

# Electromagnétisme

ESSTIN 2e année

30 septembre 2019



# Chapitre 1

## Introduction

Dès l'antiquité (VIIe siècle avant Jésus Christ) le frottement de l'ambre jaune permettait d'attirer de petits objets. Les premières manifestations de l'électricité ou de l'électron (= ambre en grec) furent ainsi observées. La première machine électrostatique fut inventée par Otto de Guericke (1602-1686) qui se composait d'un globe de soufre mis en rotation par une manivelle en bois et frotté à la main. Suivit le pendule électrostatique construit par Dufay (1698-1739) et constitué d'une boule de moelle de sureau suspendue à un fil. Enfin Benjamin Franklin (1706-1790) dont le célèbre cerf-volant captant un éclair durant un orage permit de démontrer la nature électrique de ceux-ci, expérience qui conduisit à l'invention du paratonnerre. En 1785 Coulomb (1736-1806) découvrit la loi du même nom décrivant l'interaction électrostatique élémentaire. Ses recherches furent poursuivies par Laplace (1749-1827), Gauss (1777-1855) et Poisson (1781-1840) dont les noms sont aujourd'hui bien connues au travers de leurs théorèmes. Faraday (1791-1867) introduisit la notion d'influence électrostatique et plus généralement de champ qui s'avèrera fort utile par la suite, notamment pour Maxwell (1831-1879) dont les travaux permirent d'unifier électricité et magnétisme au sein d'un même groupe d'équation : les équations de Maxwell. Les étapes suivantes furent la découverte de l'électron (1897 par Thompson), de la charge élémentaire (1910 par Millikan) et des milieux électriques. Ces recherches sur l'électron menèrent aux fondations de l'atome avec le modèle de Rutherford (1911) puis le plus célèbre modèle de Bohr qui incluait les premiers résultats de mécanique quantique (orbites quantifiées).

Si les équations de Maxwell constituent le socle de l'électromagnétisme et permettent de décrire la plupart des phénomènes électriques observables, elles ne sont néanmoins plus adaptées aux petites échelles de longueur lorsque les tailles d'objet sont de l'ordre de la longueur d'onde du rayonnement. A ces échelles il faut recourir à la mécanique quantique. Mais une théorie plus générale appelée la théorie quantique des champs permet d'unifier les 2 précédentes et a commencé à être élaborée dans les années 20 pour être raffinée au cours des années jusqu'à la renormalisation de Richard Feynmann dans les années 40 qui permit de grandes avancées dans le domaine et aida à l'établissement de l'électrodynamique quantique. Cette branche de la théorie quantique des champs a notamment démontré sa validité en vérifiant la constante de structure fine à 13 chiffres significatifs près, soit la validation la plus précise de l'histoire de la physique.

Ce cours n'est en rien destiné à la compréhension de toute la physique du modèle standard qui reste un des domaines de la physique fondamentale les plus actifs, mais plutôt d'échafauder les premières briques de l'électromagnétisme. Ces premières briques sont aux nombres de 2 : l'électrostatique (chapitre 3) et la magnétostatique (chapitre 4). Elles regroupent tous les phénomènes électriques et magnétiques statiques, donc au repos. Pour étudier les phénomènes variant dans le temps, il faut recourir à l'électrodynamique. Ainsi quelques notions seront abordées comme l'induction magnétique (chapitre 5) dont les applications sont innombrables dans notre vie quotidienne (cf cours électrotechnique). Le dernier chapitre sera consacré aux équations de Maxwell (chapitre 6) qui parachèvent la théorie de l'électromagnétisme classique en

réunifiant tous les effets statiques et dynamiques des charges par l'introduction du courant de déplacement. Il est d'ailleurs intéressant de noter que ces équations sont à l'origine de la théorie de la relativité dont les équations ont d'abord été formulées par Lorentz et Poincaré puis interprétées et généralisées par Einstein. En effet les équations de Maxwell sont invariantes quel que soit le référentiel ainsi que la vitesse de la lumière  $c$  qui constitue la base du raisonnement d'Einstein dans sa théorie de la relativité restreinte (1905) et générale (1915). L'invariance de  $c$  a été démontrée dans la célèbre expérience de Michelson-Morley (1887) dont l'interféromètre ne permet pas de mesurer la vitesse de la Terre par rapport à l'éther (cf optique ondulatoire 3e année).

Ce cours a été largement inspiré par les ouvrages indiqués ci-dessous, dans lesquels vous pourrez trouver des démonstrations plus exhaustives ainsi que de nombreux exercices similaires à ceux des TD :

**Le cours de physique de Feynman : Electromagnétisme 1 et 2**, Auteurs : *Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands*, Ed. Dunod

**Electromagnétisme 1, 2, 3 et 4**, Auteurs : *Michel Bertin, Jean-Pierre Faroux, Jacques Renault*, Ed. Dunod Université

**Electromagnétisme 1 et 2**, Auteur : *Daniel Cordier*, Ed. Dunod

## Chapitre 2

# Outils mathématiques

Avant d'entrer dans des réflexions d'ordre physique, il est bon de rappeler quelques notions de mathématiques très utiles voire indispensables dans la compréhension et le traitement de nos futurs problèmes de physique. La physique théorique doit avoir à sa disposition des objets mathématiques capables de retranscrire rigoureusement les notions abstraites nécessaires dans la compréhension de phénomènes nouveaux. Ainsi a-t-on besoin pour étudier une trajectoire d'un repère composé de vecteurs. A ces vecteurs sont associés divers opérateurs comme la dérivée et l'intégrale qui peuvent aussi s'appliquer à des grandeurs scalaires.

Ce chapitre est donc divisé en 3 parties, la première consacrée aux différents systèmes de coordonnées, la seconde au calcul différentiel et la troisième au calcul vectoriel intégral.

### 2.1 Systèmes de coordonnées

#### 2.1.1 Coordonnées cartésiennes

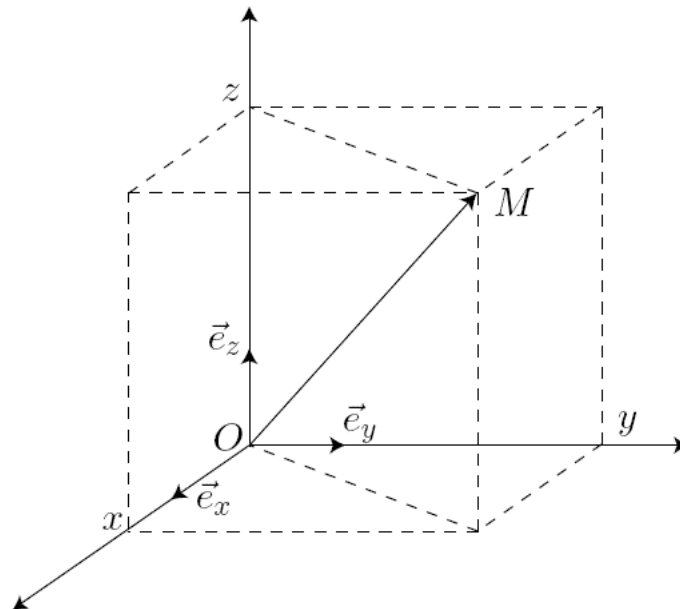


FIGURE 2.1 –

### 2.1.2 Coordonnées cylindriques

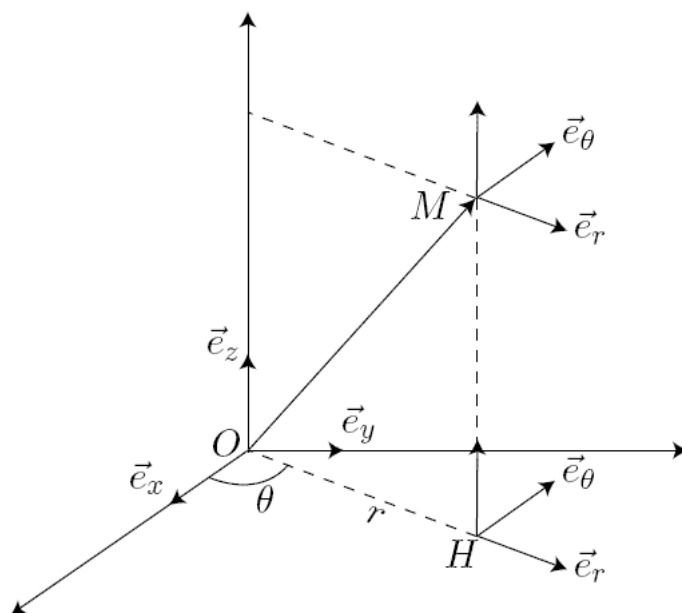


FIGURE 2.2 –

Équivalence entre coordonnées cylindriques et cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.\cos(\theta) \\ r.\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$

