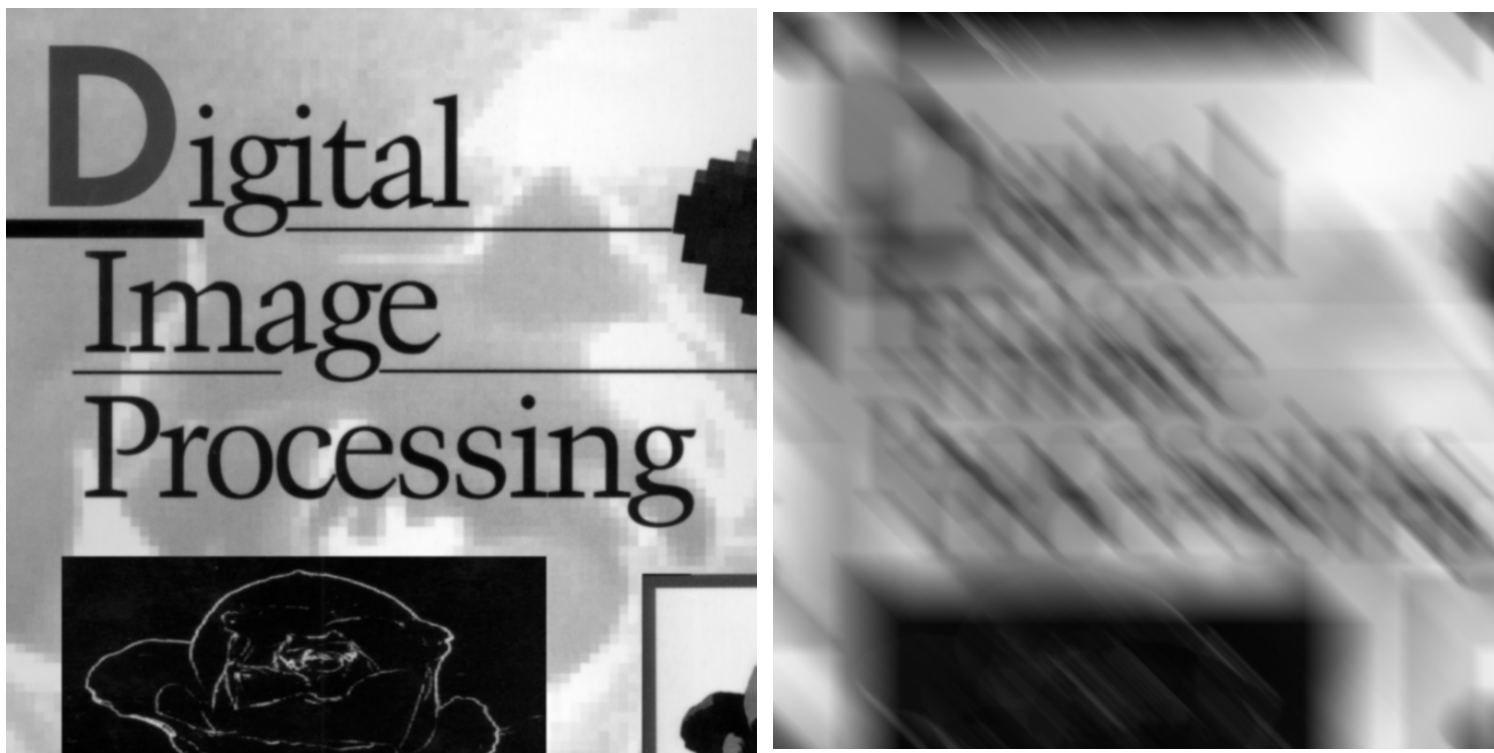


(a)散焦模糊



(b)水平运动模糊

## 退化的例子Ⅲ



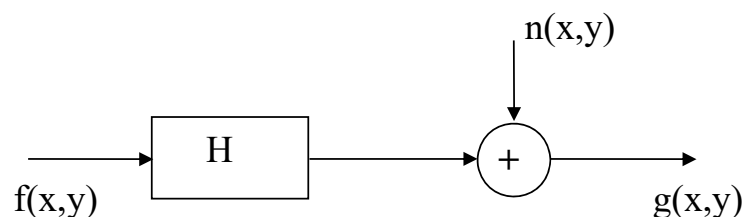
斜向运动模糊(a)原图(b)模糊图

# 图像复原与图像增强的区别和联系

- 与图像增强相比，有相互覆盖的领域，但图像增强主要是一个**主观**过程，而图像复原则大部分是一个**客观**过程。
- 复原利用退化现象的某种先验知识来复原被退化的图像，因此它是**面向退化模型**的；
- 图像恢复都会涉及设立一个**最佳准则**，产生期望结果的**最佳估计**。

# 图像退化的模型

- 退化模型



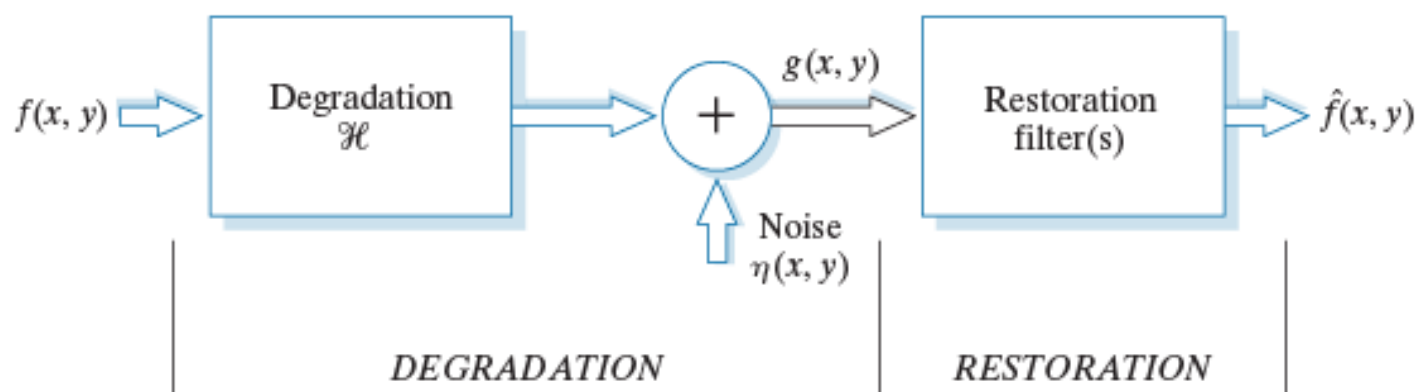
图像退化模型

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

- H可看成是综合所有退化因素的函数
  - 也即成像系统的冲激响应或点扩展函数
- $f(x,y)$ 是物体的原图，即退化前的真实图像， $n(x,y)$ 是系统的加性噪声
- $g(x,y)$ 是系统生成的图像，即得到的退化后的图像



# 图像退化/复原过程的模型



考虑**H**是线性、位置不变的过程。

# 问题描述

- 对于一个线性系统

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta + n(x, y)$$

- 若成像系统是**线性位置不变**的，有：

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta + n(x, y) \\ &= f(x, y) * h(x, y) + n(x, y) \end{aligned}$$

- 一般对 $h(x, y)$ 有一定先验知识，但具体参数不知道，参数可通过估算得到，有时也可试凑
- 有时对 $h(x, y)$ 没有先验知识，则恢复较困难
- 恢复过程是上式的逆运算

- 从频域角度，退化模型为：

$$G(u, v) = H(u, v)F(u, v) + N(u, v)$$

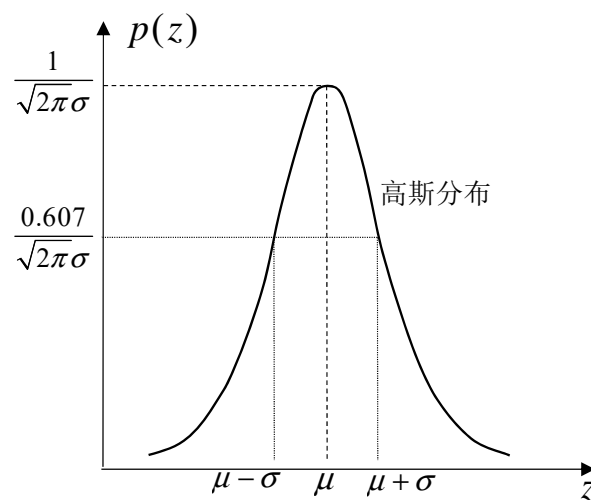
# 噪声模型

- 数字图像的噪声(点)主要来源于图像的获取和传输过程
  - 如环境光照水平和传感器温度都是影响图像传感器性能的重要因素，传感器是噪声的最主要的来源；
  - 传输信道的干扰，也会产生噪声
- 一般噪声的频谱很宽，可认为是白噪声。  
但有时干扰会呈一定的周期性，这时对应的频带较窄。
- 噪声的幅度，通常可近似认为：
  - 1.与空间坐标不相关
  - 2.与图像内容无关
  - 3.幅度分布是随机的，并可用某种概率分布来近似

