第三章　马尔可夫链

关键词：

马尔可夫性
时齐马尔可夫链

n 步转移概率
C-K 方程
有限维分布律

常返性　暂留性
正常返　零常返
平均回转时　互达
周期性　不可约

平稳分布

§1 马尔可夫链的定义

例1.(随机游动)

甲乙两人游戏,每一局甲赢1元的概率为p,输1元的概率为$q=1-p$.假设一开始甲带了0元钱。令S_n表示n局后甲所拥有的钱数。计算$P\{S_8=4|S_1=1,S_3=1,S_4=2\}$和$P\{S_8=4|S_4=2\}$,它们是否相等?

解： $P\{S_8=4 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}$

$$=P\{S_8-S_4=2 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2\} \ =4p^3q$$

$$P\{S_8=4 \mid S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2 \mid S_4=2\}$$

$$=P\{S_8-S_4=2\} \ =4p^3q$$

$$\therefore P\{S_8=4 \mid S_1=1, S_3=1, S_4=2\}=P\{S_8=4 \mid S_4=2\}$$

Markov性

更一般地：$\forall k \geq 1, \forall n_0 < n_1 < \ldots < n_{k+1},$

$\forall$状态$i_0, i_1, \ldots i_{k-1}, i, j$

$$P\{S_{n_{k+1}} = j \mid S_{n_0} = i_0, \ldots, S_{n_{k-1}} = i_{k-1}, S_{n_k} = i\}$$
$$= P\{S_{n_{k+1}} = j \mid S_{n_k} = i\}$$

$Markov$性的直观含义：

令$A=\{S_{n_0}=i_0,\ldots,S_{n_{k-1}}=i_{k-1}\}$……过去

$B=\{S_{n_k}=i\}$…………现在

$C=\{S_{n_{k+1}}=j\}$…………将来

Markov性：

$$P(C\mid AB)=P(C\mid B)$$

已知到现在为止的所有信息来预测将来，
则只与现在状态有关，与过去状态无关.

5

Markov性的直观含义：

$$P(AC|B)=P(A|B)P(C|B)$$

$$\Updownarrow$$

$$P(C|AB)$$

在已知现在状态的条件下，

过去与将来相互独立.

定义:

如果$\{X_n; n=0,1,2,\ldots\}$是状态离散的随机过程,

并且具有Markov性，即对任何$k\geq 1$,

任何状态$i_0,\ldots,i_{k-1},i,j$，有

$$P\{X_{k+1}=j \mid X_0=i_0,\ldots,X_{k-1}=i_{k-1},X_k=i\}$$
$$=P\{X_{k+1}=j \mid X_k=i\}$$

则称$\{X_n;\ n=0,1,\ldots\}$是马尔可夫链（Markov chain）

转移概率、转移矩阵

$$P(X_n = j \mid X_m = i) \overset{\text{记为}}{=\!=} p_{ij}(m,n)$$

- 在m时处于状态i的条件下，到n时转移到状态j的转移概率

性质：$p_{ij}(m,n) \geq 0, \quad \sum_{j \in I} p_{ij}(m,n) = 1$

- 在 m 时处在状态 i 的条件下，经过 n 步后转移到状态 j 的转移概率

$$p_{ij}(m, m+n)$$

记$P(m,m+n)=(p_{ij}(m,m+n))_{I\times I}$

为对应的n步转移矩阵

性质：各元素非负，每行之和为1

定义:

如果对任何状态$i, j, P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$ 不依赖于n,则称$\{X_n\}$是**时齐的Markov链**

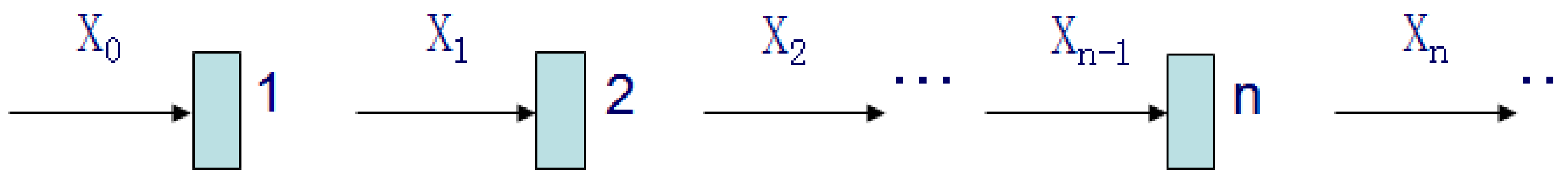
$$p_{ij}:=P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)$$

称为从i到j的一步转移概率

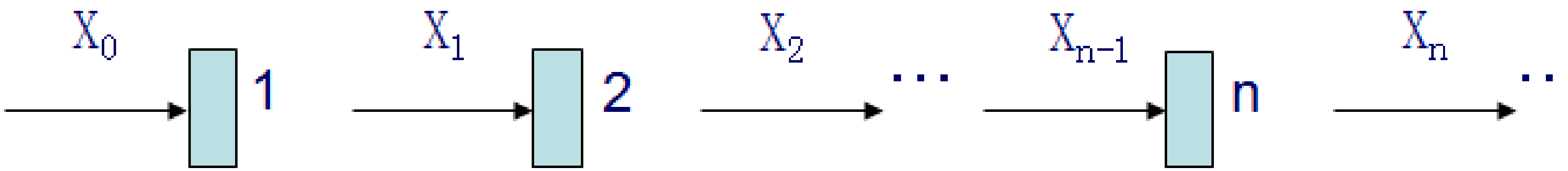
$P=(p_{ij})_{I\times I}$称为一步转移矩阵

注: 行 ➡ 列

例2.（$0-1$传输系统）



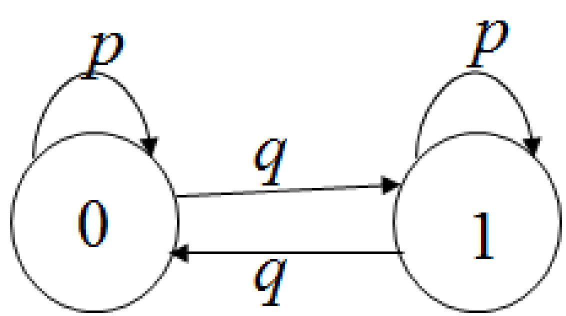
只传输0和1的串联系统中，设每一级的传真率为p, 误码率为$q=1-p$.以X_0表示第一级的输入，X_n表示第n级的输出（$n\geq 1$）.



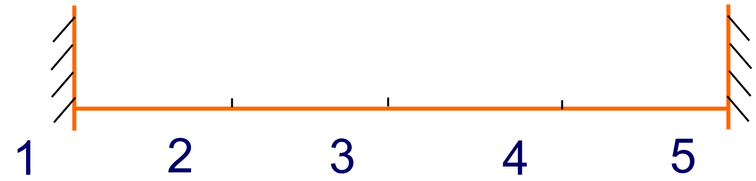
则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，状态空间$I=\{0,1\}$，

$$p_{ij}=P\left(X_{n+1}=j\mid X_n=i\right)=\begin{cases}p & j=i\\ q & j\neq i\end{cases}\qquad i,j=0,1$$

一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix}p & q\\ q & p\end{bmatrix}$，状态转移图：



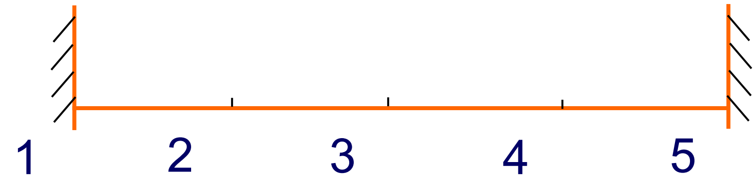
例3.(随机游动)



设一醉汉在$I=\{1,2,3,4,5\}$作随机游动：如果现在位于点$i(1<i<5)$,则下一时刻各以1/3概率向左或向右移动一格，或以概率1/3呆在原处；如果现在位于点1（或点5），则下一时刻以概率1移到点2（或点4）。

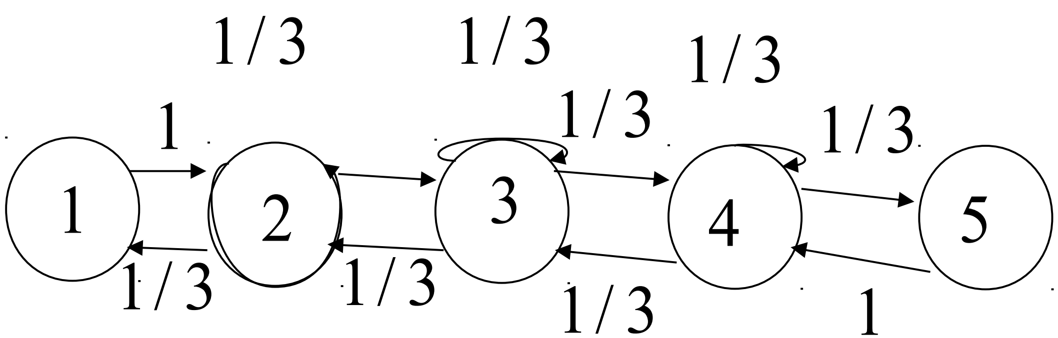
1和5两点称为反射壁，这种游动称为带两个反射壁的随机游动。

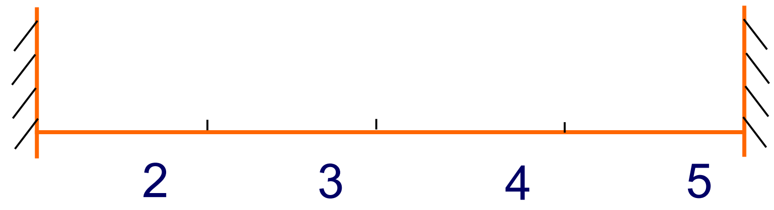
例3.（随机游动）



用X_n表示时刻n醉汉所在的位置。

则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，

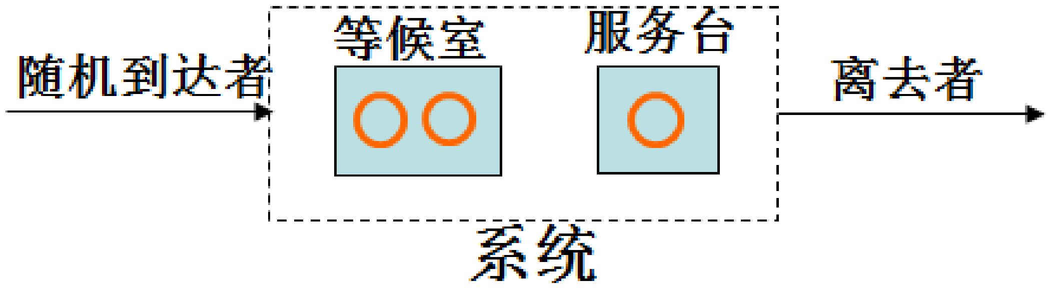




如果把1这点改为吸收壁，即Q一旦到达1这一点，则永远留在点1时，此时的转移概率矩阵为：

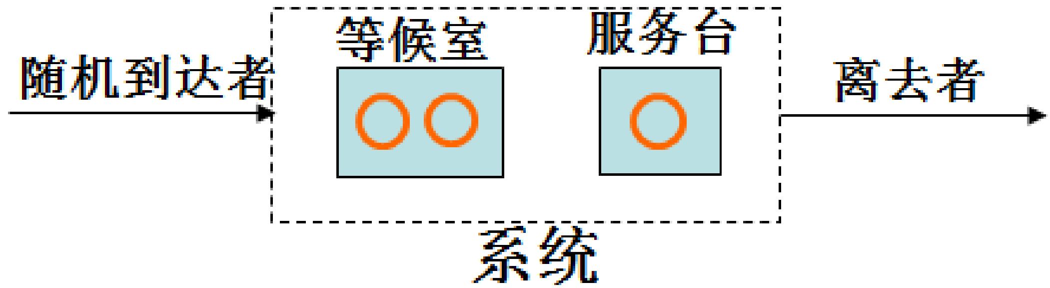
$$
P=\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
P=\begin{array}{c}
 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\
0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