### 2.1.3 Coordonnées sphériques

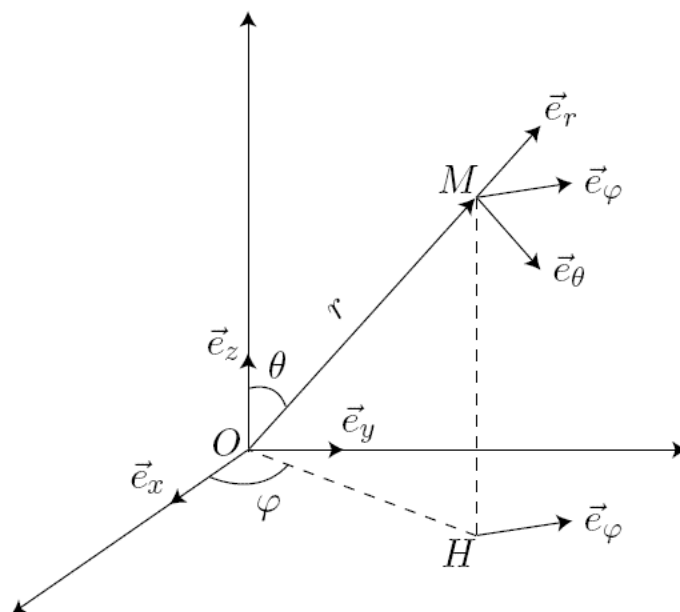


FIGURE 2.3 –

Équivalence entre coordonnées sphériques et cartésiennes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r.\sin(\theta).\cos(\varphi) \\ r.\sin(\theta).\sin(\varphi) \\ r.\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

## 2.2 Calcul différentiel

Le calcul différentiel permet d'évaluer les variations d'un scalaire ou d'un vecteur par rapport à 1 ou plusieurs variables. Il existe 3 opérateurs différentiels dans l'espace : les opérateurs **gradient**, **divergence** et **rotationnel**. Mais avant d'aborder ces notions, nous rappellerons la dérivée d'une grandeur scalaire.

### 2.2.1 Dériver un scalaire

Un scalaire est défini par un seul nombre. Dans les chapitres suivant nous pourrons rencontrer des champs scalaires, c'est à dire une grandeur définie en plusieurs points de l'espace par un nombre, c'est le cas de la température, de la pression, du potentiel électrique, etc...

La différentielle totale d'un scalaire s'énonce comme la somme des dérivées partielles par rapport à chaque variable de la fonction scalaire :

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

### 2.2.2 Le gradient

Cet opérateur permet de dériver un scalaire par rapport à toutes les variables spatiales dont il dépend et s'énonce comme suit :

$$\vec{\nabla} f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Cet opérateur transforme donc un scalaire en un vecteur. Le vecteur résultat n'est autre que la variation d'un scalaire dans la direction x, y et z. Cet opérateur est utilisé associé à la pression par exemple pour connaître la force induite par le gradient de pression.

### 2.2.3 La divergence

Pour le gradient nous avons utilisé l'opérateur nabla :  $\nabla$ . Celui ci est équivalent à une dérivée :  $\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}$ . Ainsi il est possible d'associer cet opérateur à un scalaire pour obtenir le gradient, mais rien ne nous empêche de l'associer à un vecteur par un produit scalaire comme ceci :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Le résultat de la divergence d'un vecteur est un scalaire, de la même façon que le produit scalaire de 2 vecteurs donne un scalaire. La divergence sert à évaluer la variation totale d'un vecteur. Si la divergence est nulle, toutes les dérivées sont nulles et le vecteur reste constant. Si les dérivées sont non nulles le vecteur va varier dans toutes les directions, il diverge donc de sa valeur initiale. La divergence est bien utile pour écrire la conservation d'un flux stationnaire  $\Gamma$  :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma} = 0$$

Ce qui signifie que les variations de flux pour chaque direction de l'espace sont nulles ou se compensent.

### 2.2.4 Le rotationnel

Désormais nous associons non plus le produit scalaire à l'opérateur  $\nabla$  mais le produit vectoriel.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le rotationnel ainsi obtenu est un vecteur décrivant la rotation d'un champ de vecteurs. Le produit vectoriel permet de calculer un vecteur perpendiculaire à un plan défini par 2 autres vecteurs. Le rotationnel évalue les dérivées du vecteur étudié dans les directions perpendiculaires. Comme pour la divergence, si le rotationnel est nul, le vecteur  $\vec{V}$  ne tourne pas, il ne change pas de direction. Si le rotationnel est un vecteur constant, cela veut dire que le champ de vitesse correspondant à  $\vec{V}$  peut être représenté par un tourbillon tournant à vitesse constante autour d'un axe dont la direction est donnée par  $\vec{\nabla} \wedge \vec{V}$ . Le rotationnel est utilisé par exemple pour décrire les flux tourbillonnants (vortex) en mécanique des fluides.



### 2.2.5 Les dérivées secondes des champs de vecteur

Nous aurons parfois besoin de la dérivée seconde des opérateurs décrits précédemment, notamment pour la résolution des équations de Maxwell. Voici toutes les combinaisons remarquables de ces opérateurs qui pourront nous aider dans nos raisonnements :

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \nabla^2 f \equiv \Delta f =$  un champ scalaire,

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} = \nabla^2 \vec{V} = \begin{pmatrix} \nabla^2 V_x \\ \nabla^2 V_y \\ \nabla^2 V_z \end{pmatrix} \equiv \Delta \vec{V} = \text{un champ vectoriel}$$

l'opérateur scalaire  $\nabla^2$  est souvent utilisé en physique et est appelé Laplacien qui peut se noter aussi  $\Delta$ . Il peut être employé sur un scalaire comme dans la première équation ou sur un vecteur comme dans la seconde.

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = 0$ , le rotationnel du gradient d'un scalaire est toujours nul. Ceci débouche sur le théorème énonçant que si  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  alors  $\vec{E} = \vec{\nabla} f$ , c'est à dire que  $\vec{E}$  dérive d'un champ scalaire  $f$ .

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = 0$ , la divergence du rotationnel aussi. Également cette expression débouche sur le théorème énonçant que si  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  alors  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ , c'est à dire que  $\vec{B}$  est le rotationnel d'un champ de vecteur  $\vec{A}$ .

$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) =$  un champ vectoriel

$\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{V}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$ , cette expression est utilisée pour la résolution de l'équation d'onde à partir des équations de Maxwell.

## 2.3 Calcul vectoriel intégral

Ce paragraphe est consacré à l'apprentissage de 3 intégrales vectoriels qui seront d'une importance fondamentale dans la théorie des champs. Ces intégrales seront à coup sûr utilisées pour la résolution de nombreux problèmes simples en électromagnétisme et interviennent notamment dans les théorèmes de Gauss et d'Ampère. Chaque intégrale est associée aux opérateurs différentiels que sont le gradient, la divergence et le rotationnel.

### 2.3.1 Intégrale curviligne du gradient d'un scalaire

Si dans un problème le gradient d'un scalaire est donné et que l'on veut remonter au scalaire lui même, il faut lui appliquer une intégrale le long du chemin suivi par ce gradient de façon à obtenir la variation totale le long de ce chemin. Ceci est illustré mathématiquement dans cette égalité :

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{l} \quad (2.1)$$

C'est l'intégrale curviligne prise entre les positions (1) et (2) le long de la courbe suivi par le gradient.  $d\vec{l}$  est un élément infinitésimal de cette courbe. La seule difficulté de cette intégrale réside dans le produit scalaire  $(\vec{\nabla} \psi) \cdot d\vec{l}$  qui consiste à faire la projection de  $(\vec{\nabla} \psi)$  sur l'élément  $d\vec{l}$ . Ensuite il s'agit d'une simple intégrale sur un scalaire. Ce type d'intégrale sera utile pour le calcul du potentiel électrostatique à partir du champ électrique.