# 一些常见的噪声分布模型

## 1. 高斯噪声

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



# 一些常见的噪声分布模型

## 2. 瑞利噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{2}{b}(z-a)e^{-\frac{(z-a)^2}{b}} & z \geq a \\ 0 & z < a \end{cases}$$

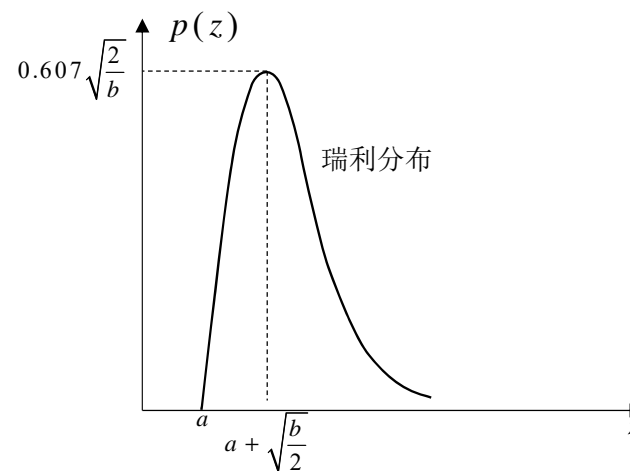
均值

$$\mu = a + \sqrt{\pi b / 4}$$

方差

$$\sigma^2 = \frac{b(4-\pi)}{4}$$

注意相对原点位移，和  
基本形状向右变形

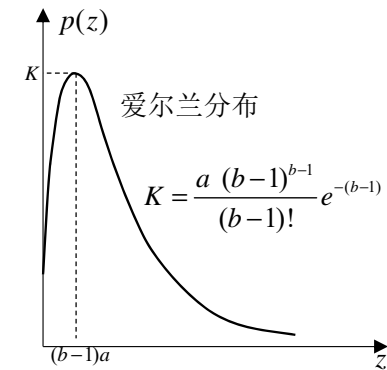


### 3. 爱尔兰噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{a^b z^{b-1}}{(b-1)!} e^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

其中 $a > 0$ ,  $b$ 为正整数

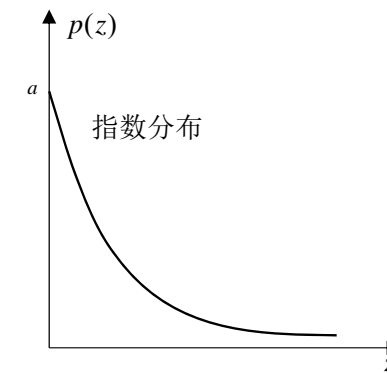
$$\mu = \frac{b}{a} \quad \sigma^2 = \frac{b}{a^2}$$



### 4. 指数噪声( $b=1$ 时的爱尔兰分布)

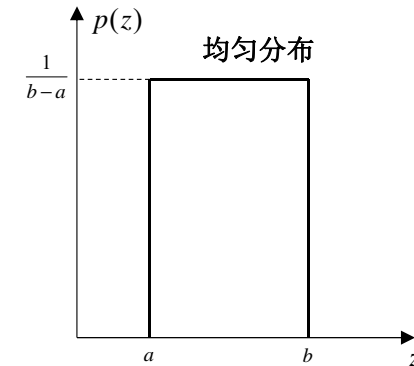
$$p(z) = \begin{cases} ae^{-az} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{1}{a} \quad \sigma^2 = \frac{1}{a^2}$$



## 5. 均匀噪声

$$p(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq z \leq b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$
$$\mu = \frac{a+b}{2}$$
$$\sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$



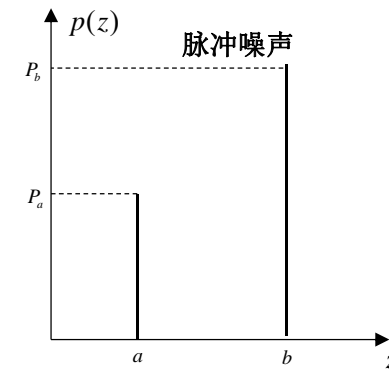
## 6. 脉冲噪声 (椒盐噪声)

(双极) 脉冲噪声的PDF为

$$p(z) = \begin{cases} P_a & z = a \\ P_b & z = b \\ 1-P_a-P_b & \text{其它} \end{cases}$$

$P = P_a + P_b$  称为噪声密度。

若  $P_a$  或  $P_b$  之一为零，则称为单极脉冲。双极脉冲噪声称为椒盐噪声。



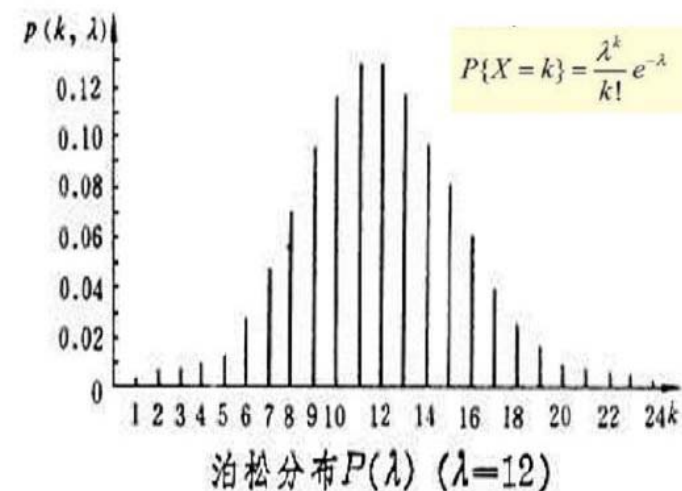


## 泊松噪声

$z$ 是一离散随机变量,  $z$ 的取值为0、1、...

$$P(z = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\mu = \lambda, \quad \sigma^2 = \lambda$$

