第二章　随机过程基本概念

关键词：

随机过程
状态和状态空间

样本函数
有限维分布函数

均值函数	方差函数
自相关函数	自协方差函数
互相关函数	互协方差函数
独立	不相关

正态过程

§1 随机过程的定义和例子

一、定义：设 S 是样本空间， T 为一参数集，$T \subset R$，如果对任何$\mathbf{t} \in T$，$\mathbf{X}(\mathbf{t})$ 是 S 上的随机变量，则称$\{X(\mathbf{t}); \mathbf{t} \in \mathbf{T}\}$是 S 上的随机过程

➢ 状态及状态空间

- X(t) 表示在 t 时刻过程所处的状态
- X(t) 的所有可能的状态取值所构成的集合称为随机过程的状态空间

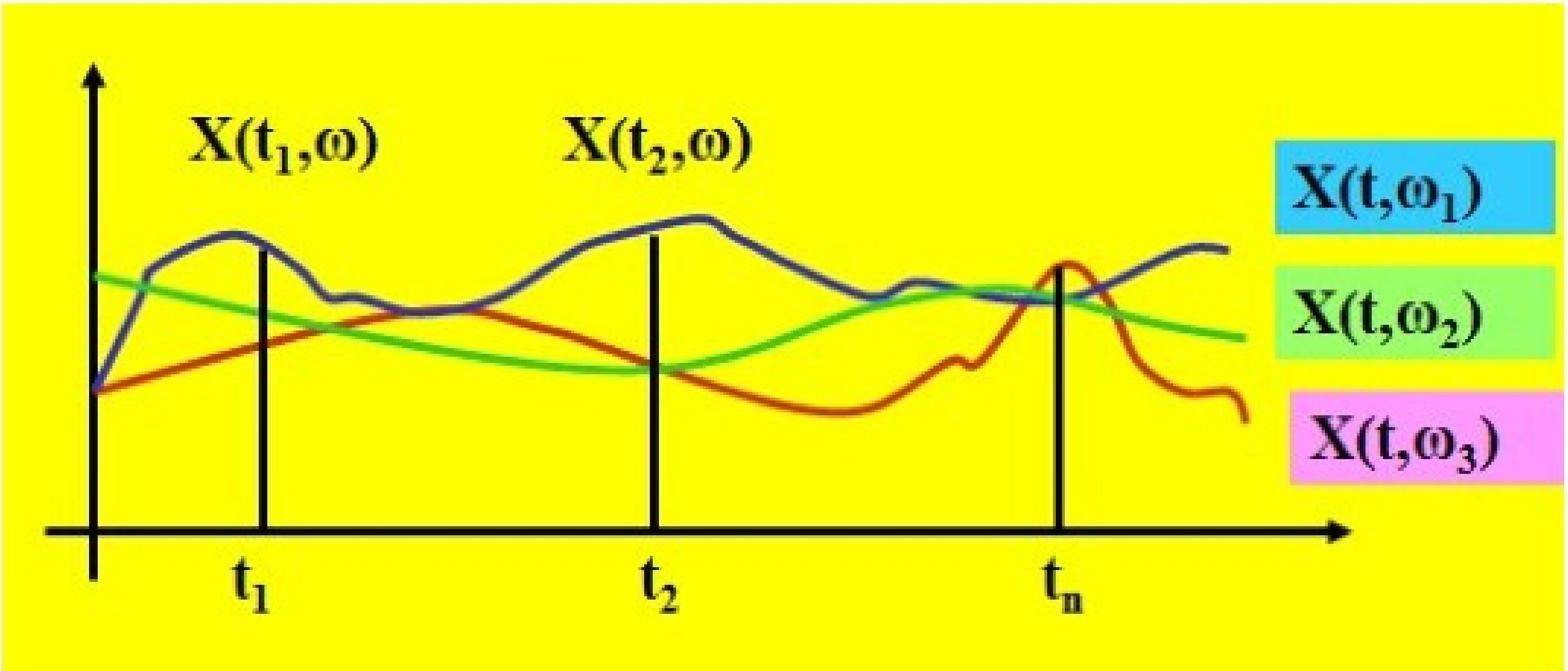
样本函数

$\{X(t); t \in T\}$ 可看成定义在 $T \times S$ 上的二元函数 $X(t,e)$ 或 $X(t,\omega)$

(1) $X(t,\bullet)$ 是随机变量

(2) $X(\bullet,e)$ 是t的函数，称为样本函数