### 2.3.2 Intégrale d'un flux de champ vectoriel

Ce type d'intégrale est associé à l'opérateur divergence et s'applique au Théorème de Green-Ostrogradsky énoncé ci-dessous :

$$\oint_S \vec{C} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{C} d\tau \quad (2.2)$$

Le membre de gauche de l'équation représente le flux de  $\vec{C}$  à travers la surface fermée  $S$ .  $dS$  est un élément de cette surface. Plus exactement il faut faire la projection de  $\vec{C}$  sur la normale  $\vec{n}$  à la surface  $S$ .  $d\tau$  est un élément du volume  $V$ . L'intégrale du membre de gauche est simple à comprendre et peut s'appliquer pour calculer un courant à travers une surface à partir d'une densité de courant.

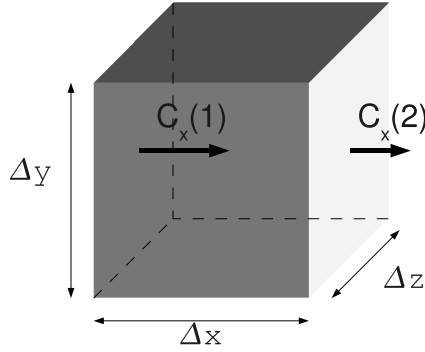


FIGURE 2.4 –

L'intégrale du membre de droite est moins intuitive dans la mesure où elle fait intervenir l'opérateur divergence. Les 2 membres du théorème sont homogènes puisque la dérivée supplémentaire introduite par l'opérateur divergence est contre-balancée par l'intégrale supplémentaire qui s'applique désormais au volume. On peut vérifier ce théorème dans une géométrie simple en utilisant un cube suffisamment petit avec  $\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  les côtés du cube. Le flux sortant du premier côté du cube est  $-C_x(1)\Delta y\Delta z$ , et  $C_x(2)\Delta y\Delta z$  pour l'autre côté.

La variation de flux dans la direction des  $x$  entre les 2 côtés opposés est

$$[C_x(2) - C_x(1)] \Delta y \Delta z = \frac{\partial C_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z$$

En appliquant la même relation aux direction  $y$  et  $z$  on obtient la variation totale de flux :

$$\int_{S_x} C_x \cdot dydz + \int_{S_y} C_y \cdot dx dz + \int_{S_z} C_z \cdot dx dy = \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z$$

On reconnaît dans cette équation la divergence de  $\vec{C}$ . Quant à  $\Delta x \Delta y \Delta z$  il s'agit du volume du cube. On peut considérer que ce cube est un élément suffisamment petit d'un plus grand volume que l'on pourra intégrer. On obtient ainsi

$$\int_{S_x} C_x(2) \cdot dydz + \int_{S_y} C_y(2) \cdot dx dz + \int_{S_z} C_z(2) \cdot dx dy - \left( \int_{S_x} C_x(1) \cdot dydz + \int_{S_y} C_y(1) \cdot dx dz + \int_{S_z} C_z(1) \cdot dx dy \right) = \int_{V_{cube}} \left( \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{V_{cube}} \vec{\nabla} \cdot \vec{C} dV$$

Le théorème est vérifié à condition que la surface totale  $S$  traversée par le flux soit fermée, c'est pourquoi nous avons besoin de 6 intégrales qui s'appliquent sur chaque face du cube. Nous aurions pu faire le même raisonnement avec une sphère, il aurait alors fallu raisonner en coordonnées sphériques.

### 2.3.3 Circulation d'un champ de vecteur

La circulation d'un champ de vecteur est liée au rotationnel. Celui-ci permet d'évaluer la circulation d'un champ le long d'une trajectoire qui se reboucle. Il est possible très simplement de calculer la circulation d'un fluide ou d'un courant caractérisé par une constante  $C$  (exemple le courant) sur le contour d'un carré de côtés  $\Delta x$  et  $\Delta y$ . L'intégrale de cette constante vectorielle sur les côtés du carré s'exprime ainsi :

$$\oint \vec{C} \cdot d\vec{l} = C_x(1)\Delta x + C_y(2)\Delta y - C_x(3)\Delta x - C_y(4)\Delta y = [C_x(1) - C_x(3)] \Delta x + [C_y(2) - C_y(4)] \Delta y$$

$C_x(1)$  est le 1er côté parallèle à l'axe  $x$ ,  $C_y(2)$  est le 2nd côté parallèle à l'axe  $y$ , etc..... La variation entre  $C_x(3)$  et  $C_x(1)$  est  $\frac{\partial C_x}{\partial y} \Delta y$ , ainsi l'expression précédente peut se réécrire sous cette forme et faire apparaître un des termes du rotationnel,  $\Delta x \Delta y$  étant la surface du carré.

$$\oint C \cdot dl = \left( \frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y$$

Il est ensuite possible d'écrire le rotationnel complet et d'obtenir le Théorème de Stokes :

$$\oint_{\Gamma} \vec{C} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{C}) \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

Ce théorème signifie que l'intégrale d'une grandeur sur un contour est égale à l'intégrale du rotationnel de cette grandeur sur la surface délimitée par ce contour. Ce théorème sera ensuite appliqué à la magnétostatique sous le nom de théorème d'Ampère.



## Chapitre 3

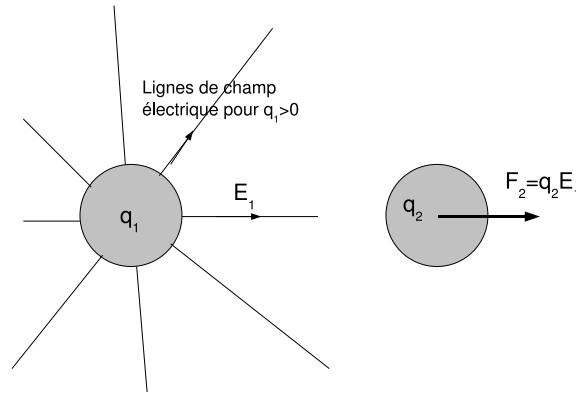
# Electrostatique

### 3.1 Particules chargées

La notion de charge électrique est désormais commune et bien acceptée mais s'est seulement révélée nécessaire avec la découverte de l'électricité. Elle sert à exprimer le fait que certains objets s'attirent ou se repoussent. Ces 2 comportements antagonistes peuvent être expliqués simplement en introduisant la notion de charge positive qui repousse une autre charge positive mais qui attire une charge négative. En considérant ensuite que la matière est composée d'un mélange égal de ces 2 charges il est possible d'obtenir de la matière globalement neutre. Néanmoins si l'équilibre entre ces charges est légèrement rompu alors la matière devient chargée positivement ou négativement. La plus petite particule chargée est l'électron dont la charge vaut  $-1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$  (Coulombs). Le proton possède la même charge mais positive. Le neutron est comme son nom l'indique neutre. Il faut maintenant expliquer l'influence de cette charge dans l'espace autour de ces particules supposées ponctuelles et à symétrie sphérique. La loi de Coulomb exprime la force d'attraction ou de répulsion entre 2 charges distantes de  $r$  :

$$\vec{F}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{e}_{12} = -\vec{F}_2 \quad (3.1)$$

$q_1$  est la charge de la première particule et s'exprime en Coulomb,  $q_2$  est la charge de la deuxième particule,  $\vec{e}_{12}$  est le vecteur unitaire dans la direction de  $q_2$  vers  $q_1$ .  $\epsilon_0$  est la permittivité du vide et vaut  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$ , et  $4\pi r_{12}^2$  est l'aire de la sphère de rayon  $r$  sur laquelle se répartie la charge rayonnée.

FIGURE 3.1 – pour  $q_2 > 0$ 

Cette loi est fondamentale et peut être appliquée à plus de 2 particules en utilisant le principe de superposition. Ainsi pour calculer la force qui s'exerce sur une particule de charge  $q_1$  par  $n$  autres particules de charge  $q_n$  à une distance  $r_n$ , il suffit d'écrire :

$$\vec{F}_1 = \sum \frac{q_1 q_n}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \vec{e}_{1n}$$

La charge peut aussi être vue comme une distribution continue dans l'espace qui est une densité de charge. Cette densité peut être linéique  $\lambda$ , surfacique  $\sigma$  ou volumique  $\rho$ . La charge s'exprime ainsi à partir de la densité volumique :

$$Q = \int_V \rho dV \quad (3.2)$$

#### EXEMPLE : Force électrique entre 2 sphères chargées

Nous considérons ici 2 sphères conductrices (en Aluminium par exemple) dont 10 % des atomes ont été chargés. C'est à dire qu'on a ajouté 1 électron à 10% des atomes de la 1ere sphère et retiré 1 électron à 10% des atomes de la 2nde. Les 2 sphères sont identiques et pèsent 100 grammes. Calculer la force d'attraction qui s'exerce entre les 2 sphères distantes de 10 cm sachant que la masse molaire de l'aluminium vaut 27 g.