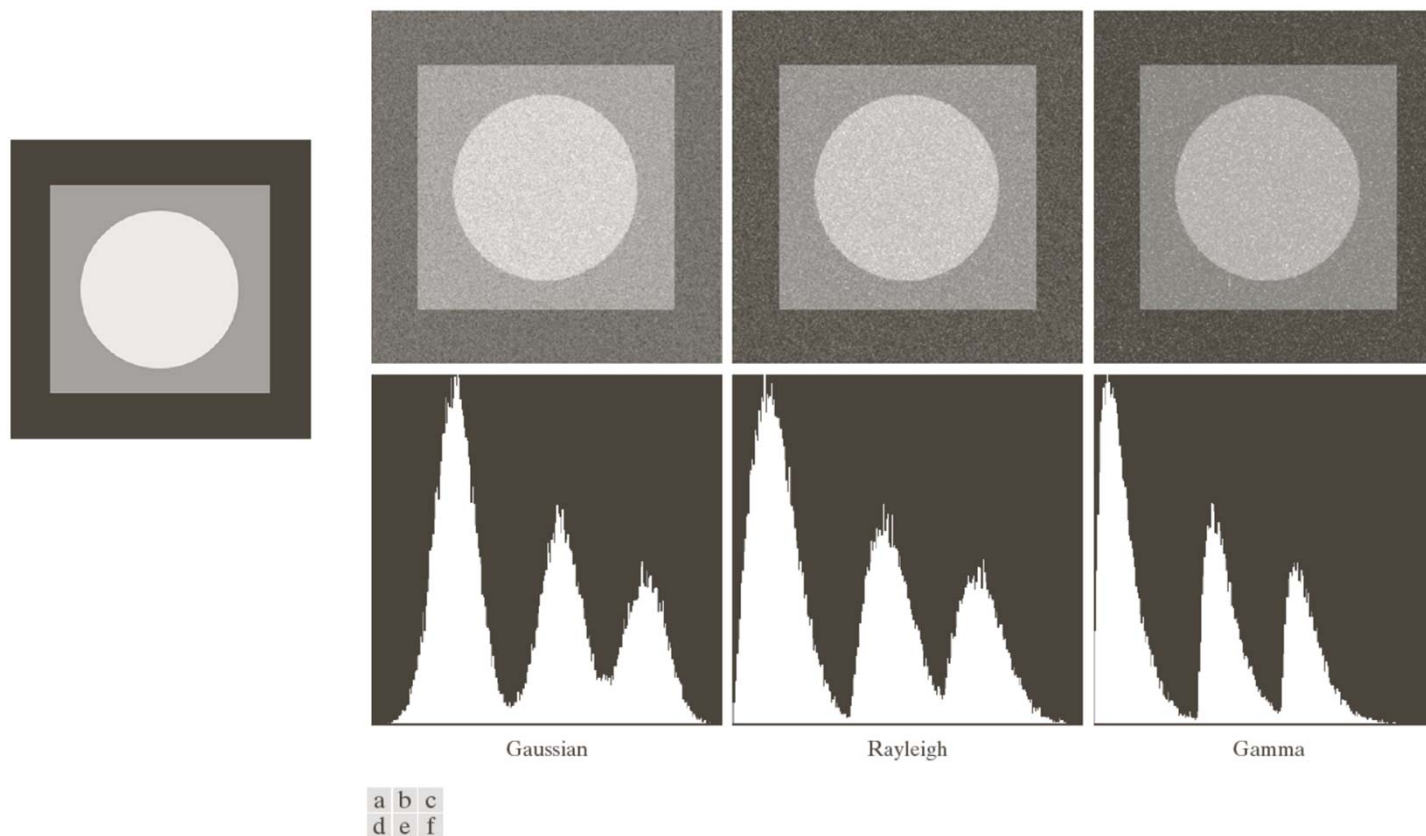


- 泊松分布适合于描述单位时间内随机事件发生的次数的概率分布。由于光具有量子特效, **到达光电检测器表面的量子数目**存在统计涨落, 因此, 图像监测具有颗粒性, 这种颗粒性造成了图像对比度的变小以及对图像细节信息的遮盖, 我们对这种因为光量子而造成的测量不确定性称为图像的泊松噪声。
- 实际中, 根据先验或者统计分布, 来判定噪声类型, 然后根据均值和方差来解出模型参数。

# 常见噪声的形成原因

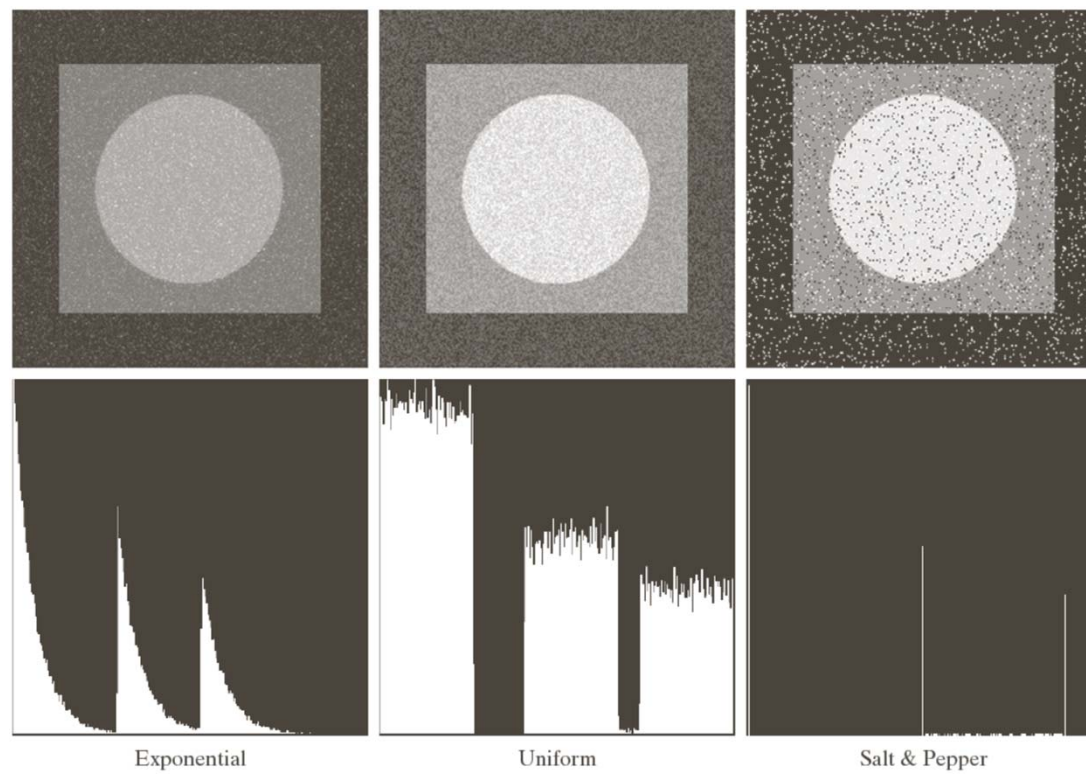
- 噪声模型为实践中建立宽带噪声勿扰状态的模型提供了有用的工具。
- 在胶片上成像时会有胶片的颗粒噪声  
一般，颗粒噪声可认为是高斯白噪声，其标准差与局部灰度立方根成正比。
- 光电子噪声是由光的统计过程和图像传感器中光电转换过程引起的  
弱光照的情况下，其影响较严重，这时可认为这种噪声具有泊松分布，其标准差接近于图像均值的平方根；  
在光照较强时，噪声分布更接近于高斯分布。
- 处理信号的放大电路会引入热噪声——电子噪声  
一般可看作为零均值高斯白噪声。因此只要知道标准差就可完全表征

# 噪声图像及其直方图实例1



**FIGURE 5.4** Images and histograms resulting from adding Gaussian, Rayleigh, and gamma noise to the image in Fig. 5.3.

## 噪声图像及其直方图实例2

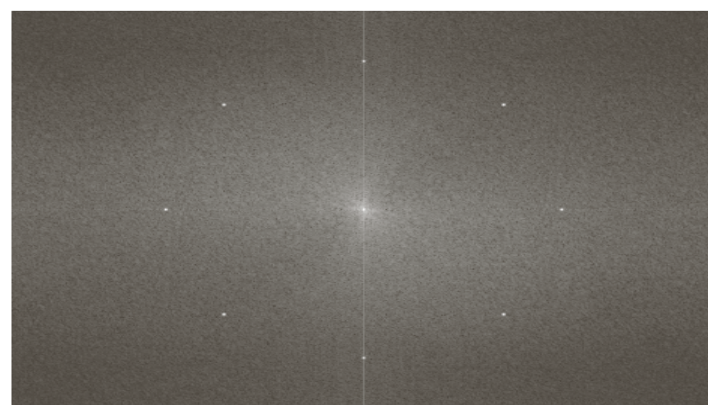
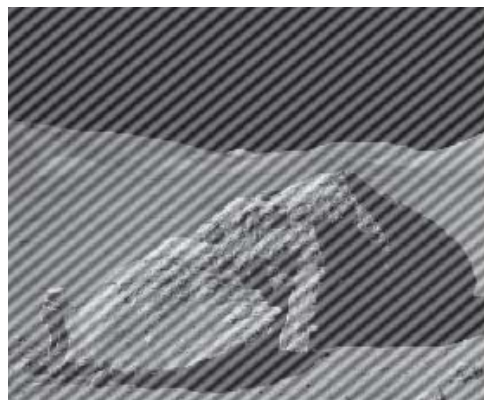


g h i  
j k l

**FIGURE 5.4** (Continued) Images and histograms resulting from adding exponential, uniform, and salt and pepper noise to the image in Fig. 5.3.

# 周期噪声

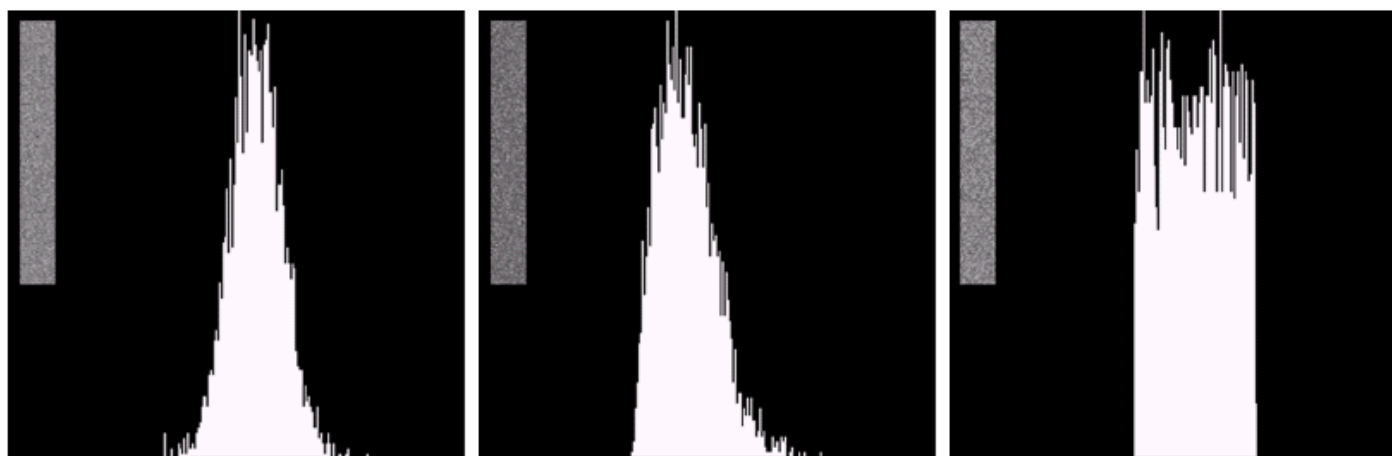
- 周期噪声是在图像获取期间由电力或机电干扰产生的，是一种空间相关噪声。
- 空间正弦噪声对应于傅里叶谱中的共轭脉冲。