对过程的一次具体观察结果就是一条样本函数


X(t1,ω)
X(t2,ω)
X(t,ω1)
X(t,ω2)
X(t,ω3)
t1
t2
tn

随机过程的分类

参数集 T 至多可列，则称为离散时间；

如果 T 是一个实数区间，则称为连续时间；

状态空间为离散状态和连续状态两种。

1. 离散时间离散状态
2. 离散时间连续状态
3. 连续时间离散状态
4. 连续时间连续状态

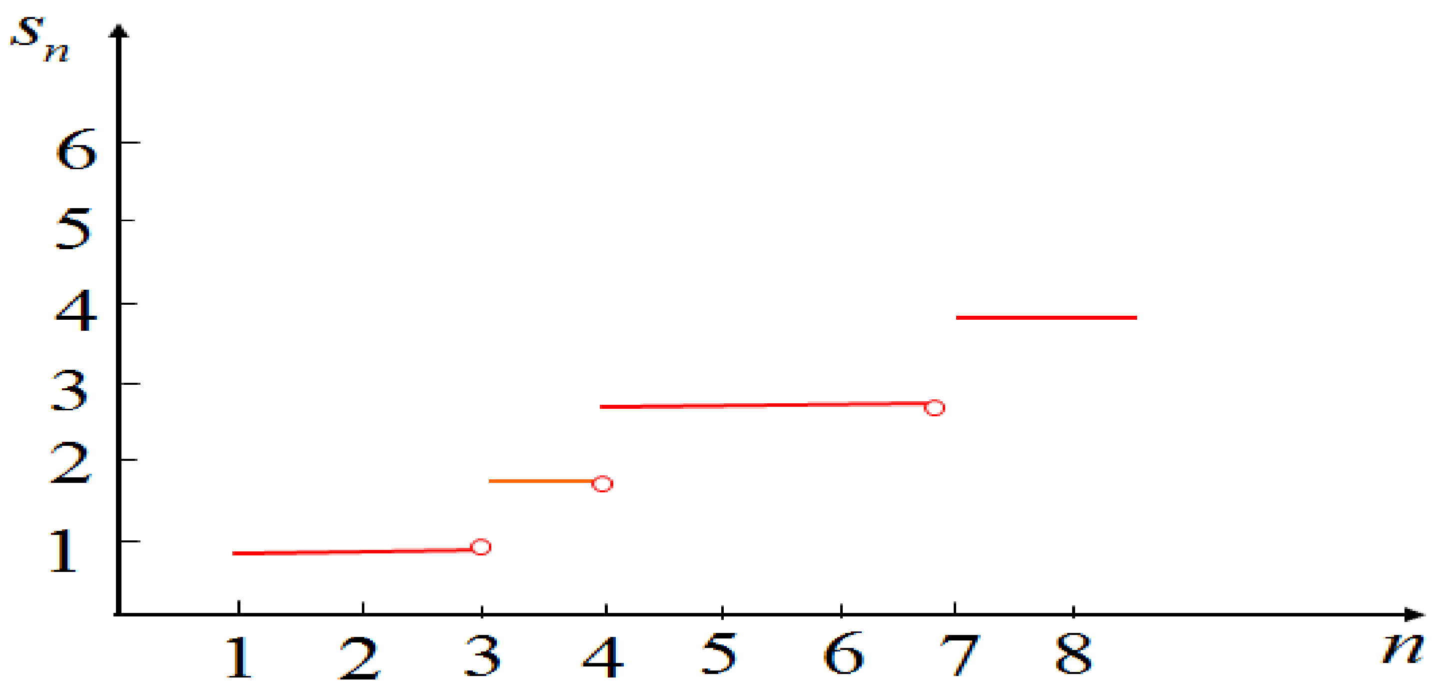
二、例题

例1: （二项过程）

某人在打靶，每次的命中率为p,并且各次的结果相互独立。用S_n表示前n次命中的次数。

则$\{S_n;n=1,2,\cdots\}$是一个离散时间离散状态的随机过程。状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$.

✓ 样本函数



所有样本函数为:

$$\left\{(s_1, s_2, s_3, \ldots): \ s_1 = 0\text{或}s_1 = 1,\ \ s_{i+1} = s_i\text{或}s_{i+1} = s_i + 1\right\}$$

