第五讲.

$\underline{L}[\underline{u}] = \lambda \underline{u}$. $\underline{u} \neq 0$

*. 只有当特征向量 $\underline{u}$ 作线性系统L的输入时，系统的输出才具有与输入相同这一重要特征.

特征向量可以看作是表征系统特征的向量.

*. $\underline{A}\underline{u} = \lambda \underline{u}$

$\underline{A}$: Hermitian 矩阵 $\underline{A} = \underline{U}\underline{\Sigma}\underline{U}^H$. 特征值为实数.

$(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{u} = 0$

存在非零解 $\underline{u} \neq 0$ 的唯一条件是 $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$

*. 同一特征值重复的次数称为特征值的多重度.

*. 若特征值具有非零解 $\underline{x} \neq 0$. 则标量 λ 必然使 $n \times n$ 矩阵 $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ 奇异

(1). 求出所有使矩阵 $\underline{A} - \lambda \underline{I}$ 奇异的标量 λ : 特征值

(2). 对每个 λ. 求出所有满足 $(\underline{A} - \lambda \underline{I})\underline{x} = 0$ 的非零向量 $\underline{x}$. 与 λ 对应的特征向量.

*. 定义:

令 $\underline{A}$ 是一个 $n\times n$ 矩阵. 则 n 阶多项式

$$p(x) = \det(\underline{A} - x\underline{I}) = \begin{vmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-x & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-x \end{vmatrix}$$

$$= p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$

称为矩阵 $\underline{A}$ 的特征多项式:

$$p(x) = \det(\underline{A} - x\underline{I}) = 0$$

称为矩阵 $\underline{A}$ 的特征方程.

特征方程的根称为矩阵 $\underline{A}$ 的特征值.

*. 矩阵特征值与矩阵的行列式和迹的关系

$$tr(\underline{A}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

$$\det(\underline{A}) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$$

令 $\underline{s}(t) = [s_1(t), s_2(t) \cdots s_n(t)]^T$ 表示 n 个信号组成的向量.

且 $\underline{R}_s = E[\underline{s}(t)\underline{s}^H(t)]$ 表示信号 $\underline{s}(t)$ 的相关矩阵.

对角线元素之和: $\Rightarrow$ n 个信号功率之和

特征值之和

考虑矩阵 $\underline{\underline{A}}$ 的n次多项式.

$$f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^n + c_1\underline{\underline{A}}^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\underline{\underline{A}} + c_n\underline{\underline{I}}$$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda\underline{u}$ $\quad \underline{\underline{A}}^2\underline{u} = \lambda\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda^2\underline{u}$ $\quad \cdots\cdots \quad \underline{\underline{A}}^n\underline{u} = \lambda^n\underline{u}$

$$(\underline{\underline{A}}^n + c_1\underline{\underline{A}}^{n-1} + \cdots + c_n\underline{\underline{I}})\underline{u}$$

$$= (\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n)\underline{u}$$

即: $\quad f(\underline{\underline{A}})\underline{u} = f(\lambda)\underline{u}$

$f(\lambda)$ 为矩阵多项式 $f(\underline{\underline{A}})$ 的特征值.

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_n$$

矩阵论. 2020.9.29

第7章 特征分析

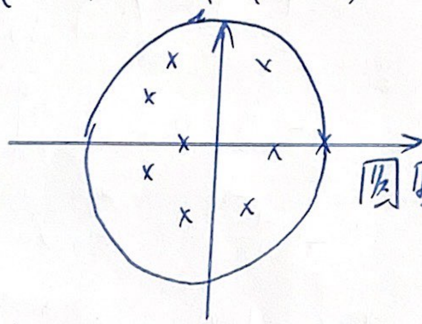
7.2.2 特征向量

7.2.3

矩阵的谱：所有特征值的集合，$\lambda_1, \lambda_2 \cdots \lambda_n$

谱半径：$\rho(A) = \max(|\lambda_i|)$ 特征值中绝对值最大的值

(非负实数)



圆里包含所有特征值

矩阵多项式：

$$f(\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}}^n + C_1\underline{\underline{A}}^{n-1} + \cdots + C_{n-1}\underline{\underline{A}} + C_n\underline{\underline{I}}$$

$$f(\lambda) = \lambda^n + C_1\lambda^{n-1} + \cdots + C_{n-1}\lambda + C_n$$

$$e^{\underline{\underline{A}}} \sim e^{\lambda}$$

$$e^{\underline{\underline{A}}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{A}} + \frac{1}{2!}\underline{\underline{A}}^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\underline{\underline{A}}^i$$

$$f(\lambda) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}\lambda^i = e^{\lambda}$$

