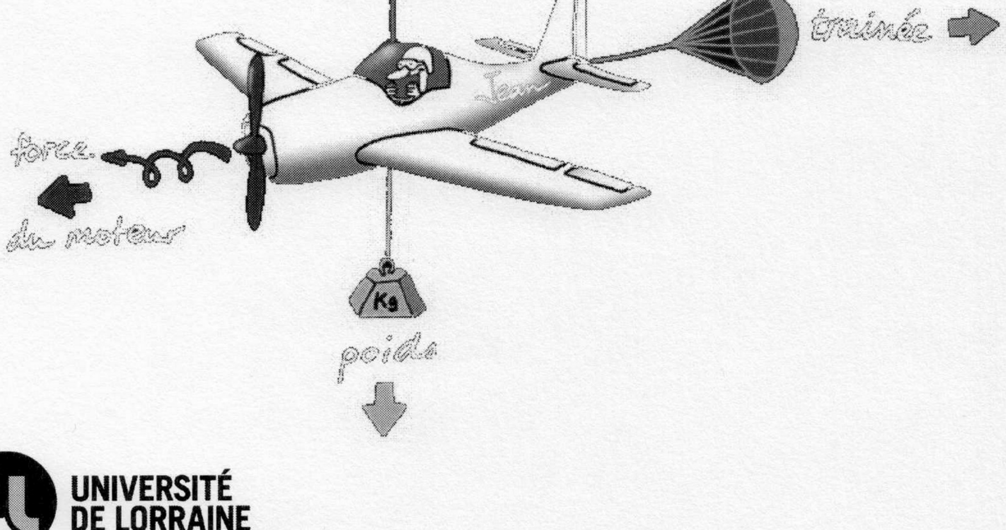
Mécanique du solide indéformable I

Chapitre 3 : Modélisation des actions mécaniques, Compléments.



2ème année
Semestre 3

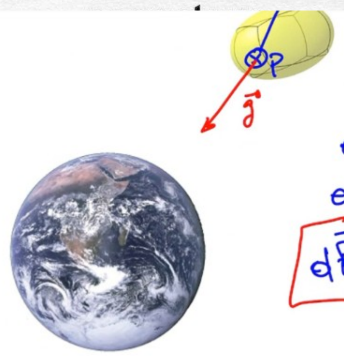
Table des matières

Modélisation des actions mécaniques, compléments

1 Modélisation locale des actions mécaniques.

La modélisation locale a pour but d'étudier l'action mécanique dans la zone où elle s'exerce (champ de pesanteur, champ de pression de contact, champ de contraintes à l'intérieur d'un matériau…)

1.1 Action mécanique de



le poids du volume élémentaire a pour expression :

$$\boxed{d\vec{F}_p = \vec{g} \times dm = \rho\, \vec{g}\, dV}$$

ρ : masse volumique

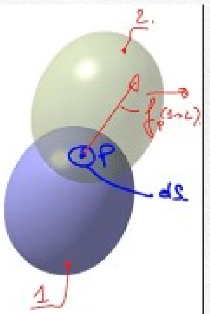
Remarque :
Le champ de pesanteur est considéré comme uniforme dans une région localisée de l'espace.

1.2 Action mécanique de contact

Tout contact entre deux solides a toujours lieu suivant une surface S, aussi petite soit-elle.

$\vec{f}_p(1\to2)$ représente une densité surfacique de force

$$\underbrace{d\vec{F}_p(1\to2)}_{N} = \underbrace{\vec{f}_p(1\to2)}_{N/m^2} \times \underbrace{dS}_{m^2}$$



2 Modélisation globale des actions mécaniques.

2.1 Représentation torsorielle :

$$\{\mathcal{T}_{1\to2}\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}_{1\to2} \\ \vec{M}_{A,1\to2}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\int_{P\in2} d\vec{F}_p(1\to2) \\ \int_{P\in2} \vec{AP}\wedge d\vec{F}_p(1\to2)\end{matrix}\right\}_A$$

$$= \left\{\begin{matrix}\int_{P\in2} \vec{f}_p(1\to2)\, d\mu \\ \int_{P\in2} \vec{AP}\wedge \vec{f}_p(1\to2)\, d\end{matrix}\right\}_A$$

Remarque : la connaissance des éléments de réduction du torseur d'action mécanique ne permet pas la détermination de la densité du champ associé, sauf si la loi de répartition est connue.

