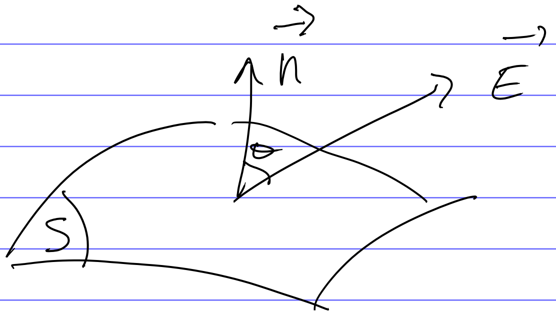
III Théorème de Gauss

1) Flux du champ électrique

Le flux est l'intégrale du champ $\vec{E}$ normal à la surface traversée sur cette même surface traversée

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$$

$\vec{n}$: normale à la surface



le flux électrique est proportionnel à 1 quantité de charge

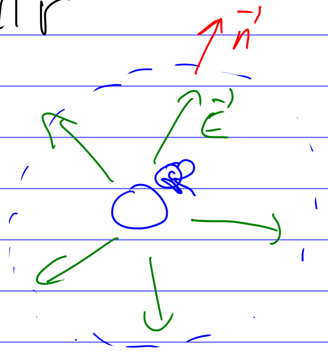
Démo : $\iint \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = E \iint dS$

si $\vec{E}$ constant et $\perp$ à la surface S

Si la surface S est sphérique

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times 4\pi r^2$$

$$= \frac{Q}{\varepsilon_0}$$



2) Théorème de Gauss

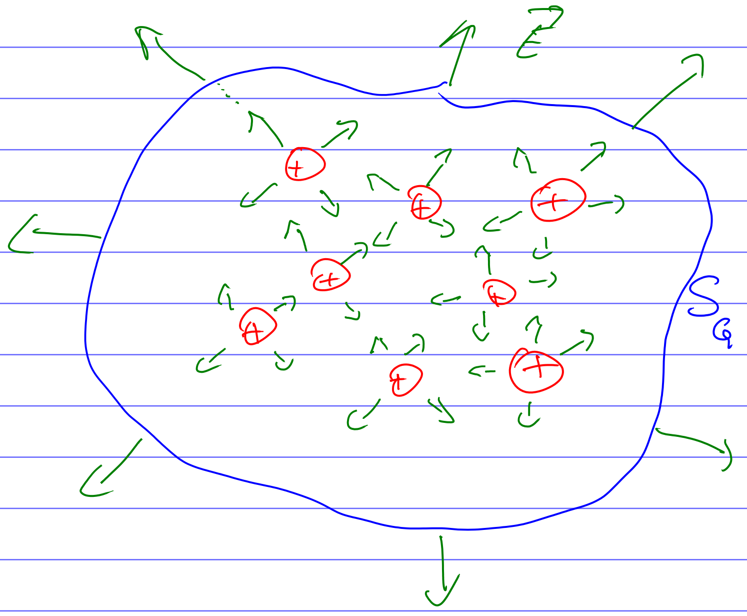
A partir du flux : $Q_{int} = \iiint \rho \, d\tau$

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} d\tau$$

$\iint \sigma \, dS$

S_G : surface de Gauss fermée

Q_{int} : $\sum q_{int}$ = toutes les charges à l'intérieur de la surface de Gauss



Du théorème de Gauss on peut déduire l'équation de Poisson qui est la première des équations réunies par James Clerk Maxwell.

$\Rightarrow$ Th de Green Ostrogradsky
(voir chapitre 2 du Poly)

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

$\vec{E} \cdot \vec{n} \, dS$ $\quad$ $\mathrm{div}\,(\vec{E})$

$$\vec{n} \, dS \equiv \vec{dS} \qquad \vec{\nabla} \cdot \equiv \vec{\mathrm{div}}$$

or

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \, d\tau$$

donc $\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ Eq. de Poisson

On peut aussi montrer que la circulation du champ $\vec{E}$ sur 1 contour fermé est nulle d'après le théorème de Stockes