Charge de la sphère 1 :  $q_1 = 0.1 * qmN/M = -eNm/M = -1.6.10^{19} * 10\% * 6,022.10^{23} * .1/.027 = -3,56.10^4$  C

Charge de la sphère 2 :  $q_2 = 0.1 * qmN/M = eNm/M = 3,56.10^4$  C

Force d'attraction :  $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{-(3,56.10^4)^2}{4\pi(8,85.10^{-12})(.1)^2} = -1,145.10^{21}$  N

La force ainsi obtenue est gigantesque et correspond à plus de 5 fois la force d'attraction moyenne entre la Terre et la Lune qui peut se calculer facilement par :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{R^2} = 2.10^{20} \text{ N}$$

avec  $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$  la constante gravitationnelle,  $m_1$  et  $m_2$  les masses de la Terre et de la Lune qui valent respectivement  $5,97.10^{24}$  kg et  $7,35.10^{22}$  kg, et  $R$  la distance Terre-Lune qui vaut en moyenne 384000 km.

Il serait plus judicieux de faire une analogie avec des objets séparés de la même distance que nos 2 sphères chargées pour comparer les forces électrostatiques et la force gravitationnelle. Pour obtenir une force équivalente à  $1,14.10^{21}$  N avec la gravitation il faudrait considérer 2 sphères toujours séparées de 10 cm et de masse égale à  $4,14.10^{14}$  kg soit environ 400000 Giga tonnes...

Cet exercice montre d'une part que la force électrique est environ  $4.10^{16}$  fois plus grande que la force gravitationnelle dans le cas d'une densité terrestre de matière, et d'autre part qu'il

est quasi impossible de charger 10% de la masse d'une sphère conductrice puisqu'il faudrait une énergie considérable. Seules de très petites charges très inférieures au Coulomb sont observées quotidiennement.

## 3.2 Champ et potentiel électrostatique

### 3.2.1 Champ E

Nous avons vu que la force décroît avec la distance au carré puisque la charge rayonnée se répartit sur une surface sphérique pour une charge supposée ponctuelle. On peut alors écrire le champ électrique  $E$  :

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \quad (3.3)$$

Le champ  $E$  en un point  $M$  de l'espace créé par une charge ponctuelle  $q$  située au point  $P$  s'écrit aussi :

$$\vec{E}(M) = \frac{q \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \quad (3.4)$$

Cette écriture permet aussi de calculer le champ créé par une distribution de charges que l'on peut considérer comme une infinité de charge ponctuelles. Le champ infinitésimale  $dE$  au point  $M$  s'écrit alors :

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq \vec{PM}}{4\pi\epsilon_0 PM^3} \quad (3.5)$$

Il suffit ensuite d'intégrer cet élément de champ sur la distribution de charge pour retrouver le champ total  $E(M)$  qui se situera le plus souvent sur un point, un axe ou un plan de symétrie afin d'en faciliter la résolution, comme dans l'exemple de l'anneau chargé ci-dessous.

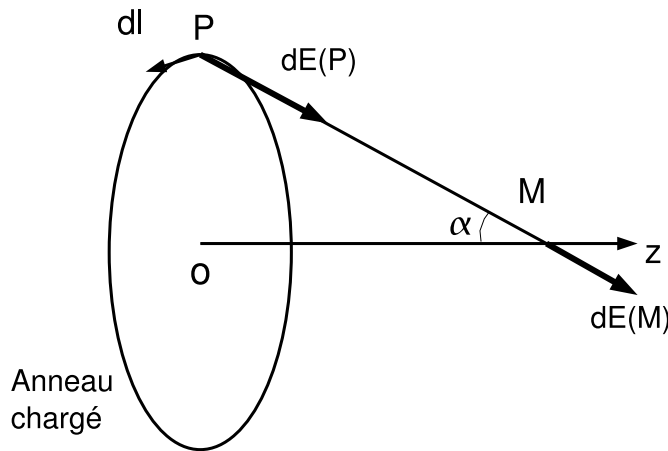


FIGURE 3.2 – Calcul du champ électrique pour un anneau chargé.

Le champ  $\vec{E}$  est une grandeur vectorielle créée par la charge  $q$  au point P de coordonnées  $x$ ,  $y$ , et  $z$ . Le champ s'exprime ainsi au point M :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{[(x_M - x)^2 + (y_M - y)^2 + (z_M - z)^2]^{3/2}} \begin{pmatrix} x_M - x \\ y_M - y \\ z_M - z \end{pmatrix}$$

Le principe de superposition s'applique de la même façon ici :

$$\vec{E} = \sum \frac{q_n}{4\pi\epsilon_0 r_{1n}^2} \vec{u}_{n1}$$

Le calcul de la charge Q à partir d'une distribution de charge linéique, surfacique ou volumique se fait de la manière suivante :

Distribution linéique :  $Q = \int \lambda dl$

Distribution surfacique :  $Q = \iint \sigma dS$

Distribution volumique :  $Q = \iiint \rho d\tau$

D'après la définition du champ électrique il vient immédiatement que la force ressentie par une charge  $q$  est le produit du champ  $E$  extérieur à cette charge par cette charge  $q$  :

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Potentiel $V$

Le potentiel électrostatique provient de la notion de travail qui est l'énergie dépensée pour déplacer une particule dans un champ  $E$  sur une distance  $l$ . Ce travail peut être calculé en intégrant la force électrique le long d'un chemin allant de A en B :

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Le signe - indique que ce travail s'opère contre les forces électriques.

Ce même travail peut être écrit avec le champ électrique  $E$ , mais cette fois il s'agira d'un travail par unité de charge électrique  $W^*$  (donc en J/C) :

$$W^* = \frac{W}{q} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (3.7)$$

Le potentiel peut alors être défini de la façon suivante :

$$- \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = V(B) - V(A) \quad (3.8)$$

Cette différence de potentiel est donc une variation d'énergie potentielle (opposée au travail) par unité de charge. On peut faire une analogie avec le travail dépensé au cours d'une marche en montagne. Ce travail n'est non nul que si il y a une variation d'altitude : le potentiel représenterait alors l'altitude et le champ électrique la pente.



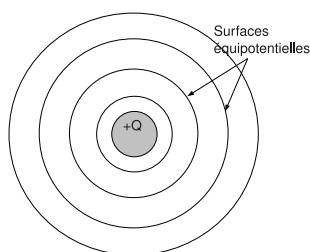


FIGURE 3.3 – Surfaces équipotentielles autour d’une charge ponctuelle.

La relation entre  $E$  et  $V$  peut encore être écrite sous forme différentielle :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (3.9)$$

L’intérêt de  $V$  par rapport à  $\vec{E}$  est qu’il est scalaire et qu’il est ainsi plus aisément calculable dans les intégrales car il n’y a qu’une composante à calculer. Pour retrouver les composantes de  $\vec{E}$  il suffit d’appliquer l’opérateur gradient. Le signe - devant le gradient est important, il signifie que le gradient de potentiel est opposé au champ. Cela veut dire que si le potentiel augmente vers la droite le champ électrique sera dirigé vers la gauche (donc du + vers le -). Il ne faudra pas confondre avec le sens du vecteur tension en électricité qui est dirigé du - vers le + pour les dipôles passifs.

