希尔伯特变换

① 因果信号 $x(t)$（即 $x(t)=0$ 当 $t<0$ 时）的傅里叶变换 $X(jw)$ 实部与虚部满足希尔伯特变换关系。

推导： $x(t) \xrightarrow{F} X(jw) = R(w) + jI(w)$

由于 $x(t) = x(t)u(t)$

所以 $$X(jw) = \frac{1}{2\pi} X(jw) * \left(\frac{1}{jw} + \pi\delta(w)\right)$$
$$= \frac{1}{2}X(jw) + \frac{1}{2\pi} X(jw) * \frac{1}{jw}$$

移项得即 $$X(jw) = \frac{1}{\pi} X(jw) * \frac{1}{jw}$$

$$R(w) + jI(w) = \frac{1}{\pi}\left[R(w) + jI(w)\right] * \frac{1}{jw}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[I(w) * \frac{1}{w}\right] - j\left[\frac{1}{\pi} R(w) * \frac{1}{w}\right]$$

所以有： $$R(w) = \frac{1}{\pi} I(w) * \frac{1}{w}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I(\lambda)}{w-\lambda} d\lambda$$

$$I(w) = R(w) * \left(-\frac{1}{\pi w}\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(\lambda)}{w-\lambda} d\lambda$$

② 实信号 $x(t)$ 的傅里叶变换是 $X(jw)$，则 $X(jw)$ 具有共轭对称性

$$X(jw) = X^*(-jw)$$

因此对一个实信号，只须知道其 $X(jw)$ 的正频部分或负频部分，取反并取共轭后就是其负频部分或正频部分。

取一个新信号 $z(t)$，其频谱为 $Z(j\omega)=\begin{cases}2X(j\omega) & \omega>0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$

则有:

$$Z(j\omega)=X(j\omega)\cdot[2u(\omega)]$$

则

$$z(t)=2x(t)*F^{-1}[u(\omega)]$$

首先计算 $F^{-1}[u(\omega)]$

由于 $u(-t)\xrightarrow{F}-\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)$

对偶性可得

$$-\frac{1}{jt}+\pi\delta(t)\xrightarrow{F}2\pi u(\omega)$$

所以 $\frac{1}{2}\delta(t)+j\frac{1}{2\pi t}\longrightarrow u(\omega)$

代入有:

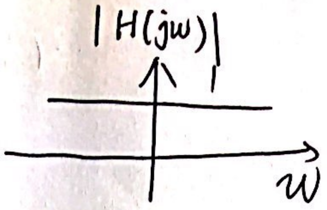
$$\begin{aligned}z(t)&=x(t)*\left[\delta(t)+j\frac{1}{\pi t}\right]\\&=x(t)+j\left[x(t)*\frac{1}{\pi t}\right]\\&=x(t)+j\hat{x}(t)\end{aligned}$$

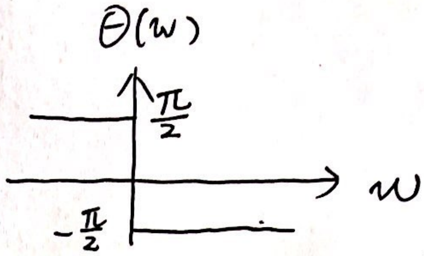
这里 $\hat{x}(t)=H[x(t)]=x(t)*\frac{1}{\pi t}$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

从频域角度来看希尔伯特变换，由于希尔伯特变换的冲激响应 $h(t)=\frac{1}{\pi t}$，则

$$H(j\omega)=F\left[\frac{1}{\pi t}\right]=-j\,\mathrm{sgn}(\omega)=\begin{cases}-j & \omega>0\\ j & \omega<0\end{cases}$$





它是一个移相器，将 $w>0$ 的相位减少 $\frac{\pi}{2}$，将 $w<0$ 的相位增加 $\frac{\pi}{2}$。

接下来讲两个定理。

定理 1. 若 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的希尔伯特变换，即

$$\hat{x}(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

则

$$x(t) = \hat{x}(t) * \left[-\frac{1}{\pi t}\right] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

定理 2：若 $\hat{x}(t)$ 是 $x(t)$ 的希尔伯特变换，

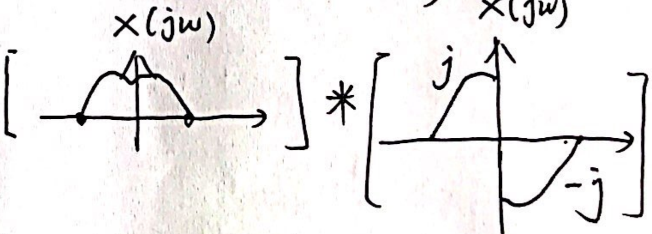
则 $$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = 0$$