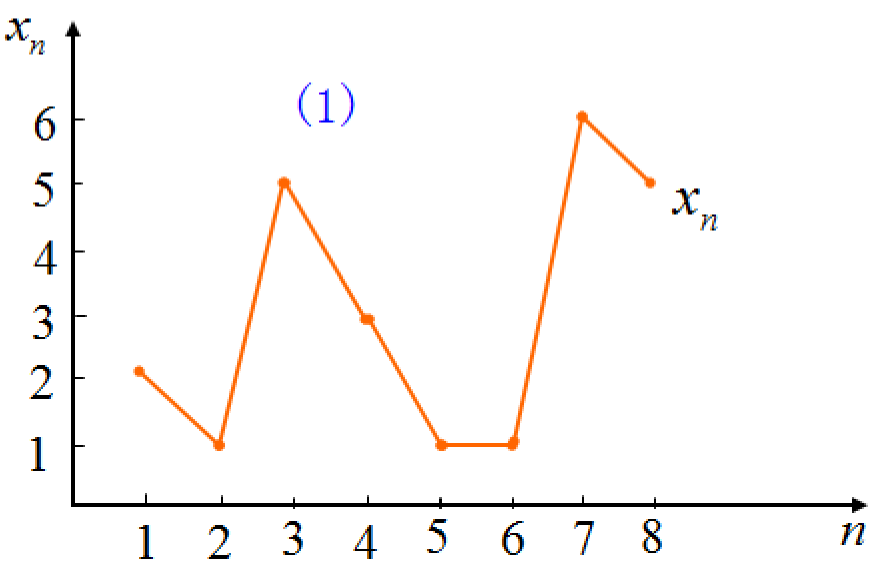
例 2：考虑抛掷一颗骰子的试验

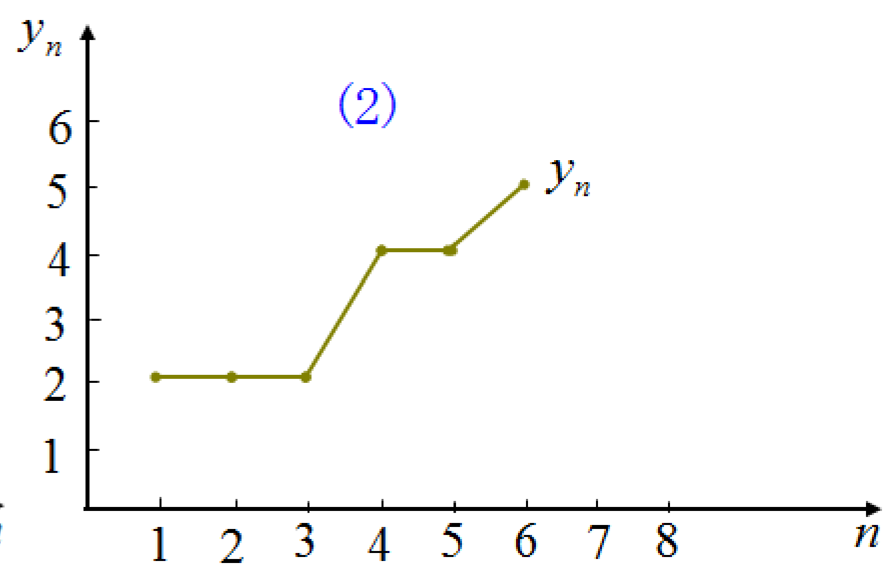
(1) 设X_n是第n次$(n \ge 1)$抛掷的点数，

$\{X_n, n \ge 1\}$的状态空间为$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) 设Y_n是前n次出现的最大点数,

$\{Y_n, n \ge 1\}$的状态空间是$\{1,2,3,4,5,6\}$



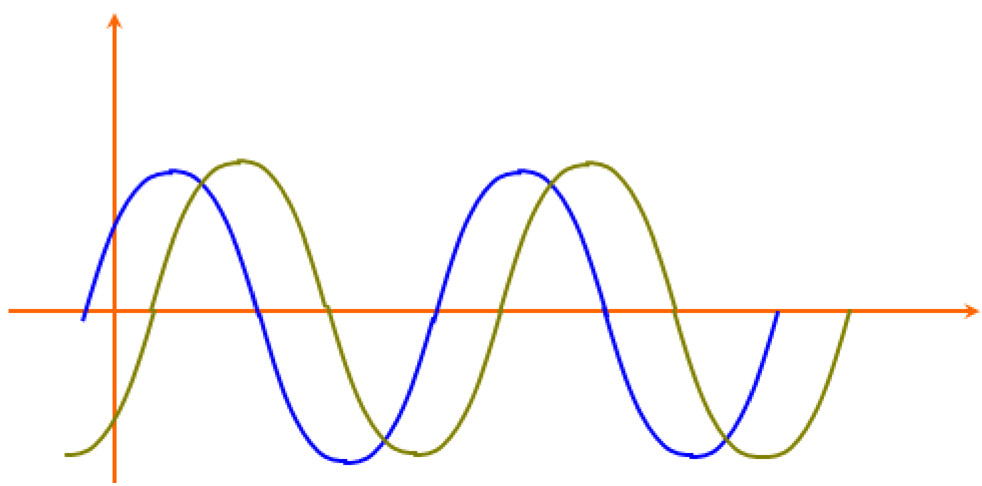


例3：（随机相位余弦波）$X(t)=\alpha cos(\omega t+\Theta)$,
$t\in(-\infty,+\infty)$, α和ω是正常数, $\Theta\sim U(0,2\pi)$。
$\{X(t);t\in(-\infty,+\infty)\}$是连续时间连续状态的随机过程。

状态空间是$[-\alpha,\alpha]$.

在$(0,2\pi)$内任取一数θ,相应的就得到一个样本函数 $x(t)=\alpha cos(\omega t+\theta)$,

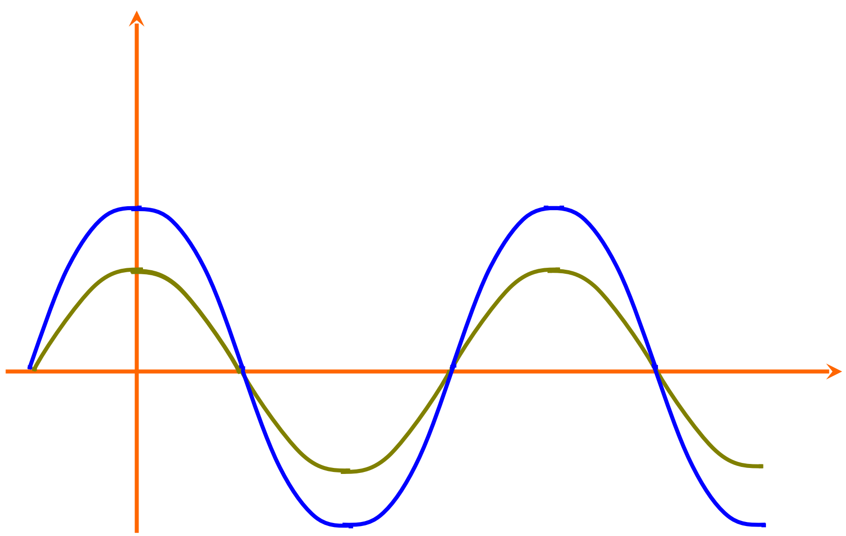
这族样本函数的差异在于相位θ的不同.



