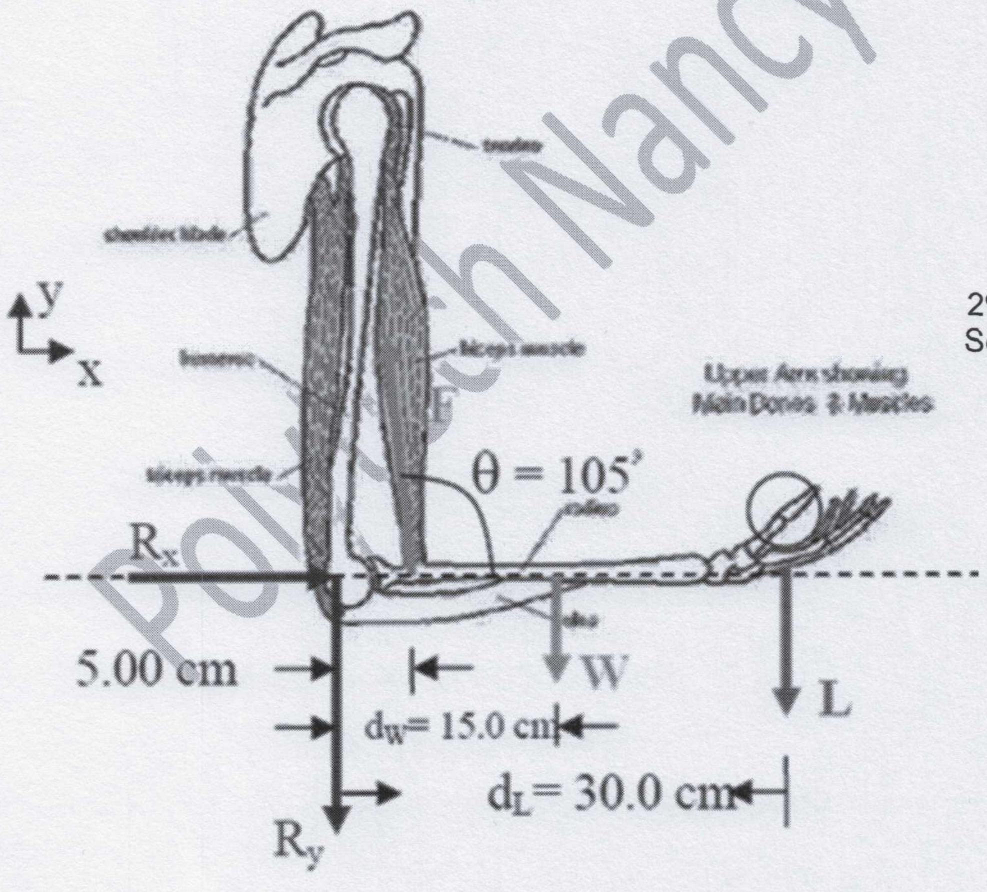
POLYTECH©
NANCY

Mécanique du solide indéformable I

Chapitre 2 : Actions mécaniques transmissibles dans les liaisons



2ème année
Semestre 3

UNIVERSITÉ DE LORRAINE

Sommaire

Actions mécaniques transmissibles dans les liaisons

Rappels sur les forces et moments

1 Modélisation des forces ou actions mécaniques.

Pour connaître complètement une force, il faut connaître :

- Sa direction
- Son sens
- Pt d'application
- intentisé

Par analogie avec la notion de vecteur, on représente une force par un vecteur.

→ Sa norme est proportionnelle à l'intensité de la force.

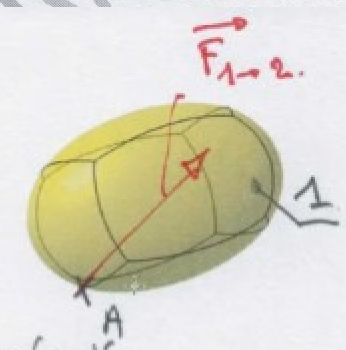
Il faut donc choisir une échelle si on la représente graphiquement.

On indique toujours en indice du vecteur force ce qui " crée " la force et ce qui " reçoit " la force.

Exemple : $\overrightarrow{F_{1\to 2}}$: 1 exerce une force $\vec{F}$ sur 2.

2 Composantes d'une force.

Soit une force $\overrightarrow{F_{2\to 1}}$ modélisée par un vecteur.