7.2.4. 7.2.5 仅需了解

7.3. Cayley Hamilton 定理及其应用

特征多项式 $P(x) = \det(\underline{\underline{A}} - x\underline{\underline{I}})$

$$= p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0$$ 是使矩阵 $\underline{\underline{A}}$ 零化的多项式

$$P(\underline{\underline{A}}) = p_n\underline{\underline{A}}^n + p_{n-1}\underline{\underline{A}}^{n-1} + \cdots + p_1\underline{\underline{A}} + p_0\underline{\underline{I}} = \underline{\underline{0}}$$

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ 中用的比较多

$\underline{\underline{A}}^N$ 用的比较少（随着计算机发展）

方程两边同时乘以 A^{-1}

$$P_n \underline{A}^{n-1} + P_{n-1}\underline{A}^{n-2} + \cdots + P_1 \underline{I} + P_0 \underline{A}^{-1} = 0$$

$$\underline{A}^{-1} = -\frac{1}{P_0}\left(P_n \underline{A}^{n-1} + P_{n-1}\underline{A}^{n-2} + \cdots + P_1 \underline{I}\right)$$ 正指数计算

未知量：系数.（特征多项式求） 例 7.3.2 P417

7.7.3 A^{731}.

先解方程组. 求系数.

7.4 特征分解的典型应用 （信号处理用很多）

7.4.1 标准正交变换

$\underline{x}$ 随机向量 $m\times 1$ 维. 均值 $\underline{m}_x$. 协方差矩阵 $\underline{C}_x$.
相关矩阵 $\underline{R}_x$

$\underline{x}_0 = \underline{x} - \underline{m}_x$ 去掉直流信号

$\underline{R}_{x_0} = \underline{C}_x$ （复共轭对称）

$\underline{C}_x = \underline{U}_x \underline{\Sigma}_x \underline{U}_x^H$ 特征分解

$\underline{W} = \underline{U}_x^H \underline{x}_0 = \underline{U}_x^H(\underline{x} - \underline{m}_x)$ 线性变换

$\underline{m}_w = 0$（均值为0） 因此. $\underline{C}_w = \underline{R}_w = E\{\underline{W}\,\underline{W}^H\}$

$= \underline{U}_x^H \underline{R}_{x_0} \underline{U}_x$

$= \underline{U}_x^H \underline{C}_x \underline{U}_x$

$= \underline{U}_x^H \underline{U}_x \underline{\Sigma}_x \underline{U}_x^H \underline{U}_x$

$= \underline{\Sigma}_x$

有色噪声白化.
变成对角阵

非对角 → 对角

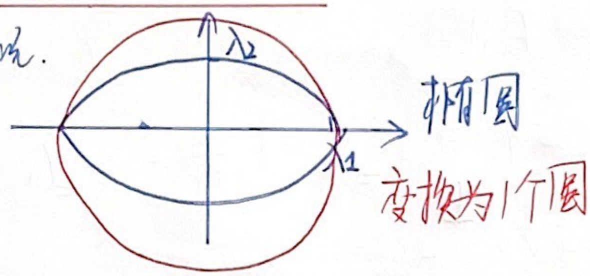
例：匹配滤波. 常见：高斯白噪声

实际：因为相关，先做白化. 再做匹配滤波处理

逆向图变换（等对角化）

标准正交变换：线性变换 $\underline{U}_x^H \underline{x}_0$ 的自相关矩阵为对角矩阵，但不是单位矩阵。

二维情况.



各向同性分布成逆向分布

$$\underline{y} = \underline{\underline{\Sigma}}_x^{-1/2} \underline{w} \qquad \underline{R}_y = E\{\underline{y}\underline{y}^H\} = \underline{\underline{I}}$$

$$= (\underline{\underline{\Sigma}}_x)^{-1/2} \underline{U}_x^H (\underline{x} - \underline{m}_x)$$

得到单位阵有什么好处？ m个相关随机过程分量白化为具有单位方差的白噪声

对x作自适应滤波，收敛速度比较快

7.4.3 离散 K-L 变换

随机矢量：$\underline{x} = [x_1, x_2 \cdots x_M]^T$ 零均值，随机向量 ｛维数大，元素间相关

用小维数的 $\underline{w}$ 表示 $\underline{x}$

线性变换：

$$\underline{W} = \underline{Q}^H \underline{x} \qquad \underline{Q}: R_x = \underline{Q}\,\underline{\underline{\Sigma}}\,\underline{Q}^H$$

M×1

正交矩阵　相关矩阵　特征向量

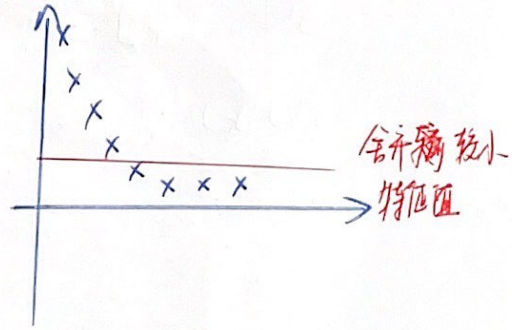
原随机矢量x可以用线性正交变换矩阵Q表示成w的线性组合

为了减少变换后的系数w的个数

只使用w的前m个系数 $w_1 \dots w_m$ 逼近随机矢量x

$$\underline{x} = \underline{Q}\,\underline{W} = \sum_{i=1}^{M} \underline{q}_i w_i$$

$$\hat{\underline{x}} \approx \sum_{i=1}^{m} \underline{q}_i w_i$$



$$\underbrace{\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_m}\cdots \geq \lambda_M$$