例 4： 排队模型

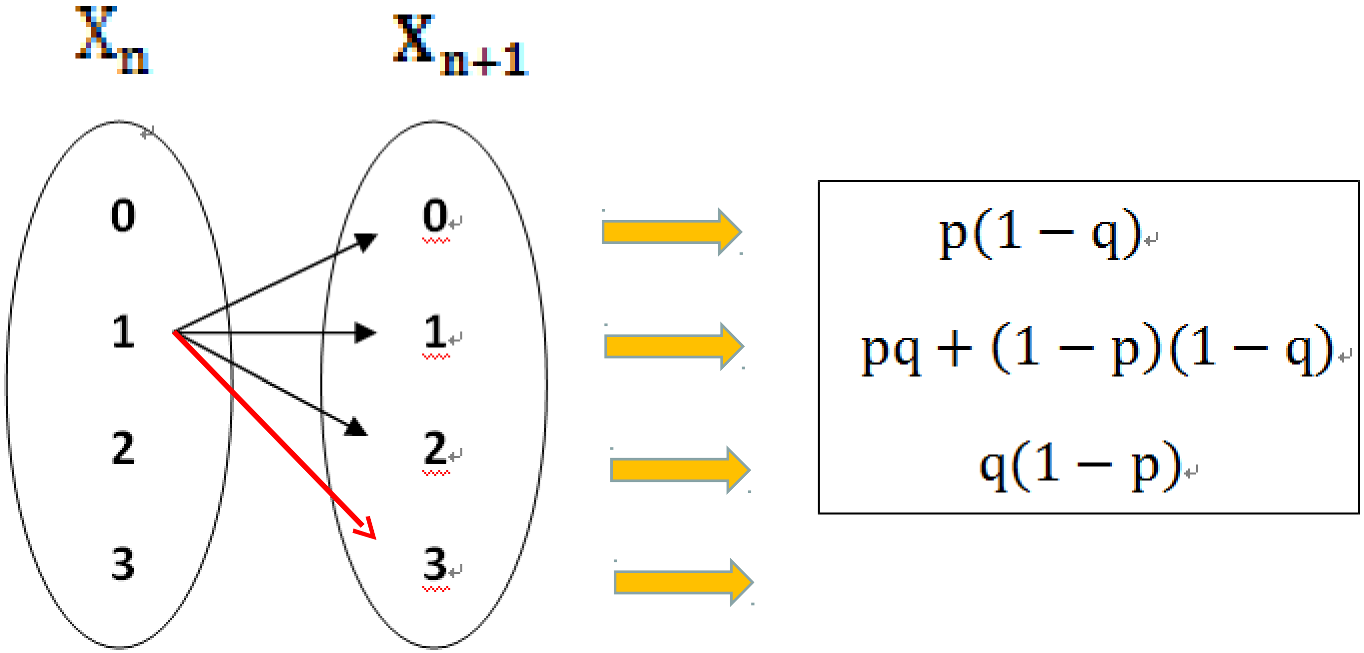
设服务系统由一个服务员和只可以容纳两个人的等候室组成。服务规则为：先到先服务，后来者需在等候室依次排队，假设一个需要服务的顾客到达系统时发现系统内已有 3 个顾客，则该顾客立即离去。



设时间间隔⊿ t 内有一个顾客进入系统的概率为 q ，有一接受服务的顾客离开系统（即服务完毕）的概率为 p，又设当⊿ t 充分小时，在这时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的，再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的。

现用马氏链来描述这个服务系统：

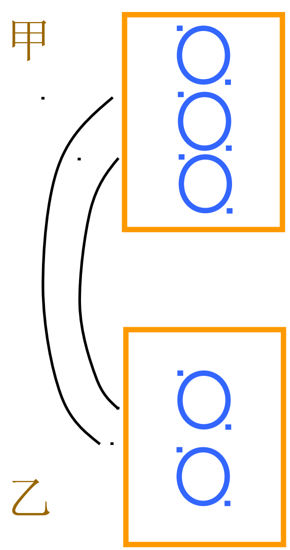
设$X_n=X(n\Delta t)$表示时刻$n\Delta t$时系统内的顾客数，即系统的状态。$\{X_n, n=0, 1, 2\cdots\}$是一随机过程，状态空间$I=\{0, 1, 2, 3\}$，且如前例1、例2的分析可知，它是一个时齐马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

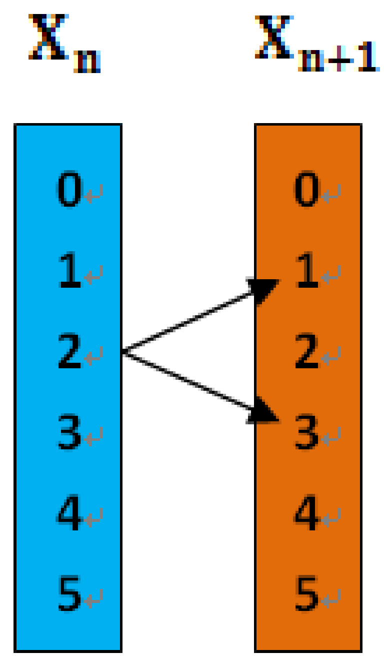


一步转移矩阵

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad 0 \quad & \quad 1 \quad & \quad 2 \quad & \quad 3 \quad \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq+(1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq+(1-p) \end{pmatrix} \end{array}$$

- 例 5：设甲、乙两袋共装 5 个球，每次任取一袋，并从袋中取出一球放入另一袋（若袋中无球则不取）。X_n 表示第 n 次抽取后甲袋的球数， $n=1,2,\cdots$. $\{X_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一随机过程，状态空间 $I=\{0,1,2,3,4,5\}$，当 $X_n=i$ 时， $X_{n+1}=j$ 的概率只与 i 有关，与 n 时刻之前如何到 i 值是无关的，这是时齐马氏链，一步转移矩阵为:





一步转移矩阵

$$P = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

- 例6：卜里耶(Polya)罐子模型。设一罐子装有r个红球，t个黑球，现随机从罐中取出一球，记录其颜色，然后将球放回，并加入a个同色球。持续进行这一过程，X_n表示第n次试验结束时罐中的红球数，n=0，1, 2, ⋯.
$\{X_n, n=0, 1, 2, \cdots\}$是一随机过程，
状态空间$I=\{r, r+a, r+2a, \cdots\}$，当$X_n=i$ 时，$X_{n+1}=j$的概率只与i有关，与n时刻之前如何取到i值是无关的，
这是一马氏链，但不是时齐的，一步转移概率为：

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i)=\begin{cases} \dfrac{i}{r+t+na} & j=i+a \\ 1-\dfrac{i}{r+t+na} & j=i \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

例：欧亚洲绝大多数汽车年保险金由所谓好-坏系统确定．以$s_i(k)$表示上年处在状态i且上年有k次理赔要求的参保人在今年的状态．设此人理赔次数服从参数为λ的泊松分布，那么此人相继状态构成一个MC，转移概率

$$p_{ij}=\sum_{k:s_i(k)=j}a_k,\ \text{这里}\ a_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

当前状态		下一状态			
状态	年保险金	0 个理赔	1 个理赔	2 个理赔	2 个以上理赔
1	2000	1	2	3	4
2	2500	1	3	4	4
3	4000	2	4	4	4
4	6000	3	4	4	4

上年有k次理赔

状态i

$S_i(k)$

$$\text{则} P=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{pmatrix}$$

例7：独立重复地掷骰子，用X_n表示第n次掷出的点数，令$Y_n = X_{n+1} + X_{n+2}, n \geq 0$.

(1) 计算$P(Y_2 = 12 | Y_0 = 2, Y_1 = 7), P(Y_2 = 12 | Y_1 = 7)$

(2)判断$\{Y_n\}$是否是$Markov$链？

$$(1)\ P(Y_2=12\mid Y_0=2, Y_1=7)$$

$$=P(X_3=X_4=6\mid X_1=1, X_2=1, X_3=6)=1/6$$

$$P(Y_2=12\mid Y_1=7)=\frac{P(Y_1=7, Y_2=12)}{P(Y_1=7)}$$

$$=\frac{P(X_2=1, X_3=X_4=6)}{P(X_2+X_3=7)}=\frac{(\frac{1}{6})^3}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{36}$$

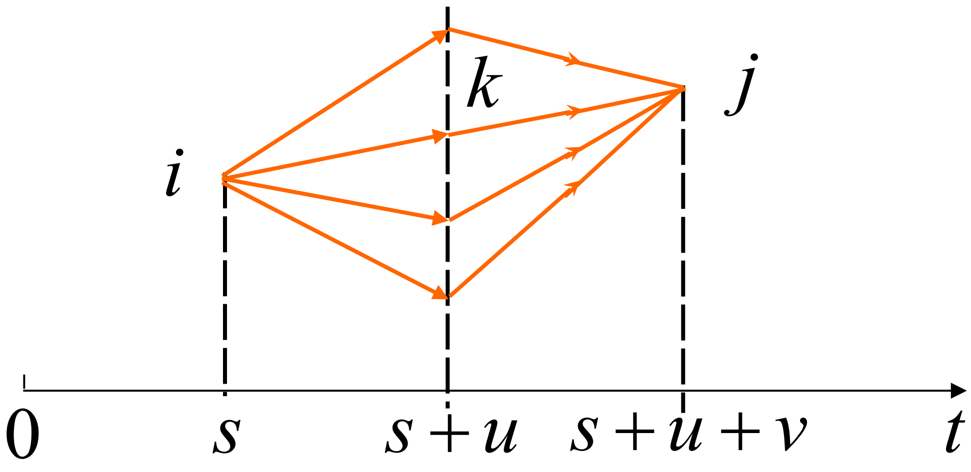
$(2)\because P(Y_2=12\mid Y_0=2, Y_1=7)\neq P(Y_2=12\mid Y_1=7)$

$\therefore \{Y_n\}$不是$Markov$链。

§2 有限维分布

$C\text{-}K$方程

$$p_{ij}(s,s+u+v)=\sum_k p_{ik}(s,s+u)\,p_{kj}(s+u,s+u+v)$$



$C-K$方程的证明：

$$p_{ij}(s,u+v)=P\{X_{s+u+v}=j\mid X_s=i\}$$

$$\overset{\text{全概率公式}}{=\!=\!=\!=}\sum_k P\{X_{s+u}=k\mid X_s=i\}P\{X_{s+u+v}=j\mid X_s=i,X_{s+u}=k\}$$

$$\overset{\text{马氏性}}{=\!=\!=\!=}\sum_k P\{X_{s+u}=k\mid X_s=i\}P\{X_{s+u+v}=j\mid X_{s+u}=k\}$$

$$=\sum_k p_{ik}(s,s+u)\,p_{kj}(s+u,s+u+v)$$

$C-K$方程可以写成矩阵形式:

$$P(s,s+u+v)=P(s,s+u)P(s+u,s+u+v)$$

(i, j)

第i行

第j列

$$p_{ij}(s,s+u+v)=\sum_k p_{ik}(s,s+u)\,p_{kj}(s+u,s+u+v)$$

以后均假设$\{X_n\}$是时齐的Markov链

由C-K方程：$P(n,n+m)=P^m$不依赖于n,

记$P^{(m)}=P(n,n+m)$,称为m步转移矩阵

记$p_{ij}^{(m)}=p_{ij}(n,n+m)$,从i到j的m步转移概率

则$P^{(m)}=P^m$

命题：

（1）对任何$n \geq 1$，$P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i)\ p_{ij}^{(n)}$

（2）对任何$n_1 < n_2 < \ldots < n_k$，

$$P(X_{n_1} = i_1, \ldots X_{n_k} = i_k) = P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \ldots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$$

- 把初始分布和n步分布分别写成行向量 $\mu^{(0)}$ 和 $\mu^{(n)}$,则 $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$

- 有限维分布完全由初始分布和一步转移概率所确定

证明： (1) 由全概率公式

$$P(X_n = j) = \sum_i P(X_0 = i)\ P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_i P(X_0 = i)\ p_{ij}^{(n)}$$

(2) 由乘法公式

$$P(X_{n_1} = i_1, \ldots X_{n_k} = i_k)$$

$$= P(X_{n_1} = i_1) P(X_{n_2} = i_2 \mid X_{n_1} = i_1) \ldots$$

$$P(X_{n_k} = i_k \mid X_{n_1} = i_1, \ldots X_{n_{k-1}} = i_{k-1})$$

$$= P(X_{n_1} = i_1) p_{i_1 i_2}^{(n_2 - n_1)} \ldots p_{i_{k-1} i_k}^{(n_k - n_{k-1})}$$

例1：设$\{X_n, n\geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的时齐Markov链，一步转移矩阵为：

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
\end{array}
\qquad
P = \begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}
$$

初始分布$P\{X_0 = i\} = \dfrac{1}{3},\ i = 0,1,2$

试求：

(1) $P\{X_0 = 0, X_2 = 1, X_4 = 1\}$;

(2) $P\{X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0 \mid X_0 = 0\}$

(3) $P\{X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0\}$

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

解：

$$P^{(2)} = P^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{2} & \frac{3}{16} \\ \frac{3}{16} & \frac{9}{16} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$(1) P\{X_0 = 0, X_2 = 1, X_4 = 1\}$$

$$= P(X_0 = 0)\ p_{01}^{(2)} p_{11}^{(2)} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{5}{96}$$

$$(2)\ P\{X_2 = 1, X_4 = 1, X_5 = 0 \mid X_0 = 0\}$$

$$= p_{01}^{(2)} p_{11}^{(2)} p_{10} = \frac{5}{16} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{5}{128}$$

(3) $P(X_2=1)$

$$=P(X_0=0)p_{01}^{(2)}+P(X_0=1)p_{11}^{(2)}+P(X_0=2)p_{21}^{(2)}$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{5}{16}+\frac{1}{2}+\frac{9}{16})=\frac{11}{24}$$

$$P\left\{X_2=1,X_4=1,X_5=0\right\}=P\left\{X_2=1\right\}p_{11}^{(2)}p_{10}$$

$$=\frac{11}{24}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{192}$$

例2：设$\{X_n, n \geq 0\}$是具有三个状态0,1,2的时齐Markov链，一步转移矩阵为：

$$P\{X_0 = 0\} = P\{X_0 = 1\} = \frac{1}{2}$$

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

试求：

(1) $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_3 = 1\}$;

(2) $P\{X_3 = 1, X_1 = 1 \mid X_0 = 0\}$

(3) $P\{X_3 = 1\}$

(3) $P\{X_0 = 0 \mid X_3 = 1\}$

解:

$$P^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{16} & \frac{7}{16}\end{bmatrix}\qquad P^3=\begin{bmatrix}0 & \frac{7}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{7}{16} & \frac{3}{32} & \frac{15}{32}\\ \frac{3}{32} & \frac{45}{64} & \frac{13}{64}\end{bmatrix}$$

$$(1) P\{X_0=0,X_1=1,X_3=1\}$$

$$=P(X_0=0)\ p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{8}=\frac{7}{16}$$

$$(2)\ \ P\{X_3=1,X_1=1\,|\,X_0=0\}=p_{01}p_{11}^{(2)}=\frac{7}{8}$$

解:

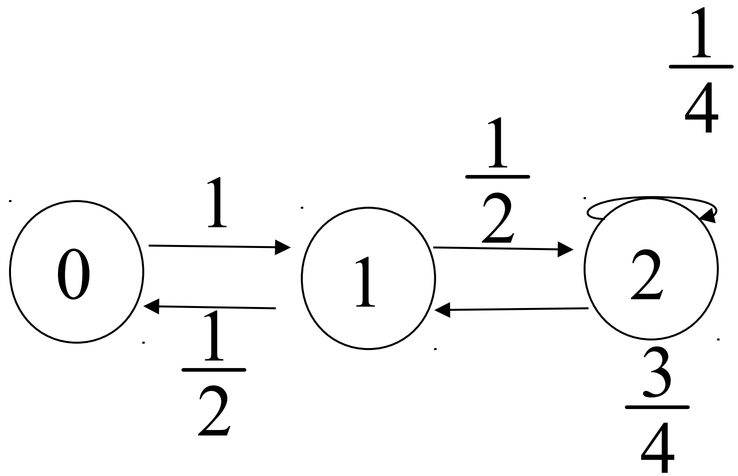
$$(3)P\{X_3=1\}=P(X_0=0)p_{01}^{(3)}+P(X_0=1)p_{11}^{(3)}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{32}=\frac{31}{64}$$

$$(4)P\{X_0=0\mid X_3=1\}=\frac{P\{X_3=1\mid X_0=0\}P(X_0=0)}{P(X_3=1)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}p_{01}^{(3)}}{\frac{31}{64}}=\frac{28}{31}$$

也可不计算P^2, P^3，根据状态转移图和C－K方程：



$$p_{11}^{(2)} = p_{10}p_{01} + p_{12}p_{21} = \frac{7}{8}$$

$$p_{01}^{(3)} = p_{01}p_{11}^{(2)} = \frac{7}{8}$$

$$p_{11}^{(3)} = p_{12}p_{22}p_{21} = \frac{3}{32}$$

例：淘宝网上有5家店卖同一种产品．设每位购买此种产品的顾客独立地任选一家网店购买。问经过5名顾客购买后，恰有3个网店被购买过的概率？

解：以X_n表示第$n+1$个顾客购买后被购买过的网店数目．那么$\{X_n\}$是以$1,2,3,4,5$为状态的MC，转移概率

$$p_{ii} = i/5 = 1 - p_{i,i+1}$$

所求概率为$p_{13}^{(4)}$.

$$P=\begin{pmatrix}1/5 & 4/5 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/5 & 3/5 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4/5 & 1/5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$P^2=\begin{pmatrix}0.04 & 0.48 & 0.48 & 0 & 0\\ 0 & 0.16 & 0.60 & 0.24 & 0\\ 0 & 0 & 0.36 & 0.56 & 0.08\\ 0 & 0 & 0 & 0.64 & 0.36\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

因此$p_{13}^{(4)}=\sum_{i=1}^{5}p_{1i}^{(2)}p_{i3}^{(2)}$

$=0.04\times 0.48+0.48\times 0.60+0.48\times 0.36=0.48$

§3　常返和暂留

问题：

1.从一个状态出发是不是一定能够在有限时间内返回该状态？

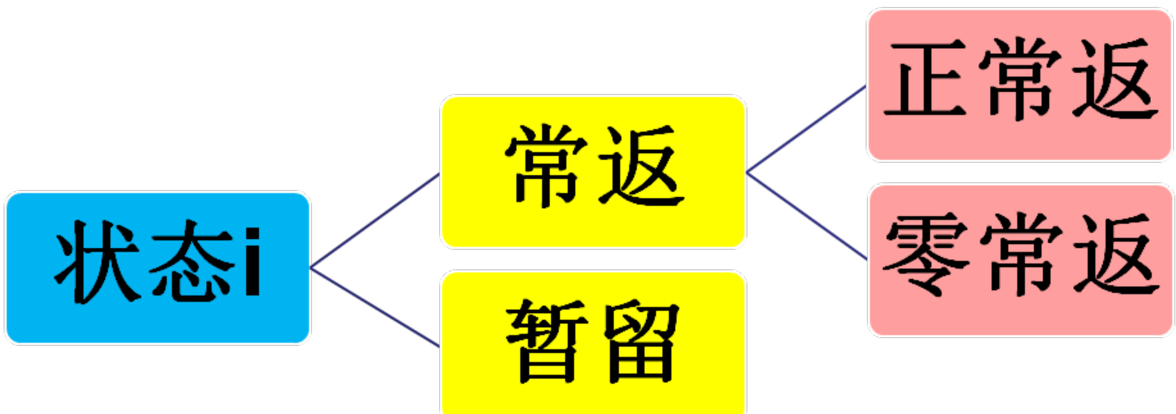
（常返，暂留）

2. 如果能够返回，那么平均返回时间（平均回转时）一定有限吗？

（正常返，零常返）

3.如果能够返回，那么平均返回时间的精确值是多少？

（平均回转时）（平稳分布）



一、常返和暂留

定义：

$$\tau_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\} ----- i\text{的首中时}$$

（约定$\min\varnothing = \infty$）

$$\text{状态}i\begin{cases}\text{常返：} & P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) = 1\\ \text{暂留：} & P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) < 1\end{cases}$$

$$P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$$

$$\Downarrow$$

i常返：从i出发以概率1在有限时间内能返回i

i暂留：从i出发以正概率不再返回状态i

$$\Uparrow$$

$$P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) < 1 \Longleftrightarrow P\{\tau_i = \infty \mid X_0 = i\} > 0$$

二、正常返和零常返

$$P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i) = 1 \Leftrightarrow P\{\tau_i = \infty \mid X_0 = i\} = 0$$

$$E(\tau_i \mid X_0 = i)\begin{cases} < +\infty \\ = +\infty \end{cases}$$

若i常返，定义

$$\mu_i = E(\tau_i \mid X_0 = i) \text{-----} i\text{的平均回转时}$$

$$i\text{常返}\begin{cases}\text{正常返：} & \mu_i < \infty \\ \text{零常返：} & \mu_i = \infty\end{cases}$$

i正常返：从i出发不但以概率1在有限时间内返回状态i，而且平均回转时有限

i零常返：从i出发虽然以概率1在有限时间内返回状态i，但平均回转时无限

三、如何确定？ ** 从定义出发 **

★ 注： ** 可根据 §4 定理出发计算 **

$P(\tau_i < \infty \mid X_0 = i)$和$\mu_i$的计算：

令 $$f_{ij}^{(n)} = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

---从i出发第n步首次击中j的概率

$$f_{ij} = P(\tau_j < \infty \mid X_0 = i)$$

---从i出发能击中j的概率

则 $$\boxed{f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}}$$

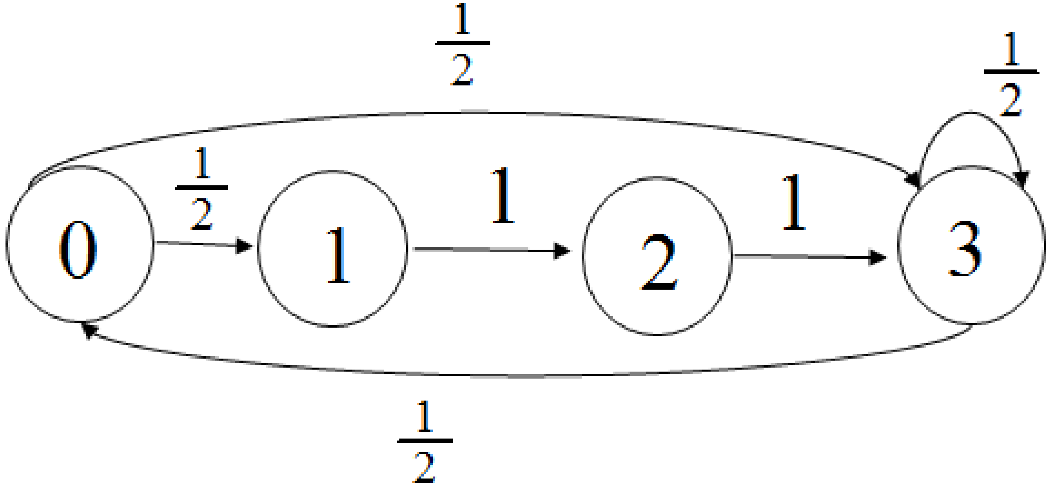
$$\therefore i\text{常返} \Leftrightarrow f_{ii}=1$$

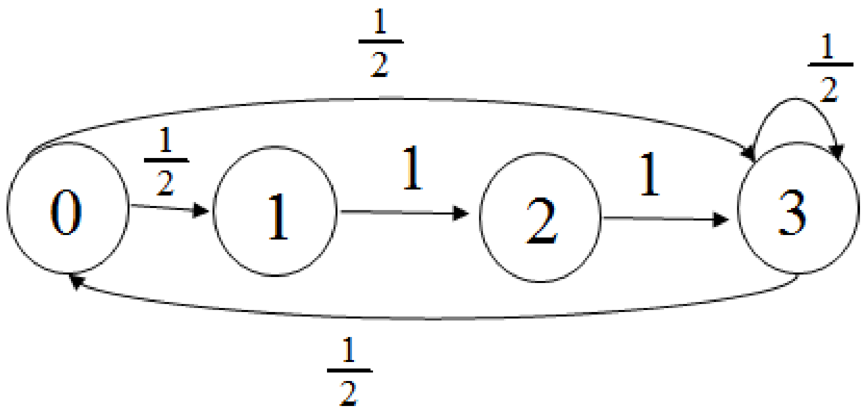
若i常返，则 $$\boxed{\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}}$$

例1. 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，$I=\{0,1,2,3\}$，

其一步转移矩阵$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$，

讨论状态0和3的常返性。





解：先考虑状态0,

$$f_{00}^{(1)}=0,$$

$$f_{00}^{(2)}=p_{03}p_{30}=1/4,$$

$$f_{00}^{(3)}=p_{03}p_{33}p_{30}=1/8,$$

当$n\geq 4$时，

$$f_{00}^{(n)}=p_{03}p_{33}^{n-2}p_{30}+p_{01}p_{12}p_{23}p_{33}^{n-4}p_{30}$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$\therefore f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=1$$

$\therefore$ 0是一个常返态

进一步地：

$$\mu_0=\sum_{n=2}^{\infty}n\frac{1}{2^n}+\sum_{n=4}^{\infty}n\frac{1}{2^{n-2}}=4$$

$\therefore$ 0是正常返态

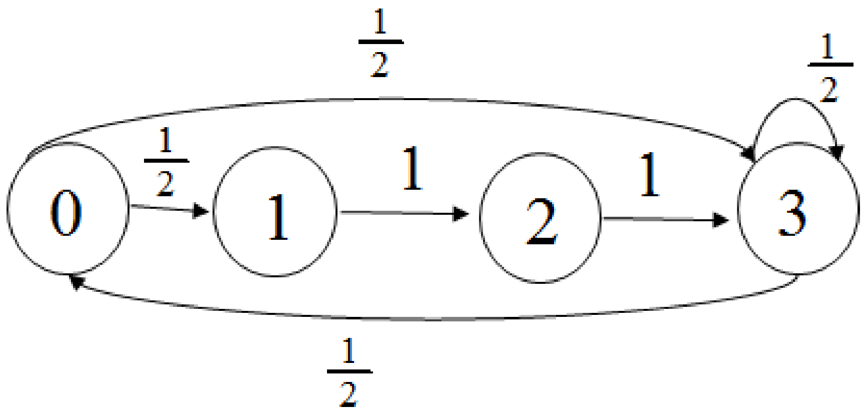
当$|x|<1$时，$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n\right)'$

$$= \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 4$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{3}{2}$$