# 噪声的估计

- 周期干扰
  - 典型的周期干扰的参数可通过对频谱图的分析来估计
  - 有时也可直接在受污染的图像上推断干扰的周期特性
- 传感器噪声
  - 有时噪声的概率密度参数可根据传感器确定,但与使用环境有关,光照不同, 变化很大
  - 通过测试获得噪声的参数
- 一般的图像
  - 找一些有理由认为平坦的区域, 统计其直方图, 从而从直方图形状确定分布的形式, 再估计分布的参数
  - 对于视频图像可利用帧差法减小图像内容对噪声估计的干扰, 静止区图像内容将被减去。但视频图像间总会有微小运动, 如果只在平坦且静止的区域检测噪声, 则更合理





(a)高斯噪声

(b)瑞利噪声

(c)均匀噪声

图像中平坦区的直方图

求出对应的均值和方差后，代入对应噪声公式求出噪声分布参数。

# 只存在噪声的复原——空间滤波

- 滤波机理与图像增强中的完全相同，提供更多种类选择
- 1.算术均值滤波器

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)$$

- 2.几何均值滤波器
  - 性能与非加权平均滤波器相似，但较少丢失图像细节，而且较好地保留了暗像素。

$$\hat{f}(x, y) = \left[ \prod_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t) \right]^{\frac{1}{mn}}$$



- 谐波均值滤波器: 
$$\hat{f}(x, y) = \frac{mn}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{1}{g(s,t)}}$$
  - 善于处理盐粒噪声和高斯噪声，但不适用于胡椒噪声；
- 逆谐波均值滤波器: 
$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s,t)^Q}$$
  - Q称为滤波器阶数
    - 当Q>0时，适用于消除“胡椒”噪声
    - 当Q<0时，适用于消除“盐”噪声
    - Q=0时，成为非加权平均滤波器（算术均值滤波器）
    - Q= -1时，成为谐波均值滤波器

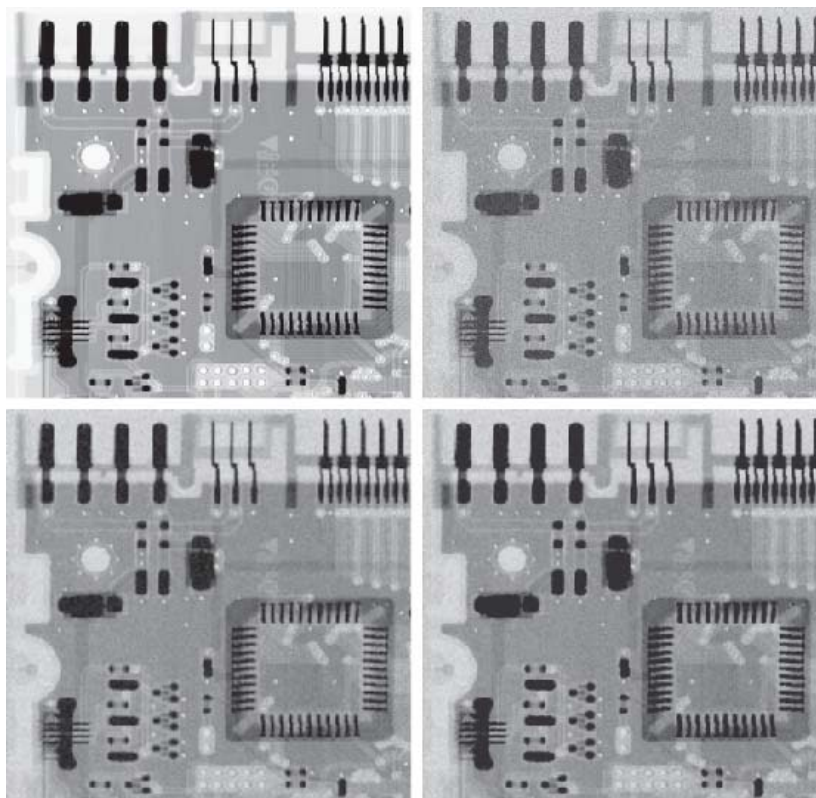
# 均值滤波器示例1

- 几何均值滤波器效果好于算术均值滤波器

a b  
c d

**FIGURE 5.7**

(a) X-ray image of circuit board. (b) Image corrupted by additive Gaussian noise. (c) Result of filtering with an arithmetic mean filter of size  $3 \times 3$ . (d) Result of filtering with a geometric mean filter of the same size. (Original image courtesy of Mr. Joseph E. Pascente, Lixi, Inc.)



## 均值滤波器示例2

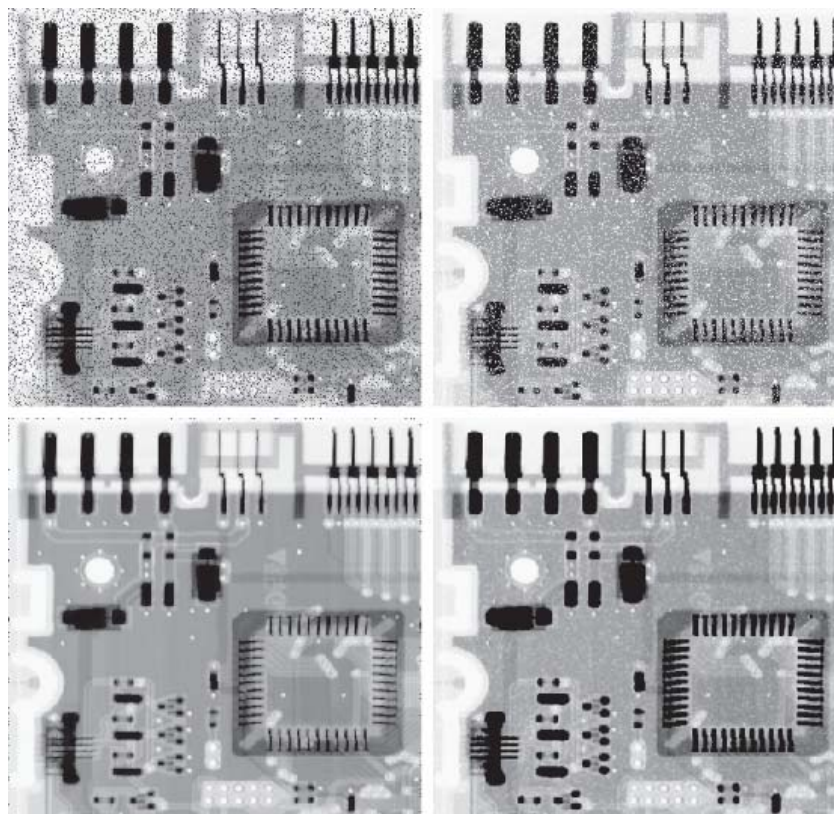
- 逆谐波均值滤波器对滤除胡椒和盐粒噪声的影响;

a b  
c d

**FIGURE 5.8**

(a) Image corrupted by pepper noise with a probability of 0.1. (b) Image corrupted by salt noise with the same

probability. (c) Result of filtering (a) with a  $3 \times 3$  contra-harmonic filter  $Q = 1.5$ . (d) Result of filtering (b) with  $Q = -1.5$ .



