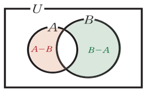
Concept 120 대칭차집합

120-1 대칭차집합

❶ 정의 : $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$

❷ 벤 다이어그램 : 오른쪽 그림 참조



❸ 대칭차집합의 의미

① 두 집합 A, B의 어느 한 쪽에만 속하는 원소의 집합

② 두 집합 A, B 둘 중에서 겹치지 않는 부분

explanation

- 대칭차집합은 두 차집합 $A-B$와 $B-A$의 합집합으로 정의되고 있고, $A-B$와 $B-A$가 좌우 대칭꼴이어서 붙여진 이름이며, 당연히 대칭차집합의 개념을 이해하기 위해서는 차집합(**110-2❶**)의 개념이해가 선행되어야 할 것이다
- 두 집합 A와 B의 대칭차집합 $(A-B) \cup (B-A)$을 $A \triangle B$로 표시하였으나 꼭 △기호를 쓰는 것은 아니고 ⊗, ⊙, ◎ 등 다양하게 약속할 수 있다. 즉 중요한 것은 $(A-B) \cup (B-A)$라는 사실이다
- 대칭차집합의 개념은 매우 중요하며 수식으로서 우선 $(A-B) \cup (B-A)$라는 사실을 알고 있어야 하지만, 이를 잘 활용하기 위해서는 벤 다이어그램에서 보듯이 전체 4개의 영역에서 A에만 속하거나$(A-B)$, B에만 속하는$(B-A)$ 원소의 집합을 나타내며, 두 집합 A와 B 중에서 겹치지 않는 부분을 나타내는 것으로 정리하는 것이 매우 유용하다.
- 또한 두 집합 A와 B의 대칭차집합을 'A XOR B'게 표시하기도 한다. 두 집합 A와 B의 합집합을 'A OR B' 표시(**110-2❶**)하는 것과 구별되며, XOR는 'exclusive OR'을 의미한다.
- 대칭차집합은 컴퓨터뿐만 아니라 디자이눈야 등의 실생활에서 아주 많이 사용하는 중요한 개념이다.

120-2 대칭차집합의 7가지 표현

❶ $(A-B) \cup (B-A) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ (**120-1❶**)

❷ $(A \cup B)-(A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ (**120-1❶**)

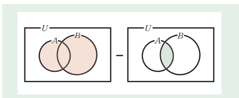
$= (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ (**110-2❶**)

❸ $(A \cap B)^c-(A \cup B)^c = (A \cap B)^c \cap [(A \cup B)^c]^c$

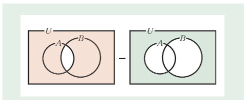
$= (A \cap B)^c \cap (A \cup B)$

explanation

- 대칭차집합을 표현하는 식을 이해하기 위해서는 먼저 다음 3가지 접근 방법이 필요하다. 첫째, 개념단위 **120-1❶**의 정의식 $(A-B) \cup (B-A)$는 개념단위 **110-2**의 ❶을 적용하여 $(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$이 된다.
- 둘째, 겹치지 않는 부분을 구하려면 아래 벤다이어그램과 같이 두 집합의 합집합에서 겹치는 부분 즉 교집합부분을 빼면 된다. 그런 후 개념단위 **110-2❶**의 차집합 변형공식과 개념단위 **110-2❶**의 드모르간의 법칙을 적용함으로써 ❷의 식이 성립한다.



- 셋째, 둘째 방식과 유사하게 아래 그림과 같이 $(A \cap B)^c$에서 $(A \cup B)^c$을 빼서 구한 다음 다시 **110-2❶**와 **110-2❶**을 적용하여 구하면 된다



120-3 대칭차집합의 성질

❶ $A \triangle B = B \triangle A$ (교환법칙)

❷ $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C) = A \triangle B \triangle C$ (결합법칙)

❸ $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (일종의 분배법칙)

❹ $A \triangle \phi = A$ (ϕ는 연산△에 대한 항등원)

❺ $A \triangle A = \phi$ (A는 연산△에 대한 A의 역원)

❻ $A \triangle A^c = U$

❼ $A \triangle U = A^c$

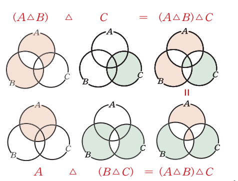
❽ $(A \triangle B) \triangle A = B$, $(A \triangle B) \triangle B = A$