$$\sum_{n=4}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{5}{2}$$



解：再考虑状态3,

$$f_{33}^{(1)}=1/2,$$

$$f_{33}^{(2)}=p_{30}p_{03}=1/4,$$

$$f_{33}^{(3)}=0,$$

$$f_{33}^{(4)}=p_{30}p_{01}p_{12}p_{23}=1/4,$$

当$n\geq5$时， $f_{33}^{(n)}=0$

$$\therefore f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}^{(n)}=1$$

$\therefore$ 3是一个常返态

进一步地：

$$\mu_3=1\times\tfrac{1}{2}+2\times\tfrac{1}{4}+4\times\tfrac{1}{4}=2$$

$\therefore$ 3也是正常返态

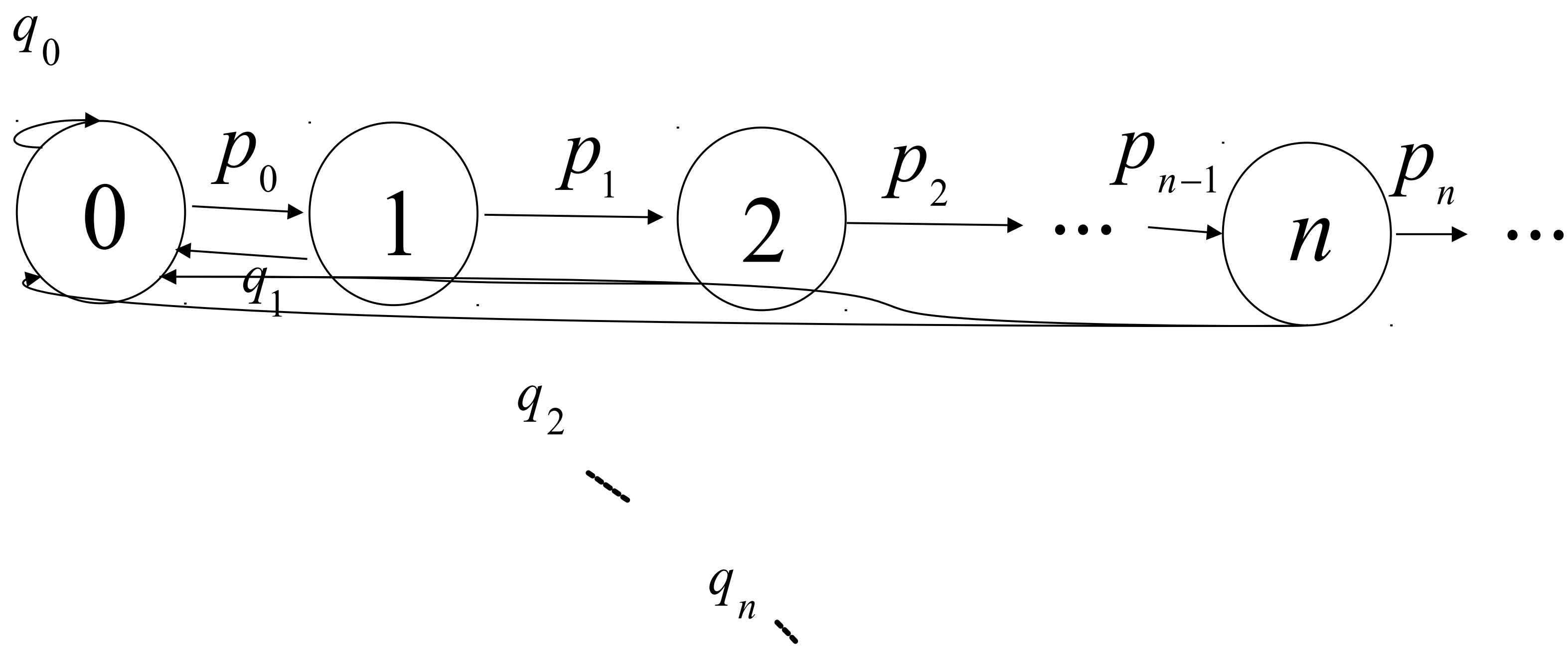
问题：状态1和状态2的常返性又是如何呢？

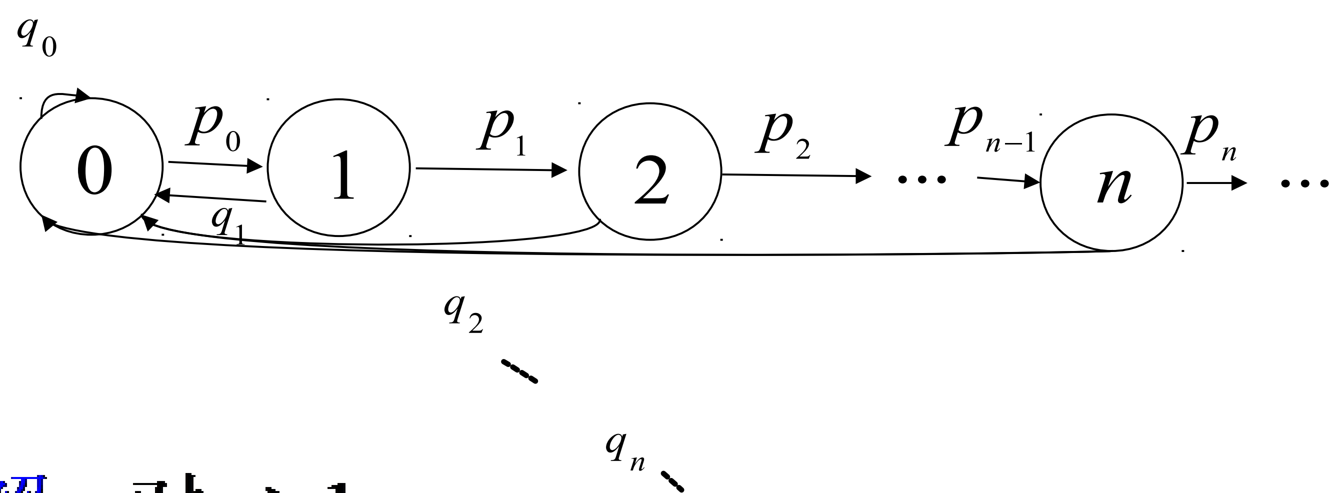
（计算$f_{11}^{(n)}$和$f_{22}^{(n)}$很复杂，需引入新的方法）

例2.（爬梯子模型） 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，

$I=\{0,1,2,\ldots\}$，$p_{i,i+1}=p, p_{i,0}=q_i=1-p_i, 0<p_i<1, i\geq 0.$

讨论状态0的常返性。





解： 对 $n \geq 1$,

$$f_{00}^{(n)} = p_{01}p_{12}\cdots p_{n-2,n-1}p_{n-1,0} = p_0 p_1 \cdots p_{n-2}(1-p_{n-1})$$

令 $u_0 = 1, u_n = p_0 p_1 \cdots p_{n-1}, \forall n \geq 1.$

则 $f_{00}^{(n)} = u_{n-1} - u_n$

$$f_{00} = (1-u_1)+(u_1-u_2)+(u_2-u_3)+\ldots+(u_{n-1}-u_n)+\ldots$$

$$= 1 - \lim_{n\to\infty} u_n.$$ $\therefore$ 0是常返态当且仅当 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

当0是常返态时，

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)}$$

$$= (1-u_1) + (2u_1 - 2u_2) + (3u_2 - 3u_3) + (4u_3 - 4u_4) + \ldots$$

$$= 1 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$\therefore$ 0是正常返态当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$.

问题：如何判断其它状态的常返性？

（很难，但利用互达的关系就容易判断）

例如，● 如果$p_i = e^{-\frac{1}{(i+1)^2}}$，

那么$u_n = e^{-(1+\frac{1}{2^2}+\cdots\frac{1}{n^2})} \to e^{-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}} > 0$,

$\therefore 0$是暂留态

● 如果$p_i = \dfrac{i+1}{i+2}$，　那么$u_n = \dfrac{1}{n+1}$，

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$，　$\therefore 0$是零常返态

- 如果$p_i=\frac{(i+1)^2}{(i+2)^2}$，　那么$u_n=\frac{1}{(n+1)^2}$，

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,\sum_{n=0}^{\infty}u_n<\infty,\quad \therefore 0\text{是正常返态}$$

四、常返和暂留的等价描述

1. i常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

$\Leftrightarrow$ 从i出发以概率1返回状态i无穷多次

2. i暂留 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$

$\Leftrightarrow$ 从i出发以概率0返回状态i无穷多次

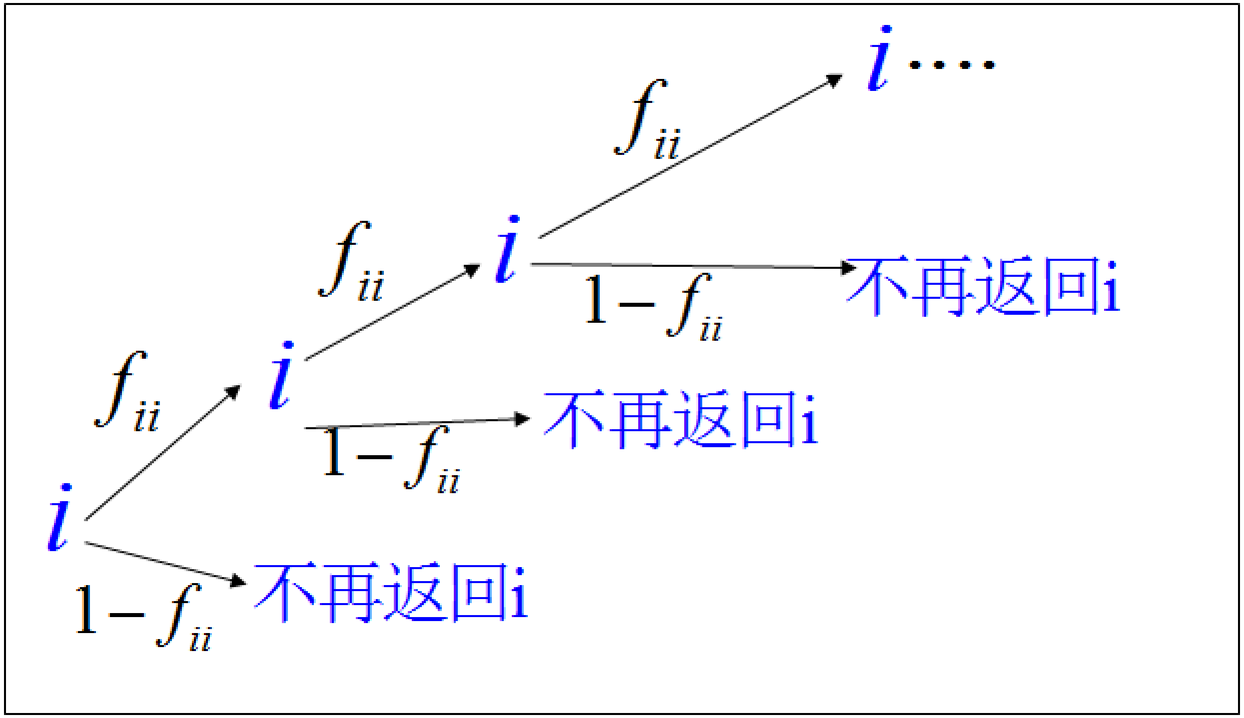
1. 若i常返，则$i \xrightarrow{\text{以概率1返回}} i \xrightarrow{\text{以概率1返回}} i \to ....$

以概率1无限次返回i

$$P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 1$$

N_i表示访问状态i的次数

2. 若i暂留，则$f_{ii}=P(\tau_i<\infty \mid X_0=i)<1$,



∴以概率0无限次返回i

$$P(N_i=\infty \mid X_0=i)=0$$

从i出发访问i的次数（包括0时刻）N_i服从几何分布：

$$P(N_i = n \mid X_0 = i) = f_{ii}^{\,n-1}(1 - f_{ii}), \quad n = 1,2,\ldots$$

$$\therefore E(N_i \mid X_0 = i) = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = E(N_i \mid X_0 = i) = \begin{cases} \infty & \text{若}i\text{常返} \\ \dfrac{1}{1-f_{ii}} < \infty & \text{若}i\text{暂留} \end{cases}$$

证明：令$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{若}X_n = i \\ 0 & \text{若}X_n \neq i \end{cases}$

则$N_i = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n$

$$\therefore E(N_i \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} E(Y_n \mid X_0 = i) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

五、状态空间的划分

可达和互达：

设i，j是两个状态，

(1) i可达j，记为$i \searrow j$：若存在$n \geq 0$，使$p_{ij}^{(n)} > 0$

(2) i,j互达，记为$i \leftrightarrow j$：若$i \searrow j$，且$j \searrow i$

性质：互达是一个等价关系

(1) 自反性：$i \leftrightarrow i$

(2) 对称性：若$i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$

(3)传递性：若$i \leftrightarrow j$，$j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$

- 状态空间可分成不交的互达等价类的并

- 称Markov链$\{X_n\}$不可约：

  如果任意两个状态互达

周期：

定义状态i的周期$d(i)$为集合$\{n\geq 1: p_{ii}^{(n)}>0\}$的最大公约数

（若该集合为空集，则定义d(i)=0)，

即可返回步数的最大公约数。

称i非周期：若$d(i)=1$

称$\{X_n\}$常返（暂留，正常返，零常返，非周期）：
若所有状态常返（暂留，正常返，零常返，非周期）

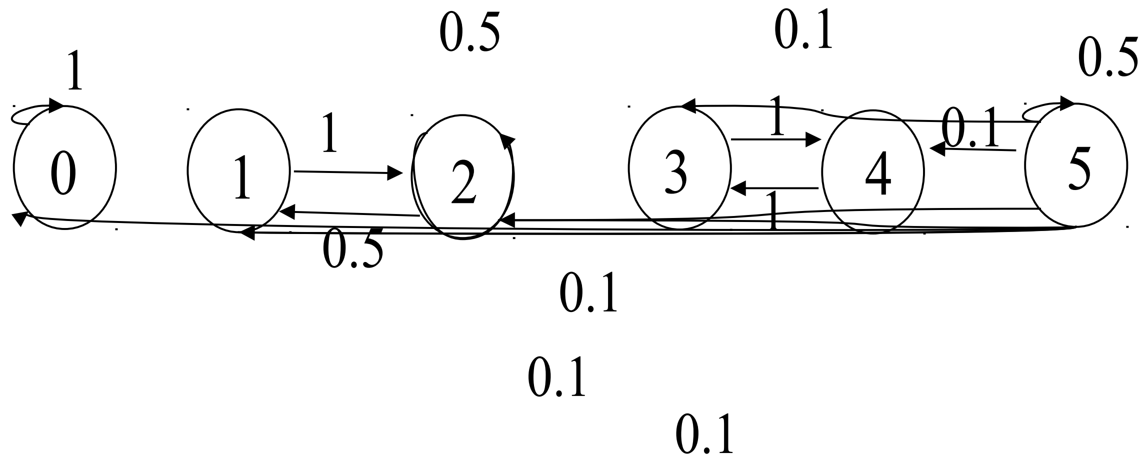
称i遍历：若i非周期正常返

称$\{X_n\}$遍历：若$\{X_n\}$不可约非周期正常返

例3. 设$\{X_n\}$是时齐Markov链，$I=\{0,1,2,3,4,5\}$，其一步转移矩阵

$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0.5 \end{bmatrix},$$

求出所有互达等价类，各状态的周期和常返性。



解：共四个互达等价类:$\{0\},\{1,2\},\{3,4\},\{5\}$

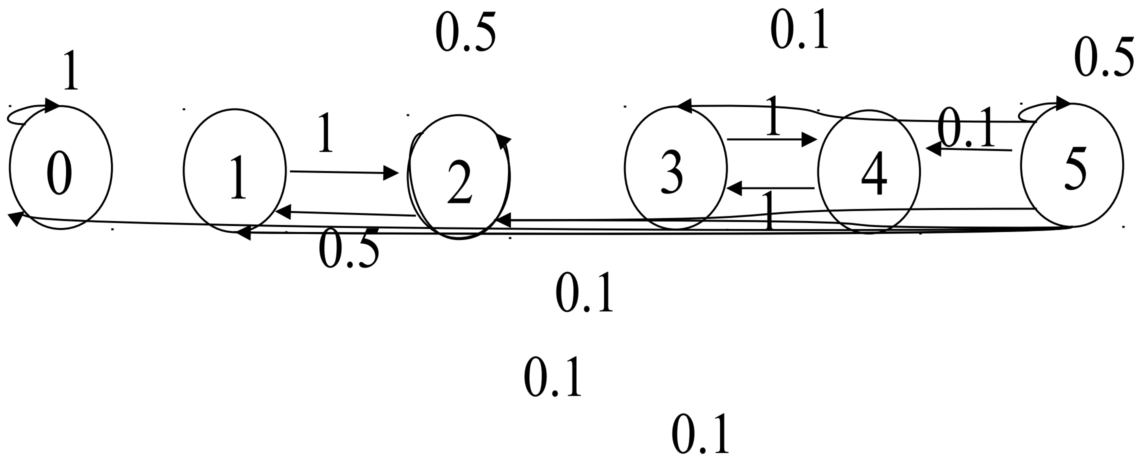
(1).0是吸收态，$d(0)=1$， $\mu_0=1$， $f_{11}^{(1)}=0,$

