# 第四章　泊松过程与布朗运动

关键词：

独立增量过程

泊松过程

布朗运动

# §1 独立增量过程

定义：对$\forall n$和$\forall t_0 < t_1 < \cdots < t_n$，

$X(t_1)-X(t_0), X(t_2)-X(t_1), \cdots X(t_n)-X(t_{n-1})$

相互独立，称$\{X(t)\}$为独立增量过程

- 在互不重叠的区间上，状态的增量是相互独立

## 独立增量过程的性质：

若$\{X(t), t \geq 0\}$是独立增量过程，且$X(0)=0$，则：

1. $X(t)$的有限维分布函数族可以由增量 $X(t)-X(s)\ (0 \leq s < t)$的分布所确定；

事实上，对任意的$n$及任意的$t_1, t_2, \cdots t_n$，
不妨设$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，则：

$$\left(X(t_1), X(t_2), \cdots X(t_n)\right)$$
$$= \left\{X(t_1) - X(0), \sum_{i=1}^{2}\left(X(t_i) - X(t_{i-1})\right), \ldots, \sum_{i=1}^{n}\left(X(t_i) - X(t_{i-1})\right)\right\}$$

即$\left(X(t_1), X(t_2), \cdots X(t_n)\right)$的分布函数可由：
$$\left(X(t_1) - X(0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})\right)$$
的分布函数确定。

2. 设$D_X(t)$已知，则$C_X(s,t)=D_X\left(min(s,t)\right)$

证明：设$s<t$,则 $C_X(s,t)=Cov[X(s),X(t)]$

$$=Cov\left\{[X(s)-X(0)],[X(t)-X(s)]+[X(s)-X(0)]\right\}$$

$$=Cov\left\{[X(s)-X(0)],[X(t)-X(s)]\right\}+D[X(s)-X(0)]$$

$$=0+D\left[X(s)\right]=D_X(s)$$

同理当$t<s$时,可证得$C_X(s,t)=D_X(t)$

- 若对 $\forall h$ 和 $\forall s < t$,

$$X(t+h) - X(s+h) \overset{d}{=} X(t) - X(s),$$

称 $\{X(t)\}$ 平稳增量过程

- 独立增量+平稳增量=平稳(齐次)独立增量

例.(简单随机游动, 醉汉行走)

甲乙两人游戏,第i次甲赢的钱数为$X_i$,

设$X_1,\ldots,X_n,\ldots$独立同分布,

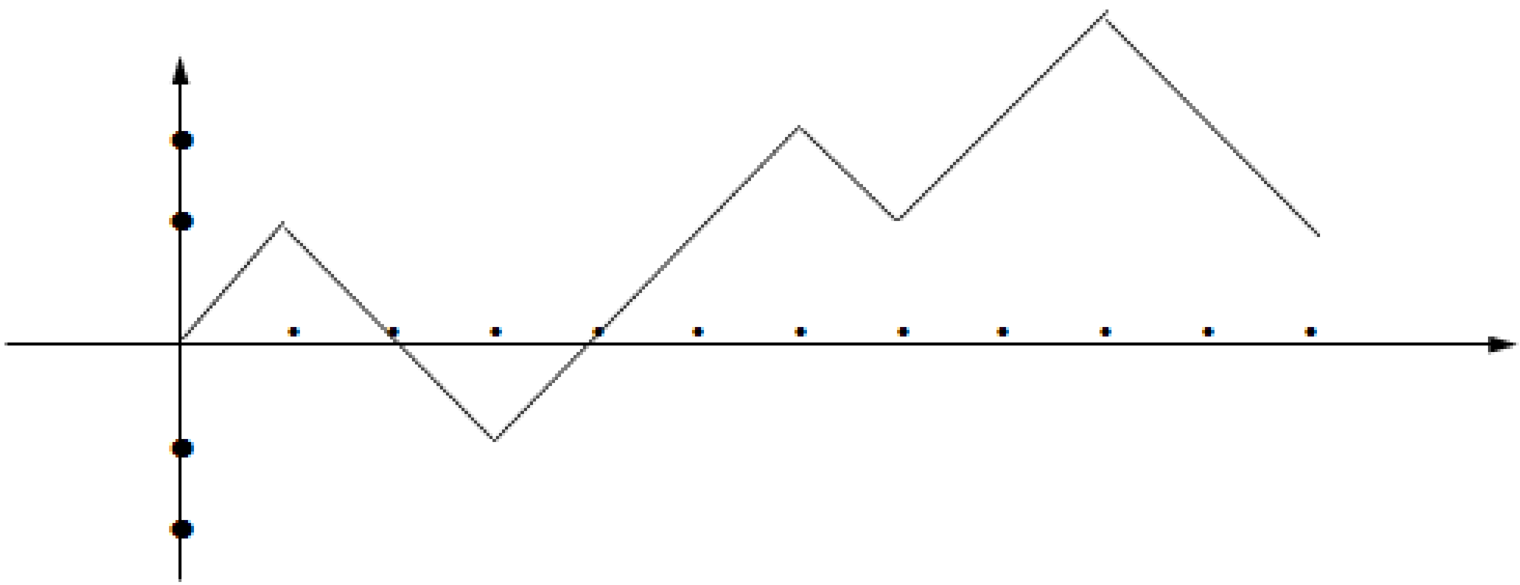
$P(X_i=1)=p$, $P(X_i=-1)=q=1-p$。

设前n盘甲赢的总钱数为$S_n$,求

(1)$S_n$的均值函数和自相关函数;

(2)$S_n$的分布律;

(3)$P\{S_1=1, S_4=2, S_8=2\}$.