D’après la définition 3.7 le potentiel se déduit du champ par la relation :

$$V(x) - V(x_0) = \int_{x_0}^x \vec{\nabla}V \cdot d\vec{l} = - \int_{x_0}^x \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

D’où :

$$V(x) = V(x_0) - \int_{x_0}^x \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Pour une charge ponctuelle à symétrie sphérique :

$$V(r) = V(r_0) - \left[ \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{r_0}^r$$

avec  $r_0 \rightarrow \infty$  et  $V(r_0) = 0$ , le potentiel est donc supposé nul à l’infini, ce qui n’est pas aberrant... Le potentiel à une distance  $r$  de la charge  $q$  s’écrit alors :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.10)$$

Le potentiel en un point M créé par une charge ponstuelle en P peut s’écrire comme pour le champ E :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (3.11)$$

Il est désormais possible de calculer le potentiel électrostatique en considérant une distribution de charges ponctuelles toujours à partir du principe de superposition :

$$V(M) = \int \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 PM} \quad (3.12)$$

Nous avons montré que le champ électrique dérive du potentiel, donc le rotationnel de  $\vec{E}$  est nul :  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$  (voir paragraphe 2.2.5).

**ILLUSTRATION :**

Pourquoi les oiseaux peuvent se poser sur les lignes à hautes tensions ? Celles-ci sont composées de fils transportant le courant en triphasé nécessitant au moins 3 fils. Chaque fil est au même potentiel en supposant que sa résistivité est faible. Mais 2 fils différents ne le sont pas puisque la tension est déphasée. Si un oiseau se pose sur un fil, son corps va se porter au potentiel du fil et donc se charger mais aucun courant ne va le traverser, il ne sera pas électrocuté. Au contraire si l'oiseau touche 2 fils simultanément ou 1 seul fil et un morceau conducteur du pylône alors un courant va le parcourir entre les 2 points de son corps qui ne sont pas au même potentiel, ce qui pourra lui être fatal étant donné les tensions élevées (220V à plus de 400kV).

**Exemple :** l'anneau chargé (voir figure 3.2 ) de densité linéique de charge  $\lambda$  et de rayon  $R$ .

Potentiel le long de l'axe perpendiculaire au plan de l'anneau et passant par son centre avec  $dl = R d\theta$  une portion infinitésimale de l'anneau :

$$V(z) = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}} = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}}$$

Il est possible de retrouver ce résultat via le champ  $E$  :  $E$  est un champ de vecteur tridimensionnel mais seule la composante selon  $z$  a une intégrale non nulle du fait des symétries. Il doit donc être projeté sur l'axe de symétrie  $z$  (terme en  $\cos(\alpha)$ ). :

$$E_z(z) = E(z)\cos(\alpha) = \int \frac{\lambda dl}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} \cos(\alpha) = \int_0^{2\pi} \frac{z\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} = \frac{\lambda R z}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{3/2}} \text{ avec } \cos(\alpha) = \frac{OM}{PM} = \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

On intègre ensuite le champ pour retrouver le potentiel :

$$V(z) = - \int_{\infty}^z E(z) dz = - \left[ -\frac{\lambda R}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}} \right]_{\infty}^z = V(\infty) + \frac{\lambda R}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{1/2}}$$

Et on retrouve le résultat initial en intégrant le champ entre l'infini et  $z$ . A l'infini le potentiel est supposé nul.

### 3.3 Énergie électrostatique.

L'énergie potentielle notée  $U$  pour une charge  $q$  dans un potentiel  $V$  se note comme suit :

$$U(M) = qV(M) \quad (3.13)$$

L'énergie gagnée ou perdue par une ou plusieurs charges se calculent généralement entre 2 points le long d'un chemin allant de  $M_1$  à  $M_2$ . On obtient alors le travail de la force électrique qui est l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$W(M_1 M_2) = \int_{M_1 M_2} \vec{F}_E \cdot \vec{dl} = q \int_{M_1 M_2} \vec{E} \cdot \vec{dl} = q \int_{M_1 M_2} (-\vec{\nabla} V) \cdot \vec{dl} = q [V(M_1) - V(M_2)]$$

Pour résumer

$$W(M_1 M_2) = -U(M_1 M_2) = -q\Delta V = q [V(M_1) - V(M_2)] \quad (3.14)$$

$V(M_1)$  étant le potentiel au point 1 et  $V(M_2)$  le potentiel au point 2.

### 3.4 Flux du champ électrique

On appelle flux d'un champ électrique à travers une surface  $S$  la quantité :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS \quad (3.15)$$

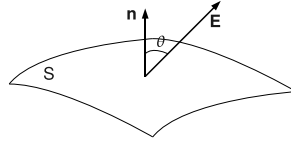


FIGURE 3.4 –

Le flux électrique est homogène à une quantité de charge.

Démonstration pour une charge ponctuelle rayonnant un champ  $E$  sphérique :

$$\int \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \int \int dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} S_{sphere} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

De même en utilisant la densité de charge :

$$\int \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \int \frac{\iiint \rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS = \frac{\iiint \rho d\tau}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho d\tau$$

Ici la démonstration est simple car nous travaillons en symétrie sphérique (charge ponctuelle rayonnant un champ sphérique). L'élément  $dS = r^2 \sin(\theta) d\theta d\psi$  ne se fait pas en fonction de  $r$  donc  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  peut être sorti de l'intégrale.

### 3.5 Théorème de Gauss

Le flux électrique à travers une surface fermée permet d'écrire le théorème de Gauss :

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau = \frac{\sum q_{int}}{\epsilon_0} \quad (3.16)$$

L'intégrale de  $E$  traversant la surface de Gauss  $S_G$  (surface fermée quelconque) est égale à la somme des charges contenues dans le volume  $\tau$ . C'est pourquoi on utilise le terme de charges internes  $q_{int}$ , les charges extérieures à la surface de Gauss  $S_G$  n'interviennent pas dans le calcul puisque les composantes du champ généré par ces charges vu de l'intérieur s'annulent. La surface  $S_G$  ne délimite pas obligatoirement le volume  $\tau$ , mais le volume  $\tau$  doit toujours être à l'intérieur de la surface  $S_G$ . Ce théorème fonctionne avec tous les champs pouvant s'exprimer en  $1/r^2$ , il est donc aussi valable pour le champ gravitationnel.

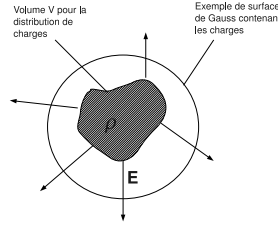


FIGURE 3.5 –

Le théorème de Green-Ostrogradsky (voir partie 2.3.2 ) qui lie la divergence d'un champ vectoriel à l'intégrale de surface d'un flux et qui s'écrit

$$\oint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau$$

permet de retrouver l'équation de Poisson qui est aussi la forme locale du théorème de Gauss :

$$\iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{(\tau)} \rho d\tau$$

L'équation de Poisson s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.17)$$

Il s'agit de la première des équations de Maxwell que nous expliciterons à la fin de ce cours.

On peut également remarquer que la circulation du champ  $\vec{E}$  sur un contour fermé est toujours nulle (c'est l'équivalent de la loi des mailles). Cette circulation est l'intégrale curviligne du champ sur une boucle fermée. A l'aide du théorème de Stokes et sachant que le champ dérive d'un potentiel  $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ , nous montrons que :

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} V) \cdot d\vec{S} = 0 \text{ puisque le rotationnel d'un gradient est toujours nul.}$$

**Exemple d'application du théorème de Gauss :** La sphère chargée

Champ à l'extérieur :  $\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint dS = \frac{Q}{\epsilon_0}$   
 car E est constant sur la surface de Gauss et  $\vec{E}$  est parallèle à  $d\vec{S}$  et orienté selon  $r$  en géométrie sphérique.

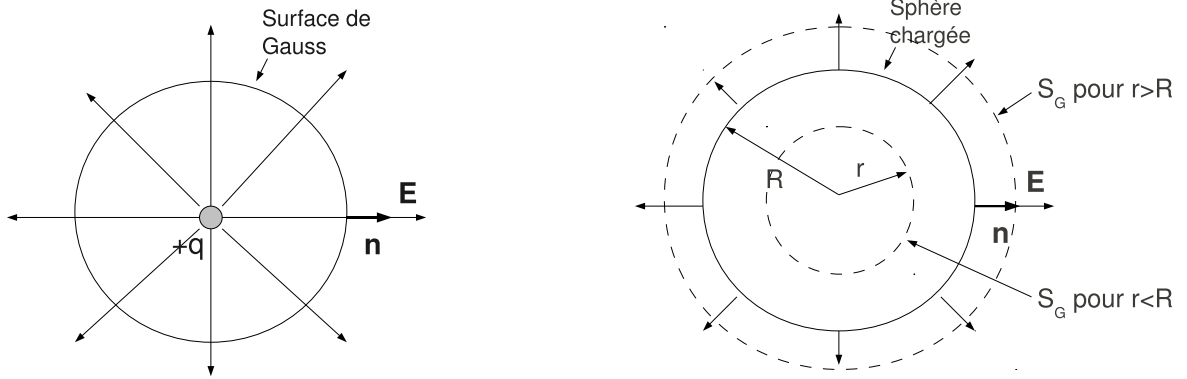


FIGURE 3.6 – Equivalence entre champ rayonné par une charge ponctuelle et une sphère uniformément chargée. La seule différence est que le champ à l'intérieur de la sphère chargée est nul.

