# Mathématiques 2A S3, TD2

2020/2021

**Exercice 1 - Calculer les intégrales suivantes.**

1. $\displaystyle\iint_{[0,1]\times[-2,0]} \sin(3x-2y)dxdy$
2. $\displaystyle\iint_{[-1,0]\times[1,2]} y\cos(xy)dxdy$
3. $\displaystyle\iint_{[0,2]\times[0,1]} e^{x+y}dxdy$
4. $\displaystyle\iint_{[1,2]\times[2,3]} \frac{1}{1+x+y}dxdy$
5. $\displaystyle\iint_{[3,4]\times[1,2]} e^x\cos(e^x+y)dxdy$

**Exercice 2 - Calculer les intégrales suivantes et représenter le domaine $D$.**

1. $\displaystyle\iint_D xy^2dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in[0,1],\ x^2\leq y\leq\sqrt{x}\}$.
2. $\displaystyle\iint_D \cos(2x+y)dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in[1,2],\ y\leq x\leq 2y\}$.
3. $\displaystyle\iint_D e^{-x-y}dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in[0,1]^2\ x\leq y\}$.

**Exercice 3 - Calculer les intégrales suivantes et représenter le domaine $D$.**

1. $\displaystyle\iint_D xydxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 4\}$.
2. $\displaystyle\iint_D x^2dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\leq 0\}$.
3. $\displaystyle\iint_D ydxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 3,\ xy\geq 0\}$.
4. $\displaystyle\iint_D \cos(x^2+y^2)dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2,\ 0\leq y\leq x\}$.
5. $\displaystyle\iint_D e^{-x^2-y^2}dxdy$, avec $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4,\ y\geq 0\}$.

**Exercice 4 - Calculer les intégrales suivantes.**

1. $\displaystyle\iiint_{[1,2]\times[-1,1]\times[0,3]} \cos(x+3y-z)dxdydz.$

2. $\displaystyle\iiint_D xy^2zdxdydz$, avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid yz \leq x \leq z,\ 0 \leq y \leq z,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

3. $\displaystyle\iiint_D \sin(x^2+y^2+z)dxdydz$, avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$.

4. $\displaystyle\iiint_D xydxdydz$, avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ x \leq 0,\ y \geq 0\}$.

5. $\displaystyle\iiint_D z^2dxdydz$, avec $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

**Exercice 5.** Calculer par deux méthodes différentes l'aire de la surface délimitée par l'ellipse $E$ paramétrée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos(t) \\ y(t) = b\sin(t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],\ a, b \in \mathbb{R}_+^*.$$

**Exercice 6.** Calculer par deux méthodes différentes l'intégrale curviligne

$$\int_\gamma y^2dx - 3xydy,$$

où $\gamma$ est une paramétrisation du cercle de rayon 3 ayant pour centre l'origine, dans le sens trigonométrique.

**Exercice 7.** Calculer l'aire de la surface de $\mathbb{R}^2$ délimitée par le chemin

$$\gamma : \begin{cases} x(t) = (\pi^2 - t^2)\cos(t) \\ y(t) = (\pi^2 - t^2)\sin(t), \end{cases} \quad t \in [-\pi, \pi].$$

**Exercice 8.** On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit $s \in ]0,1]$, soit $t \in \mathbb{R}$ et soit $D$ le domaine donné par

$$D_s := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ s^2 \leq x^2+y^2 \leq 1\}.$$

1. Représenter le domaine $D$.

2. Calculer
$$\lim_{s\to 0} \iint_{D_s} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy.$$

3. Pour quelles valeurs de $t$ a-ton que
$$\lim_{s\to 0} \iint_{D_s} \frac{1}{x^2+y^2)^t}dxdy \text{ existe et est finie ?}$$

**Exercice 9.** On se place dans $\mathbb{R}^2$.
Soit $K > 0$. Déterminer le centre de gravité de la surface homogène donnée par

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y \geq 0, y^2 \leq 4x,\ 0 \leq x \leq K\}$$

**Exercice 10.** On se place en dimension trois.

1. Calculer le volume de la boule de rayon $R > 0$.

2. Calculer le centre de gravité d'une demi-boule homogène de rayon $R > 0$.

**Exercice 11.** On se place dans $\mathbb{R}^2$. Soit $C_R$ le carré centré en l'origine, de coté $R > 0$. Soit $D_R$ le disque centré en l'origine de rayon $R > 0$. Dans cet exercice, on se propose de calculer

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx.$$

1. On pose $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$. Calculer

$$\int_{D_R} f(x,y)dxdy, \quad \text{et} \int_{D_{\sqrt{2}R}} f(x,y)dxdy.$$

2. Justifier les inégalités suivantes :

$$\int_{D_R} f(x,y)dxdy \leq \int_{C_R} f(x,y)dxdy \leq \int_{D_{\sqrt{2}R}} f(x,y)dxdy$$

3. En déduire que $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}dx$ existe et en déduire sa limite.