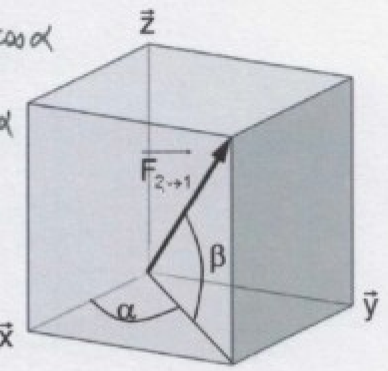


2 non représenté

On peut exprimer le vecteur dans une base (3 dim.) orthonormée directe ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) de la façon suivante :

Calcul de l'intensité de $\overrightarrow{F_{2\to 1}}$.

$$\overrightarrow{F_{2\to 1}} \begin{vmatrix} F_{2\to 1} \cos\beta \cos\alpha \\ F_{2\to 1} \cos\beta \sin\alpha \\ F_{2\to 1} \sin\beta \end{vmatrix}$$

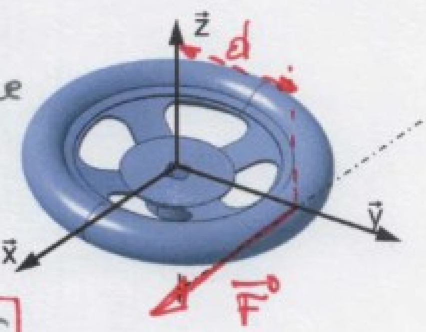


3 Moment scalaire d'une force.

3.1 Définition.

le moment de la fce $\vec{F}$ par rapp à A, noté $M_A(\vec{F})$ est égal à

$$\boxed{M_A(\vec{F}) = \pm\, d \times F}$$



3.2 Convention de signe.

Si $\vec{F}$ fait (ou a tendance à faire) tourner le solide autour de A :

- dans le sens direct : +
- dans le sens indirect : -

4 Vecteur moment.

Dans l'espace, la notion de moment scalaire ne suffit plus. Le moment d'une force doit être décrit sous forme vectorielle par un vecteur lié.

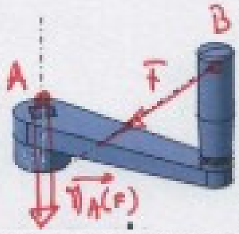
$$\boxed{\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}}$$

. $\overrightarrow{M_A(\vec{F})}$: double flèche
. l'origine du vecteur est en A

-

-

-



5 Couple et vecteur couple

5.1 Couple.

Le moment engendré par deux forces égales et opposées ayant des lignes d'actions différentes constitue un couple C de force. L'intensité F x d du couple est

de O.

$$\boxed{C = \pm F \times d}$$

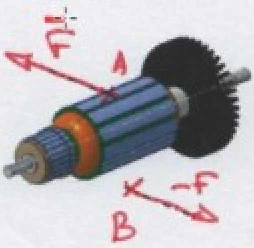
On applique la même convention de signe que pour le moment scalaire.

5.2 Vecteur couple.

Soient A & B deux points quelconque des supports de $\vec{F}$ & $-\vec{F}$.

On a

$$\boxed{\vec{C} = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}}$$



6 Moment résultant de plusieurs forces.

Le moment résultant $\overrightarrow{M_A}$ en un point A de n forces $\vec{F_1}$ à $\vec{F_n}$ est égal à la somme des moments en A de chacune des forces.

$$\overrightarrow{M_A} = \overrightarrow{M_A(\vec{F_1})} + \dots + \overrightarrow{M_A(\vec{F_n})}$$

7 Composantes d'un vecteur moment

Même principe que pour les composantes d'une force, les axes étant cette fois-ci gradué en Nm.

Résultantes

Les résultantes de forces ne sont ni des forces de contact ni des forces à distance, mais des forces calculées à partir d'autres forces connues.

8 Définition et propriétés.

8.1 Définition.

On appelle résultante d'un système de forces $\vec{F_1}$, ... ,$\vec{F_n}$ la force $\vec{R}$ telle que :

$$\boxed{\vec{R} = \vec{F_1} + \dots + \vec{F_n} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}}$$

Le moment résultant en n'importe quel point I des n forces est égal au moment en I de la résultante $\vec{R}$.

$$\boxed{\overrightarrow{M_I} = \overrightarrow{M_I(\vec{R})} = \overrightarrow{M_I(\vec{F_1})} + \dots + \overrightarrow{M_I(\vec{F_n})}}$$

8.2 Propriétés.

Si le système de force se réduit en une résultante unique (sans moment) :

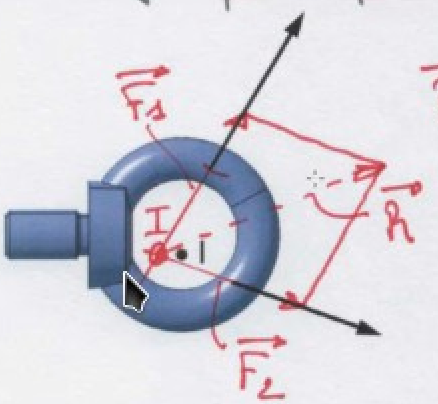
- la posit. du pt. d'applic est sans imp.