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

et on retrouve la même expression du champ que pour une charge ponctuelle.

Champ à l'intérieur :  $ES = 0$  puisque la sphère ne contient pas de charges donc  $E = 0$ .

## 3.6 Dipôle électrostatique

### 3.6.1 Doublet électrostatique

**Définition :**

*On appelle doublet électrostatique un ensemble de 2 charges électriques  $+q$  et  $-q$  placées à une distance  $d$  l'une de l'autre.*

**Champ d'un doublet :**

Pour le calculer on superpose les champs de 2 charges opposées. Soit un point M à une distance  $d_A = AM$  de  $q_A = -q$  situé en A et  $d_B = BM$  de  $q_B = q$  situé en B, le champ en M vaut alors (voir figure 3.7) par superposition :

$$\vec{E}(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|^3} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{BM}}{\|\vec{BM}\|^3}$$

En ce qui concerne le potentiel, le calcul est plus simple puisqu'on peut se dispenser de vecteurs :

$$V(M) = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 d_A} + \frac{q_B}{4\pi\epsilon_0 d_B}$$

### 3.6.2 Dipôle électrostatique

Lorsque la distance  $r$  entre le doublet et le point M est grande devant la distance  $d$  entre les 2 charges du doublet, alors on parle de dipôle électrostatique. Ceci va permettre de simplifier les expressions du champ et du potentiel en utilisant des développements limités au premier ordre.

### 3.6.2.1 Calcul du potentiel d'un dipôle :

Soit  $M$  de coordonnées  $(x, y, z)$ ,  $A$  de coordonnées  $(x_A, y_A, z_A)$  et  $B$  de coordonnées  $(x_B, y_B, z_B)$ .

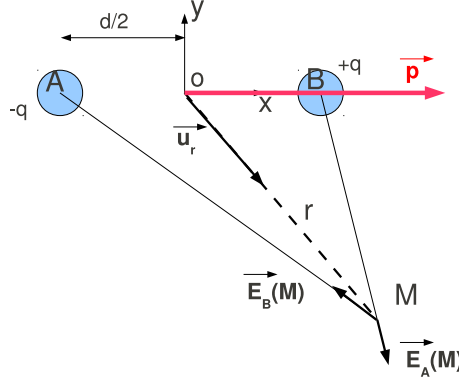


FIGURE 3.7 – dipôle 'vu' à grande distance.

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 + (z-z_A)^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + (y-y_B)^2 + (z-z_B)^2}} \right]$$

Pour des raisons de simplicité et ceci n'enlevant rien à la validité de la démonstration, on considère  $y_A = z_A = y_B = z_B = 0$  et  $x_A = -d/2$  et  $x_B = d/2$ . Ainsi

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_A}{\sqrt{(x-x_A)^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q_B}{\sqrt{(x-x_B)^2 + y^2 + z^2}} \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_A}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} + 2x\frac{d}{2}}} + \frac{q_B}{\sqrt{r^2 + \frac{d^2}{4} - 2x\frac{d}{2}}} \right]$$

$V(M) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ \frac{q_A}{\sqrt{1+2x\frac{d}{2r^2}}} + \frac{q_B}{\sqrt{1-2x\frac{d}{2r^2}}} \right]$  quand  $d \ll r$  et donc le terme quadratique en  $d^2$  est négligeable devant les autres termes.

On peut ensuite développer le terme entre crochets au 1er ordre en utilisant un développement de Taylor toujours en supposant  $d \ll r$ .

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[ -q \left( 1 - 2x \frac{d}{4r^2} \right) + q \left( 1 + 2x \frac{d}{4r^2} \right) \right] = \frac{qdx}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

or  $qd$  n'est autre que le moment dipolaire  $p$  dont la définition vectorielle est la suivante :

$$\vec{p} = q\vec{AB} \quad (3.18)$$

avec  $d = AB$ .  $qdx$  est donc le résultat de la projection du moment dipolaire sur la direction OM, c'est à dire le produit scalaire du moment dipolaire et de la direction OM :

$$qdx = \vec{p} \cdot \vec{OM} = q\vec{AB} \cdot \vec{OM} = q \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc la solution générale du potentiel électrostatique pour un dipôle s'écrit :

$$V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{OM}\|^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.19)$$

avec  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire dans la direction  $\vec{OM}$ . Le potentiel du dipôle décroît donc en  $1/r^2$  et non en  $1/r$ , ceci est dû au fait que la somme des charges du dipôle est nulle : une charge compense le potentiel de l'autre, d'où une décroissance plus rapide.

### 3.6.2.2 Calcul du champ d'un dipôle

On obtient le champ en faisant le gradient du potentiel :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left( \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r^2} \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) + (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{r^3} \right) \right]$$

ainsi avec  $\vec{p} \cdot \vec{r} = qdx$ , projection dans la direction du dipôle qui est  $x$  :

$$\vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{qd\vec{u}_x}{r^3} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \frac{3}{r^4} \vec{u}_x \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[ \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r} \vec{u}_x - \vec{p} \right]$$

De même le champ du dipôle varie en  $1/r^3$  alors que le champ d'un monopôle varie en  $1/r^2$ . On peut aussi noter que le champ d'un dipôle est exclusivement dirigé selon la direction du dipôle, la direction  $x$  ici. Ceci vient de l'approximation dipolaire qui consiste à négliger la distance  $d$  par rapport à la distance  $r$ .

### 3.6.2.3 Équipotentiellles et lignes de champ d'un dipôle

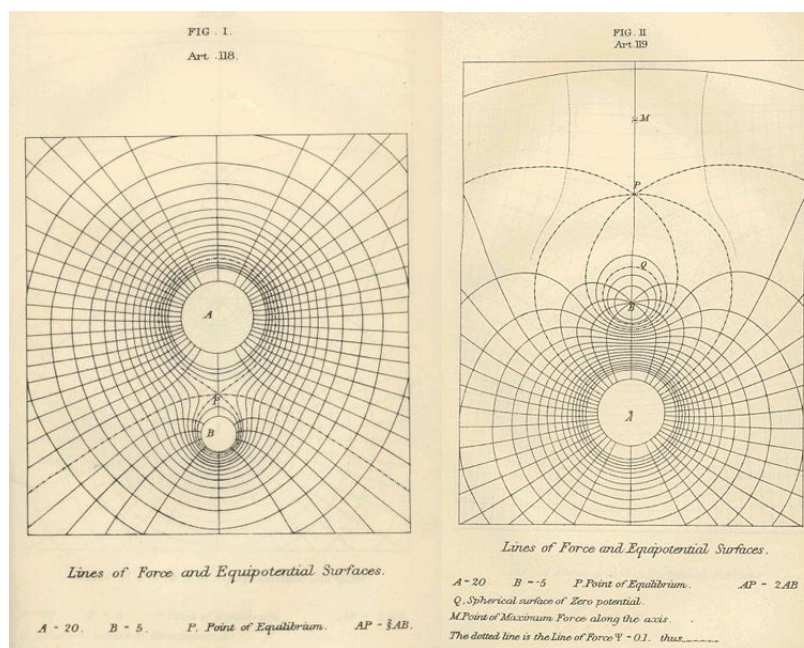


FIGURE 3.8 – Ces figures sont tirées du traité d'électricité et de magnétisme de James Clerk Maxwell. Les équipotentiellles et les lignes de champ sont représentées pour 2 charges de même signe (figure de gauche) et pour 2 charges de signe opposé (figure de droite).

### 3.6.2.4 Application d'un champ électrique sur un dipôle

Que se passe-t-il si on applique un champ électrique homogène sur un dipôle? Celui-ci va-t-il subir une force et accélérer selon  $\vec{F} = q\vec{E}$ ?