例4：设$X(t)=V\cos\omega t \quad t\in(-\infty,+\infty)$，$\omega$是正常数，$V\sim U[0,1]$。则$\{X(t)\}$是连续时间连续状态随机过程。

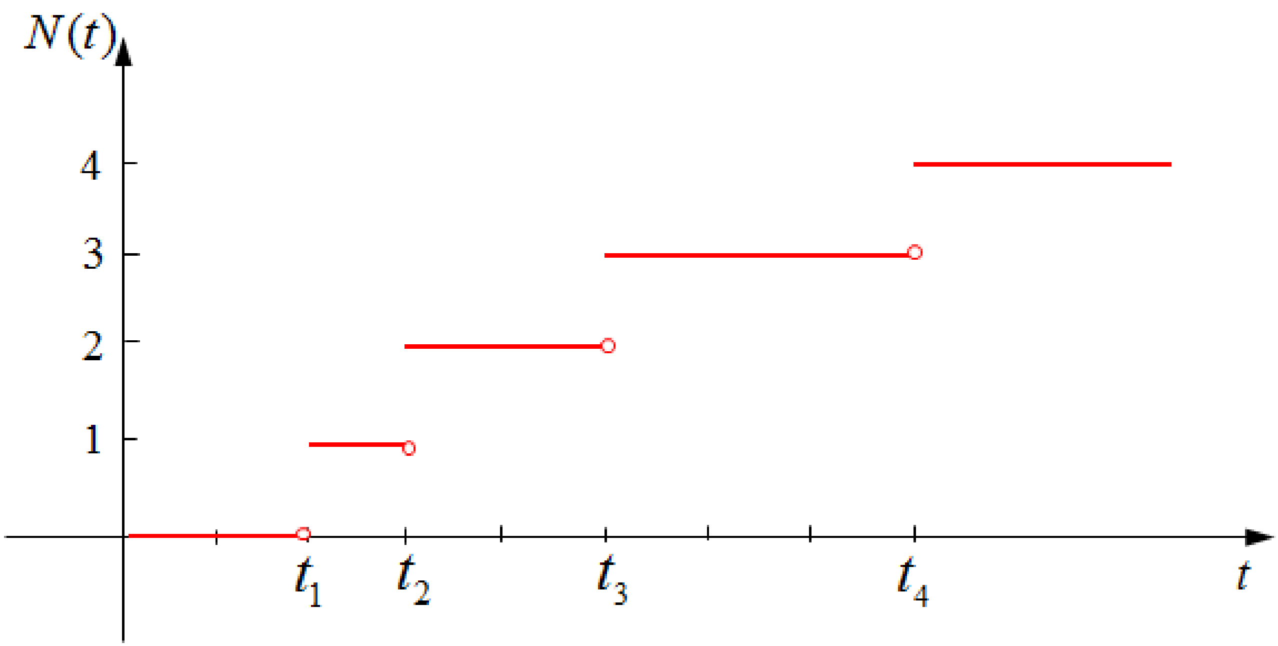
状态空间是$[-1,\ 1]$.

所有样本函数是：$\{x(t)=v\cos\omega t : v\in[0,\ 1]\}$



例5：以$N(t)$表示$(0,t]$内到某保险公司理赔的人数。则$\{N(t),t\geq 0\}$是连续时间离散状态的随机过程，状态空间是$\{0,1,2,\cdots\}$.

假设不会有两人或两人以上同时理赔，设第i人理赔的时间为t_i，则$0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots$，对应的样本函数为：



§2 随机过程的有限维分布

一、有限维分布函数族

设随机过程$\{X(t), t\in T\}$，对每一固定的$t\in T$，

随机变量$X(t)$的分布函数与t有关，

记为$F_X(x,t)=P\{X(t)\le x\}$，$x\in R$，

称为$\{X(t), t\in T\}$的一维分布函数

$\{F_X(x,t), t\in T\}$称为一维分布函数族

对任意$n(n=2,3,\cdots)$个不同的时刻，$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$

n维随机变量$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$,

它的分布函数记为：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;\ \ t_1,t_2,\cdots t_n)=P\left\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots X(t_n)\le x_n\right\},$$

$$x_i\in R,i=1,2,\cdots n$$

称为$\{X(t),t\in T\}$的n维分布函数

$\{F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)\ \ t_i\in T\}$称为$n$维分布函数族

$$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n),n=1,2,\cdots \quad t_i\in T\right\}$$

称为随机过程$\left\{X(t),t\in T\right\}$的有限维分布函数族

它完全确定了随机过程的统计特性

二、例题

例1：有10把步枪，其中两把已校正，命中率为p_1;其余未校正,命中率为p_2,这里$p_1 > p_2$.某人任取一把开始打靶，令X_n为第n次命中的次数,即$X_n = \begin{cases} 1 & 第n次命中 \\ 0 & 第n次未命中 \end{cases}$

(1) 对$n \neq m$，求（X_n，X_m）的联合分布律

和边缘分布律。

(2) 以S_n表示前n次命中的次数，求S_n的分布律。

（3）若$p_1 = 1$，$p_2 = 0$，写出所有样本函数，

写出S_n的分布律. 此时对$n \neq m$，X_n和X_m独立吗？

分析

- $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立序列吗？
- $\{S_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从二项分布吗?