2.2 Action mécanique de pesanteur.

Soit un ensemble matériel 1 de masse m.

$$\{\mathcal{T}_{poids}\} = \left\{\begin{matrix}\vec{R}_{p\to1} \\ \vec{M}_{A,p\to1}\end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix}\int_{P\in1} \vec{g}\, dm \\ \int_{P\in1} \vec{AP}\wedge\vec{g}\, dm\end{matrix}\right\}_A$$

On démontre que le même torseur, écrit au centre de gravité G de 1 prends la forme :

$$\boxed{\{\mathcal{T}_{poids}\} = \left\{\begin{matrix} m\vec{g} \\ \vec{0}\end{matrix}\right\}_G}$$

3 Opérations et propriétés sur les torseurs (valable quelque soit le type).

3.1 Egalité

Deux torseurs sont égaux, s'ils ont : m̂ éléments de réduction en 1 m̂ pt

3.2 Invariant du torseur

Entre deux points A & B de l'espace, on démontre qu'il est possible de trouver deux invariants du torseur $\{\mathcal{T}\}$: $\{\mathcal{T}\}$

- premier invariant :

la résultante $\vec{R}$

- second invariant :

$$\boxed{\vec{R}\cdot\vec{M_B} = \vec{R}\cdot\vec{M_A}}$$

3.3 Champ de moment d'un torseur, formule caractéristique :

$\forall A, \forall B$

$$\vec{M_B} = \vec{M_A} + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

3.4 Opération sur les torseurs

3.4.1 Addition

$$\{\mathcal{T}\} + \{\mathcal{T}'\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{R}+\vec{R}' \\ \vec{M_A}+\vec{M'_A}\end{array}\right\}_A$$

3.4.2 Multiplication par un réel

$\lambda \in \mathbb{R}$

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{R} \\ \vec{M_A}\end{array}\right\}_A \rightarrow \lambda\{\mathcal{T}\} = \left\{\begin{array}{c}\lambda\vec{R} \\ \lambda\vec{M_A}\end{array}\right\}_A$$

4 Torseurs particuliers :

4.1 Torseur couple

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{0} \\ \vec{M_A}\end{array}\right\}$$ avec $\vec{M}$

4.2 Torseur résultante (torseur glisseur)

$$\{\mathcal{T}\} = \left\{\begin{array}{c}\vec{R} \\ \vec{0}\end{array}\right\}_A$$

4.3 Co-moment de deux torseurs

Soient deux torseurs $\{\mathcal{T}\}$ & $\{\mathcal{T}'\}$ définis en un même point A.

Définition

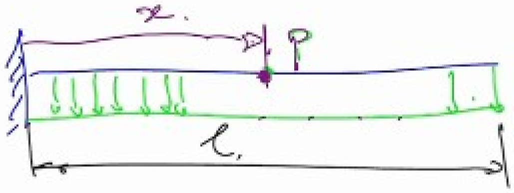
la produit des 2 torseurs $\{\mathcal{T}\}$ et $\{\mathcal{T}'\}$ définis au m̂ p A :

$$\{\mathcal{T}\} \otimes \{\mathcal{T}'\} = R.$$

Propriété

- comoment est commutatif
- indépendant du point considéré

5 Applications



$\vec{F}(P) = -f\vec{y}$ $dm \to dx$

N/m N/m

$$\vec{R} = \int_0^l \cdots\cdots = -fl\vec{y}$$

$$\vec{M}_A = \int_0^l \cdots\cdots = -\frac{1}{2} f l^2 \vec{z}$$