❾ $A \triangle B = \phi$ 이면 $A = B$

❿ $A^c \triangle B^c = A \triangle B$

explanation

- 대칭차집합의 성질을 먼저 잘 이해하기 위해서는 **120-1❶②**의 "겹치지 않는 부분"을 이용하여 벤 다이어그램을 그려보는 것이 첩경이며, 그렇게 함으로써 성질 ❶, ❹, ❺, ❻, ❼, ❽, ❾은 쉽게 증명할 수 있다.
- 대칭차집합을 표시하는 기호 △는 일종의 연산기호라 할 수 있는 바 (**120-1❶**), 수학에서는 어떤 연산이 주어진 경우 연산의 가장 기본이 되는 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙이 성립하는 지를 증명, 확인하는 것이 그 연산을 가장 잘 이해하는 방법이다. 그런 점에서 사칙연산(＋, −, ×, ÷)의 경우 **120-1❶②**에서, 집합의 경우 **120-1❶②**에서 그리고 일반적인 연산에 대해서는 **120-1❶②**에서 각각의 법칙이 성립하는지를 확인할 수 있다.
  결론적으로 대칭차집합의 연산△는 교환법칙, 결합법칙, 그리고 △에대한 교집합의 분배법칙이 성립한다.
- 성질❷ 결합법칙이 성립함을 아래 벤다이어그램으로 확인할 수 있다.



- 일반적인 연산(**120-1**❶)의 경우와 같이 연산$\triangle$의 항등원은 ϕ이고, 연산$\triangle$에 대한 A의 역원이 A임은 성질 ❹, ❺을 통해 알 수 있다
- 성질❸의 경우 엄밀하게 말하면 '연산 $\triangle$에 관한(대한) 교집합($\cap$)의 분배법칙'이 성립하는 것을 말하며, '연산 $\cap$에 대한 연산 $\triangle$의 분배법칙'은 성립하지 않음에 주의하야 한다. 즉, $A\triangle(B\cap C) \neq (A\triangle B)\cap(A\triangle C)$이다
- 성질❾ : $A\triangle B=\phi$는 두 집합 A와 B 둘 중 겹치지 않는 부분이 없다는 것을 말하며, 이는 다시 말해 둘 다 모두 겹친다는 의미이므로 곧, 두 집합 A와 B는 서로 상등이라는 사실을 말한다.

Exercise 120 대칭차집합

01 다음은 대칭차집합 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$에 대한 동일한 표현이 되도록 빈칸을 채워라.

① $(A\cap B^c)\cup\boxed{\quad}$

② $(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap\boxed{\quad}=(A\cup B)\cap(A^c\cup B^c)$

③ $(A\cap B)^c-(A\cup B)^c=(A\cap B)^c\cap[(A\cup B)^c]^c$
$=(A\cap B)^c\cap\boxed{\quad}$

Ⓐ **01** ① $B\cap A^c$ ② $(A\cap B)^c$ ③ $(A\cup B)$

02 다음 설명중 틀린 것은?
단, $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$을 의미함)

① $A\triangle B=B\triangle A$
② $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle B\triangle C$
③ $A\triangle A^c=U$
④ $(A\triangle B)\triangle A=B$, $(A\triangle B)\triangle B=A$
⑤ $A\triangle B=\phi$ 이면 $A=B$임
⑥ $A\triangle A=A$
⑦ $A^c\triangle B^c=A\triangle B$
⑧ $A\cup(B\triangle C)=(A\cup B)\triangle(A\cup C)$

Ⓐ **02** ⑥, ⑧

Practice 120 대칭차집합

01 다음은 $A^c\triangle B^c=A\triangle B$을 증명하는 과정이다. 빈칸을 채워라.

$A^c\triangle B^c=(A^c-B^c)\cup(B^c-A^c)$
$=(A^c\cap(B^c)^c)\cup(B^c\cap\boxed{\quad})$
$=(A^c\cap B)\cup(B^c\cap\boxed{\quad})$
$=(B\cap A^c)\cup(A\cap B^c)$
$=(B-A)\cup\boxed{\quad})$
$=(A-B)\cup(B-A)=A\triangle B$

Ⓐ **01** $(A^c)^c$, A, $A-B$

02 연산 $\triangle$을 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$와 같이 정의할 때, $A\triangle B=C$이면 $A\triangle C=B$임을 증명하는 과정이다. 빈칸을 채워라.

$A\triangle C=A\triangle(A\triangle B)=(A\triangle A)\triangle B=\boxed{\quad}\triangle B=B$

Ⓐ **02** ϕ