解:(1) $\mu_S(n)=ES_n=E\sum_{i=1}^{n}X_i=n(p-q)$,

独立增量过程

$$C_N(n,m)=DS_n=4npq,\quad n\le m$$

$$(2)P(S_n=k)=\binom{n}{\frac{k+n}{2}}p^{\frac{k+n}{2}}q^{\frac{n-k}{2}},$$

$n$与k奇偶性相同,且 $-n\le k\le n$

解:(3)$P\{S_1=1,S_4=2,S_8=2\}$

$$=P\{S_1=1,S_4-S_1=1,S_8-S_4=0\}$$

$$=P\{S_1=1\}P\{S_4-S_1=1\}P\{S_8-S_4=0\}$$

$$=p\times C_3^2p^2q\times C_4^2p^2q^2$$

$$=18p^5q^3$$

# §2 泊松过程

以$N(t)$ 表示在时间间隔$(0,t]$内事件发生的数目，$\{N(t),t\geq 0\}$是取非负整数、时间连续的随机过程，称为计数过程。

计数过程$\{N(t)\}$称作强度为$\lambda$的泊松过程, 如果:

1. $N(0)=0$

2. 独立增量

3. $P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h+o(h)$ --稀有性

4. $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$ --相继性

泊松过程也可用另一形式定义：

称$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为$\lambda$的泊松过程, 若满足：

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. 对任意的$t > s \geq 0, N(t)-N(s) \sim \pi\left(\lambda\left(t-s\right)\right)$

$$\text{证}:\Leftarrow P\{N(t+h)-N(t)=1\}=\lambda h e^{-\lambda h}$$

$$=\lambda h(1-\lambda h+o(h))=\lambda h+o(h)$$

$$P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=1-e^{-\lambda h}-\lambda h e^{-\lambda h}$$

$$=1-(1-\lambda h+o(h))-\lambda h(1-\lambda h+o(h))$$

$$=o(h)$$

$$e^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\cdots$$

$\Rightarrow$ 把(s,t] n等分, 设为$t_0 < t_1 < \ldots < t_n, t_0 = s, t_n = t,$

$t_{i+1} - t_i = h = \frac{t-s}{n},$

$$P\{N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \le 1, \forall i\} = \prod_i P\{N_{t_{i+1}} - N_{t_i} \le 1\}$$

$$= (1 - o(h))^n = [(1 - o(h))^{\frac{1}{o(h)}}]^{no(h)} \to 1$$

$\therefore h$足够小时, $N_t - N_s$近似服从$b(n, \lambda h + o(h))$

令$h \to 0$时得, $N_t - N_s \sim \pi(\lambda(t-s))$

$N_{t_{i+1}} - N_{t_i}, i = 1, \cdots, n$相互独立且近似服从$B(1, \lambda h + o(h))$

# ★ 泊松过程的性质

1. $E\left[N(t)\right] = \lambda t$

2. $D\left[N(t)\right] = \lambda t$

3. $C_N(s,t) = \lambda min(s,t)$

$$R_N(s,t) = C_N(s,t) + \mu_N(s)\mu_N(t) = \lambda min(s,t) + \lambda^2 st,$$

$$s,t \geq 0。$$

对$t > s, n \geq m$

4. $P\{N_s = m \mid N_t = n\} = \binom{n}{m} \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$

$$P(N_s = m | N_t = n) = \frac{P(N_s = m, N_t - N_s = n - m)}{P(N_t = n)}$$

$$= \frac{\frac{(\lambda s)^m}{m!} e^{-\lambda s} \times \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda(t-s)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}$$

$$= C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}$$

对$t > s, n \geq m$

$$5.\ P\{N_t = n \mid N_s = m\} = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^{n-m}}{(n-m)!}$$

$$P(N_t = n|N_s = m) = \frac{P(N_s = m, N_t - N_s = n - m)}{P(N_s = m)}$$

$$= P(N_t - N_s = n - m)$$

$$= \frac{(\lambda(t-s))^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\lambda(t-s)}$$

例:顾客依泊松过程到达某商店,速率为4人/小时。已知商店上午9:00开门.

(1) 求到9:30时仅到一位顾客,而到11:30时已到5位顾客的概率?

(2)求第2位顾客在10点前到达的概率?

(3) 求第一位顾客在9:30前到达且第二位顾客在10:00前到达的概率?

