014 부분집합의 갯수

1 부분집합의 갯수

▷ 집합 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$일 때

❶ **원소의 갯수가** n**개인 집합** A**의 모든 부분집합의 갯수** => 2^n 개

※ **진부분집합의 갯수** : 2^n-1 개 ($\because$ 자기 자신의 집합은 제외(Ⓡ13④))

Study

① **부분집합의 갯수** = $2^{\text{원소의 갯수}}$

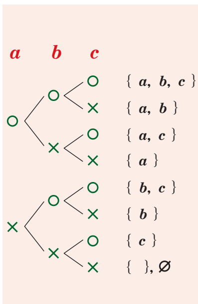
▷ $S=\{a, b, c\}$의 부분집합은? => ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a, b, c\}$

$\therefore$ 집합 S의 부분집합의 갯수는 => S의 원소의 갯수가 3개이므로 $2^3=8$ 개

▷ pf 증명 : 다음 4가지 방법

(방법1) : 수형도를 이용

옆 그림과 같이 수형도를 그려 보면 원소 a, b, c 가 각각 속하는 경우와 속하지 않는 경우로 나누어 부분집합을 구할 수 있음



$\therefore$ $2\times2\times2=2^3$ 개

(방법2) : 곱의 법칙을 이용

부분집합을 구할 때 각각의 원소 a, b, c는 2가지 경우(원소로 선택 되거나 또는 선택되지 않거나)가 있고, 세 원소는 동시에(연속해서) 일어나야(선택되어야)함에 따라 곱의 법칙을 적용

$\therefore$ **부분집합의 갯수** $=2\times2\times2=2^3$ 개

곱의 법칙 : 두 사건 A, B가 동시에 또는 연속해서 일어나는 경우의 수는 곱의법칙이 성립

=> 사건 A의 경우의 수 $\times$ 사건B의 경우의 수

(방법3) : 옆 그림에서와 같이 $n=3$인 경우를 보면, $n=2$일 때의 부분집합{ }, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ 4개에 원소 c를 포함시켜면 마지막줄$\{c\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$, $\{a,b,c\}$ 4개가 추가되어 결국 부분집합의 갯수가 2배 커짐

$\therefore$ **원소의 갯수** n**이 1증가할 때마다 부분집합의갯수는 2배 커짐**

n	원소	부분집합	갯수
0	없음	{ }	$2^0=1$
1	a	{ }, $\{a\}$	$2^1=2$
2	a,b	{ }, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$	$2^2=4$
3	a,b,c	{ }, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ $\{c\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,$\{a,b,c\}$	$2^3=8$

즉, $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ 에 따라 부분집합의 갯수는 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, $\cdots$ 임

(방법4) : 이항계수의 합의 공식을 이용

① 원소가 0개인 부분집합의 갯수 : 1개 (${}_3C_0$개)

② 원소가 1개인 부분집합의 갯수 : 3개 (${}_3C_1$개)

③ 원소가 2개인 부분집합의 갯수 : 3개 (${}_3C_2$개)

④ 원소가 3개인 부분집합의 갯수 : 1개 (${}_3C_3$개)

$\therefore$ **부분집합의 갯수** $={}_3C_0+{}_3C_1+{}_3C_2+{}_3C_3=2^3$

이항계수의 합

$${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n=2^n$$

(증명) : 자세한 사항은 확률부분 참조

$$(1+x)^n={}_nC_0x^0+{}_nC_1x^1+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_nx^n$$

$x=1$대입하면

$$2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+{}_nC_3+\cdots+{}_nC_n$$