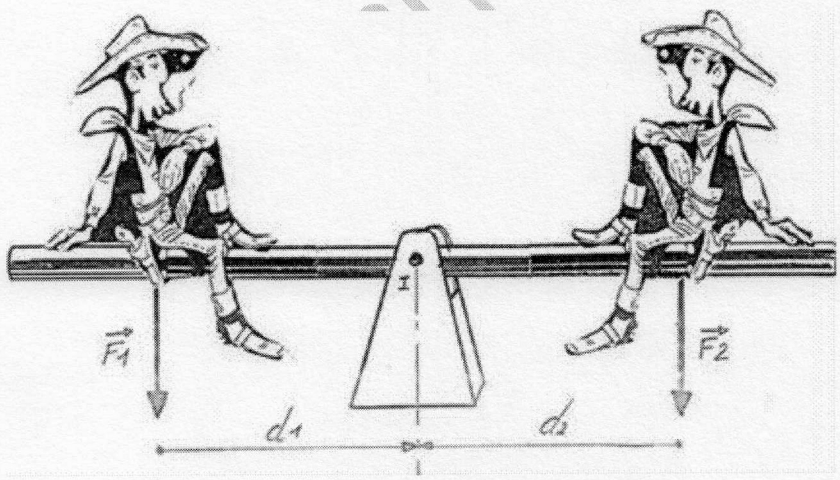
POLYTECH©
NANCY

Mécanique du solide indéformable I

Chapitre 4 : Principe fondamental de la statique

2ème année
Semestre 3



UNIVERSITÉ
DE LORRAINE

Sommaire

Principe fondamental de la statique

Méthodes analytiques

1 Quelques définitions.

1.1 Extérieur d'un système matériel, frontières d'isolement.

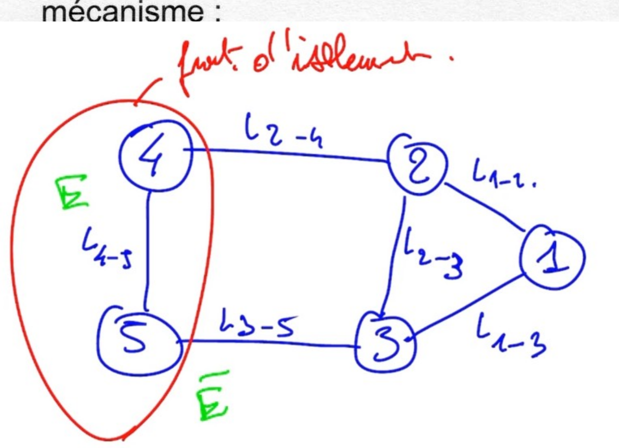
Extérieur d'un système matériel

Soit 1 syst. mat. noté E. L'ext. de E : $\overline{E}$ est tout ce qui n'est pas E, mais qui est susceptible d'exercer 1 action mécanique sur E.

Frontière d'isolement :

C'est la surface fermée qui sépare E de $\overline{E}$

Exemple pris sur un graphe de liaison d'un mécanisme :



La frontière d'isolement définie ci-dessus sépare : $E = \{4, 5\}$ de l'extérieur $\overline{E}$ = $\overline{E} = \{3, 2,$ action de pesanteur

1.2 Actions mécaniques extérieures et intérieures.

Une action mécanique extérieure au système E est une action mécanique "mise en œuvre de l'extérieur" $\overline{E}$.

Une action mécanique intérieure au système E est une action mécanique "s'exerçant mutuellement" entre deux éléments de E.

Exercice : Citer les actions mécaniques extérieures à E de l'exemple du § 1-1 :

- a.m. de 2 sur 4 (de 2 → E).
- a.m. de 3 sur 5 (de 3 → E).
- a.m. de pesanteur.

Citer également les actions mécaniques intérieures à E :

- a.m. 4 → 5.

2 Equilibre d'un système matériel.

Un système matériel E est en équilibre par rapport à un repère R si, au cours du temps, chaque point de E conserve 1 position fixe par rapp. au repère R.

3 Principe Fondamental de la Statique.

3.1 Enoncé :

Pour qu'un système matériel E, en équilibre par rapport a un repère galiléen sous l'effet de n actions mécaniques extérieures à E reste en équilibre, il faut et il suffit que : la somme des n torseurs représentant les actions méca. ext. à E soit égale au torseur n

Si $\overline{E}$ est l'extérieur de E, le PFS s'écrit :

∀ le point considéré

$$\{\mathcal{T}_1\} + \{\mathcal{T}_2\} + \dots + \{\mathcal{T}_n\} = \{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \{0\}$$

3.2 Remarques :

-En général, 1 repère fixe /à la terre peut être considéré comme 1 rep. gal.

-Le PFS est également valable si : il est exprimé /à 1 repère en translation rect. unif. /à 1 rep gal

IV Théorèmes généraux de la statique.

En écrivant qu'en tout point de l'espace, les éléments de réduction du torseur des actions mécaniques extérieures à E sont nuls, on obtient deux équations vectorielles appelées : Théo généraux de la statique

Si on pose :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{E}\to E}\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{\bar{E}\to E} \\ \vec{M}_{A,\bar{E}\to E} \end{matrix} \right\}_A$$

On en déduit les deux théorèmes suivants :

✡ Théorème de la résultante statique :

Pour 1 syst. mat E, en équil./1 rep gal., la résultante du torseur des actions méca. ext à E est nulle.

d'où $\boxed{\vec{R}_{\bar{E}\to E} = \vec{0}}$

✡ Théorème du moment statique :

Le moment résultant du torseur ... nulle

d'où $\boxed{\vec{M}_{A,\bar{E}\to E} = \vec{0}}$

Remarques :

- l'application du PFS à un système matériel conduit à écrire deux équations vectorielles, dont les projections sur une base orthonormée directe donnent au maximum :

- 6 équations scalaires indépendantes dans l'espace
- 3 équations scalaires — " — dans le cas où tts les actions se situent ds 1 plan

- pour les problèmes à deux dimensions, on utilisera les théorèmes généraux pour appliquer le PFS,

- pour les problèmes à trois dimensions, on utilisera les torseurs pour appliquer le PFS.