解:以上午九点作为0时刻，以1小时作为单位时间。以$N(t)$表示$(0,t]$内来到的顾客数，则$\{N(t)\}$是$\lambda=4$的泊松过程。

$$
\begin{aligned}
&(1)P\{N(0.5)=1,N(2.5)=5\}\\
&=P\{N(0.5)=1\}P\{N(2.5)-N(0.5)=4\}\\
&=(2e^{-2})(\frac{e^{-8}8^4}{4!})=0.0155
\end{aligned}
$$

$$(2)\boxed{P[W(2)\le 1]=P[N(1)\ge 2]}$$

$$=1-e^{-4}-4e^{-4}=1-5e^{-4}$$

$$(3)P[W_1\le 0.5,W_2\le 1]=P[N(0.5)\ge 1,N(1)\ge 2]$$

$$=P[N(0.5)=1,N(1)-N(0.5)\ge 1]+P[N(0.5)\ge 2]$$

$$=0.5\lambda e^{-0.5\lambda}(1-e^{-0.5\lambda})+1-e^{-0.5\lambda}-0.5\lambda e^{-0.5\lambda}$$

$$=1-e^{-2}-2e^{-4}$$

## •与泊松过程相联系的若干分布

(1) $W_n$是第$n$个事件发生的时刻

$$F_{W_n}(t)=P(W_n\le t)=P\left(N(t)\ge n\right)$$

$$f_{W_n}(t)=\frac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t},t>0$$

即$W_n\sim\Gamma(n,\lambda)$

$W_n$的分布函数$F_{W_n}(t)=P(W_n\le t)=P(N(t)\ge n)$

$$F_{W_n}(t)=\begin{cases}\sum\limits_{k=n}^{\infty}P(N(t)=k)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

因此，$W_n$的概率密度为：$f_{W_n}(t)=\dfrac{dF_{W_n}(t)}{dt}$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{k\lambda^k t^{k-1}}{k!}e^{-\lambda t}-\sum\limits_{k=n}^{\infty}\dfrac{\lambda^{k+1}t^k}{k!}e^{-\lambda t}=\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0, & t\le 0\end{cases}$$

(2) 记$T_i = W_i - W_{i-1} \quad i = 1, 2, \cdots \quad W_0 = 0$

称为第$i-1$个事件和第$i$个事件发生的时间间隔

特别地，质点首次出现地等待时间$W_1$服从指数分布：

$$f_{W_1}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases}$$

定理: $\{N(t)\}$是强度为$\lambda$的泊松过程当且仅当其时间间隔$T_1, T_2, \ldots$独立同分布, 且服从均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布.

(3) $P\{T_1 \le s \mid N(t)=1\} = \dfrac{s}{t}, 0 < s \le t$

即若已知在(0, t]内恰有一事件发生,

则此事件发生时刻在$(0, t]$内均匀分布

$$F_{T_1|N(t)=1}(s) = P(T_1 \le s \mid N(t)=1) = \frac{P(T_1 \le s, N(t)=1)}{P[N(t)=1]}$$

$$= \frac{P[N(s)=1, N(t)-N(s)=0]}{P[N(t)=1]} = \frac{\lambda s e^{-\lambda s} \times e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} = \frac{s}{t}$$

$$f_{T_1|N(t)=1}(s) = \frac{1}{t},\ \ 0 < s < t.$$

例：上午8点开始某台取款机开始工作，此时有一大堆人排队等待取款，设每人取款时间独立且都服从均值为10分钟的指数分布，记$A$为事件“到上午9点钟为止恰有10人完成取款”，$B$为事件“到上午8:30为止恰有4人完成取款”，求$P(A)$，$P(B|A)$。

解：以上午8点作为0时刻，以1小时作为单位时间，以$N_t$表示$(0,t]$中完成取款的人数，则$\{N_t;t\geq 0\}$是$\lambda=6$的泊松过程. $A=\{N_1=10\}$，$B=\{N_{0.5}=4\}$

$$P(A)=e^{-6}\frac{6^{10}}{10!}$$

$$P(B|A)=P(N_{0.5}=4|N_1=10)$$

$$=C_{10}^{4}(0.5)^4(1-0.5)^6=\frac{105}{512}$$

例：设$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为$\lambda$的泊松过程，

$0 \leq s < t$，$T_i$和$W_i$分别表示点间间距和等待时间。

求(1)$P(T_1 \leq s \mid N(t) = 2)$；

(2)$P(W_2 \leq s \mid N(t) = 2)$；

(3)$P(W_1 \leq s, W_2 \leq t)$。

解：（1）$P(T_1 \le s | N(t)=2) = P(N(s) \ge 1 | N(t)=2)$

$$= P(N(s)=1 | N(t)=2) + P(N(s)=2 | N(t)=2)$$

$$= C_2^1 \frac{s}{t}\left(1-\frac{s}{t}\right) + C_2^2 \left(\frac{s}{t}\right)^2 = \frac{s(2t-s)}{t^2}$$

（2）$P(W_2 \le s | N(t)=2) = P(N(s) \ge 2 | N(t)=2)$

$$= P(N(s)=2 | N(t)=2) = \frac{s^2}{t^2}$$

(3) $P(W_1 \le s, W_2 \le t) = P(N(s) \ge 1, N(t) \ge 2)$

$$= P(N(s) = 1, N(t) - N(s) \ge 1) + P(N(s) \ge 2)$$

$$= 1 - e^{-\lambda s} - \lambda s e^{-\lambda t}$$

# ★ 泊松过程合成和分解

**合成：**

设$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$是强度为$\lambda_1$和$\lambda_2$的泊松过程，且相互独立，则$\{N_1(t)+N_2(t)\}$是$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程.