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} = \iint \vec{\nabla}\wedge\vec{E}\cdot\vec{dS}$$

$$= \iint \vec{\nabla}\wedge(-\vec{\nabla}V)\cdot\vec{dS}$$

or $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}V) = \vec{0}$

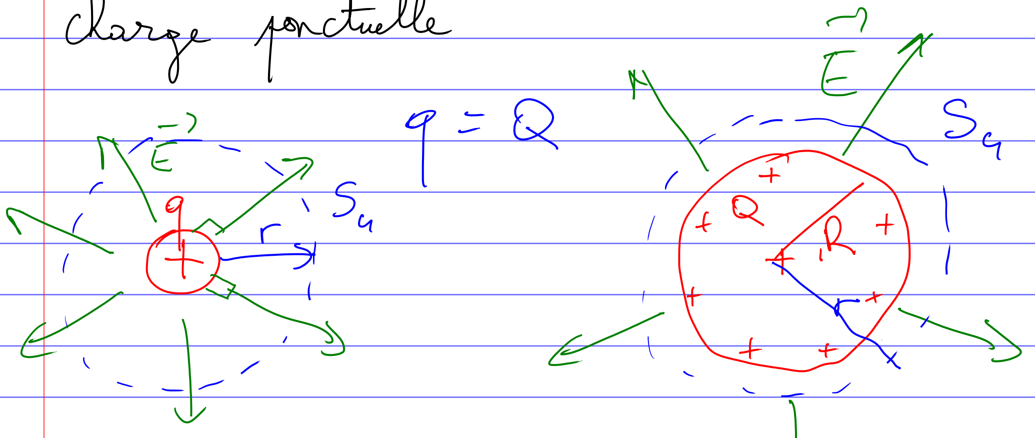
donc $$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot\vec{dl} = 0$$

Loi champ dérivant du potentiel :

$\boxed{\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = \vec{0}}$ en statique

Exemple d'application du théorème de Gauss ⇒ Equivalence entre le champ rayonné par 1 charge ponctuelle et 1 sphère chargée.

charge ponctuelle



S_G de rayon $r > R$

Les champs $\vec{E}$ pour $r > R$ sont les mêmes pour la charge ponctuelle et la sphère chargée à condition qu'elles possèdent la même charge.

Pour l charge ponctuelle

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$$

Pour l sphère chargée Q de rayon R

th. de Gauss :

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$E = \text{cste}$ à r donné

et $\vec{E} \parallel \vec{dS}$ pour l surface de Gauss sphérique

$$E \oiint dS = E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$

pareil

$q = Q$

Pour appliquer facilement le th. de Gauss, on procèdera toujours de la même façon :

1) On écrit $\oiint_{S_G} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

2) On choisit 1 surface de Gauss qui vérifie

a) $\|\vec{E}\|$ = cste sur S_G

b) $\vec{E} \,//\, \vec{dS}$ sur S_G

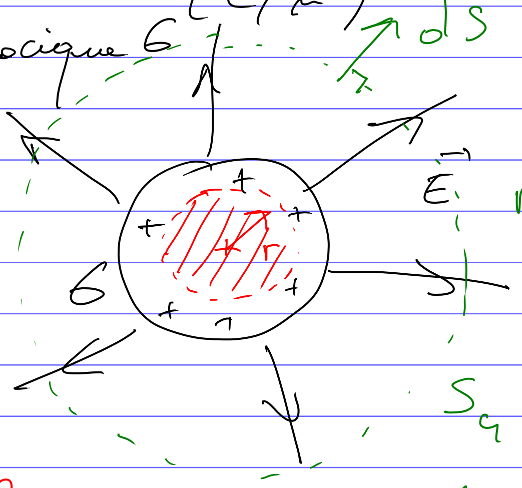
3) On peut alors écrire

$$E \oiint_{S_G} dS = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

et donc $\|\vec{E}\| = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0 \oiint dS}$

On déduit donc $\|\vec{E}\|$, la norme de E sachant qu'on connaît déjà sa direction et son sens.

charge surfacique σ (C/m²)



$r > R$

$r < R$

$E = cste$

$\vec{E} \, // \, \vec{dS}$

$$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0 \oiint dS} = \frac{Q_{int}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= 0$$