分析:过程与此人拿到的枪是好枪还是坏枪有关。若令$A=$"取到已校正的枪",则在计算过程的有限维分布时要按照A是否发生利用全概率公式计算。

➢ 分析

- 在事件 A(或不) 发生的条件下，$\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 是独立序列吗？

- 在事件 A (或不) 发生的条件下，$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从二项分布吗 ？

解：令$A=$"取到已校正的枪"，由全概率公式得：

$$(1)\, p_{11}=P(X_n=1, X_m=1)$$

$$=P(X_n=1, X_m=1 \mid A)P(A)+P(X_n=1, X_m=1 \mid \bar{A})P(\bar{A})$$

$$=0.2 p_1^2+0.8 p_2^2;$$

同理$p_{01}=p_{10}=0.2 p_1(1-p_1)+0.8 p_2(1-p_2)$;

$$p_{00}=0.2(1-p_1)^2+0.8(1-p_2)^2$$

$$P(X_n=0)=0.2(1-p_1)+0.8(1-p_2)$$

$$P(X_n=1)=0.2 p_1+0.8 p_2$$

(2)同样利用全概率公式

$$P(S_n = k)$$

$$= P(S_n = k \mid A)P(A) + P(S_n = k \mid \overline{A})P(\overline{A})$$

$$= 0.2C_n^k p_1^k (1 - p_1)^{n-k} + 0.8C_n^k p_2^k (1 - p_2)^{n-k}$$

$$k = 0,1,2,\ldots,n$$

(3)若A发生，则百发百中；若A不发生，则永不命中。$\{S_n\}$只有两条样本函数

$\{1, 2, 3, 4, ...\}$和$\{0, 0, 0, ...\}$

$\{X_n\}$只有两条样本函数$\{1, 1, 1, ...\}$

和$\{0, 0, 0, ...\}$

$$P(S_n = 0) = P(\bar{A}) = 0.8, \ P(S_n = n) = 0.2$$

X_n与X_m不独立，因为

$$P(X_n = 1 | X_m = 1) = 1 \neq 0.2 = P(X_n = 1)$$

➢ 注

若改为有放回的任取一把进行打靶

- $\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$是独立序列吗？
- $\{S_n; n = 1, 2, \cdots\}$中 $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ 服从二项分布吗?

例2.设A,B独立同分布， $P(A=\pm 1)=0.5,$

写出并画出随机过程$X(t)=At+B,$

$t\in\left(-\infty,+\infty\right)$的所有样本函数,

计算(X_1,X_2)的联合分布律和边缘分布律.

➢ 分析

- $\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ 完全由二元随机变量 (A, B) 所确定

$$(X_1, X_2) = (A + B, A + 2B)$$

(A,B)	X(1)	X(2)
(1,1)	2	3
(1,-1)	0	1
(-1,1)	0	-1
(-1,-1)	-2	-3

解：过程由（A, B)的取值完全决定。

共有4条样本函数

$$x(t)=t+1; x(t)=t-1; x(t)=-t+1; x(t)=-t-1.$$

$X_1 \backslash X_2$	-3	-1	1	3	$P(X_1 = i)$
-2	1/4	0	0	0	1/4
0	0	1/4	1/4	0	1/2
2	0	0	0	1/4	1/4
$P(X_2 = j)$	1/4	1/4	1/4	1/4	1

例3：设随机过程$X(t)=V\cos t, t\in(-\infty,+\infty)$，

V在$[0,1]$上均匀分布。

(1) 求在$t=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{2\pi}{3}$时$X(t)$的概率密度；

(2) 求$P[X(0)>0.5,\ X(\dfrac{\pi}{4})<0.5]$.

解：此过程由V的取值决定。

若$\cos t \neq 0$, 记$a=\cos t$,

则$X(t)=aV$的密度函数为：

$$f_{X(t)}(x)=f_V\left(\frac{x}{a}\right)\cdot\frac{1}{|a|}=\begin{cases}\frac{1}{|a|} & 0<\frac{x}{a}<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

即若$\cos t>0$, 则$X(t)\sim U[0,\cos t]$;

若$\cos t<0$, 则$X(t)\sim U[\cos t,0]$;

若$\cos t=0$, 则$P(X(t)=0)=1$.