证明：首先，$\{N(t); t\geq 0\}$是计数过程，因此只要证明其满足定义的三个条件即可。

(1) $N(0)=N_1(0)+N_2(0)=0$

(2) 因为$N_1(t)$和$N_2(t)$是两个独立增量过程，

所以$N(t)=N_1(t)+N_2(t)$是独立增量过程

(3) 对任意的$t>s\geq 0$，$N_1(t)-N_1(s)\sim\pi\big(\lambda_1(t-s)\big)$，

$N_2(t)-N_2(s)\sim\pi\big(\lambda_2(t-s)\big)$且相互独立，

故$N(t)-N(s)\sim\pi\big((\lambda_1+\lambda_2)(t-s)\big)$

**分解：**

设$\{N(t)\}$是强度为$\lambda$的泊松过程,若每个事件独立地以概率$p$为类型1, 以$1-p$为类型2, 令$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别表示到$t$为止类型1和类型2发生的个数，则$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$分别是强度为$\lambda p$和$\lambda(1-p)$的泊松过程,且相互独立.

证明：显然$N_1(0)=N_2(0)$. 对任意$t>s\geq 0$,

$$P\{N_1(t)-N_1(s)=m, N_2(t)-N_2(s)=n\}$$

$$=P\{N_1(t)-N_1(s)=m, N(t)-N(s)=m+n\}$$

$$=P\{N_1(t)-N_1(s)=m \mid N(t)-N(s)=m+n\}$$
$$P\{N(t)-N(s)=m+n\}$$

$$=\binom{m+n}{m}p^m(1-p)^n e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{m+n}}{(m+n)!}$$

$$=[e^{-\lambda p(t-s)}\frac{(\lambda p(t-s))^m}{m!}]\bullet[e^{-\lambda(1-p)(t-s)}\frac{(\lambda(1-p)(t-s))^n}{n!}]$$

$$P\{N_1(t)-N_1(s)=m\}$$

$$=\sum_n P\{N_1(t)-N_1(s)=m, N_2(t)-N_2(s)=n\}$$

$$=\sum_n [e^{-\lambda p(t-s)}\frac{(\lambda p(t-s))^m}{m!}]\bullet[e^{-\lambda(1-p)(t-s)}\frac{(\lambda(1-p)(t-s))^n}{n!}]$$

$$=e^{-\lambda p(t-s)}\frac{(\lambda p(t-s))^m}{m!}$$

$$\therefore N_1(t)-N_1(s)\sim\pi(\lambda p(t-s))$$

同理$N_2(t)-N_2(s)\sim\pi(\lambda(1-p)(t-s))$,

且$N_1(t)-N_1(s)$与$N_2(t)-N_2(s)$相互独立.

下面证这两个过程是相互独立的独立增量过程.

由于$\{N(t)\}$是独立增量过程, 且各事件属于哪种类型相互独立,

所以对任何$0=t_0<t_1<\cdots<t_n,(N_1(t_1)-N_1(t_0),N_2(t_1)-N_2(t_0)),\cdots,$

$(N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),N_2(t_n)-N_2(t_{n-1}))$这$n$个二维随机变量相互独立.

又对所有$0\le i<n,N_1(t_{i+1})-N_1(t_i)$与$N_2(t_{i+1})-N_2(t_i)$相互独立,

所以$N_1(t_1)-N_1(t_0),N_2(t_1)-N_2(t_0),\cdots,N_1(t_n)-N_1(t_{n-1}),$

$N_2(t_n)-N_2(t_{n-1})$这$2n$个随机变量相互独立.

这一方面说明$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$是独立增量过程，另一方面

也说明$(N_1(t_1),\ldots,N_1(t_n))$与$(N_2(t_1),\ldots,N_2(t_n))$相互独立.

例：某银行有两个窗口可以接受服务。上午九点钟，小王到达这个银行，此时两个窗口分别有一个顾客在接受服务，另外有 2 个顾客排在小王的前面等待接受服务，一会儿又来了很多顾客。假设服务的规则是先来先服务。也就是说一旦有一个窗口顾客接受完服务，那么排在队伍中的第一个顾客就马上在此窗口接受服务。假设各个顾客接受服务的时间独立同分布，而且服从均值为 20 分钟的指数分布。问：小王在十点钟之前能够接受服务的概率？

解：以上午九点钟作为0时刻，以1小时作为单位时间。对$i=1,2,$令$N_i(t)$表示$(0,t]$内第$i$个窗口完成服务的顾客数。则

$\{N_i(t);t\geq 0\}$是强度为3的泊松过程，且$\{N_1(t)\}$和$\{N_2(t)\}$相互独立。

令$N(t)$表示$(0,t]$内这两个窗口完成服务的顾客总数

则$N(t)=N_1(t)+N_2(t),$且$\{N(t)\}$是强度为6的泊松过程

当且仅当第3个顾客服务完成时，小王才去接受服务。

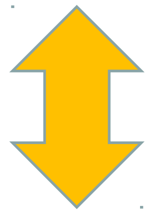
用$W_i$表示第$i$个顾客服务完成的时刻，所以所求的概率是：

$$P(W_3 \le 1) = P(N(1) \ge 3)$$

$$= 1 - e^{-6} - 6e^{-6} - 18e^{-6} = 0.938.$$

## 思考题 ： 下面是否等价

“ 假设各个顾客接受服务的时间独立同分布，而且服从均值为 20 分钟的指数分布”