- 算术或者几何平均滤波器适合高斯或者均匀噪声，逆谐波均值滤波器适合脉冲噪声，但必须知道噪声是胡椒还是盐粒，选择正确的 $Q$ 的符号，否则带来灾难性后果。

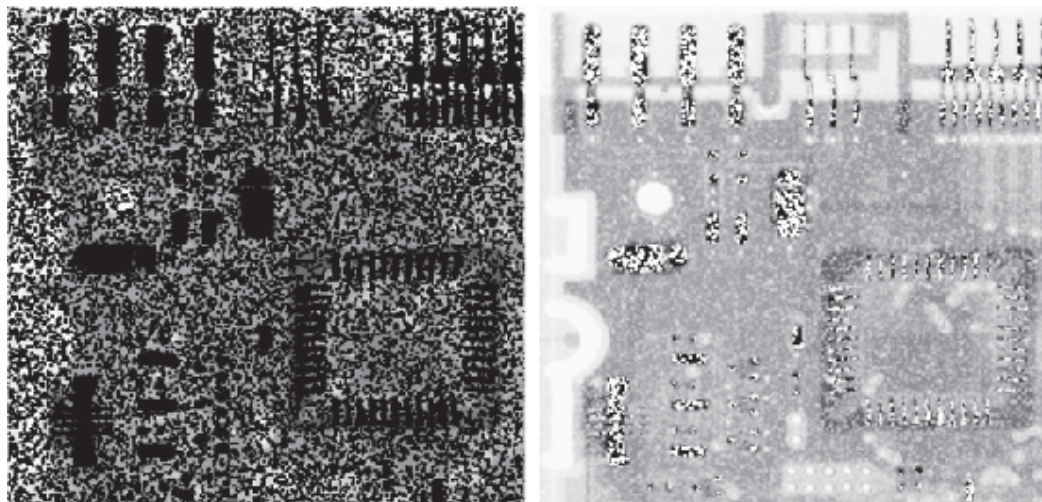
a b

**FIGURE 5.9**

Results of selecting the wrong sign in contraharmonic filtering.

(a) Result of filtering Fig. 5.8(a) with a contraharmonic filter of size  $3 \times 3$  and  $Q = -1.5$ .

(b) Result of filtering Fig. 5.8(b) using  $Q = 1.5$ .



# 统计排序滤波器（非线性滤波器）

- 中值滤波器  $\hat{f}(x, y) = \underset{(s,t) \in S_{xy}}{\text{median}} \{g(s, t)\}$
- 最大值和最小值滤波器——分别用于发现最大点和最暗点，可以滤除胡椒和盐粒噪声：

$$\hat{f}(x, y) = \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

$$\hat{f}(x, y) = \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\}$$

- 中点滤波器  $\hat{f}(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \max_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} + \min_{(s,t) \in S_{xy}} \{g(s, t)\} \right]$

- 结合了统计排序和求平均，对于随机分布噪声工作得最好，如高斯或均匀噪声

# 修正的 $\alpha$ 均值滤波

- 去掉 $d/2$ 个最高灰度值和 $d/2$ 个最小灰度值，剩余的作平均进行滤波
  - 若 $d=0$ ，则就是算术平均滤波
  - 若 $d=(mn-1)$ ，则就是中值滤波

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{mn - d} \sum_{(s,t) \in S_{xy}} g_r(s, t)$$

- 滤除脉冲噪声的同时起到平滑作用，对于多种噪声混合的情况下很有用。



# 统计排序滤波示例1

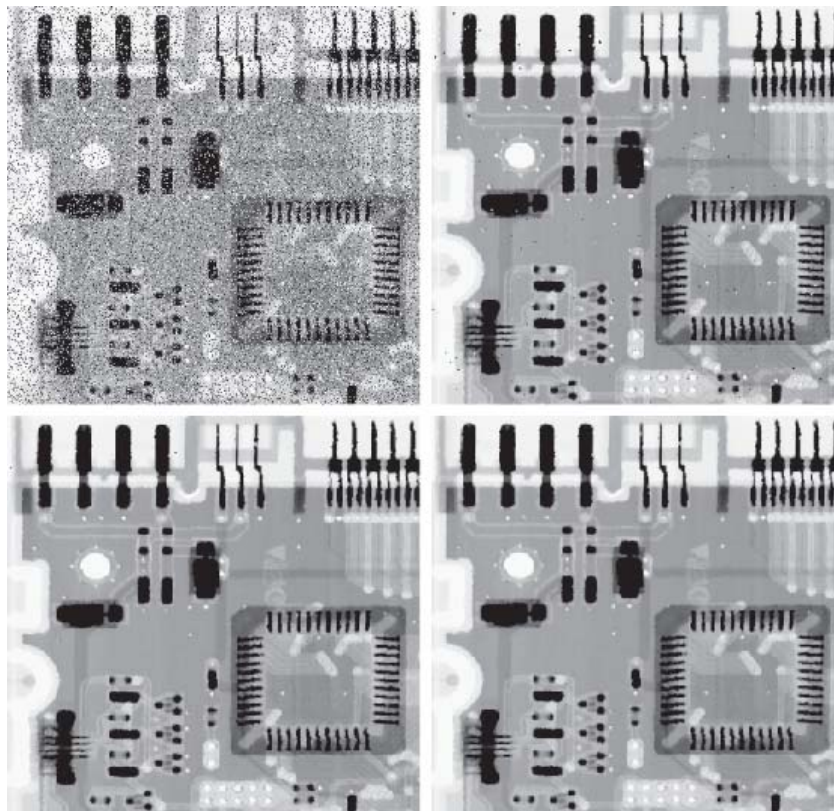
a b  
c d

FIGURE 5.10

(a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities  $P_s = P_p = 0.1$ .

(b) Result of one pass with a median filter of size  $3 \times 3$ . (c) Result of processing (b) with this filter.

(d) Result of processing (c) with the same filter.



原图	3*3模版 一次中 值滤波
3*3模版 二次中 值滤波	3*3模版 三次中 值滤波

利用中值滤波器重复地对  
图像处理会有什么后果？

使图像变得模糊，因此应尽可能降低处理次数。

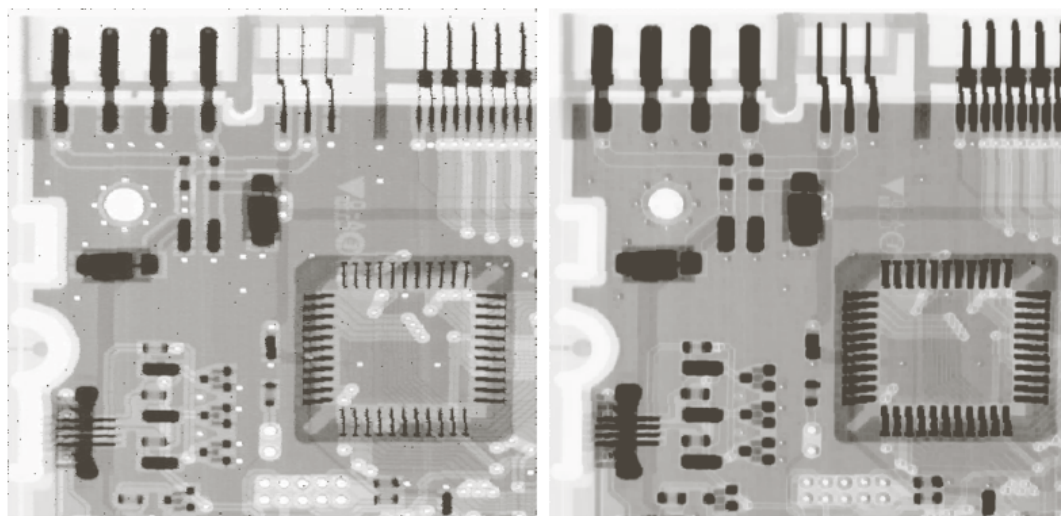
## 统计排序滤波示例2

a b

**FIGURE 5.11**

(a) Result of filtering

Fig. 5.8(a) with a max filter of size  $3 \times 3$ . (b) Result of filtering 5.8(b) with a min filter of the same size.