$\longrightarrow$ C'est 1 glisseur.

9 Résultante de plusieurs forces dont leurs supports sont concourants en un même point.

Soit un système de n forces $\vec{F_1}$, ... , $\vec{F_n}$ de supports concourants en un même point I.

La droite d'action de la résultante R des n fces passe par I



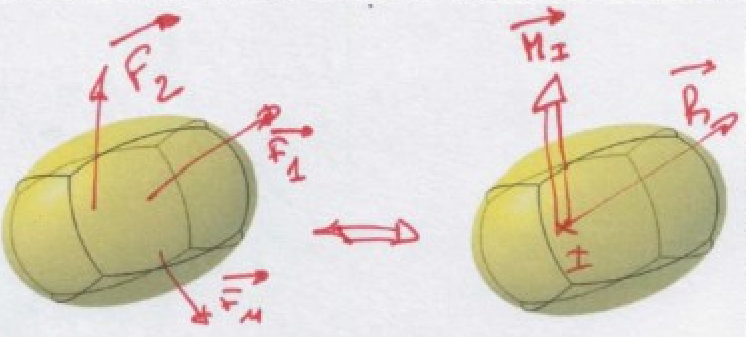
10 Réduction d'un système de forces à un ensemble : résultante + moment.

Il n'est pas toujours possible de réduire un système de forces à une résultante $\vec{R}$ unique.

En revanche, en un point I quelconque, n'importe quel système de forces peut être réduit à une résultante $\vec{R}$ et à un moment $\vec{M_I}$ obéissant à :

obéissant à :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \qquad \vec{M_I} = \sum \vec{M_I}(\vec{F_i})$$

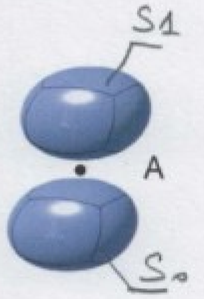


Actions transmissibles dans les liaisons

11 Actions transmissibles : préliminaire : principe des actions mutuelles.

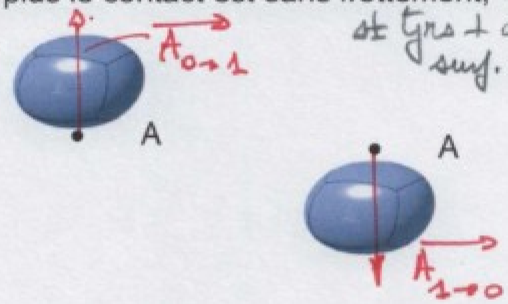
Pour S_0 et S_1 en contact en A,

l'action de S_0 sur S_1 est égale et opposée à l'action de S_1 sur S_0



On a : $\boxed{\vec{A}_{0\to1} = -\vec{A}_{1\to0}}$

Si de plus le contact est sans frottement, les actions st tjrs ⊥ à la surf. de contact.



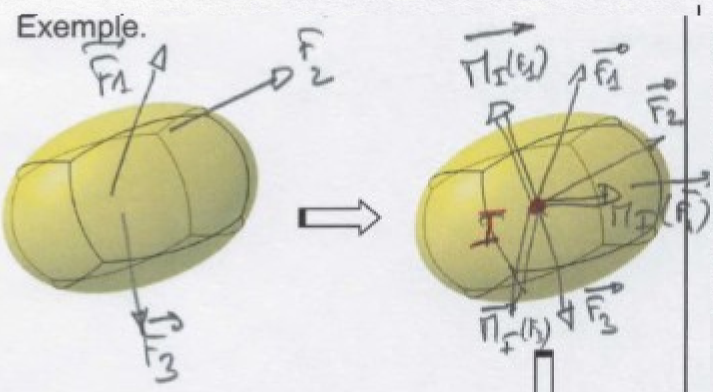
12 Systèmes de forces statiquement équivalents, torseur des actions mécaniques.

12.1 Systèmes de forces statiquement équivalents : définition.

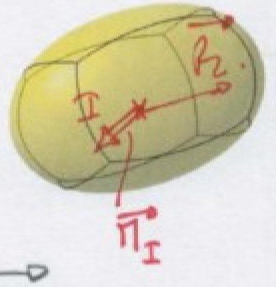
Deux systèmes de forces sont statiquement équivalents s'ils ont :

- même somme vectorielle (même résultante).
- même moment résultant

Exemple.



Tout syst de forces $\vec{F_1}$ a $\vec{F_n}$ peut se réduire à 1 syst de forces:



$$\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M_I}\end{matrix}\right\} \Big/ \begin{array}{l}\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}\\ \vec{M_I} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_I(\vec{F_i})}\end{array}$$

12.2 Torseur des actions mécaniques.

C'est un outil mathématique qui permet de décrire un état "d'action mécanique" en un point.