“ 假设各个顾客等待接受服务所需的时间独立同分布，而且服从均值为 10 分钟的指数分布”

例：设$N(t)$表示手机在$(0, t]$天内收到的短信数，假设$\{N(t); t \geq 0\}$是强度为10条的泊松过程，其中每条短信独立地以概率0.2是垃圾短信。求

(1)一天内没有收到垃圾短信的概率；

(2)第一天内收到3条有用短信，1条垃圾短信，第二天没有收到垃圾短信的概率？

解：以$X(t),Y(t)$分别表示手机在$(0,t]$天内收到的垃圾短信数和有用短信数，则$\{X(t);t\geq 0\}$和$\{Y(t);t\geq 0\}$分别是强度为2和8的泊松过程，且相互独立。

$$(1)P\{X(1)=0\}=e^{-2}=0.135$$

$$(2)P\{Y(1)=3,X(1)=1,X(2)-X(1)=0\}$$

$$=P\{Y(1)=3\}P\{X(1)=1,X(2)-X(1)=0\}$$

$$=P\{Y(1)=3\}P\{X(1)=1\}P\{X(2)-X(1)=0\}$$

$$=e^{-8}\times\frac{8^3}{3!}\times e^{-2}\times 2\times e^{-2}=\frac{512}{3}e^{-12}$$

# 非齐次泊松过程

计数过程$\{N(t)\}$称作强度为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程, 如果:

1. $N(0)=0$

2. 独立增量

3. $P\left\{N(t+h)-N(t)=1\right\}=\lambda(t)h+o(h)$

4. $P\{N(t+h)-N(t)\geq 2\}=o(h)$

计数过程$\{N(t), t \geq 0\}$是强度为$\lambda(t)$的非齐次泊松过程当且仅当：

1. $N(0)=0$
2. 独立增量
3. 对任意的$t > s \geq 0, N(t)-N(s) \sim \pi\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$

例：设$\{N(t), t \ge 0\}$是非齐次泊松过程，强度为$\lambda(t) = t^2$.

计算(1)$E(N(2))$;

(2)$P(N(1)=1, N(2)=2)$;

(3)$P(N(2)=2 \mid N(1)=1)$;

(4)$P(N(1)=1 \mid N(2)=2)$.

$$(1)E(N(2)) = \int_0^2 \lambda(t)dt = \int_0^2 t^2 dt = \frac{8}{3}$$

$$(2)\int_0^1 \lambda(t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}, \int_1^2 \lambda(t)dt = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

$$P(N(1)=1, N(2)=2) = P(N(1)=1)P(N(2)-N(1)=1)$$

$$= (\frac{1}{3}e^{-1/3})(\frac{7}{3}e^{-7/3}) = \frac{7}{9}e^{-8/3}$$

$$(3)P(N(2)=2 \mid N(1)=1) = P(N(2)-N(1)=1) \; = \frac{7}{3}e^{-7/3}$$

$$(4)P(N(1)=1 \mid N(2)=2) = \frac{P(N(1)=1, N(2)=2)}{P(N(2)=2)}$$

$$= \frac{\frac{7}{9}e^{-8/3}}{(\frac{8}{3})^2 e^{-8/3} / 2} = \frac{7}{32}$$

# §3　布朗运动

## （一）布朗运动的定义及数字特征

考虑一直线上的简单对称的随机游动，设质点每隔Δｔ时间等概率地向左或向右移动距离Δｘ，且每次移动相互独立，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次质点右移},\\ -1, & \text{第}i\text{次质点左移}.\end{cases} \quad i=1,2,\ldots$$

X(t) 表示时刻 t 质点的位置，则有

$$X(t)=\Delta x(X_1+X_2+\ldots+X_{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]})$$