**3\*3模版最大值滤波**

**3\*3模版最小值滤波**

分别滤除了胡椒和盐粒噪声

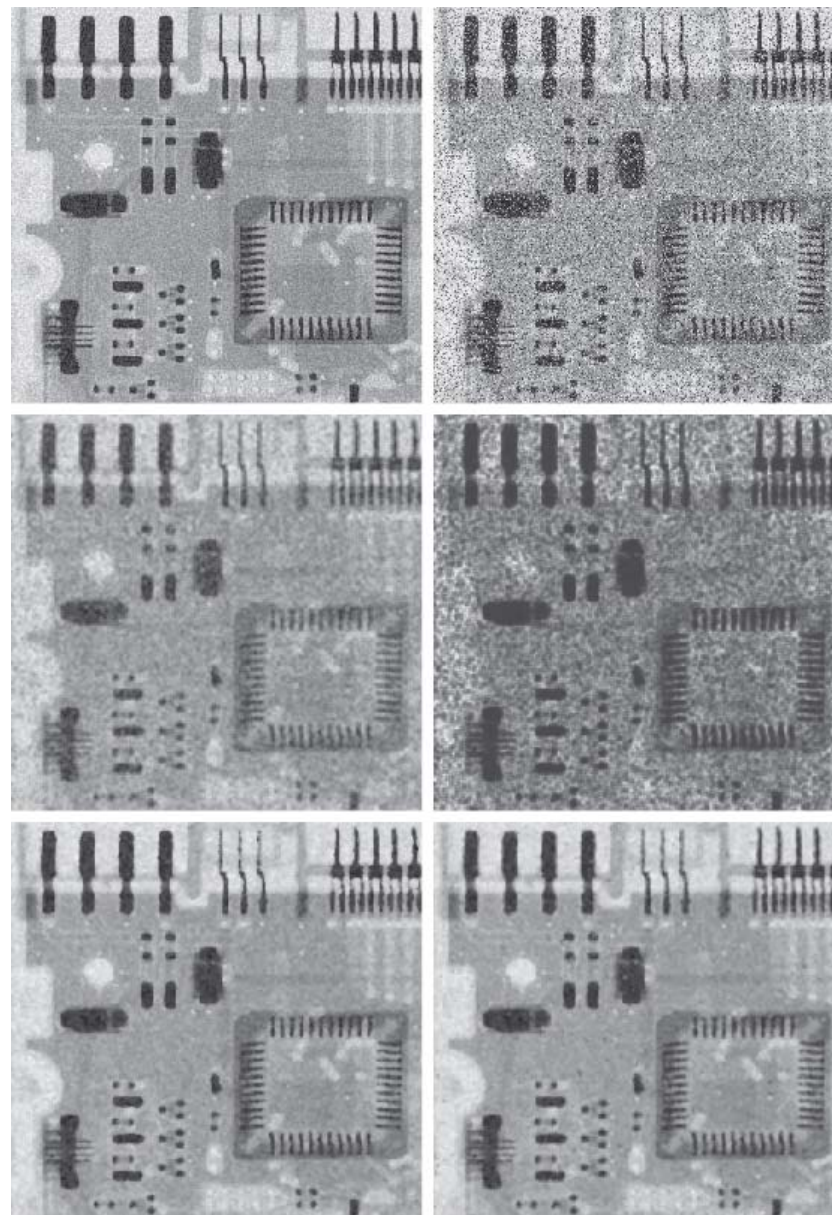


# 修正阿尔法均值滤波器

a	b
c	d
e	f

**FIGURE 5.12**

(a) Image corrupted by additive uniform noise. (b) Image additionally corrupted by additive salt-and-pepper noise. (c)-(f) Image (b) filtered with a  $5 \times 5$ : (c) arithmetic mean filter; (d) geometric mean filter; (e) median filter; (f) alpha-trimmed mean filter, with  $d = 6$ .



# 自适应滤波器

- 所谓自适应滤波器，其特性是以滤波器覆盖的局部区域内图像的统计特性为基础的；
- 自适应局部降噪滤波器

- $$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - \frac{\sigma_{\eta}^2}{\sigma_L^2} [g(x, y) - m_L] \quad ( \sigma_{\eta}^2 \leq \sigma_L^2 )$$

- 特点：

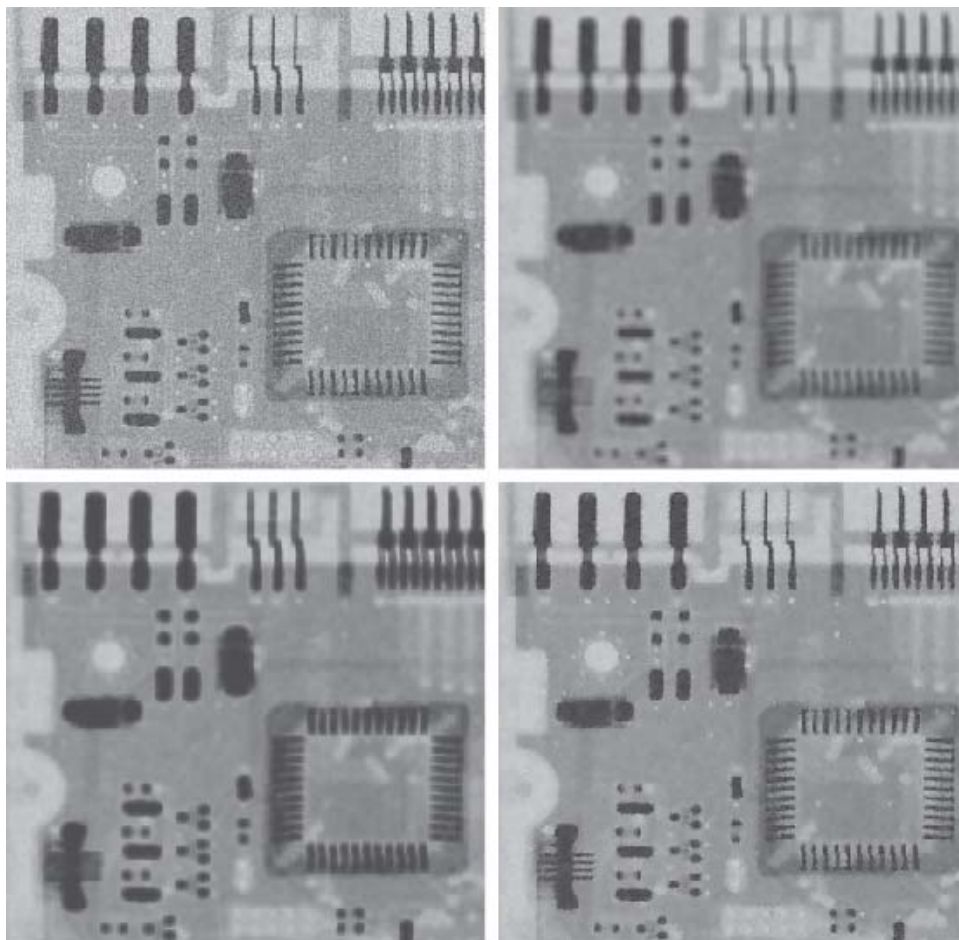
- 若  $\sigma_{\eta}^2$  为0，则返回  $g(x, y)$ 。这个  $\sigma_{\eta}^2$  为滤波唯一参数
- 若  $\sigma_{\eta}^2$  与  $\sigma_L^2$  相等，则等同于均值滤波
- 高局部方差时（边缘），返回  $g(x, y)$ ；
- 需要知道噪声的方差  $\sigma_{\eta}^2$ ，可以通过之前介绍的方法尝试实验确定。

# 自适应局部降噪滤波器示例

a b  
c d

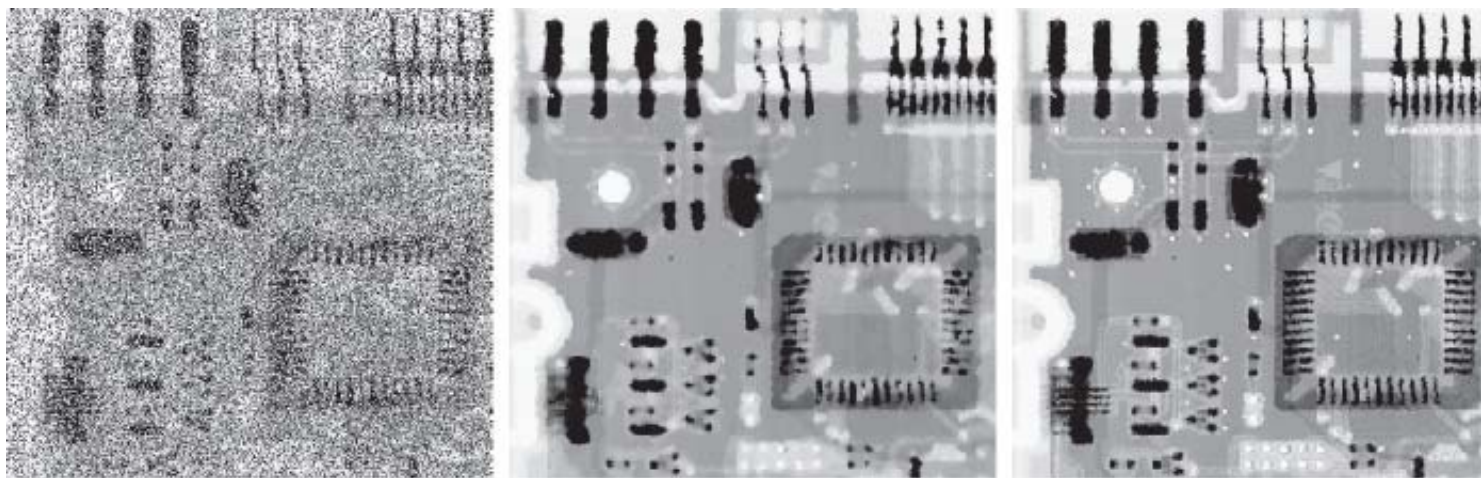
**FIGURE 5.13**

(a) Image corrupted by additive Gaussian noise of zero mean and a variance of 1000.  
(b) Result of arithmetic mean filtering.  
(c) Result of geometric mean filtering.  
(d) Result of adaptive noise-reduction filtering. All filters used were of size  $7 \times 7$ .