La charge totale d'un dipôle est nulle. On peut donc s'attendre à ce qu'aucune force n'agisse sur celui-ci à condition que le champ  $E$  soit uniforme.

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

Néanmoins le champ électrique a un autre effet sur le dipôle lorsqu'il n'est pas aligné avec le moment dipolaire. Le champ va alors faire tourner le dipôle de façon à aligner le moment

dipolaire avec ses lignes de champ comme le ferait le champ magnétique terrestre avec une boussole. Le moment résultant de l'application d'un champ  $E$  sur le dipôle  $p$  vaut alors :

$$\vec{M} = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

### 3.6.3 Exemple de dipôles

Les dipôles sont très fréquents au niveau moléculaire. Par exemple la molécule d'eau  $H_2O$  possède un moment dipolaire ( $p=1.85$  D) avec  $D \equiv Debye$  et  $1 D = (1/3) \cdot 10^{-29}$  C.m qui est l'unité classique du moment dipolaire. Le moment dipolaire de l'eau est non nul parce que la densité de charges positives est plus grande autour de l'atome d'oxygène qui attire les électrons des atomes d'hydrogène. Son moment dipolaire lui permet d'établir des liaisons avec les autres molécules d'eau. Ceci explique la formation de la glace à des températures inférieures à  $0^\circ\text{C}$ . En deçà de cette température l'énergie dipolaire électrostatique est plus grande que l'énergie thermique qui maintient les molécules à l'état liquide.

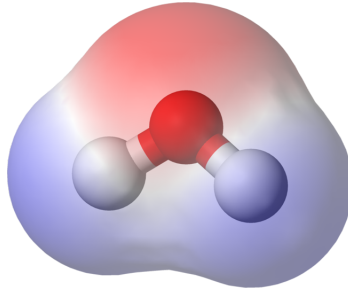


FIGURE 3.9 – Répartition du potentiel électrique autour d'une molécule d'eau. La séparation de charge est négative près de l'atome d'oxygène (en rouge) et positive près des atomes d'hydrogène (en bleu).

Les molécules acquièrent un moment dipolaire dès qu'elles possèdent une asymétrie dans une direction donnée. Ainsi le dioxyde de carbone ne possède pas de moment dipolaire au contraire de l'acide chlorhydrique  $HCl$  ( $p=1.08$  D), du monoxyde de carbone  $CO$ , de l'ammoniac  $NH_3$  ou du dioxyde de soufre  $SO_2$ .

Les matériaux composés de dipôles sont appelés diélectriques et sont capables de se polariser en volume. Nous verrons cela dans le chapitre suivant.

## 3.7 Les conducteurs et les diélectriques

### 3.7.1 Les conducteurs

#### 3.7.1.1 Définition :

*Un conducteur est un matériau (solide, liquide ou gazeux) dont les charges électriques sont libres de se déplacer dans tout son volume.*

Le cuivre est un exemple de conducteur solide. La plupart des métaux sont de bons conducteurs, le meilleur étant l'or suivi de l'argent puis du cuivre. L'aluminium est également bien placé et est souvent utilisé puisqu'il constitue un bon compromis entre légèreté et conductivité.

Les conducteurs liquides sont par exemple des électrolytes présents dans les batteries ou toutes solutions aqueuses comportant des ions.

Les conducteurs gazeux sont des gaz ionisés. Il s'agit par exemple d'un arc électrique dans l'air ou du feu.



Les plasmas sont aussi des conducteurs et regroupent toute la matière ionisée qu'elle soit solide, liquide ou gazeuse. Les plasmas constituent 99 % de la matière visible dans l'univers puisqu'ils sont présents, entre autres, dans les étoiles. Un arc électrique est un plasma et les étoiles sont des boules de plasma.

### 3.7.1.2 Le courant et la densité de courant

Le courant est le nombre de charges traversant une surface  $S$  pendant 1 seconde ( $C/s$ ).

La densité de courant est une densité surfacique et s'exprime en  $C.m^{-2}.s^{-1}$ .  $\rho$  est une densité de charge et  $v$  la vitesse de ces charges.

$$\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} \quad (3.20)$$

La densité de courant peut s'exprimer en fonction du champ électrique. On obtient alors une relation équivalente à la loi d'Ohm.

$$\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E} \quad (3.21)$$

$\gamma$  est la conductivité électrique.

### 3.7.1.3 Résistance et résistivité

La loi d'Ohm macroscopique s'écrit  $U = R.I$ . La résistance  $R$  se calcule à l'aide de la résistivité notée  $\rho_r$  (ne pas confondre avec  $\rho$  la densité de charge) grâce à la relation suivante :

$$R = \frac{\rho_r L}{S}$$

avec  $L$  la longueur du fil électrique et  $S$  la section du fil.  $\rho_r$  dépend du matériau (exemple :  $\rho_r = 16.10^{-9} \Omega.m$  pour le cuivre,  $\rho_r = 26.10^{-9} \Omega.m$  pour l'aluminium...).

### 3.7.1.4 Propriétés électriques des conducteurs à l'équilibre

*Définition : un conducteur est à l'équilibre s'il ne comporte pas de déplacements de charges dans son volume ou sa surface.*

Dans un conducteur, les charges (les électrons) sont libres de se déplacer lorsqu'ils sont soumis à une force. Ainsi lorsqu'on applique un champ électrique  $E_0$  dans un conducteur les électrons vont être accélérés et vont se déplacer dans le conducteur créant ainsi un courant jusqu'à ce qu'ils atteignent les frontières du conducteur. Là les particules s'arrêtent et s'accumulent créant une charge d'espace qui va écranter le champ électrique appliqué. En d'autres mots les charges accumulées à la surface du conducteur créent leur propre champ électrique égal et opposé au champ appliqué. C'est pourquoi, lorsque les charges ne sont plus en mouvement (conducteur à l'équilibre) le champ électrique total (somme du champ appliqué et du champ induit) dans un conducteur est toujours nul à condition que la quantité de charges soit suffisante pour compenser le champ extérieur :

$$\vec{E}_{int} = 0 \quad (3.22)$$

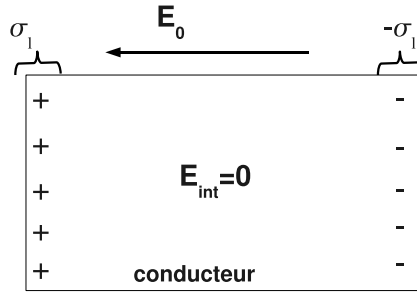


FIGURE 3.10 – polarisation d'un conducteur

L'accumulation des charges dans un conducteur se fait donc toujours en surface, il ne peut exister à l'équilibre une densité de charges en volume comme dans les diélectriques. En effet toute accumulation de charges dans un espace  $d\tau$  du conducteur créerait un champ électrique (d'après l'équation de Poisson) qui disperserait les charges jusqu'à ce que le champ électrique soit nul.

$$\rho_{int} = 0 \quad (3.23)$$

D'autre part d'après  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  le potentiel dans un conducteur à l'équilibre est toujours constant.

### 3.7.1.5 Exemple : La cage de Faraday

Soit une cage conductrice creuse, baignant dans un champ électrique  $E$ . Le champ appliqué crée une accumulation de charges en surface du conducteur qui écranterait totalement le champ extérieur, le champ à l'intérieur de la cage est donc nul. Ou alors, on peut simplement dire que tous les points appartenant à la paroi conductrice de la cage sont au même potentiel puisque le champ est nul dans celle-ci. Il vient alors que tout l'intérieur de la cage est au même potentiel. Nous ne sommes donc soumis à aucune tension (différence de potentiel) à l'intérieur d'une cage de Faraday, aucune électrocution possible même si le potentiel à l'intérieur vaut 1 million de volts.

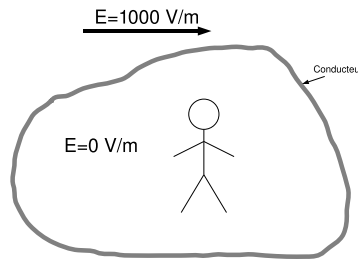


FIGURE 3.11 – Cage de Faraday

### 3.7.2 Diélectriques

#### 3.7.2.1 Définition :

*Un diélectrique est une matière généralement isolante, présentant à l'échelle microscopique des dipôles électriques, de façon spontanée ou provoquée.*

On dit que les diélectriques sont généralement des isolants mais pas exclusivement. Par exemple l'eau est un diélectrique conducteur puisqu'elle est composée d'ions (sauf pour de l'eau ultra pure).

