浙 江 大 学

2013 年攻读硕士学位研究生入学考试试题

考试科目　信号系统与数字电路　　编号　842

注意：答案必须写在答题纸上，写在试卷或草稿纸上均无效。

一、（10 分）有一个系统输入为 $x[n]$，输出为 $y[n]$，且满足下列差分方程：

$$y[n] = ny[n-1] + x[n]$$

该系统是因果的且满足初始松弛条件，即若 $n < n_0$, $x[n]=0$，则有 $y[n]=0,\ n<n_0$。

（a） 系统是线性的吗？试证明之；

（b） 系统是时不变的吗？试证明之。

二、（10 分）有一序列，其离散时间傅里叶变换为

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}, \qquad |a|<1$$

（a） 求序列 $x[n]$；

（b） 计算 $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos(\omega)d\omega/(2\pi)$ 的值。

三、（10 分）考虑一连续时间 LTI 系统 S，其单位冲激响应为

$$h(t) = \frac{\sin(6(t-1))}{\pi(t-1)}$$

求系统 S 对下面每个输入信号的输出。

（a） $x_1(t) = \delta(t-10) + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \sin(4kt)$；

（b） $x_2(t) = \frac{\sin 2t}{\pi t}\cos(5t)$。

四、（15 分）已知一因果 LTI 系统 S 的微分方程为

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

试求：

（a） S 的系统函数，并画出零极点图、标出收敛域；

（b） $y(0^-)=1,\ \frac{dy(0^-)}{dt}=0,\ x(t)=e^{-3t}u(t)$ 时，S 输出的零输入响应与零状态响应；

（c） S 对应的可逆系统的单位冲激响应。

五、（15 分）图 1a 是一因果 LTI 系统 S 的方框图实现，

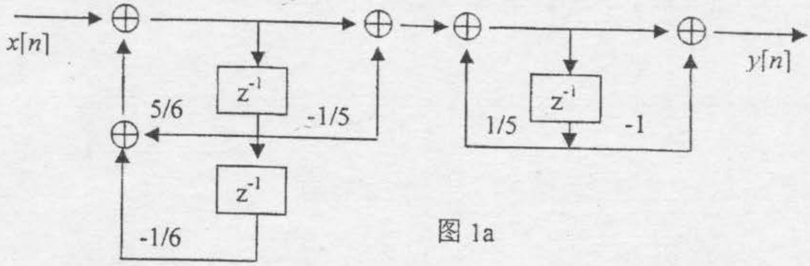


图 1a

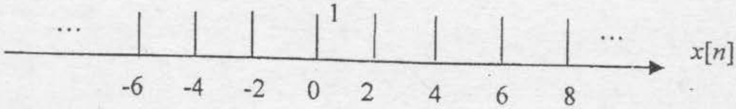


图 1b

试求：

（a） 描述系统 S 输入与输出关系的差分方程；

（b） 系统 S 的单位阶跃响应；

（c） 输入信号 $x[n]$ 如图 1b 所示，求系统 S 的输出。

六、（15 分）图 2a 出示一种多径通信信道的简单模型。假设 $s_c(t)$ 是带限的，$|S_c(j\Omega)|=0,\ |\Omega|\geq \pi/T$，对 $x_c(t)$ 用采样周期 T 采样得到序列 $x[n]=x_c(nT)$。

（a）求 $x[n]$ 的傅里叶变换（用 $S_c(j\Omega)$ 表示）；

（b）现在要用一个离散时间系统来仿真该多径系统，选择该离散时间系统的 $H(e^{j\omega})$，使得当输入为 $s[n]=s_c(nT)$ 时，输出为 $r[n]=x_c(nT)$，如图 2b 所示。求利用 T 和 τ_d 表示的 $H(e^{j\omega})$；

（c）当 $\tau_d=T/2$ 时，求图 2b 的单位脉冲响应。

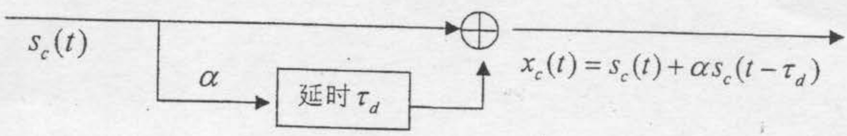


图 2a

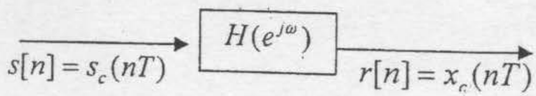


图 2b

2013年试题答案

一、ⓐ是线性的。

假设 $x[n]$ 由 n_0 开始有值，则 $y[n]$ 也从 n_0 开始有值。

假设两个输入 $x_1[n]$，$x_2[n]$ 对应输出分别为 $y_1[n]$，$y_2[n]$，即

$$\begin{cases} y_1[n] = n\,y_1[n-1] + x_1[n] \\ y_2[n] = n\,y_2[n-1] + x_2[n] \end{cases}$$