$$\forall n\ge 2, f_{11}^{(n)} = p_{12}p_{22}^{n-2}p_{21}=0.5^{n-1}, \therefore f_{11}=1,\mu_1=3$$

(2) $p_{11}^{(2)}=p_{12}p_{21}=0.5>0, p_{11}^{(3)}=p_{12}p_{22}p_{21}=0.25>0,\therefore d(1)=1$

(3) $p_{22}>0,\therefore d(2)=1.$ 又$f_{22}^{(1)}=f_{22}^{(2)}=0.5$,$\therefore f_{22}=1,\mu_2=1.5$

所以0，1，2都是非周期正常返态



(4) 因为$p_{33}^{(n)} > 0$当且仅当n是偶数，$\therefore d(3) = 2.$

$\because f_{33}^{(2)} = 1 \therefore f_{33} = 1$且$\mu_3 = 2.$ 同理$d(4) = 2, f_{44} = 1$且$\mu_4 = 2.$

$\therefore$ 3和4都是周期为2的正常返态。

(5) 因为$p_{55} > 0, \therefore d(5) = 1.$

$\because f_{55}^{(1)} = 0.5,\ f_{55}^{(n)} = 0, n \geq 2 \therefore f_{55} = 0.5 < 1$

$\therefore$ 5是非周期的暂留态。

互达等价类的同一性质：

如果$i \leftrightarrow j$，则

(1) $d(i)=d(j)$,

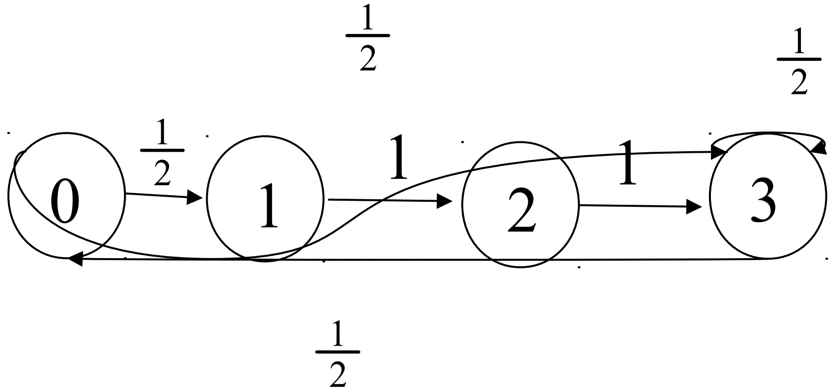
(2) i常返当且仅当j常返

(3) i正常返当且仅当j正常返

互达等价类中各状态具有相同的周期和常返性。

判断一个状态的性质时，可以从它的等价类中找出一个容易判断的状态来判断。

例3. 讨论例1例2中各状态的周期和常返性.

例1 

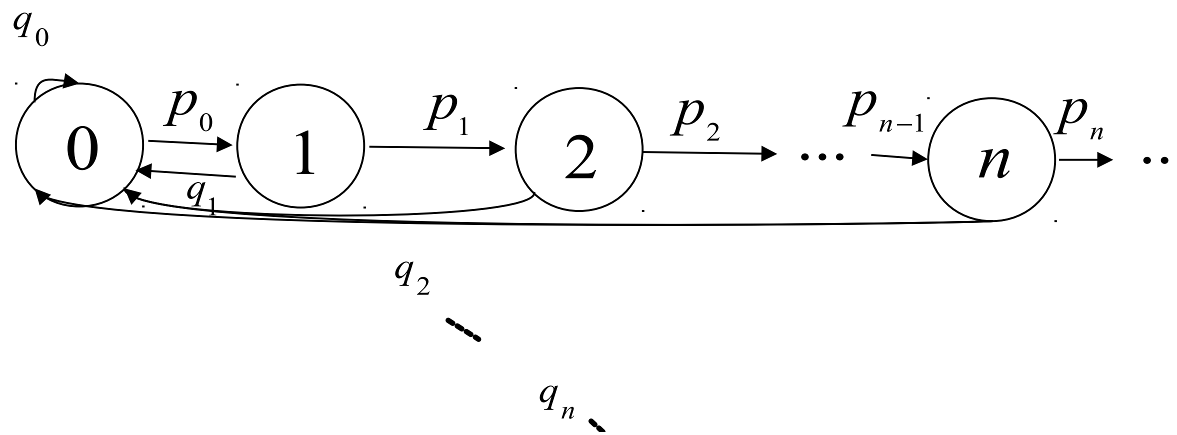
中已算得状态0正常返

$\because p_{33} > 0, \therefore d(3) = 1.$

$\because$ 各状态互达, $\therefore$ 所有状态非周期正常返。

这是一个遍历的Markov链。

例2



$\because p_{00} > 0, \therefore d(0) = 1.$

$\because$ 各状态互达，$\therefore$ 所有状态非周期，并且与0具有相同的常返性。

（1）当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n > 0$ 时，各状态暂留；

（2）当 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \infty$ 时，各状态零常返；

（3）当 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$ 时，各状态正常返。

§4 平稳分布

问题： 在什么样的情况下，初始分布与一步之后的分布相同？

- 设初始分布为$\pi=(\pi_j;\ j\in I)$，则

 一步之后的分布为：

$$P(X_1=k)=\sum_i P(X_0=i)p_{ik}=\sum_i \pi_i p_{ik},\forall k$$

所以初始分布与一步之后的分布相同当且仅当：

$$\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$$

$$\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}, \forall k$$

★ 平稳分布

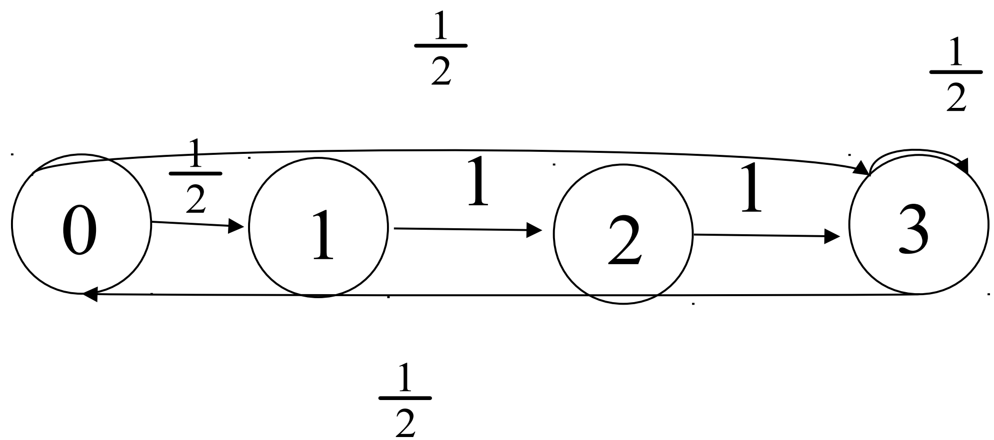
$\{\pi_j; j \in I\}$称为是$\{X_n\}$的平稳分布，如果

(1) $\pi_j \geq 0, \sum_j \pi_j = 1.$

(2) $\pi_k = \sum_i \pi_i p_{ik}, \forall k$

即$\pi = \pi P$

例1. 求上1节例1中Markov链的平稳分布。



解：$I=\{0,1,2,3\}$，

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

设平稳分布$\pi=(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$

则

$$\begin{cases} \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \\ \pi_0=\frac{1}{2}\pi_3 \\ \pi_1=\frac{1}{2}\pi_0 \\ \pi_2=\pi_1 \end{cases}$$

解得$\pi=(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{2})$

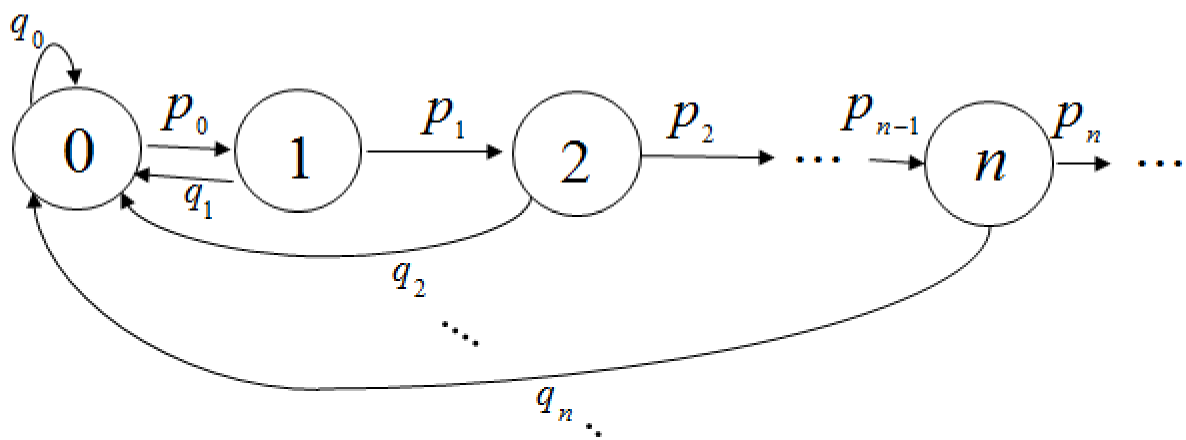
已算得$\mu_0=4$, $\mu_3=2$

恰好$\pi_0=\frac{1}{\mu_0}$, $\pi_3=\frac{1}{\mu_3}$

是否$\pi_1=\frac{1}{\mu_1}$, $\pi_2=\frac{1}{\mu_2}$?

完全正确^_^

例2. 求上1节例2中Markov链的平稳分布。

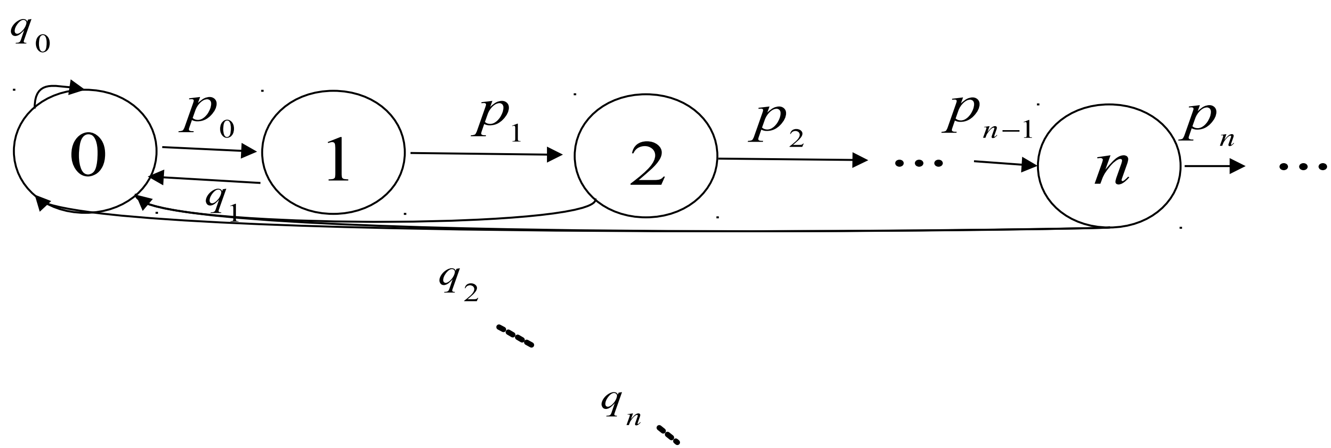


解：设平稳分布π，则 $\pi_1 = p_0\pi_0, \pi_2 = p_1\pi_1,$

$\ldots\pi_n = p_{n-1}\pi_{n-1}\cdots$ 得$\pi_n = p_0 p_1 \ldots p_{n-1}\pi_0 = u_n\pi_0$