# 自适应中值滤波器

- 标准中值滤波一律以中值代替原值，会引起不必要的细节损失；
- 随着脉冲密度的增大，需要更大的窗口来消除尖峰噪声。
- 该滤波器试图在保留图像细节的同时平滑非冲激噪声



a b c

**FIGURE 5.14** (a) Image corrupted by salt-and-pepper noise with probabilities  $P_s = P_p = 0.25$ . (b) Result of filtering with a  $7 \times 7$  median filter. (c) Result of adaptive median filtering with  $S_{\max} = 7$ .

# 自适应中值滤波器

- 与普通中值滤波器的不同在于能根据某些条件而改变滤波窗口大小(目的是找到合适的中值);
- 分为两个进程:
  - A: 若中值介于滤波窗口中两个不同的最大与最小值之间, 则转入进程B (确保中值不是噪声); 否则增大窗口尺寸, 继续循环; 若尺寸已经最大, 则输出当前中值;
  - B: 若当前像素灰度值介于滤波窗口中两个不同的最大与最小值之间, 则输出当前像素灰度值, 否则输出窗口中值。 (减少不必要的细节损失)
- 基于如下目的: 去除椒盐噪声; 平滑其他非脉冲噪声; 并减少滤波中的失真。
- 随着脉冲密度的增大, 需要更大的窗口来消除尖峰噪声。



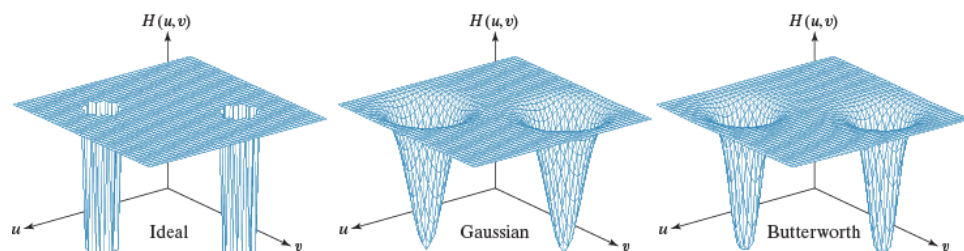
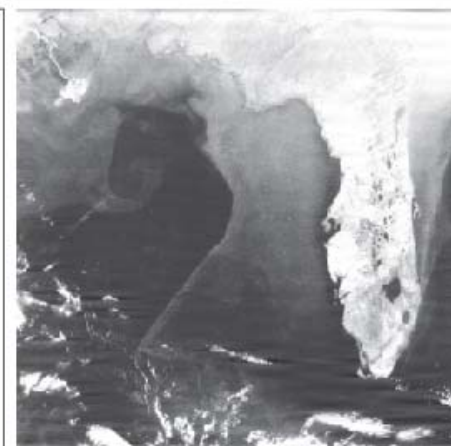
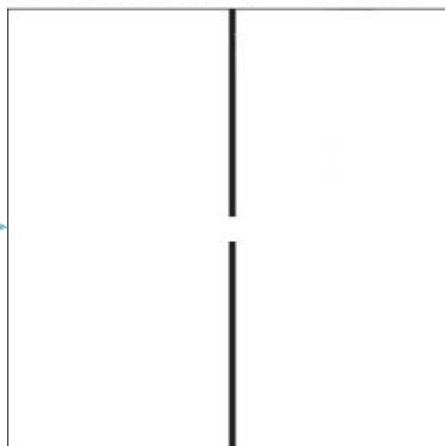
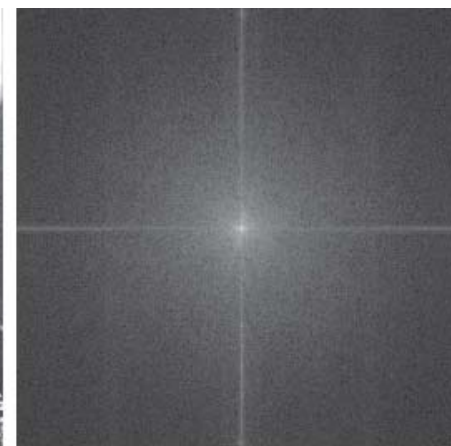
# 用频率域滤波消除周期噪声

- 带阻滤波器
- 带通滤波器
- 陷波滤波器
  - 例子

a b  
c d

FIGURE 5.18

(a) Satellite image of Florida and the Gulf of Mexico. (Note horizontal sensor scan lines.) (b) Spectrum of (a). (c) Notch reject filter transfer function. (The thin black border is not part of the data.) (d) Filtered image. (Original image courtesy of NOAA.)



# 陷波滤波

a b  
c d

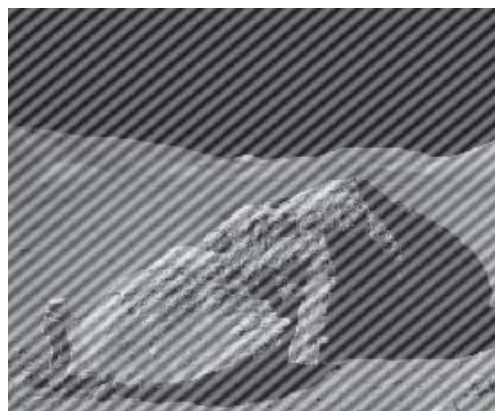
**FIGURE 5.16**

(a) Image corrupted by sinusoidal interference.

(b) Spectrum showing the bursts of energy caused by the interference. (The bursts were enlarged for display purposes.)

(c) Notch filter (the radius of the circles is 2 pixels) used to eliminate the energy bursts. (The thin borders are not part of the data.)

(d) Result of notch reject filtering. (Original image courtesy of NASA.)



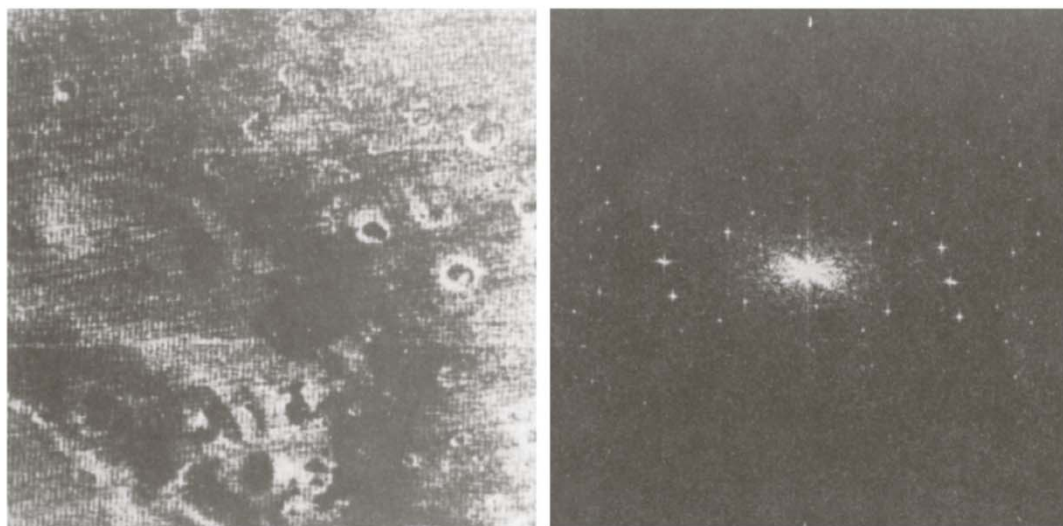
# 最佳陷波滤波

- 当存在不止一个正弦分量时（多周期干扰），直接采用陷波滤波不合适，会丢失过多信息（滤波点太多）；同时干扰成分有时不是单频脉冲，具有宽边缘。
- 可以采用局部方差最小意义上的最佳陷波滤波；

a b

**FIGURE 5.20**

(a) Image of the Martian terrain taken by *Mariner 6*.  
(b) Fourier spectrum showing periodic interference.  
(Courtesy of NASA.)