误差：$\hat{\underline{e}} = \underline{x} - \hat{\underline{x}} = \sum_{i=1}^{M} \underline{q}_i w_i - \sum_{i=1}^{m} \underline{q}_i w_i = \sum_{i=m+1}^{M} w_i \underline{q}_i$

7.4.4. 主成份（分量）分析

信号处理中常用到 → 信息冗余

统计相关

冗余：$x_1, x_2 \cdots x_p$：每个指标是唯一的、正交的

互相耦合：解相关

分类识别算法：几千个指标 ⟶ 提取出彼此正交的 k 个新变量

正交变换：新特征相互正交

方式：
$$\tilde{x} = Q^H x = \sum_{i=1}^{p} q_i x_i \approx \sum_{i=1}^{k} q_i x_i$$

$k < p$. 具有较大功率的 k 个性质的指标可以称为原始性质指标的主要成分

7.5 广义特征分解：了解概念

$$Au = \lambda u$$

广义：$Au = \lambda B u$

$\det(A - \lambda B)$

7.6.1 Rayleigh 商定义及性质

A：Hermitian 矩阵

目标函数：$R(x) = \dfrac{x^H A x}{x^H x}$ → max → min

x：待选择向量

假设信号 $r(t) = B \alpha s(t) + n(t)$

经信道后有衰减

$\underbrace{x^H B \alpha S\, S^H \alpha B^H}_{A} x$

滤波器 x^H. 对 r 滤波，输出 SNR 最大.

$$\frac{|x^H B\alpha s|^2}{|x^H n|^2} = \frac{|x^H B \alpha S|^2}{x^H \underbrace{n n^H}_{\text{白噪声 } \sigma^2} x} = \frac{x^H A x}{\sigma^2 x^H x} = SNR(x)$$

→ 模型 ?

对 $\underline{A}$ 作特征值分解：

Rayleigh—Ritz 定理：

$$\max_{x\neq 0}\frac{\underline{x}^H\underline{A}\underline{x}}{\underline{x}^H\underline{x}}=\max_{\underline{x}^H\underline{x}=1}\frac{\underline{x}^H\underline{A}\underline{x}}{\underline{x}^H\underline{x}}=\lambda_{max}.\ 若\ \underline{A}\underline{x}=\lambda_{max}\underline{x}$$

$$\min_{x\neq 0}\frac{\underline{x}^H\underline{A}\underline{x}}{\underline{x}^H\underline{x}}=\min_{\underline{x}^H\underline{x}=1}\frac{\underline{x}^H\underline{A}\underline{x}}{\underline{x}^H\underline{x}}=\lambda_{min}.\ 若\ \underline{A}\underline{x}=\lambda_{min}\underline{x}$$

$$\underline{x}=\underline{q}_{max}=\frac{\lambda_{max}}{1}$$

$$\underline{x}=\underline{q}_{min}=\lambda_{min}$$

信号确定性： $x=s(t)$

随机： 相关矩阵的最大特征值对应的特征向量

匹配滤波

7.7.1 广义 Rayleigh 商

$$R(\underline{x})=\frac{\underline{x}^H\underline{A}\underline{x}}{\underline{x}^H\underline{B}\underline{x}}$$

有色噪声

$\underline{B}$：正定

$\underline{B}$：噪声的相关矩阵. Hermitian 矩阵

先对分母作变量代换：

$$\tilde{\underline{x}}=B^{1/2}\underline{x}\qquad (B^{1/2})^H=B^{1/2}$$

Hermitian 矩阵

特征值开根号. 特征向量不变

$$R(\underline{x})=\frac{\tilde{\underline{x}}^H(\underline{B}^{-1/2})^H\underline{A}\underline{B}^{-1/2}\tilde{\underline{x}}}{\tilde{\underline{x}}^H\tilde{\underline{x}}}$$

$$(\underline{B}^{-1/2})^H\underline{A}\underline{B}^{-1/2}\tilde{\underline{x}}=\lambda\tilde{\underline{x}}\qquad \left\{\begin{matrix}\min\\ \max\end{matrix}\right.$$

最后求广义特征值问题 $\underline{A}\underline{x}=\lambda\underline{B}\underline{x}$

左乘 $\underline{B}^{-1/2}$，

$$\underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{B}^{-1/2}\tilde{\underline{x}}=\lambda\underline{B}^{-1/2}\tilde{\underline{x}}$$

$$\underline{B}^{-1}\underline{A}\underline{x}=\lambda\underline{x}$$