<u>Méthode graphique</u>

4 Introduction.

C'est la méthode de recherche des actions inconnues dans un mécanisme qui est la plus facile à mettre en œuvre et c'est celle qui amène le moins d'erreurs dans les solutions.

Cependant, elle exige des figures tracées à une échelle connue et un minimum de soin apporté aux tracés pour obtenir de bons résultats.

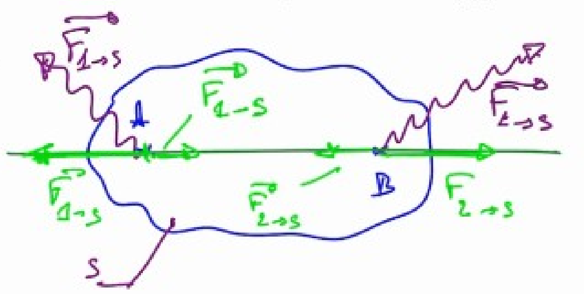
5 Hypothèses.

-Nous étudierons : ttes des solides immobiles. ou en TRU afin de pouvoir leur appliquer le PFS

-Toutes les résultantes (forces ou glisseur) considérés Seront tous coplanaires.

6 Cas des solides en équilibre sous l'action de deux glisseurs.

Soit un solide S en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de deux forces (résultantes ou glisseurs) $\overrightarrow{F_{1\to S}}$ et $\overrightarrow{F_{2\to S}}$.



Le PFS appliqué à S s'écrit : en A.

$$\overrightarrow{M_{A,2\to S}} = \cancel{\overrightarrow{M_{B,2\to S}}} + \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_{2\to S}}$$

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} = \{0\}.$$

$$_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{1\to S}}\\ \vec{0}\end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{2\to S}}\\ \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{R_{2\to S}}\end{Bmatrix} = \{0\}.$$

L'équilibre de S se traduit, au point A, par

$$\overrightarrow{F_{1\to S}} + \overrightarrow{F_{2\to S}} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F_{2\to S}} = \vec{0} \qquad (2)$$

La deuxième équation indique que : $\overrightarrow{F_{2\to S}}$ et $\overrightarrow{AB}$ ont m̂ direction ($\overrightarrow{F_{2\to S}}$ a pour support (AB))

La première équation montre que : $\overrightarrow{F_{1\to S}} = -\overrightarrow{F_{2\to S}}$ donc $\overrightarrow{F_{1\to S}}$ a également pour support la droite (AB)

D'où le théorème suivant :

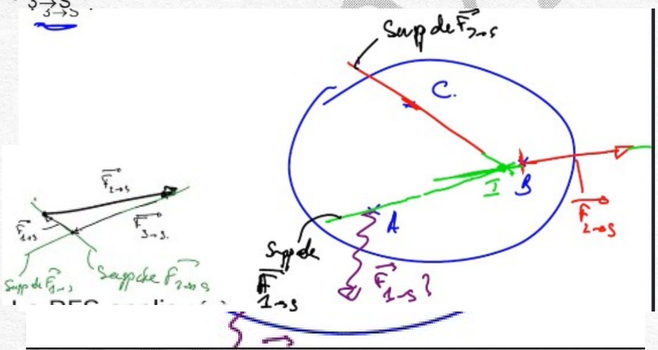
Théorème :

Si un solide est en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de deux forces, ces forces sont :

- égales en normes,
- direct° opposée sur 1 m̂ support. (ou dite direction)

7 Cas des solides en équilibre sous l'action de trois glisseurs (de support non parallèles).

Soit un solide S en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de trois forces (résultantes ou glisseurs) $\overrightarrow{F_{1\to S}}$, $\overrightarrow{F_{2\to S}}$, $\overrightarrow{F_{3\to S}}$.



Le PFS appliqué à S s'écrit :

$$\{\mathcal{T}_{\bar{S}\to S}\} = \{0\}.$$

$$_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{1\to S}}\\ 0\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{2\to S}}\\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F_{2\to S}}\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{3\to S}}\\ \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{F_{3\to S}}\end{Bmatrix} = \{0\}$$

L'équilibre de S se traduit, au point A, par les deux équations vectorielles :

$$\overrightarrow{F_{1\to S}} + \overrightarrow{F_{2\to S}} + \overrightarrow{F_{3\to S}} = \vec{0} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F_{2\to S}} + \overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{F_{3\to S}} = \vec{0} \qquad (2)$$

le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{F_{2\to S}}$ est $\perp$ au plan $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{F_{2\to S}})$.

le vect. $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{F_{3\to S}}$ ——— $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{F_{3\to S}})$.

La deuxième équation indique que : ces 2 vecteurs sont opposés. Donc $\overrightarrow{F_{2\to S}}$ et $\overrightarrow{F_{3\to S}}$ sont néc. dans le m̂ plan (ABC).

Par conséquence, on en déduit avec la 1re équation que $\overrightarrow{F_{1\to S}}$ est égalt dans le plan (ABC)

On démontrerait, de plus, que les trois supports des forces sont tous les trois concourants en un même point I.

D'où le théorème suivant :

Théorème :

Si un solide est en équilibre par rapport à un repère galiléen sous l'action de trois forces, ces forces sont :

- coplanaires
- leurs supports sont concourants en 1 m pt I
- leur somme vectorielle est nul