又$\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n = 1$ $\therefore$平稳分布存在当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty}u_n < \infty$

即当且仅当$\{X_n\}$正常返



当$\{X_n\}$正常返时，有唯一的平稳分布

$$\pi_i = \frac{u_i}{\sum_{n=0}^{\infty} u_n}, i = 0,1,\ldots$$

已算得$\mu_0 = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$，恰好$\pi_0 = \dfrac{1}{\mu_0}$，实际上$\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}$，$\forall i$

★ 不可约Markov链的性质

设$\{X_n\}$不可约，则

（1）存在平稳分布当且仅当$\{X_n\}$正常返，

此时平稳分布π唯一且$\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}$

（2）若$\{X_n\}$遍历，则对任何i，j，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$

(极限与出发点无关）

（3）若状态空间I有限，则$\{X_n\}$一定正常返。

状态空间I的子集C称为是闭集：

若对于任意状态$i \in C$和任意状态$j \notin C$，$p_{ij} = 0$

即C是封闭的，从C中出发将永远不会跑出C外

性质：若C是闭集，$P(X_0 \in C) = 1$, 则

$$P(X_n \in C,\ \forall n) = 1,$$

此时$\{X_n\}$可以看成是状态空间C上的Markov链

性质：

(1)如果i的互达等价类不闭，则i暂留

（如果i常返，则i的互达等价类是闭的）

(2)如果i的互达等价类是有限闭集，则i正常返

(3)如果j暂留或零常返，则对所有i，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$

★ 有限Markov链的状态分解：

$$I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

这里C_1，$C_2,\ldots,C_k$是所有闭的互达等价类，T是余下的状态

则（1）C_1，$C_2,\ldots,C_k$中各状态正常返，T中各状态暂留

(2) 如果X_0在某个C_i中，则此Markov链永不离开C_i。

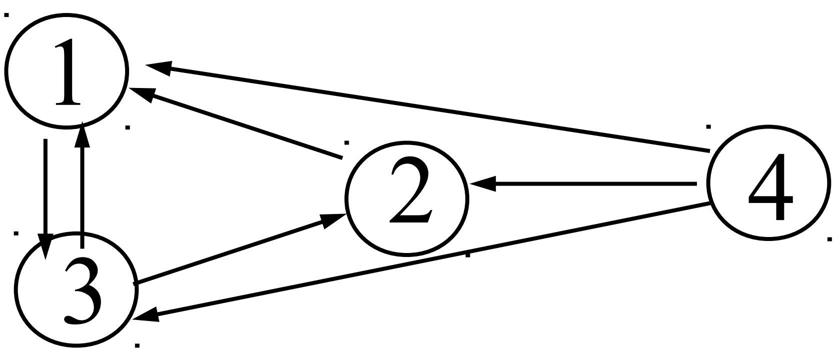
可以把$\{X_n\}$限制在C_i上得到一个不可约正常返的Markov链

(3) 如果$X_0 \in T$，则此Markov链最终会进入某个C_i并将不再离开

例3. 设$\{X_n\}$状态空间$I=\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵

讨论各状态的周期和常返性，

计算正常态的平均回转时。

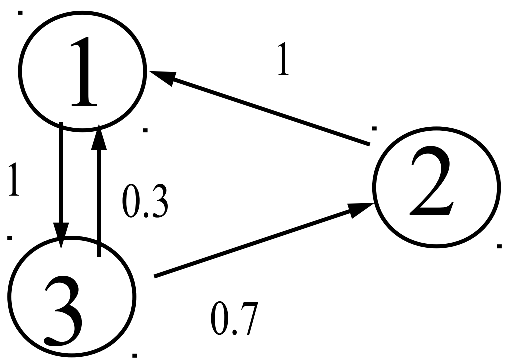


$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

有两个等价类$C_1=\{1,2,3\}$和$\{4\}$，其中C_1是闭的，$\{4\}$不闭

故1,2,3正常返，4暂留，1,2,3非周期，$d(4)=0$

把$\{X_n\}$限制在C_1上得到一个遍历Markov链，状态空间为C_1

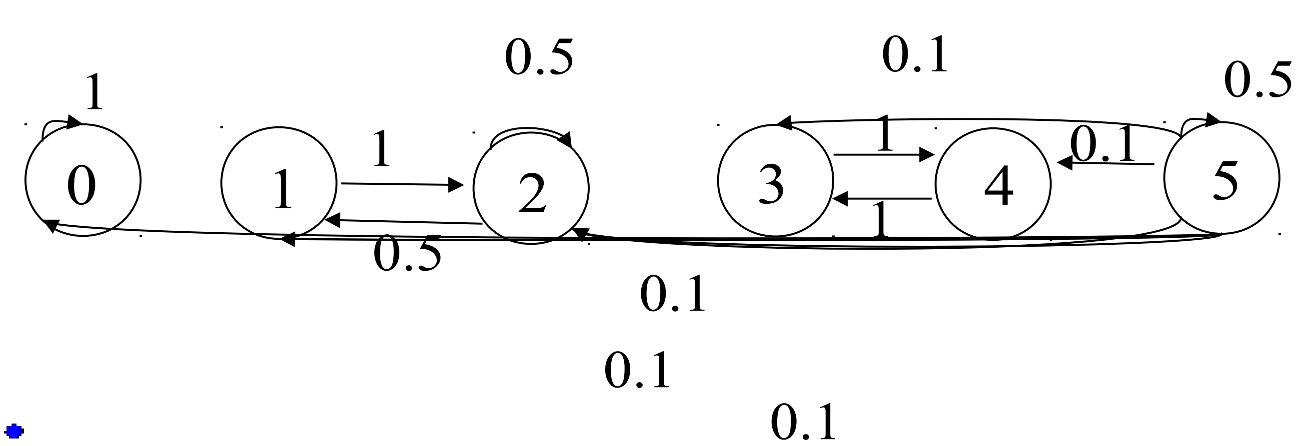


转移矩阵为$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 \end{bmatrix}$

平稳分布$(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{10}{27},\frac{7}{27},\frac{10}{27})$

$$\therefore(\mu_1,\mu_2,\mu_3)=(\frac{27}{10},\frac{27}{7},\frac{27}{10})$$

例4. 讨论上节例3各状态性质，计算正常态的平均回转时。



解：

有四个等价类$C_1=\{0\}, C_2=\{1,2\}$，$C_3=\{3,4\}$和$\{5\}$

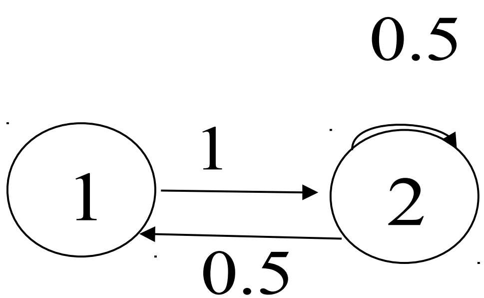
只有$\{5\}$不闭。$\therefore$ 0,1,2,3,4正常返，5暂留，

0,1,2,5非周期,3,4周期为2

0是吸收态,$\therefore \mu_0=1$

把$\{X_n\}$限制在C_2上得到一个遍历Markov链，

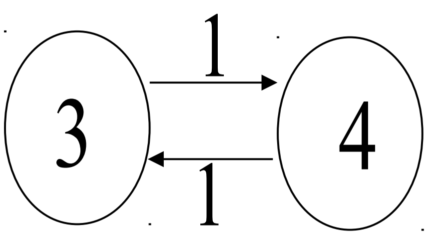
状态空间为C_2



平稳分布$(\pi_1, \pi_2) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

$\therefore (\mu_1, \mu_2) = (3, \frac{3}{2})$

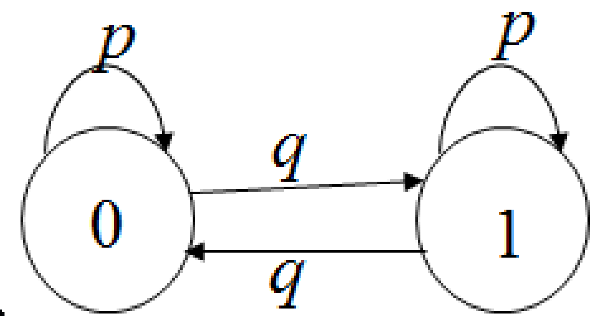
把$\{X_n\}$限制在C_3上得到一个不可约正常返周期为2的Markov链，状态空间为C_3.



平稳分布$(\pi_3, \pi_4) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\therefore (\mu_3, \mu_4) = (2, 2)$

例5. 在0–1传输问题中，对$i,j=0,1, \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$存在吗？如存在，计算之。



方法一：$p_{00}^{(n)} = P(X_n = 0 | X_0 = 0)$

$$=P(\text{前n次传输中误码偶数次}) = \sum_{k\text{偶数}} \binom{n}{k} q^k p^{n-k}$$

$$= \frac{1}{2}[\sum_k \binom{n}{k} q^k p^{n-k} + \sum_k \binom{n}{k} (-q)^k p^{n-k}]$$

$$= \frac{1}{2}[(p+q)^n + (-q+p)^n] = \frac{1}{2}[1+(2p-1)^n]$$

（1）若$0 < p < 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{2}$，$\forall i$，$j$

（极限与出发点无关）

（2）若$p = 1$，则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 1, \lim\limits_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = 0$

（极限与出发点有关）

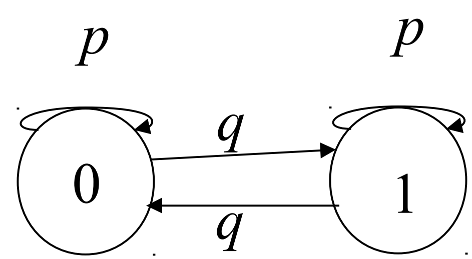
（3）若$p = 0$，则$\forall i$，j，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$不存在

方法二：

(1) 若$0<p<1$，则$\{0,1\}$是闭的等价类，所以$\{X_n\}$正常返

又$d(0)=1, \therefore \{X_n\}$遍历

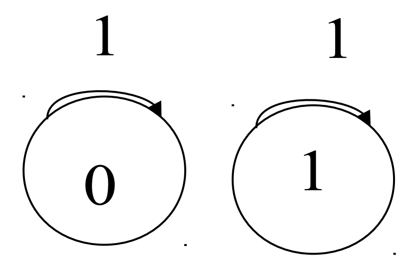
平稳分布$(\pi_0,\pi_1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$



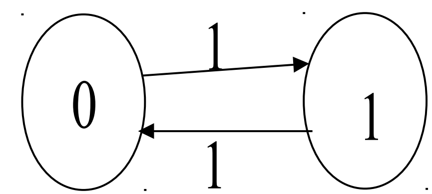
$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\frac{1}{2}$，$\forall i, j$

（2）若$p=1$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 1$,

$\lim\limits_{n\to\infty} p_{10}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_{01}^{(n)} = 0$



（3）若$p=0$, 则$\forall i$, j, $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$不存在



例 6 ：设有 6 个球 (2 个红球 , 4 个白球) 随机平分放入甲 ,

乙两个盒中 . 今每次从两盒中各任取一球并进行交换 .

用 X_0 表示开始时甲盒中的红球数 , X_n 表示经 n 次交换

后甲盒中的红球数 .

$$P(X_0=1, X_2=1, X_4=0), P(X_2=2)$$

(1) 求此马氏链的初始分布 ,

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n=2)$ 存在吗？如存在，计算之。

(5) 求甲盒中红球数变没的平均时间间隔

解：(1) $P(X_0=0)=C_4^3/C_6^3=1/5$,

$P(X_0=1)=C_2^1C_4^2/C_6^3=3/5$,

$P(X_0=2)=C_2^2C_4^1/C_6^3=1/5$,

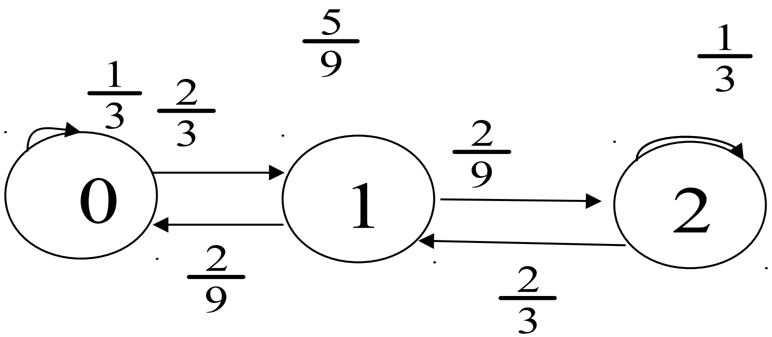
$$\text{即}:X_0\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1/5 & 3/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

$$(2)P=\begin{array}{c}0\\1\\2\end{array}\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 0\\ 2/9 & 5/9 & 2/9\\ 0 & 2/3 & 1/3\end{bmatrix}$$

$$
(3)P^{(2)} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{bmatrix} 7/27 & 16/27 & 4/27 \\ 16/81 & 49/81 & 16/81 \\ 4/27 & 16/27 & 7/27 \end{bmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
& P(X_0 = 1, X_2 = 1, X_4 = 0) \\
& = P(X_0 = 1) p_{11}^{(2)} p_{10}^{(2)} \\
& = 3/5 \times 49/81 \times 16/81 = 2352/32805 = 0.072
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& P(X_2 = 2) \\
& = P(X_0 = 0) p_{02}^{(2)} + P(X_0 = 1) p_{12}^{(2)} + P(X_0 = 2) p_{22}^{(2)} \\
& = 1/5 \times 4/27 + 3/5 \times 16/81 + 1/5 \times 7/27 = 1/5 = 0.2
\end{aligned}
$$



(4) $d(0)=1$，不可约，$\therefore$ 遍历

设平稳分布 $\pi=(\pi_0,\pi_1,\pi_2)$，

$$\text{方程组}\begin{cases}\pi_0=\frac{1}{3}\pi_0+\frac{2}{9}\pi_1\\ \pi_1=\frac{2}{3}\pi_0+\frac{5}{9}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_2\\ \pi_2=\frac{2}{9}\pi_1+\frac{1}{3}\pi_2\\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\pi_0=\frac{1}{5}\\ \pi_1=\frac{3}{5}\\ \pi_2=\frac{1}{5}\end{array}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} P(X_n=2)=\pi_2=\frac{1}{5}$$

(5) 所求为 $\mu_0=\frac{1}{\pi_0}=5$

例：欧亚洲绝大多数汽车年保险金由所谓好-坏系统确定．以$s_i(k)$表示上年处在状态i且上年有k次理赔要求的参保人在今年的状态．设此人理赔次数服从参数为λ的泊松分布，那么此人相继状态构成一个MC，转移概率

$$p_{ij}=\sum_{k:s_i(k)=j}a_k,\ \text{这里} a_k=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

当前状态		下一状态			
状态	年保险金	0 个理赔	1 个理赔	2 个理赔	2 个以上理赔
1	200	1	2	3	4
2	250	1	3	4	4
3	400	2	4	4	4
4	600	3	4	4	4

$$\text{则} P=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 1-a_0-a_1-a_2 \\ a_0 & 0 & a_1 & 1-a_0-a_1 \\ 0 & a_0 & 0 & 1-a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & 1-a_0 \end{pmatrix}$$

问题： 如果$\lambda=1/2$, 求参保人平均所付的年保险金.