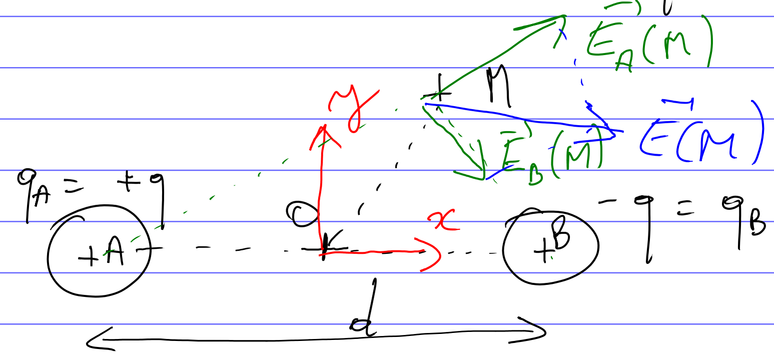
$Q_{int} = 0$

le champ $E_{int} = 0$

à l'intérieur de la sphère chargée

IV Dipôle électrostatique

1) Doublet électrostatique



$$\vec{E}(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AM}}{AM^3} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{BM}}{BM^3}$$

vecteur

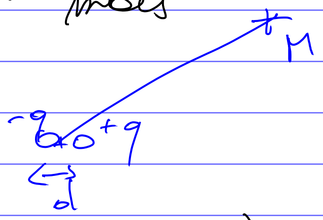
et

$$V(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 BM}$$

scalaire

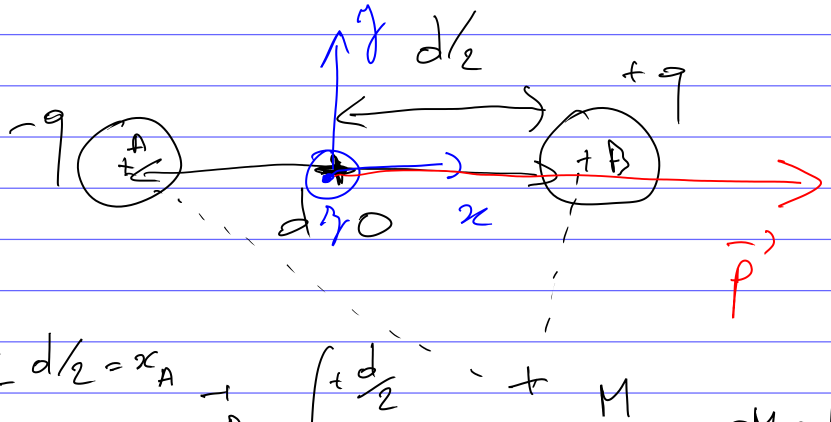
2) Dipôle électrostatique

$\Rightarrow$ pareil que le doublet mais pour $\boxed{d \ll OM}$



Soit $M(x, y, z)$, $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$

Schéma :



$\vec{OA} = \begin{pmatrix} -d/2 = x_A \\ 0 = y_A \\ 0 = z_A \end{pmatrix}$ $\vec{OB} = \begin{pmatrix} +d/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Calcul du potentiel du dipôle :

$$V(M) = V_A(M) + V_B(M)$$

$$= \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AM} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 BM}$$

$$AM = \sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}$$

$$= \sqrt{\left(x+d/2\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$$BM = \sqrt{\left(x-d/2\right)^2 + y^2 + z^2}$$

$d \ll OM$

$$AM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + xd + \frac{d^2}{4}}$$

$$r^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$AM = \sqrt{r^2 + xd + \frac{d^2}{4}}$$

$$= r\sqrt{1 + \frac{xd}{r^2} + \underbrace{\cancel{\frac{d^2}{4r^2}}}_{d \ll r}} \to 0$$

$$V(M) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1 + \frac{xd}{r^2}}} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r\sqrt{1 - \frac{xd}{r^2}}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{xd}{r^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1+X}}$$

$X \to 0$ car $\frac{xd}{r^2}$ proche de 0

car $d \ll r$

DL de $\frac{1}{\sqrt{1+X}}$ $= 1 - \frac{X}{2}$
$X \to 0$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{xd}{r^2}}} = 1 - \frac{xd}{2r^2}$$

au 1^{er} ordre

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-1}{r}\left(1-\frac{xd}{2r^2}\right) + \frac{1}{r}\left(1+\frac{xd}{2r^2}\right)\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\cancel{-1} + \frac{xd}{2r^2} + \cancel{1} + \frac{xd}{2r^2}\right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\,\frac{\cancel{2}xd}{\cancel{2}r^2} = \boxed{\frac{qxd}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