即 $x(t)$ 与 $\hat{x}(t)$ 正交。

证明：设 $y(t) = x(t)\,\hat{x}(t)$

则 $$Y(jw) = \frac{1}{2\pi}\, X(jw) * \hat{X}(jw)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\ \ \right] * \left[\ \ \right]$$



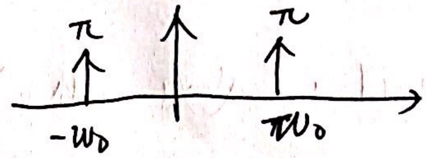
可以看出 $Y(j0) = 0$（请证明）

而 $$Y(j0) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\hat{x}(t)\,dt = 0$$

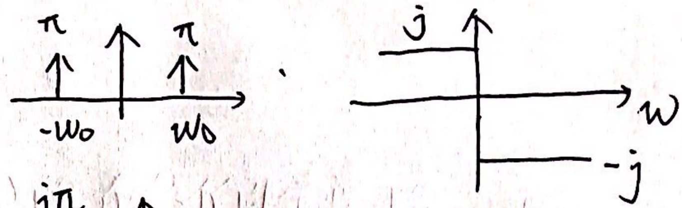
例： 证明：$\cos(\omega_0 t)$ 的希尔伯特变换是 $\sin(\omega_0 t)$

$\sin(\omega_0 t)$ 的希尔伯特变换是 $-\cos(\omega_0 t)$

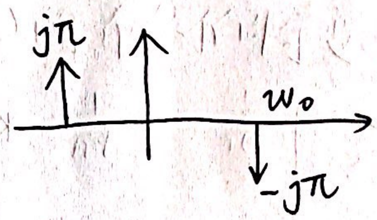
证明：① $\cos(\omega_0 t) \xrightarrow{F}$



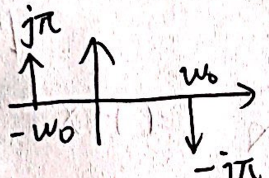
$H[\cos(\omega_0 t)] \xrightarrow{F}$



=

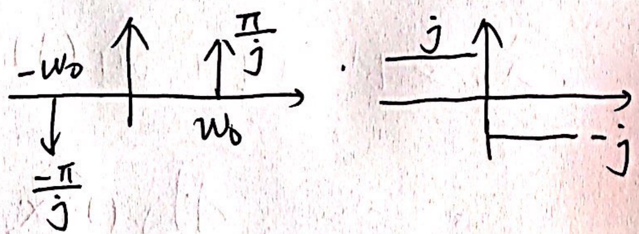


而 F^{-1} [

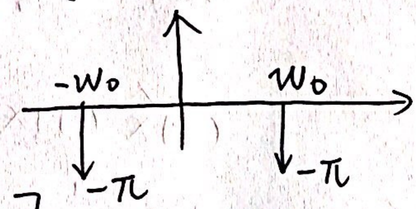


] = $\sin(\omega_0 t)$

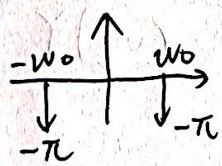
② $H[\sin(\omega_0 t)] \xrightarrow{F}$



=



而 F^{-1} [



] $= -\cos(\omega_0 t)$

定理：一个实窄带信号 $x(t) = a(t)\cos[\omega_0 t + \theta(t)]$

其中 $a(t)$ 的频带和 $\theta(t)$ 频带范围 $\omega_m \ll \omega_0$，

则 $x(t)$ 的希尔伯特变换

$$\hat{x}(t) \approx a(t)\sin[\omega_0 t + \theta(t)]$$

证明:

$$H[a(t)\cos(w_0t+\theta(t))]$$

$$=H[a(t)\cos(w_0t)\cos\theta(t)-a(t)\sin(w_0t)\sin\theta(t)]$$

$$\approx a(t)\sin(w_0t)\cos\theta(t)+a(t)\cos(w_0t)\sin\theta(t)$$

(这一步假定 $a(t)$ 和 $\theta(t)$ 相对 $\cos(w_0t)$ 和 $\sin(w_0t)$ 的变化来说是常数。具体分析请参阅《希尔伯特变换与信号包络、瞬时相位和瞬时频率》)

$$=a(t)\sin[w_0t+\theta(t)]$$

对于一个窄带信号 $x(t)$,我们将 $a(t)$ 叫做 $x(t)$ 的瞬时包络、将 $\varphi(t)=w_0t+\theta(t)$ 叫做 $x(t)$ 的瞬时相位,将 $w(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}=w_0+\theta'(t)$ 叫做 $x(t)$ 的瞬时角频率。则有:

$$|a(t)|=\sqrt{x(t)^2+\hat{x}(t)^2}$$

$$\varphi(t)=\arctan\left[\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right]$$

$$w(t)=\frac{d\left[\arctan\left(\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right)\right]}{dt}$$

可以通过 $x(t)$ 获得其希尔伯特变换,然后代入上述公式求得 $a(t)$,$\varphi(t)$ 和 $w(t)$