$$\text{设}\Delta x=\sigma\sqrt{\Delta t}，\text{当}\Delta t\to 0\text{时}，$$

(1) $E[X(t)]=0, D[X(t)]=\sigma^2 t,$

由中心极限定理，$X(t)\sim N(0,\sigma^2 t)$

(2)$\{X(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程，即

$0\leq s<t, X(t)-X(s)\sim N(0,\sigma^2(t-s))$

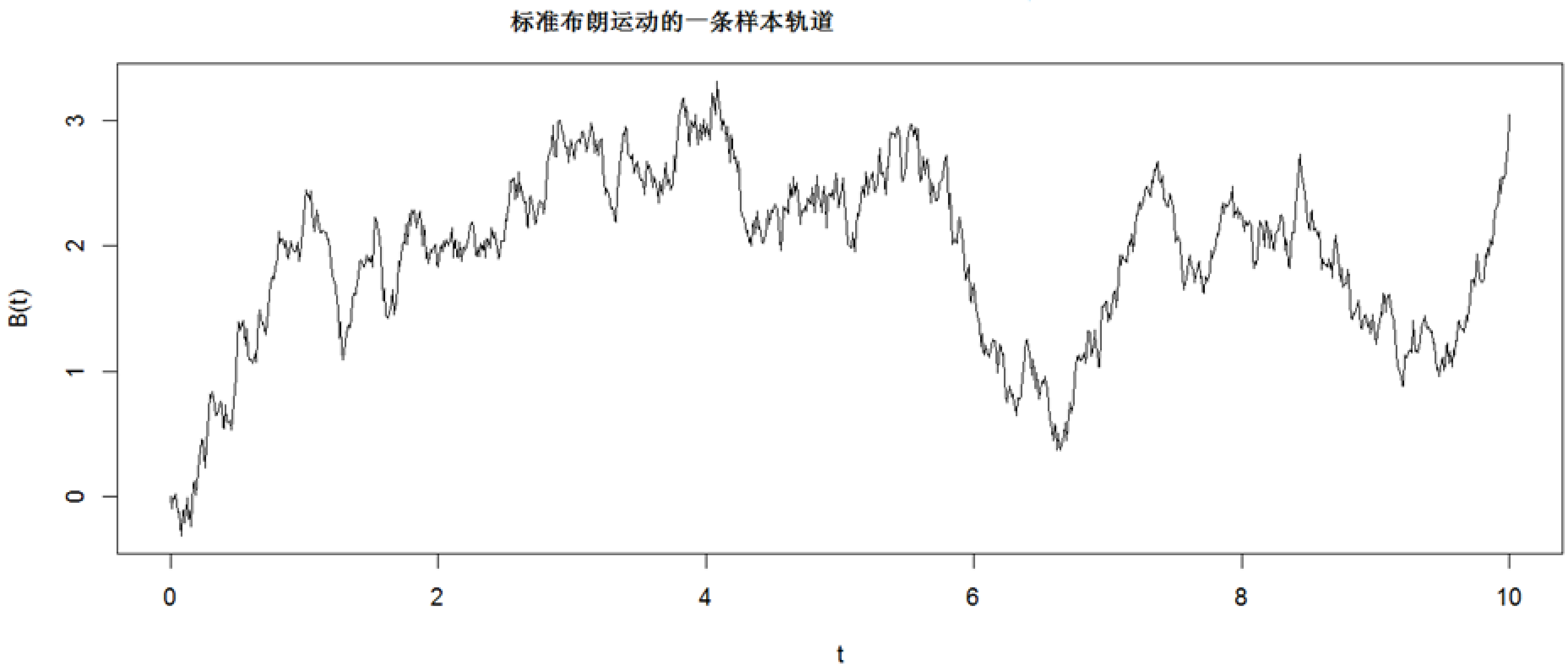
定义:$\{X(t), t \geq 0\}$称为布朗运动或维纳过程，如果:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ X(0)=0 \\ 2.\ \text{独立增量} \\ 3.\ \text{对}\forall t > s \geq 0, \end{array}\right\} \text{平稳独立增量过程}$$

$$X(t)-X(s) \sim N\left(0, \sigma^2 (t-s)\right)$$

4. 样本轨道连续

后面都讨论$\sigma = 1$的标准布朗运动, 记为$\{B(t); t \geq 0\}$.




标准布朗运动的一条样本轨道

## 布朗运动的性质：

1. 布朗运动是齐次的独立增量过程，

2. 布朗运动是正态过程，因此其分布完全由它的均值函数和自协方差函数(即自相关函数)所确定，

3. 布朗运动的数字特征：

$$\mu_B(t) = E\left(B(t)\right) = 0,$$

$$D_B(t) = D\left(B(t)\right) = t,$$

$$C_B\left(s,t\right) = R_B\left(s,t\right) = D_B\left[min\left(s,t\right)\right]$$

$$= min\left(s,t\right) \quad s,t > 0。$$

设$\{B(t),t\geq 0\}$是标准布朗运动，求:

(1) $B(1)+3B(2)$分布;

(2) $Cov(B(1)+B(3),B(3)-B(2))$;

(3) $P\{B(7)\leq 3\,|\,B(1)=1,B(3)=2\}$.

解:(1) $B(1)+3B(2)$

$=B(1)+3[B(1)+(B(2)-B(1))]$

$=4B(1)+3[B(2)-B(1)]\sim N(0,25)$

(2) $Cov(B(1)+B(3),B(3)-B(2))$

$=Cov(B(1)+B(2)+[B(3)-B(2)],B(3)-B(2))$

$=D[B(3)-B(2)]=1$

(3) $P\{B(7)\le 3\,|\,B(1)=1,B(3)=2\}$

$=P\{B(7)-B(3)\le 1\,|\,B(1)=1,B(3)=2\}$

$=P\{B(7)-B(3)\le 1\}=\Phi(\frac{1}{2})$

性质：1. 样本轨道连续的随机过程$\{B(t);t\geq 0\}$是布朗运动当且仅当它是正态过程，$E(B(t))=0$且$E[B(t)B(s)]=t\wedge s$.