$$\therefore f_{X(\frac{\pi}{4})}(x)=\begin{cases}\sqrt{2}, & 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$f_{X(\frac{2\pi}{3})}(x)=\begin{cases}2, & -\frac{1}{2}<x<0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$(2)\ P[X(0) > 0.5,\quad X(\frac{\pi}{4}) < 0.5]$$

$$= P[V > 0.5,\quad \frac{\sqrt{2}}{2}V < 0.5]$$

$$= P[0.5 < V < \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

例5.(简单 随机游动, 醉汉行走)

甲乙两人游戏,第i次甲赢的钱数为X_i元,

设$X_1,\dots,X_n,\dots$独立同分布,

$P(X_i=1)=p,\ \ P(X_i=-1)=q=1-p.$

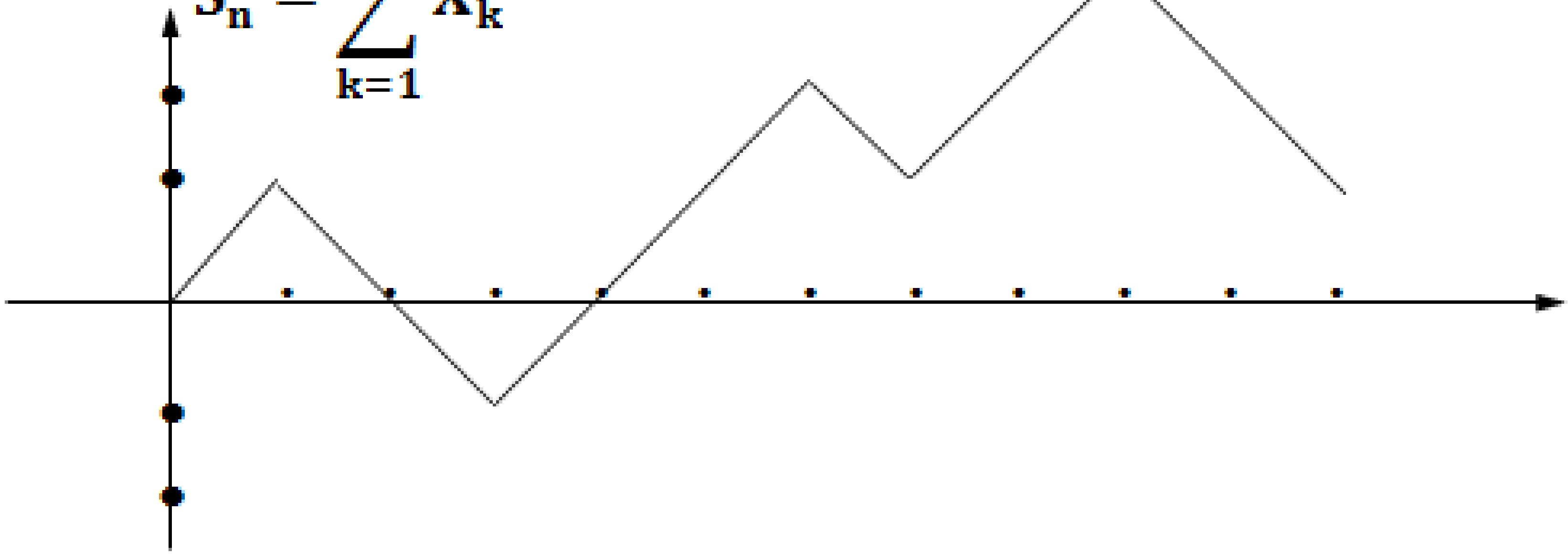
设前n次甲赢的总钱数为S_n,计算

(1)S_n的分布律;

(2)$P\{S_1=1, S_3=1, S_8=4\}$;

（3）若$p=0.36$，游戏一直到甲恰好赢50次为止，问游戏需进行100次以上的概率约为多少？

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$



$\{S_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 前n次甲赢的总钱数

$\{X_n; n = 1, 2, \cdots\}$ 第n次甲赢的钱数

解:(1)S_n的取值由前n次甲赢的次数决定

用V_n表示前n次甲赢的总次数，则$V_n \sim B(n,p)$,

且$S_n = V_n - (n - V_n) = 2V_n - n$.

$$\therefore P(S_n = k) = P\left(V_n = \frac{k+n}{2}\right) = \binom{n}{\frac{k+n}{2}} p^{\frac{k+n}{2}} q^{\frac{n-k}{2}},$$

k与n奇偶性相同,且$-n \le k \le n$

$$(2)\mathrm{P}\{S_1 = 1, S_3 = 1, S_8 = 4\}$$

$$= P\{S_1 = 1, S_3 - S_1 = 0, S_8 - S_3 = 3\}$$

$$= P\{S_1 = 1\}P\{S_3 - S_1 = 0\}P\{S_8 - S_3 = 3\}$$

$$= p(2pq)(C_5^4 p^4 q) = 10p^6 q^2$$

$$V_2 = 1 \qquad V_5 = 4$$

(3)用W_{50}表示甲恰好赢50次时游戏进行的次数. 则$\{W_{50} > 100\} = \{V_{100} < 50\}$.