On introduit la notion de moment dipolaire = charge × distance

$\boxed{\vec{p}} = q\,\vec{AB}$ est le moment dipolaire du dipôle AB $(C \cdot m)$

On généralise l'expression du potentiel du dipôle :

$$q\,d\,x = \vec{p} \cdot \vec{OM} = q\,\vec{AB} \cdot \vec{OM}$$

$$= q \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc

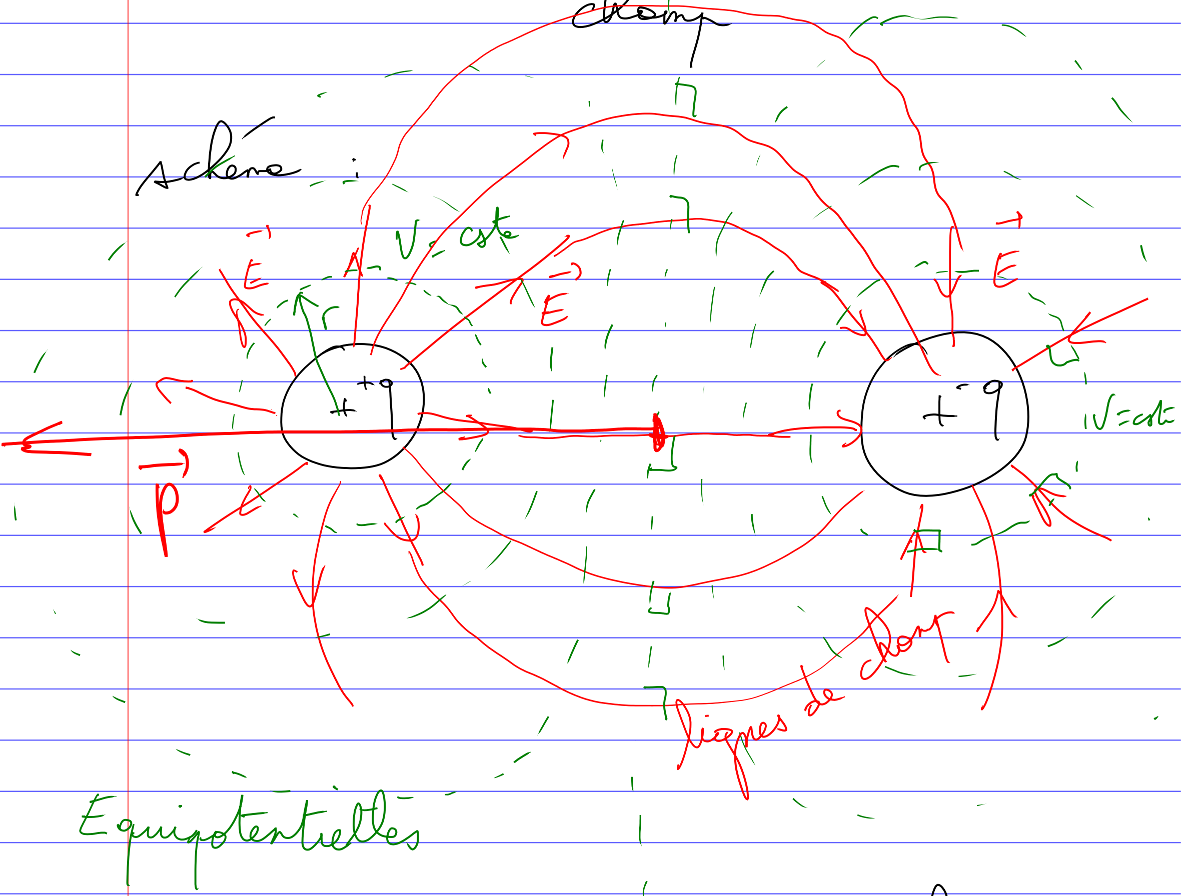
$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\varepsilon_0\, OM^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\, r^3}$$