2. Markov性：固定$s>0$, $\{B(t+s)-B(s);t\geq 0\}$是布朗过程

3. 自相似性：固定$a\neq 0$，$\{\frac{1}{a}B(a^2t);t\geq 0\}$是布朗运动

4. 0与∞对称性：

令$\tilde{B}(t)=\begin{cases} tB(1/t), & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$，则$\{\tilde{B}(t);t\geq 0\}$是布朗过程

性质 1

“$\Leftarrow$” 证明：$E[B(t)-B(s)]=\mu_B(t)-\mu_B(s)=0$

$$E\{[B(t)-B(s)]^2\}=E\{[B(t)]^2\}+E\{[B(s)]^2\}-2E[B(t)B(s)]$$

$$=R_B(t,t)+R_B(s,s)-2R_B(t,s)=t+s-2\min(t,s)=|t-s|$$

因此，对于 $0\le s<t, B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$

又对于任给的 $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2$,

$$E\{[B(t_1)-B(s_1)][B(t_2)-B(s_2)]\}$$

$$= R_B(t_1,t_2)-R_B(s_1,t_2)-R_B(t_1,s_2)+R_B(s_1,s_2)$$

$$= t_1 - s_1 - t_1 + s_1 = 0$$

所以，$B(t_1)-B(s_1)$与$B(t_2)-B(s_2)$相互独立

即$\{B(t);t\ge 0\}$独立增量过程，且$B(0)=0$,

从而 $\{B(t);t\ge 0\}$是布朗运动；

“$\Rightarrow$” 只需证明$\{B(t); t\geq 0\}$是正态过程。

对于任给的$n$及$0\leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$,

$$(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$$

$$=(B(t_1)-B(0), \sum_{i=1}^{2}[B(t_i)-B(t_{i-1})], \ldots, \sum_{i=1}^{n}[B(t_i)-B(t_{i-1})])$$

是$(B(t_1)-B(0), B(t_2)-B(t_1), \ldots, B(t_n)-B(t_{n-1}))$的线性组合

所以,$(B(t_1), B(t_2), \ldots, B(t_n))$服从正态分布

从而 $\{B(t); t\geq 0\}$是正态过程。

证明：（1）对任给的$\tau > 0$,

性质 2 $\{B(t+\tau)-B(\tau); t \geq 0\}$是正态过程,

$$B(0+\tau)-B(\tau)=0$$

任给 $s,t > 0$, $E[B(t+\tau)-B(\tau)]=0$

$$E\{[B(t+\tau)-B(\tau)][B(s+\tau)-B(\tau)]\}$$

$$=E[B(t+\tau)B(s+\tau)]-\tau-\tau+\tau$$

$$=\min(t+\tau, s+\tau)-\tau=\min(t,s)+\tau-\tau=\min(t,s)$$

从而,$\{B(t+\tau)-B(\tau); t \geq 0\}$是布朗运动。

设$\{B(t), t \geq 0\}$是标准布朗运动，求：

(1) $P\{B(0.5) \leq 1 \mid B(1)=1, B(2)=2\}$;

(2) 在$B(1)=1, B(2)=2$的条件下，

$B(0.5)$服从什么分布？

解：$\{\tilde{B}(t); t \geq 0\}$是标准布朗运动.又$B(t)=t\tilde{B}(1/t)$,所以

$$(1)\ P\{B(0.5) \leq 1 \mid B(1)=1, B(2)=2\}$$

$$=P\{0.5\tilde{B}(2) \leq 1 \mid \tilde{B}(1)=1, 2\tilde{B}(0.5)=2\}$$

$$=P\{\tilde{B}(2) \leq 2 \mid \tilde{B}(1)=1, \tilde{B}(0.5)=1\}$$

$$= P\{\tilde{B}(2) - \tilde{B}(1) \le 1 \mid \tilde{B}(1) = 1, \tilde{B}(0.5) = 1\}$$

$$= P\{\tilde{B}(2) - \tilde{B}(1) \le 1\} = \Phi(1) = 0.8413$$

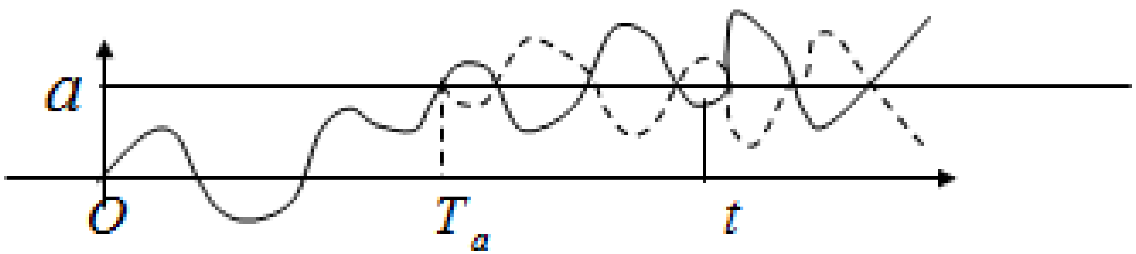
(2)在$B(1) = 1, B(2) = 2$的条件下，

即是在$\tilde{B}(1) = 1, \tilde{B}(0.5) = 1$的条件下，

$\tilde{B}(2) = 1 + (\tilde{B}(2) - \tilde{B}(1)) \sim N(1,1)$,

所以$B(0.5) = 0.5\tilde{B}(2) \sim N(0.5, 0.25)$.