解： $$P=\begin{bmatrix} 0.6065 & 0.3033 & 0.0758 & 0.0144 \\ 0.6065 & 0.0000 & 0.3033 & 0.0902 \\ 0.0000 & 0.6065 & 0.0000 & 0.3935 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.6065 & 0.3935 \end{bmatrix}$$

算得：

$$\pi_1=0.3692,\quad \pi_2=0.2395,\quad \pi_3=0.2103,\quad \pi_4=0.1809$$

所以, 所付的平均年保险费是

$$200\pi_1+250\pi_2+400\pi_3+600\pi_4=326.375$$

★ 平稳分布的意义

设初始分布为平稳分布$\pi=\{\pi_1,\pi_2,\ldots\}$,则

(1) 所有X_n的分布均为π,

(2) 对$k\geq 2,(X_{n_1},\ldots,X_{n_k})$的分布仅与时间差

$n_2-n_1,\ldots,n_k-n_{k-1}$有关，与时间起点$n_1$无关。

当初始分布为平稳分布时，Markov链为严平稳过程。

证：（1）X_n的分布为$\pi P^n=(\pi P)P^{n-1}=\pi P^{n-1}$与$X_{n-1}$的分布相同，所以所有$X_n$的分布均为$\pi$.

（2）$P(X_{n_1}=i_1,X_{n_2}=i_2\ldots,X_{n_k}=i_k)$

$=P(X_{n_1}=i_1)p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)}p_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)}\ldots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$

$=\pi_{i_1}p_{i_1,i_2}^{(n_2-n_1)}p_{i_2,i_3}^{(n_3-n_2)}\ldots p_{i_{k-1},i_k}^{(n_k-n_{k-1})}$

Markov 链的应用— PageRank

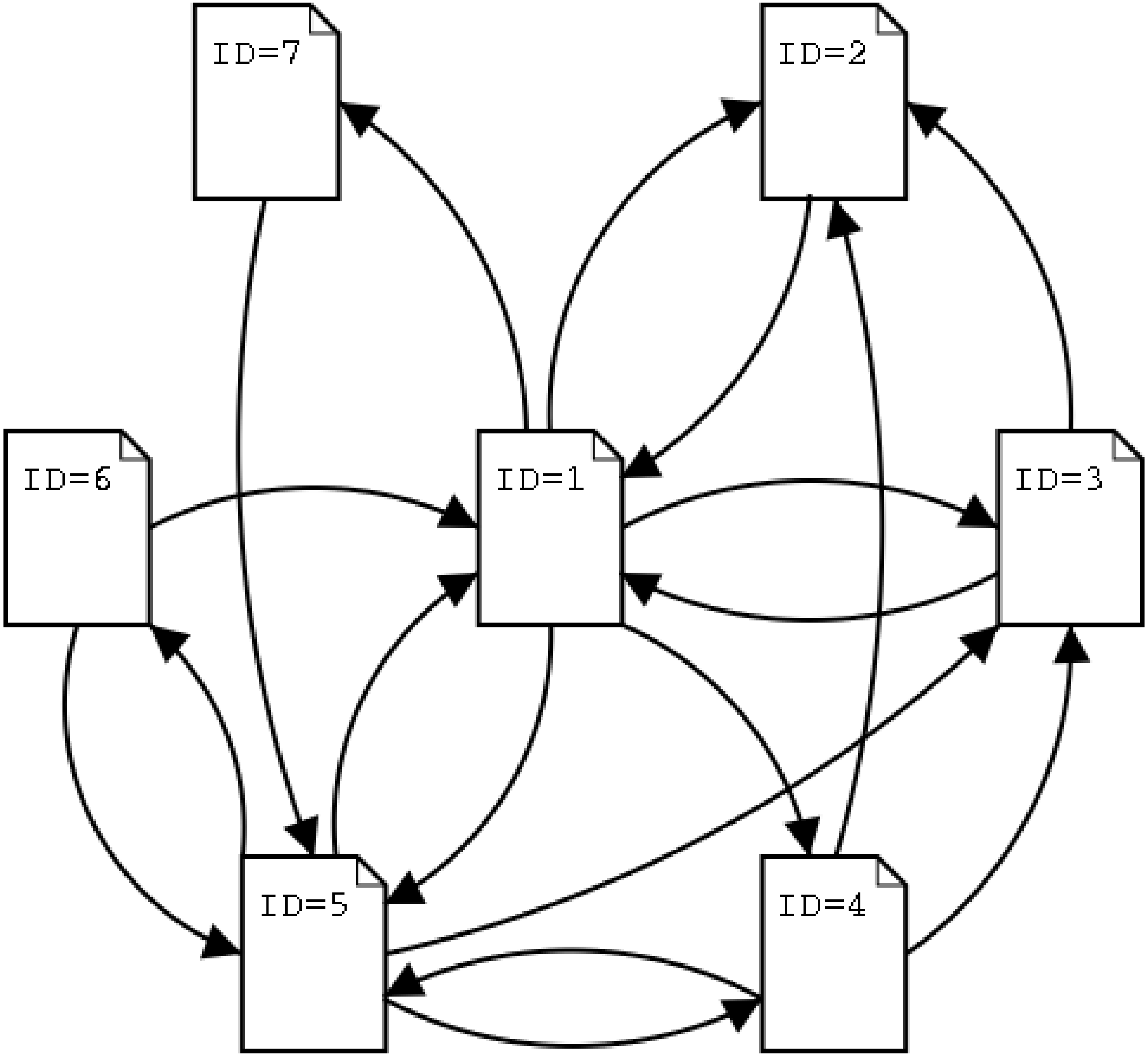
PageRank，就是网页排名，又称网页级别，是一种由搜索引擎根据网页之间相互的超链接计算的网页排名技术， Google 用它来体现网页的重要性。是 Google 的创始人拉里 · 佩奇和谢尔盖 · 布林在斯坦福大学发明了这项技术，并最终以拉里 · 佩奇（ Larry Page ）之姓来命名。

Markov 链的应用 --PageRank

PageRank 是基于「从许多优质的网页链接过来的网页，必定还是优质网页」的回归关系，来判定所有网页的重要性。

提高 PageRank 的要点，大致有3个:

1. 反向链接数 (单纯的意义上的受欢迎度指标)
2. 反向链接是否来自推荐度高的页面 (有根据的受欢迎指标)
3. 反向链接源页面的链接数 (被选中的几率指标)


ID=7
ID=2
ID=6
ID=1
ID=3
ID=5
ID=4

链接源I D	链接目标 1
1	2,3,4,5, 7
• 2	1
• 3	1,2
• 4	2,3,5
• 5	1,3,4,6
• 6	1,5
• 7	5

访问网络可看成是在这些网络上的随机游动,每次都等可能地访问所在网页的友情连接,若用X_n表示第n次访问的网页,则$\{X_n\}$是Markov链,转移矩阵P=

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其PageRank满足：(1)$\pi_j > 0, \sum \pi_j = 1$

(2)$\pi_j = \sum \pi_i p_{ij}, \forall j$

恰好为平稳分布．解得：

$\pi = (0.3035, 0.1661, 0.1406, 0.1054, 0.1789, 0.0447, 0.0607)$

所以网络的PageRank评价排名为：

(1)$\pi_1 = 0.3035$

(2)$\pi_5 = 0.1789$

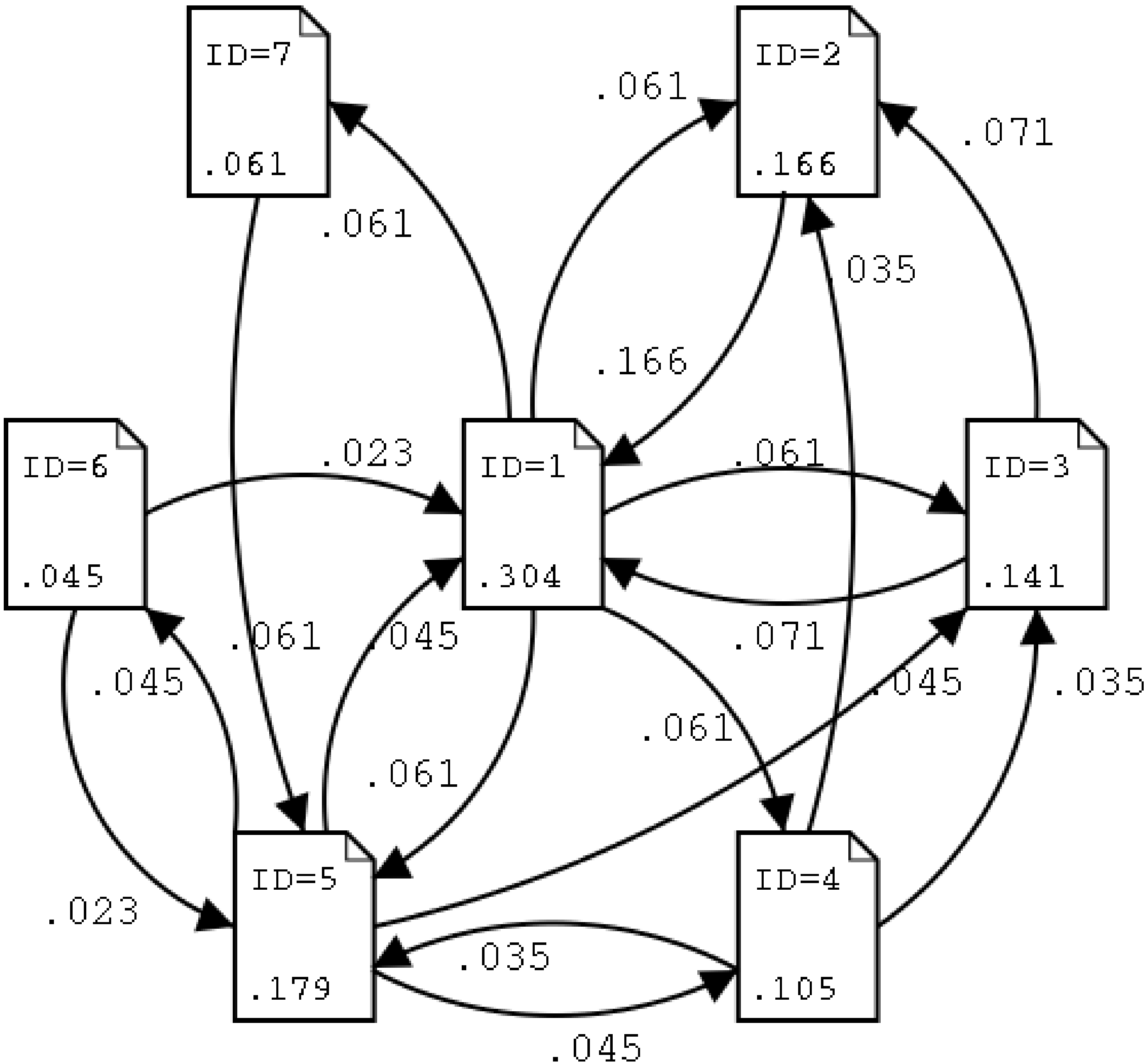
(3)$\pi_2 = 0.1661$

(4)$\pi_3 = 0.1406$

(5)$\pi_4 = 0.1054$

(6)$\pi_7 = 0.0607$

(7)$\pi_6 = 0.0447$


ID=7
.061
ID=2
.166
ID=6
.045
ID=1
.304
ID=3
.141
ID=5
.179
ID=4
.105
.061
.061
.071
035
.166
.023
.061
.071
.061
.045
.045
.045
.035
.061
.061
.023
.035
.045

§5 吸收概率与平均吸收时间

有限Markov链的状态分解：

$$I = T \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

这里T是所有暂留态，

C_1，$C_2,\ldots,C_k$是所有闭的常返的互达等价类

•如果$X_0 \in T$，则最终会进入某个C_i并将不再离开

问题: 1. 进入$C_1,\ldots,C_k$的概率分别是多少?