Il se note

$$\{\mathcal{T}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M_A}\end{matrix}\right\}$$

Le premier élément de réduction d'un torseur est appelé :

Le deuxième élément de réduction d'un torseur est appelé : moment résultant:
le vect dépend d'1 point
On associe le moment d'1 torseur au moment d'1 syst de fces.

Nous en déduisons donc l'expression du torseur des actions transmissibles en un point I.

$$\{\mathcal{T}\} = {}_I\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \vec{M_I}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\Sigma \vec{F_i}\\ \Sigma \overrightarrow{M_I(\vec{F_i})}\end{matrix}\right\}.$$

Exemple : actions de contact en A exercées par un solide 1 sur un solide 2.

$$\{\mathcal{T}_{1\to 2}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to 2}}\\ \overrightarrow{M_{A,1\to 2}}\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}X_{1\to 2} & L_{A,1\to 2}\\ Y_{1\to 2} & M_{A,1\to 2}\\ Z_{1\to 2} & N_{A,1\to 2}\end{matrix}\right\}_{\mathcal{B}}.$$

$:(x,y,z)$

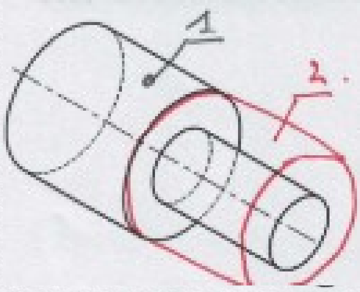
13 Torseur des actions transmissibles exercées par les liaisons usuelles.

13.1 Rappel sur les liaisons parfaites.

- surfaces de contact géom parfaite
- contacts sans jeu
- pas de frott.
- indéformable.

13.2 Exemple : torseur des actions transmissibles dans une liaison pivot.

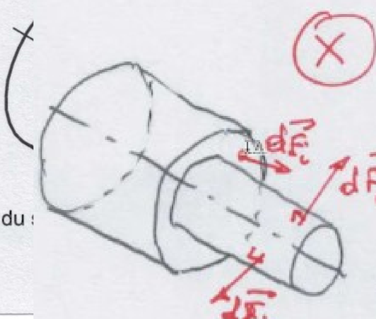
Question : détermination de la résultante des actions de contact de 1 sur 2 ?



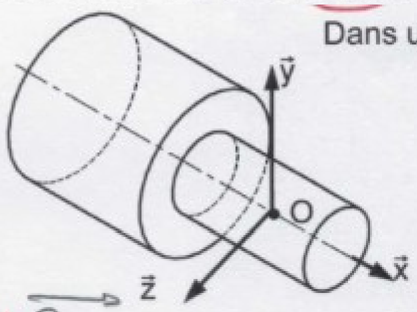
Ttes les actions sont ⊥ à la surf. de contact entre 1 et 2

es

e



Si on fait la somme de ttes ces actions élémentaires de contact on en



Dans une base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) :

$$\vec{R}_{1\to2} = X_{1\to2}\,\vec{x} + Y_{1\to2}\,\vec{y} + Z_{1\to2}\,\vec{z}$$

Conclusion :

La droite d'action de la résultante de ces forces ne passe pas nécessairement par O.

En général, on exprime cette résultante dans l'hypothèse où sa droite d'action passe par O. D'après le § **X**, si on veut que le système soit statiquement équivalent, on va voir apparaître un moment $\vec{M}_O$.de l'ensemble des actions de contact.

$\vec{M}_O$ a pour expression au point O dans une base ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) :

$$\overrightarrow{M_{O,1\to2}} = L_{O,1\to2}\,\vec{x} + M_{O,1\to2}\,\vec{y} + N_{O,1\to2}\,\vec{z}$$

Or, de par la distribution des actions de contact $d\vec{F}_i$ on en déduit que pour la liaison pivot :

$$L_{O,1\to2} = 0$$

D'où, l'expression du torseur des actions transmissibles par la liaison pivot :

$$\{\mathcal{T}_{12}\} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_{1\to2}} \\ \overrightarrow{M_{O,1\to2}}\end{matrix}\right\}_O = \left\{\begin{matrix} X_{1\to2} & 0 \\ Y_{1\to2} & M_{O,1\to2} \\ Z_{1\to2} & N_{O,1\to2}\end{matrix}\right\}_{O,\beta}$$

Remarques :

- Suivant la nature de la liaison, certaines composantes du torseur associé seront nulles,
- L'ensemble des composantes non nulles caractérise l'effort transmissible par la liaison,

Par exemple :

☞ Si une rotation est possible suivant l'axe x, dans le même temps, il n'y a pas de moment transmissible suivant cet axe, autrement dit :

☞ Même remarque avec les translations :

si T_y existe alors $Y = 0$