# 最佳陷波滤波

- 两个主要步骤:
  - 1.通过陷波带通滤波器获取噪声模式的空域近似值;

$$\eta(x, y) = F^{-1} \{ H_{NP}(u, v) G(u, v) \}$$

- 2.原图像减去噪声的加权量, 使得恢复图像在每个像素邻域内的方差最小

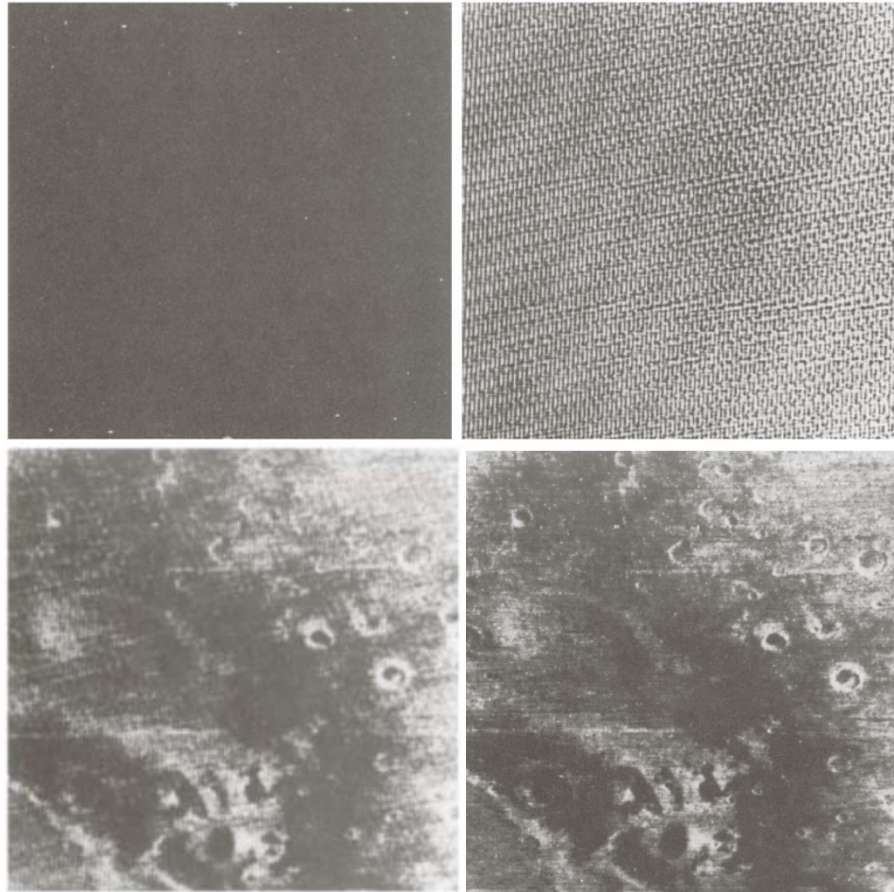
$$\hat{f}(x, y) = g(x, y) - w(x, y)\eta(x, y)$$

$$\text{其中 } w(x, y) = \frac{\overline{g(x, y)\eta(x, y)} - \bar{g}(x, y)\bar{\eta}(x, y)}{\overline{\eta^2(x, y)} - \bar{\eta}^2(x, y)}$$

$g(x, y)$  为退化图像

# 最佳陷波滤波示例

退化图像



a b

**FIGURE 5.22**  
(a) Fourier spectrum of  $N(u, v)$ , and  
(b) corresponding noise interference pattern  $\eta(x, y)$ .  
(Courtesy of NASA.)

滤波后图像

# 线性、位置不变的退化

- 退化系统的输入输出关系

$$g(x, y) = H[f(x, y)] + \eta(x, y)$$

- 线性：满足同质性和叠加性。

- 位置不变系统

- 若对于任意  $f(x, y)$  和  $\alpha, \beta$ , 有

$$H[f(x - \alpha, y - \beta)] = g(x - \alpha, y - \beta)$$

- 则称H为位置不变系统。
    - 位置不变系统中，图像中任意一点处的响应只取决于该点处的输入值，而与该点的位置无关。

# 线性、位置不变的退化

- 对于线性系统，有

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x, \alpha, y, \beta) d\alpha d\beta$$

- 其中  $h(x, \alpha, y, \beta)$  为系统H的冲激响应，也称为点扩散函数（PSF）；
- 若H是位置不变的，则有：

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta$$

- 在有加性噪声的情况下，
  - 空域中，
$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$
  - 频域中，
$$G(u, v) = H(u, v) F(u, v) + N(u, v)$$

# 估计退化函数

- 许多类型的退化可以近似为线性、位置不变的过程。
- 图像去卷积通常用于表示线性图像复原，用于复原处理的滤波器常被称为去卷积滤波器。
- 使用以某种方式估计的退化函数来复原一幅图像的过程，有时称为盲目去卷积；
- 主要有3种估计退化函数的方法：
  - 1. 观察法
  - 2. 试验法
  - 3. 建模法

# 图像观察估计退化函数

- 考虑图像被线性、位置不变的过程退化的情形，只要得到变换前后的傅里叶谱，就可以得到退化函数的傅里叶变换H。
- 以高信噪比区域g为子图像处理，通过各种增强方法获得（假设）没有噪声时的图像f，则获得该子图像的系统函数H为：

$$H_s(u,v) = \frac{G_s(u,v)}{\widehat{F}_s(u,v)}$$

- 基于 $H_s(u,v)$ 在更大比例上构建具有基本相同形状的函数 $H(u,v)$

# 试验估计退化函数

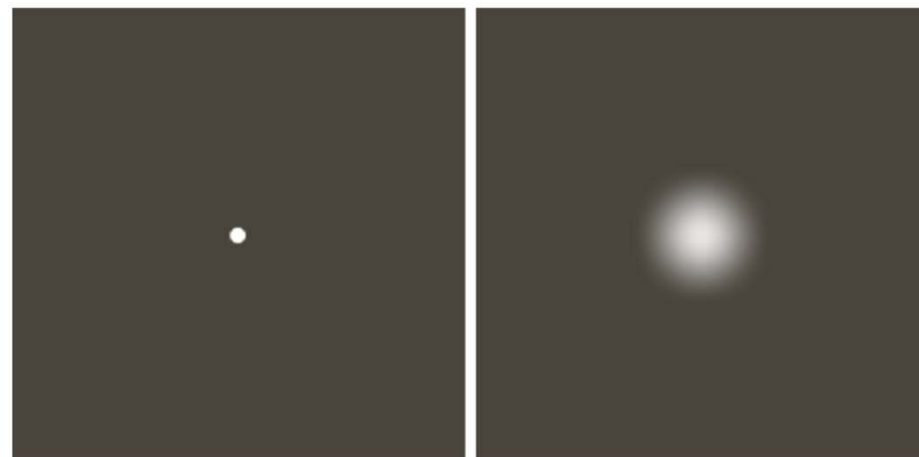
- 如果可以使用与获取退化图像的设备相似的装置，得到一个准确的退化估计理论上说是可能的。
- 利用一个理想冲激及其得到的实际退化图像（冲激响应），获得退化函数为

$$H(u, v) = \frac{G(u, v)}{A}$$

- 其中A为冲激的傅里叶变换

a b

**FIGURE 5.24**  
Degradation estimation by impulse characterization.  
(a) An impulse of light (shown magnified).  
(b) Imaged (degraded) impulse.



# 建模估计退化函数

- 大气湍流的物理模型:

$$H(u, v) = e^{-k(u^2 + v^2)^{5/6}}$$

a b  
c d

**FIGURE 5.25**  
Illustration of the  
atmospheric  
turbulence model.  
(a) Negligible  
turbulence.  
(b) Severe  
turbulence,  
 $k = 0.0025$ .  
(c) Mild  
turbulence,  
 $k = 0.001$ .  
(d) Low  
turbulence,  
 $k = 0.00025$ .  
(Original image  
courtesy of  
NASA.)





# 建模估计退化函数

- 例：匀速直线运动的模糊恢复
- 若景物与照相机作相对运动，快门时间为 $T$ ，则成像是 $T$ 时间内曝光累积的结果：

$$g(x, y) = \int_0^T f[x - x_0(t), y - y_0(t)] dt$$

- $x_0(t)$ 及  $y_0(t)$  是在 $x$ ,  $y$ 方向上运动的时变分量

# 建模估计退化函数

- 对上式作 Fourier变换

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \\ &= \int_0^T \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f[x - x_0(t), y - y_0(t)] \exp[-j2\pi(ux + vy)] dx dy \right\} dt \\ &= F(u, v) \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt \end{aligned}$$

- 定义  $H(u, v) = \int_0^T \exp[-j2\pi(ux_0(t) + vy_0(t))] dt$

它就是运动模糊的转移函数，于是：

$$G(u, v) = F(u, v)H(u, v)$$