2.进入$C=C_1 \cup \cdots \cup C_k$的平均时间是多少?

对状态i，令

$$T_i = \min\{n \geq 0 : X_n = i\}$$

为首次访问状态i的时刻，

对I的子集A，令

$$T_A = \min\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

为首次访问子集A的时刻，

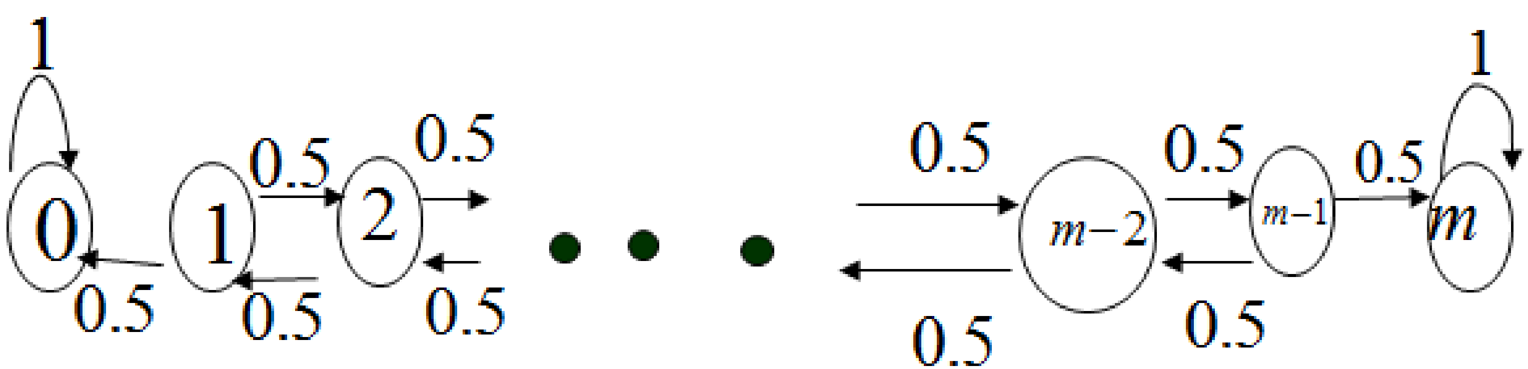
约定 $\min \varnothing = \infty$.

例. 赌徒输光问题:

甲乙两人玩抛硬币游戏，一开始甲带有i元钱，乙带有$m-i$元钱，独立重复抛一枚均匀硬币，若第n次出现正面，则甲赢1元，否则甲输1元。游戏一直到某人输光结束。计算(1)甲输光的概率；(2)游戏平均持续时间.

解：以S_n表示抛n次硬币后甲所拥有的钱数。则$\{S_n\}$是一时齐Markov链，状态空间是$\{0,1,\ldots,m\}$,一步转移概率为:

$$p_{00}=p_{mm}=1, p_{i,i+1}=p_{i,i-1}=0.5, 0<i<m.$$



$$令 h_i = P(输光 \mid S_0 = i) = P(T_0 < \infty \mid S_0 = i), 则 h_0 = 1, h_m = 0,$$

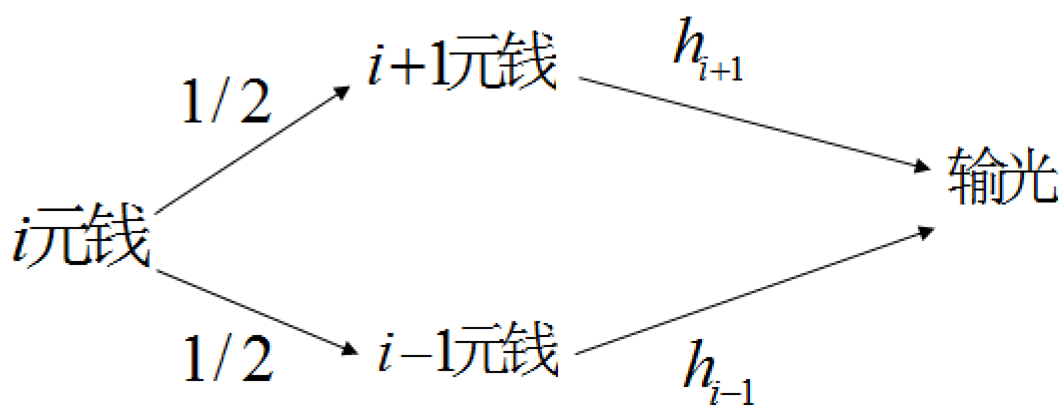
$$h_i = \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = i) P(输光 \mid S_1 = j, S_0 = i)$$

$$= \sum_j p_{ij} P(输光 \mid S_0 = j) = \tfrac{1}{2}(h_{i+1} + h_{i-1}), 0 < i < m.$$

$$即 h_{i+1} - h_i = h_i - h_{i-1}, 0 < i < m.$$

所以$\{h_i\}$是等差数列

$$所以 h_i = \frac{m-i}{m}.$$



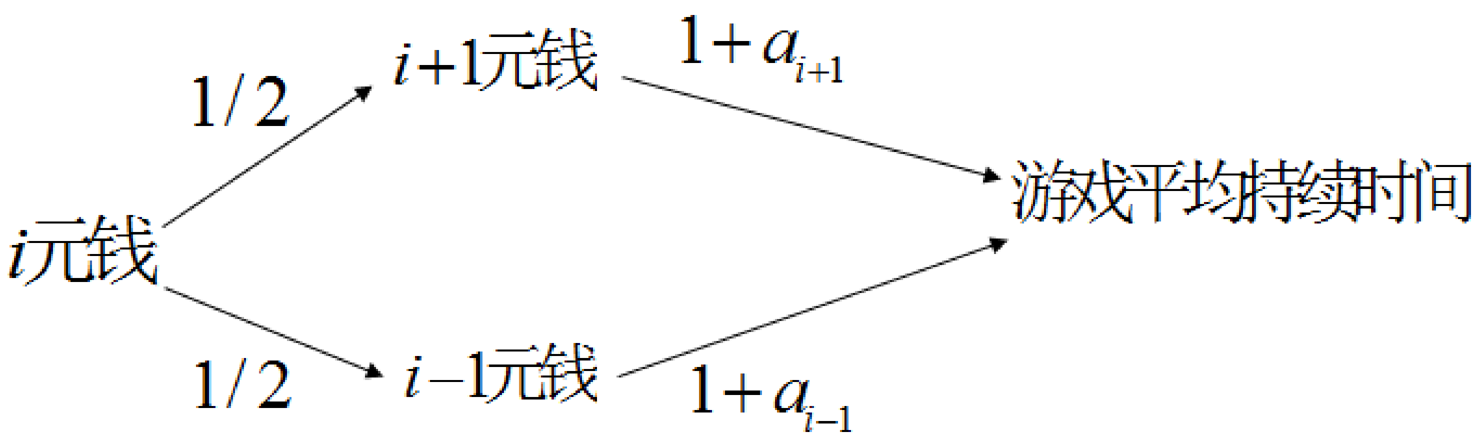
令 $T = T_{\{0,m\}}$ 为游戏结束时间

令 $a_i = E(T \mid S_0 = i)$, 则 $a_0 = 0, a_m = 0$

对 $0 < i < m$

$$a_i = \sum_j P(S_1 = j \mid S_0 = i) E(T \mid S_1 = j, S_0 = i)$$

$$= \sum_j p_{ij}[1 + E(T \mid S_0 = j)] = 1 + \tfrac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i-1})$$



已得到$a_0 = 0, a_m = 0$

$$a_i = 1 + \tfrac{1}{2}(a_{i+1} + a_{i-1}), 0 < i < m$$

令$d_i = a_i - a_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$

则$d_{i+1} = d_i - 2$

$$a_i = d_1 + \ldots + d_i = id_1 - i(i-1)$$

$$\because a_m = 0, \therefore d_1 = m - 1$$

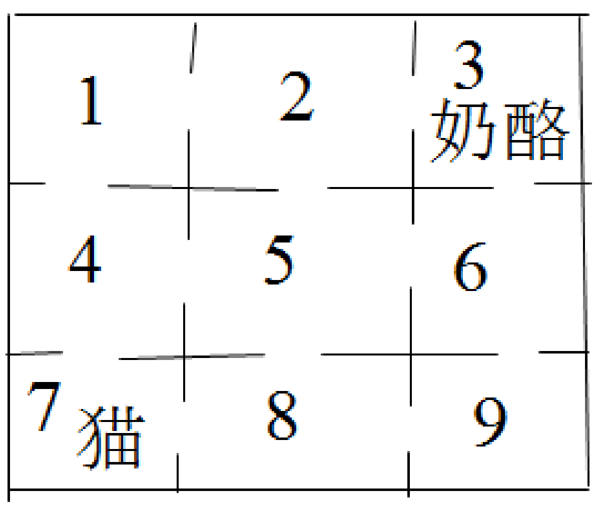
$$a_i = i(m-i), \quad \forall i$$

上例中有两个吸收态0和m，我们需要计算的是最终被状态0吸收的概率，以及最终被吸收态集合$\{0, m\}$吸收的平均时间.

当Markov链有多个闭集时，我们可以利用Markov性和全概率公式, 利用1步分析法建立方程，计算被某一个特定闭集吸收的概率. 也用类似的方法来计算平均吸收时间.

例. 迷宫中的老鼠：

如下图，假设猫不动，老鼠从2号房间出发在迷宫中作随机游动：如果n时老鼠呆在$i(i\neq 3,7)$号房间，则下一时刻老鼠等可能地移到相邻的房间（即有门与i号房间相连的房间）；一旦老鼠到达7号房间，就被猫吃掉；一旦到达3号房间，老鼠就吃掉奶酪。计算老鼠在吃掉奶酪前被猫吃掉的概率？



解：一旦老鼠跑到3号或7号房间，我们就认为老鼠将永远呆在那个房间。用X_n表示n时老鼠所在的位置。则$\{X_n\}$是一时齐Markov链，状态空间是$\{1,2,\ldots,9\}$，3和7是两个吸收态。所求的就是从2出发最终被7吸收的概率。

令$h_i = P(T_7 < \infty \mid X_0 = i)$,

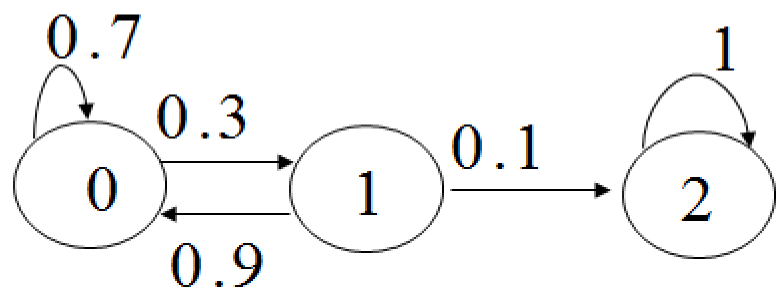
则$h_7 = 1, h_3 = 0$.

利用对称性，$h_1 = h_5 = h_9 = \dfrac{1}{2}$.

利用Markov性和全概率公式:

$$h_2 = \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}h_5 + \frac{1}{3}h_3 = \frac{1}{3}.$$

例：以X_n表示某人打n次游戏后所处的游戏等级. 2是最高等级.设$\{X_n\}$是Markov链，状态转移图如下。设$X_0=0$, 计算到达等级2的平均时间.



解：令$a_i=E(T_2\mid X_0=i)$

则$a_2=0$,

$$a_0=1+0.7a_0+0.3a_1,\quad a_1=1+0.9a_0+0.1a_2,$$

解得$a_0=130/3, a_1=40$.

$\therefore$到达等级2的平均时间是$a_0=130/3$.

例：以X_n（单位：元）表示n时刻某股票的价格.设$\{X_n\}$是Markov链，状态空间$I=\{1,2,3,4,5\}$，

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

已知$P(X_0=2)=P(X_0=3)=1/2$，计算：

(1)股票价格在涨到4元前不曾跌到1元的概率；

（2）股票价格到达4元的平均时间.

解：(1)所求概率为$P(T_4<T_1)$,这个值与到达1或4之后的过程没有关系. 所以可将1和4看成吸收态.

令$h_i=P(T_4<T_1 \mid X_0=i)$,则$h_1=0, h_4=1$,

$$h_2=\frac{1}{3}h_1+\frac{1}{3}h_2+\frac{1}{3}h_3,$$

$$h_3=\frac{1}{4}h_2+\frac{1}{4}h_3+\frac{1}{2}h_4$$

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

解得：$h_2=\frac{2}{5}$, $h_3=\frac{4}{5}$

$$\therefore P(T_4<T_1)=\sum_{i=1}^{4}P(X_0=i)h_i=\frac{1}{2}h_2+\frac{1}{2}h_3=\frac{3}{5}.$$

(2) 所求概率为$E(T_4)$,这个值与到达4之后的过程没有关系. 所以可将4看成吸收态. 令$a_i = E(T_4 \mid X_0 = i)$,则

$$a_4 = 0, a_1 = 1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2,$$

$$a_2 = 1 + \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3,$$

$$a_3 = 1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{4}a_3 + \frac{1}{2}a_4$$

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/8 & 4/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

解得: $a_1 = \dfrac{23}{2}, a_2 = \dfrac{19}{2}$, $a_3 = \dfrac{9}{2}$

$$\therefore E(T_4) = \sum_{i=1}^{4} P(X_0 = i)E(T_4 \mid X_0 = i) = \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_3 = 7.$$