由中心极限定理，V_{100}近似服从$N(100p,100pq)$.

$$\therefore P(W_{50} > 100) = P(V_{100} < 50) = P(V_{100} \le 49)$$

$$\approx \Phi\left(\frac{49-100p}{10\sqrt{pq}}\right) = \Phi(2.71) = 0.9966.$$

$$B(n,p) \overset{\text{近似}}{\sim} N(np, np(1-p))$$

➢ 注 1，利用事件相等

$$\{W_k > n\} = \{V_n < k\}$$

$$\{W_k \le n\} = \{V_n \ge k\}$$

$$\{W_k \le n-1\} = \{V_{n-1} \ge k\}$$

$$\{W_k > n-1\} = \{V_{n-1} < k\}$$

注 2　下面式子正确吗？

W_k表示恰好赢k次时游戏进行的次数

V_n表示前n次甲赢的总次数

$$\{W_k = n\} \subset \{V_n = k\}$$

$$? \{V_n = k\} \subset \{W_k = n\}$$

$$\{V_n = k\} \subset \{W_k \le n\}$$

$$? \{W_k = n\} = \{V_n = k\}$$

$$? \ \{W_k \ge n\} = \{V_n \le k\}$$

§3 均值函数和协方差函数

给定随机过程$\{X(t), t \in T\}$，记

$\mu_X(t) = E[X(t)]$------均值函数

$\psi_X^2(t) = E[X^2(t)]$------均方值函数

$\sigma_X^2(t) = D_X(t) = D[X(t)]$------方差函数

$\sigma_X(t) = \sqrt{\sigma_X^2(t)}$------标准差函数

又设任意$t_1, t_2 \in T$

$$R_X(t_1,t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] ------ \text{(自)相关函数}$$

$$C_X(t_1,t_2) = Cov[X(t_1), X(t_2)]$$

$$= E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][X(t_2) - \mu_X(t_2)]\}$$

$$------ \text{(自)协方差函数}$$

各数字特征之间的关系如下：

$$\psi_X^2(t)=R_X(t,t)$$

$$C_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)$$

$$\sigma_X^2(t)=C_X(t\ ,t\ )=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)$$

定义：

随机过程$\{X(t), t\in T\}$，如果对每一$t\in T$，

$E[X^2(t)]$都存在，则称$X(t)$是二阶矩过程.

二阶矩过程的均值函数和相关函数总是存在的.

$$X(t_1)X(t_2)\le\frac{1}{2}(X^2(t_1)+X^2(t_2))$$

例1：设A,B是两个随机变量，求随机过程：

$X(t)=At+B, t\in(-\infty,+\infty)$的均值函数和自相关函数。

如果A,B相互独立，且$A\sim N(0,1), B\sim U(0,2)$，

问$X(t)$的均值函数和自相关函数又是怎样的？

解： $\mu_X(t)=E[X(t)]=tE(A)+E(B)$

$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$=t_1t_2E(A^2)+(t_1+t_2)E(AB)+E(B^2) \quad t_1,t_2\in T$

$\Rightarrow \mu_X(t)=1, R_X(t_1,t_2)=t_1t_2+\frac{4}{3} \quad t_1,t_2\in T$

例2：求随机相位余弦波$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$
$-\infty<t<+\infty,\left(\Theta\sim \mathrm{U}(0,2\pi)\right)$的均值函数、方差函数和自相关函数。

解：$\mu_X(t)=E[X(t)]$

$$=\int_0^{2\pi} a\cos\left(\omega t+\theta\right)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$

$$=E[a^2 cos(\omega t_1+\Theta)cos(\omega t_2+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi} cos(\omega t_1+\theta)cos(\omega t_2+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}[cos(\omega t_1+\omega t_2+2\theta)+cos(t_2-t_1)]d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}cos\omega(t_2-t_1)$$

$$\sigma_X^2(t)=R_X(t,t)-\mu_X^2(t)=\frac{a^2}{2}$$

例3：设$X(t)=\dfrac{1}{U^t}$，$t\ge 0$,这里$U\sim U(0,1)$.

问:$\{X(t);\ t\ge 0\}$是否是二阶矩过程？

解：对$t\ge 0$，$E(X^2(t))=\int_0^1 \dfrac{1}{u^{2t}}dt$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-2t}, & \mathrm{t}<\dfrac{1}{2}\\ +\infty, & t\ge\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$\therefore\{X(t);\ t\ge 0\}$不是二阶矩过程.

定义：

$\{X(t),t\in T\}$是一随机过程，对任意整数$n\geq 1$及任意$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$，$(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n))$服从$n$维正态分布，则称$\{X(t),t\in T\}$是正态过程.

正态过程的全部统计特性完全由它的均值函数和自协方差函数所确定。

例4. 设$\{X(t);t\geq 0\}$是正态过程，$\mu_X(t)=t$，$C_X(t,s)=ts+1$，求$X(1)$，$X(2)$，$X(1)+X(2)$的分布。

解：$D_X(t)=C_X(t,t)=t^2+1$，

$\therefore X(t)\sim N(t,t^2+1)$

特别地，$X(1)\sim N(1,2)$，　　$X(2)\sim N(2,5)$.

$\because \{X(t); t \geq 0\}$是正态过程， $\therefore (X(1), X(2))$服从正态分布，$\therefore X(1)+X(2)$服从正态分布。

又$E(X(1)+X(2)) = 1+2 = 3$,

$D(X(1)+X(2)) = DX(1)+DX(2)+2C_X(1,2) = 13$,

$\therefore X(1)+X(2) \sim N(3,13)$.