$$= \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

Pour 1 dipôle $V(M) \propto \frac{1}{r^2}$

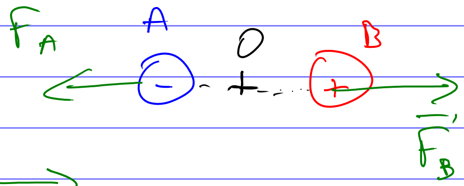
3) Equipotentielles et lignes de champ

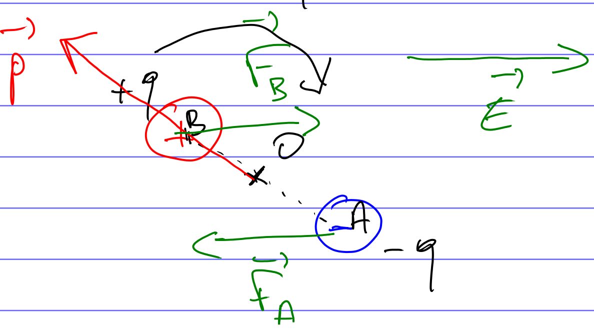
schéma :



4) Force et Moment de force

Soit 1 dipôle :





$$\vec{F_A} = q_A \vec{E} = q\vec{E}$$

$$\vec{F_B} = -q\vec{E}$$

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F_A} + \vec{F_B} = \vec{0}$$

$$= q(\vec{E} - \vec{E}) = \vec{0}$$

Mais le moment :

$$\Sigma \vec{\mathcal{M}} = \vec{\mathcal{M}}(A) + \vec{\mathcal{M}}(B)$$

$$= \vec{OA} \wedge \vec{F}_A + \vec{OB} \wedge \vec{F}_B$$

$$= \vec{OA} \wedge (-q\vec{E}) + \vec{OB} \wedge (q\vec{E})$$

$$= (\vec{AO} + \vec{OB}) \wedge (q\vec{E})$$

$$= \underbrace{q\,\vec{AB}}_{\vec{p}} \wedge \vec{E} = \vec{p} \wedge \vec{E} \neq 0$$

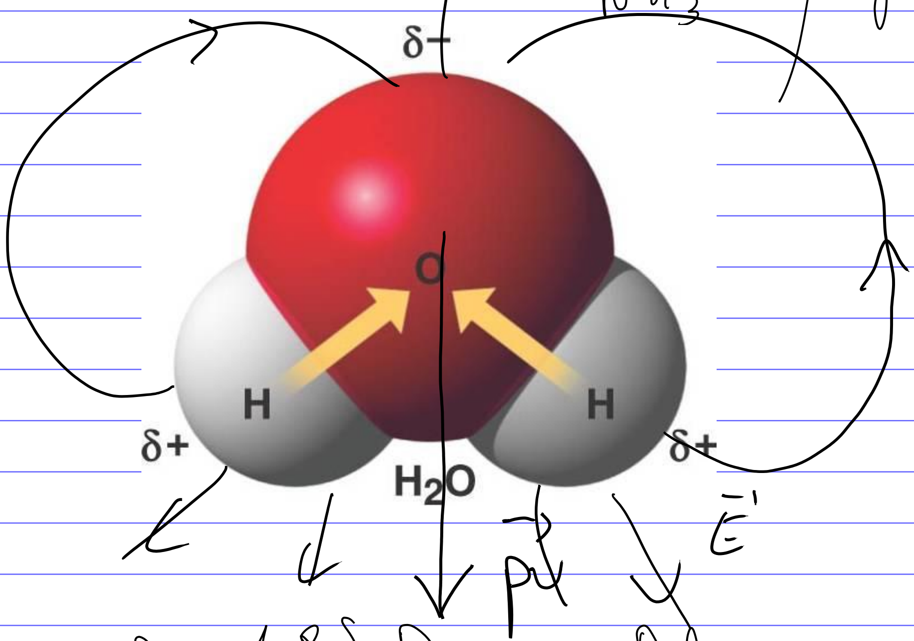
$\Rightarrow$ rotation et orientation du dipôle le long du champ $\vec{E}$.

5) Exemples de dipôles

$\rightarrow$ molécule d'eau H_2O

HCl gaz

NH_3



$p = 1{,}85\ D$ Debye

$$1\,D = \frac{1}{3} \cdot 10^{-29}\ C \cdot m$$

$$O = C = O$$

$$p = 0$$

cristaux liquides (LCD)