假设 $x_1[n]$ 与 $x_2[n]$ 都从 n_0 开始不为 0

则有：

$$y_1[n_0] = x_1[n_0]$$
$$y_2[n_0] = x_2[n_0]$$

若输入为 $x[n] = a x_1[n] + b x_2[n]$，则我们

要证明：

$$y[n] = n\,y[n-1] + x[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$$

用数学归纳法。

ⓐ 当 $n = n_0$ 时，$x[n_0] = a x_1[n_0] + b x_2[n_0]$

$$y[n_0] = x[n_0] = a y_1[n_0] + b y_2[n_0]$$

成立。

~~ⓑ 假设 对 n_0 … 对~~

ⓑ 假设对任意 $n < N$ 时，

$$y[n] = a y_1[n] + b y_2[n]$$，要证

$$y[N] = a y_1[N] + b y_2[N]$$

证明:

$$y[N] = N\,y[N-1] + x[N]$$

将 $y[N-1] = a y_1[N-1] + b y_2[N-1]$

$x[N] = a x_1[N] + b x_2[N]$ 代入，有:

$$y[N] = N[a y_1[N-1] + b y_2[N-1]] + a x_1[N] + b x_2[N]$$

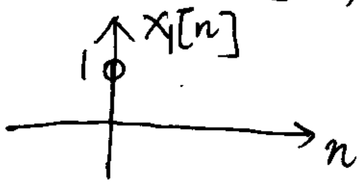
$$= a[N y_1[N-1] + x_1[N]] + b[N y_2[N-1] + x_2[N]]$$

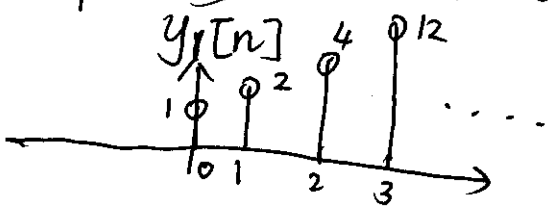
$$= a y_1[N] + b y_2[N]$$ 得证

ⓑ 非时不变。

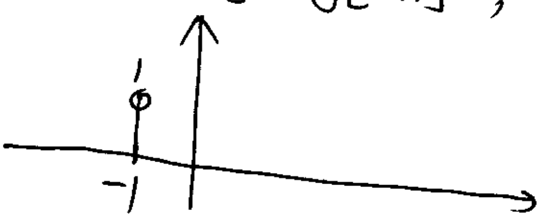
证明(反例

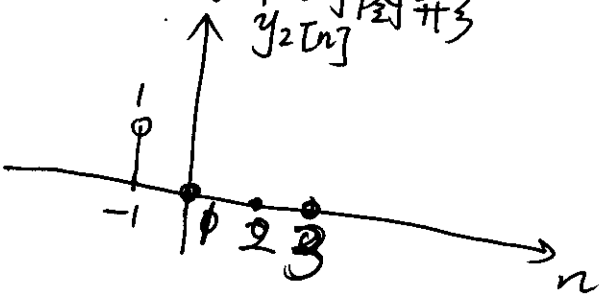
$x_1[n] = \delta[n]$，则 $y_1[n] = n!\,u[n]$





$x_2[n] = \delta[n+1]$，则 $y_2[n]$ 为下列图形





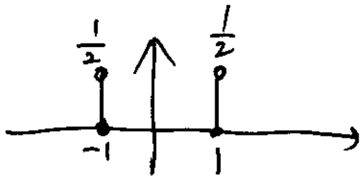
显然 $y_2[n] \neq y_1[n+1]$，因此非时不变。

二、 ~~$X(e^{jw}) = a^{|n|}$~~ (P146)

ⓐ $x[n] = a^{|n|}$

ⓑ $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{jw})\cos(w)\,dw$

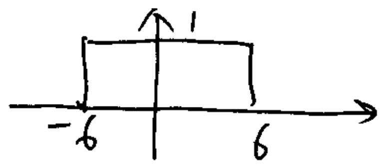
此值为：

$x[n]$ $*$ 

在 0 处的值

$= \frac{1}{2}x[-1] + \frac{1}{2}x[1] = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$

三、 ⓐ $X_1(jw) = e^{-jw10} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \frac{\pi}{j}[\delta(w-4k) - \delta(w+4k)]$