例5：设$X(t)=A\cos t+B\sin t, t\in(-\infty,+\infty)$,

A,B独立，$EA=EB=0, DA=DB=1$.

(1)计算均值函数和自相关函数.

(2)如$P(A=\pm 1)=P(B=\pm 1)=0.5$, 求

$X(0), X(\frac{\pi}{4})$ 的分布律。

(3)如A,B都服从$N(0,1)$，求

$X(0), X(\frac{\pi}{4}), X(0)+X(\frac{\pi}{4})$的分布。

解:(1)因为$E(A)=E(B)=E(AB)=0,$

$$E(A^2)=E(B^2)=1,$$

故$\mu_X(t)=E\{A\cos t+B\sin t\}$

$$=E(A)\cos t+E(B)\sin t=0$$

$$R_X(t_1,t_2)$$

$$=E[(A\cos t_1+B\sin t_1)(A\cos t_2+B\sin t_2)]$$

$$=\cos t_1\cos t_2+\sin t_1\sin t_2=\cos(t_2-t_1)$$

$$(2)\ \because X(0)=A,\ X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(A+B)\ ,$$

$$\therefore P(X(0)=\pm 1)=0.5;$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=\sqrt{2})=P(A=1,\ \ B=1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2})=P(A=-1,\ \ B=-1)=\frac{1}{4},$$

$$P(X(\frac{\pi}{4})=0)$$

$$=P(A=1,\ \ B=-1)\ +P(A=-1,\ \ B=1)\ =\frac{1}{2}.$$

(3) 因为A,B是相互独立的正态变量，

故(A,B)是二维正态变量，

对任意一组实数$t_1,t_2,\cdots t_n\in T$,

$\because X_{t_i}=A\cos t_i+B\sin t_i$是$(A,B)$的线性组合，

由正态分布的线性变换不变性，

$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$服从$n$维正态分布

所以$\{X(t)\}$是正态过程

$$\therefore X(0) \sim N(0,1), X(\frac{\pi}{4}) \sim N(0,1),$$

$$D(X(0)+X(\frac{\pi}{4})) = 2+2\cos\frac{\pi}{4} = 2+\sqrt{2},$$

$$\therefore X(0)+X(\frac{\pi}{4}) \sim N(0,2+\sqrt{2}).$$

或$X(0)+X(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}+1)\ A+\frac{\sqrt{2}}{2}B$

$$\sim N(0,2+\sqrt{2}).$$

两个随机过程之间的关系：

设$X(t),Y(t)$是依赖于同一参数$t\in T$的随机过程，

称$\{X(t),Y(t) \quad t\in T\}$为二维随机过程

$t_1,t_2,\cdots t_n;t_1^{'},t_1^{'},\cdots t_m^{'}$是$T$中任意两组实数，

则$n+m$维随机变量

$$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n);Y(t_1^{'}),Y(t_2^{'}),\cdots Y(t_m^{'})\right)$$

的分布函数：

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n;y_1,y_2,\cdots y_m;t_1^{'},t_2^{'},\cdots t_m^{'})$$

称为二维随机过程的$n+m$维分布函数

对任意的正整数n,m，任意的数组

$$t_1,t_2,\cdots t_n\in T;t_1',t_1',\cdots t_m'\in T$$

n维随机变量$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$与

m维随机变量$\left(Y(t_1'),Y(t_2'),\cdots Y(t_m')\right)$

相互独立，称随机过程$\{X(t)\}$和$\{Y(t)\}$

相互独立的

互相关函数：

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E[X(t_1)Y(t_2)] \quad t_1,t_2\in T$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=E[Y(t_1)X(t_2)] \quad t_1,t_2\in T$$

互协方差函数：

$$C_{XY}(t_1,t_2)=\mathrm{Cov}(X_{t_1},Y_{t_2})$$

$$=R_{XY}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_Y(t_2) \quad t_1,t_2\in T$$

$$C_{YX}(t_1,t_2)=R_{YX}(t_1,t_2)-\mu_Y(t_1)\mu_X(t_2) \quad t_1,t_2\in T$$

如果对任意的$t_1, t_2 \in T$，恒有$C_{XY}(t_1, t_2) = 0$，
称随机过程$\{X(t)\}$和$\{Y(t)\}$是不相关的。

例6：某保险公司的收入由老人寿险收入和儿童平安保险收入组成。设到时刻t为止，老人寿险收入为$X(t)$,儿童平安保险收入为$Y(t)$,总收入为$Z(t)$。已知$\mu_X(t),\mu_Y(t),C_X(t_1,t_2),C_Y(t_1,t_2)$,并知过程$\{X(t)\}$与$\{Y(t)\}$不相关。求$\mu_Z(t),C_Z(t_1,t_2)$.

解：$Z(t)=X(t)+Y(t)$

$$\therefore \mu_Z(t)=\mu_X(t)+\mu_Y(t)$$

$$C_Z(t_1,t_2)=Cov(X(t_1)+Y(t_1),X(t_2)+Y(t_2))$$
$$=C_X(t_1,t_2)+C_Y(t_1,t_2)$$