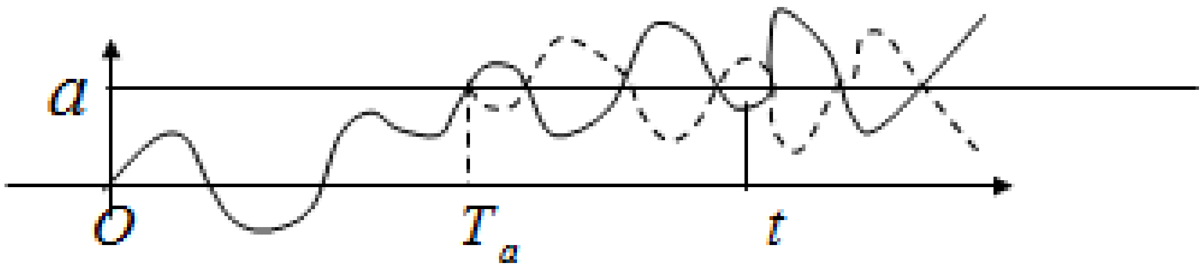
例：设$\{B(t); t\geq 0\}$是标准布朗运动，$a\neq 0$，令$T_a=\inf\{t: t>0, B(t)=a\}$，表示首次击中$a$的时刻，求$T_a$的分布函数。




解：先设$a>0$，对于$t>0$，有

$$P(T_a\leq t)=P(T_a\leq t,\ B(t)\geq a)+P(T_a\leq t,\ B(t)<a)$$

$$=P(B(t)\geq a)+P(B(t)<a\mid T_a\leq t)P(T_a\leq t)$$




且　$P(B(t) \geq a \mid T_a \leq t) = P(B(t) < a \mid T_a \leq t) = 0.5$

因此，$P(T_a \leq t) = 2P(B(t) \geq a)$

即，当$a > 0, t > 0$时，

$$F_{T_a}(t) = P(T_a \leq t) = 2P(B(t) \geq a) = 2\left[1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{t}}\right)\right]$$

当$a<0$时,由对称性　$P(T_{-a}\le t)=P(T_a\le t)$

综上得，$T_a$的分布函数

$$F_{T_a}(t)=\begin{cases}2\left[1-\Phi\left(\dfrac{|a|}{\sqrt{t}}\right)\right], & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

$$\boxed{\text{对}\ a>0,\ P(\max_{s\le t}B(s)\ge a)=P(T_a\le t)=2P(B(t)\ge a)}$$

例：设$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动，令

$X(t)=\left|\min\limits_{0\leq s\leq t}B(s)\right|$，求$X(t)$的分布函数。

解：$X(t)=\left|\min\limits_{0\leq s\leq t}B(s)\right|=-\min\limits_{0\leq s\leq t}B(s)=\max\limits_{0\leq s\leq t}B_1(s)$

这里$B_1(s)=-B(s)$. 因为$\{-B(s);s\geq 0\}$也是布朗运动，

当$y>0$时，$P\{X(t)\leq y\}=P\{\max\limits_{0\leq s\leq t}B_1(s)\leq y\}$

$=1-P\{\max\limits_{0\leq s\leq t}B_1(s)>y\}=1-2P(B_1(t)>y)$

$$= 1 - 2\left[1 - \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right)\right] = 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1.$$

$$\therefore F_{X(t)}(y) = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{t}}\right) - 1, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

例：以$X(t)$表示$t$时刻的股票价格（单位：元）．设$X(t)=2^{B(t)}$, 其中$\{B(t);t\geq 0\}$是标准布朗运动. 求$[0,4]$ 内股票价格不曾达到8元的概率？

解: $P\{\max\limits_{t\leq 4} X(t)<8\}=P\{\max\limits_{t\leq 4} B(t)<3\}$

$$=1-2P(B_4\geq 3)=1-2(1-\Phi(\frac{3}{2}))$$

$$=1-2(1-0.9332)=0.8664$$

定义：设$X(t)=B(t)-tB(1)$，称$\{X(t), 0\le t\le 1\}$为布朗桥过程。

性质：1. $X(0)=0$，$X(1)=0$

2. 正态过程

3. $\mu_X(t)=0$，

对$0<s<t<1$，$C_X(t,s)=s(1-t)$

注：$2+3 \Leftrightarrow$ 布朗桥运动

$$EX(t) = E[B(t)] - tE[B(1)] = 0,$$

设$0 \le s \le t \le 1, \quad C_X(s,t) = Cov(X(s), X(t))$

$$= Cov[B(s) - sB(1), B(t) - tB(1)]$$

$$= Cov[B(s), B(t)] - Cov[sB(1), B(t)]$$

$$- Cov[B(s), tB(1)] + stCov[B(1), B(1)]$$

$$= s - st - st + st = s(1-t)$$