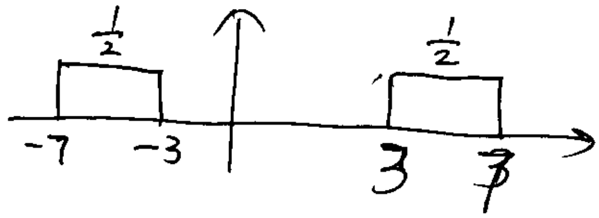
$H(jw) =$ 

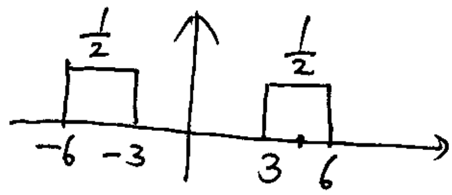
$\cdot\, e^{-jw}$

因此输出

$y_1(t) = F^{-1}[X_1(jw)H(jw)]$

$= \frac{\sin(6(t-11))}{\pi(t-11)} + \frac{1}{2}\sin(4(t-1))$

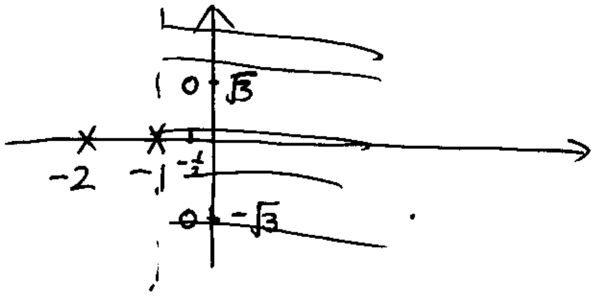
ⓑ $X_2(jw) =$ 

$Y_2(jw) = X_2(jw)H(jw) =$ 

$y_2(t) = \frac{\sin(\frac{3}{2}t)}{\pi t}\cos\left(\frac{9}{2}t\right)$

四、

四. ⓐ $H(s)=\dfrac{s^2+s+1}{s^2+3s+2}=\dfrac{\left(s-\frac{-1+\sqrt{3}j}{2}\right)\left(s-\frac{-1-\sqrt{3}j}{2}\right)}{(s+1)(s+2)}$



ⓑ $s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)+3[sY(s)-y(0)]+2Y(s)$

$=(s^2+s+1)X(s)$

将 $y(0^-)=1 \quad y'(0^-)=0$ $\quad X(s)=\frac{1}{s+3}$ 代入

$(s^2+3s+2)Y(s)-s-3=\dfrac{(s^2+s+1)}{s+3}$

$$Y(s)=\underbrace{\frac{s+3}{s^2+3s+2}}_{零输入}+\underbrace{\frac{s^2+s+1}{(s+3)(s^2+3s+2)}}_{零状态}$$

$$=\left(\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}\right)+\left(\frac{\frac{1}{2}}{s+1}-\frac{3}{s+2}+\frac{\frac{7}{2}}{s+3}\right)$$

$$y(t)=\underbrace{\left[2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)\right]}_{零输入响应}+\underbrace{\left[\frac{1}{2}e^{-t}u(t)-3e^{-2t}u(t)+\frac{7}{2}e^{-3t}u(t)\right]}_{零状态响应}$$

C. 可逆系统 $H^*(s)=\dfrac{s^2+3s+2}{s^2+s+1}$

$=1+\dfrac{2s+1}{s^2+s+1}$

因此

$$h^*(t)=\delta(t)+e^{-\frac{1}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)u(t)$$

(公式 $e^{-at}\cos(\omega_0 t)u(t)\xrightarrow{L}\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$)

五、① $H_1(z) = \dfrac{1-\frac{1}{5}z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$

$H_2(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$

$$H(z) = H_1(z) \cdot H_2(z)$$

$$= \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2] = x[n]-x[n-1]$$

② $u[n] \xrightarrow{z} \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$$Y(z) = \frac{H(z)}{1-z^{-1}} = \frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{3}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$y[n] = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

③ $x[n] = \frac{1}{2}\left[1^n + (-1)^n\right]$

~~定理~~

$$1^n \xrightarrow{系统} H(1)\,1^n = 0$$

$$(-1)^n \xrightarrow{系统} H(-1)(-1)^n = (-1)^n$$

因此输出 $y[n] = \frac{1}{2}(-1)^n$

六 ⓐ $X_c(jw) = S_c(jw) + a\, S_c(jw) e^{-jw\tau_d}$

$$= \left(1 + a e^{-jw\tau_d}\right) S_c(jw)$$

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j \frac{w-2k\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[1 + a e^{-j\tau_d\left(\frac{w-2k\pi}{T}\right)}\right] S_c\left(j \frac{w-2k\pi}{T}\right)$$

由于 $S_c(jw)$ 在 $|w| > \frac{\pi}{T}$ 时为 0，因此

$$X(e^{jw}) = \frac{1}{T}\left(1 + a e^{-j\frac{w\tau_d}{T}}\right) S_c\left(j\frac{w}{T}\right)$$

$(|w| < \pi)$

~~ⓑ $H(e^{jw}) = \frac{1}{T}(1+$~~

ⓑ $H(e^{jw}) = 1 + a e^{-jw\frac{\tau_d}{T}}$ $\quad (|w| < \pi)$

ⓒ $\tau_d = \frac{T}{2}$ 时

$$H(e^{jw}) = 1 + a e^{-j\frac{w}{2}}, \quad (|w| < \pi)$$

$$h[n] = \delta[n] + \frac{a}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-j\frac{w}{2}n}\, dw$$

$$= \delta[n] + \frac{2a}{\pi n}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$