Les diélectriques, lorsqu'ils sont soumis à une différence de potentiel peuvent se charger en volume, c'est à dire que les milliards de dipôles élémentaires (les atomes ou molécules) qui les composent vont s'orienter dans la direction du champ créé par la tension appliquée.

Les dipôles d'un isolant n'existent généralement pas de manière spontanée. Ils sont stimulés par l'application d'un champ électrique qui va déformer le nuage électronique de chaque atome et molécule de façon à les polariser. La somme de toutes les polarisations microscopiques donnent la polarisation globale du diélectrique.

Les diélectriques étant des isolants ils ne conduisent pas de courant de façon continue, néanmoins ils peuvent conduire un courant alternatif à haute fréquence qui résulterait de l'oscillation de la polarisation des dipôles dans le milieu.

#### 3.7.2.2 Polarisation P

La polarisation est la somme des moments dipolaires par unité de volume :

$$\vec{P} = N \vec{p} = \sum_{\tau} \vec{p}_i$$

N étant le nombre de dipôles par unité de volume. La polarisation s'exprime donc en  $C/m^2$ . La polarisation d'un milieu diélectrique dépendra donc du nombre d'atomes par unité de volume mais aussi de la capacité de leur nuage électronique à se déformer, donc du nombre de charges intervenant dans leur moment dipolaire. En effet  $p = nqd$  avec  $n$  le nombre de charges impliquées dans l'établissement du moment dipolaire. En fonction de toutes ces propriétés microscopiques, il est possible de définir la polarisation macroscopique  $P$  grâce à  $\chi_e$  la susceptibilité électrique que nous expliciterons ensuite.

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (3.24)$$

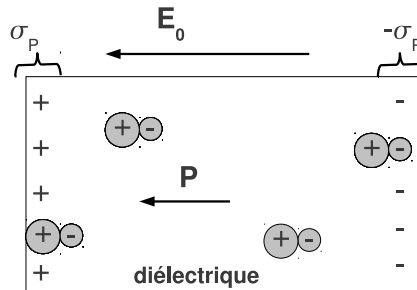


FIGURE 3.12 – polarisation d'un diélectrique

### 3.7.2.3 Calcul du potentiel généré par n dipôles

On connaît le potentiel d'un dipôle élémentaire  $V(r) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$  écrit ici avec la définition microscopique  $p$ . On peut aussi l'écrire avec la définition macroscopique  $P$  en posant  $d\sum p_i = P(A)d\tau(A)$  avec  $d\tau$  un petit élément de volume situé en A. On peut alors connaître le potentiel résultant de la somme de n dipôles contenu dans un volume  $\tau$  par l'intégrale :

$$V(M) = \frac{\sum \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} = \int \frac{d\sum \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i}{4\pi\epsilon_0 r_i^3} = \iiint \frac{\vec{P}(A) \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r_i^2} d\tau(A) \text{ avec } r_i = r_M - r_A$$

$$\text{Or } \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} - \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}_r}{r^2} = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} + \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} \text{ avec } \vec{u}_r = -\vec{u} \text{ puisque } u \text{ est dirigé de la}$$

source vers M. On remplace donc  $\frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2}$  dans l'équation ci-dessus et on obtient

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \iiint \frac{\rho_l}{r} d\tau + \oint \frac{\sigma_l}{r} dS - \iiint \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau + \iiint \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau \right)$$

Ainsi donc d'après le théorème de Stokes, la dernière intégrale peut s'écrire

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{P}}{r} \right) d\tau = \oint \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS$$

Il vient donc :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \iiint \frac{\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{r} d\tau + \oint \frac{\sigma_l + \vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS \right)$$

On obtient alors les 2 équivalences suivantes :

$$\rho_P = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad \text{et} \quad \sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

On peut noter l'analogie entre  $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  qui sont tous les 2 proportionnels à une densité de charge.

### 3.7.2.4 Propriétés de certains diélectriques

#### La piézo-électricité :

Les matériaux piézoélectriques présentent une polarisation lorsqu'ils sont soumis à une action mécanique qui déforme leur réseau cristallin (compression ou traction). Il apparaît donc une différence de potentiel dans la direction de la compression ou de la traction mécanique. Cette différence de potentiel peut être suffisamment importante pour produire une étincelle. Cette propriété est appliquée sous forme d'allume-gaz ou briquet piézoélectrique. Les transducteurs piézoélectriques dans les microphones fonctionnent sur ce principe : conversion d'un son (oscillation mécanique) en un signal électrique.

Ce phénomène est réversible, une tension appliquée au cristal piézoélectrique produit une déformation dans la direction du champ électrique. Il est ainsi possible de faire vibrer un cristal piézoélectrique lorsqu'il est soumis à une tension sinusoïdale. Cette propriété est utilisée dans les montres à quartz, le quartz étant l'un des diélectriques les plus connus. Elle est aussi utilisée dans les résonateurs piézoélectriques pour la production de sons.

#### La pyroélectricité :

La moitié des piézoélectriques présente des propriétés de pyroélectricité. Il s'agit d'une polarisation spontanée selon un axe induit par une augmentation de la température qui réorganise le réseau cristallin.

#### La ferroélectricité :

C'est une sous-classe de la pyroélectricité dont la polarisation peut être orientée voire retournée par l'application d'un champ électrique extérieure. C'est un principe analogue au ferromagnétisme que nous verrons plus tard.

### 3.7.3 Le déplacement électrique D

La grandeur introduite ici réunit le champ extérieur  $\vec{E}$  et la polarisation  $\vec{P}$ . En effet dans un matériau diélectrique il sera plus judicieux de travailler avec le vecteur déplacement  $\vec{D}$  afin de prendre en compte la polarisation qui compense le champ  $\vec{E}$  appliqué.

D'après l'équation de Poisson qui est aussi la forme locale du théorème de Gauss :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l + \rho_P}{\epsilon_0} = \frac{\rho_l - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\epsilon_0}$$

$\rho_l$  et  $\rho_P$  sont respectivement la densité de charges libres (présentes dans les milieux conducteurs) et la densité de charges d'origine dipolaire.

$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_l \quad (3.25)$$

On introduit alors une nouvelle grandeur qu'on appellera le déplacement électrique  $\vec{D}$  qui ne dépend que de la densité de charge libre :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (3.26)$$

avec

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (3.27)$$

On peut écrire une relation entre  $\vec{P}$  et  $\vec{E}$  grâce à la susceptibilité électrique  $\chi_e$  :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad (3.28)$$

On introduit cela dans l'équation 3.27 :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

On obtient ainsi :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (3.29)$$

avec

$$1 + \chi_e = \epsilon_r \quad (3.30)$$

$\epsilon_r$  étant la permittivité relative du milieu diélectrique et  $\epsilon$  la permittivité intrinsèque du matériau. La permittivité des milieux diélectriques est souvent proche de 1 mais peut atteindre des valeurs des centaines (voire des milliers : titanate de Baryum, polymères) de fois plus grandes.

### 3.7.4 Condition aux limites

D'après les 2 relations précédemment établies en statique  $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_l$  on en déduit les conditions aux limites d'un diélectrique :

- **continuité de  $E$  tangentiel**

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = \vec{0} \quad (3.31)$$

avec  $E_2$  le champ dans le milieu 2 (ex. le diélectrique),  $E_1$  le champ dans le milieu 1 (ex : le vide), et  $\vec{n}$  la normale à la paroi dirigée du milieu 1 vers le milieu 2.

- **continuité de  $D$  normal**

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = \sigma_l \quad (3.32)$$

avec  $D_2$  le déplacement électrique dans le milieu 2 (ex. le diélectrique),  $D_1$  le déplacement électrique dans le milieu 1 (ex : le vide), et  $\sigma_l$  la charge surfacique libre.

La 1ere relation signifie que la composante tangentielle reste identique dans le vide et dans le diélectrique ainsi que la composante normale de  $D$  puisqu'il n'y a pas de charge libre dans le vide ainsi que dans le diélectrique. Sachant que  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$ , cela veut dire que la composante normale du champ  $E$  est beaucoup plus petite dans le diélectrique que dans le vide dans la mesure où  $\epsilon_r$  est grand.

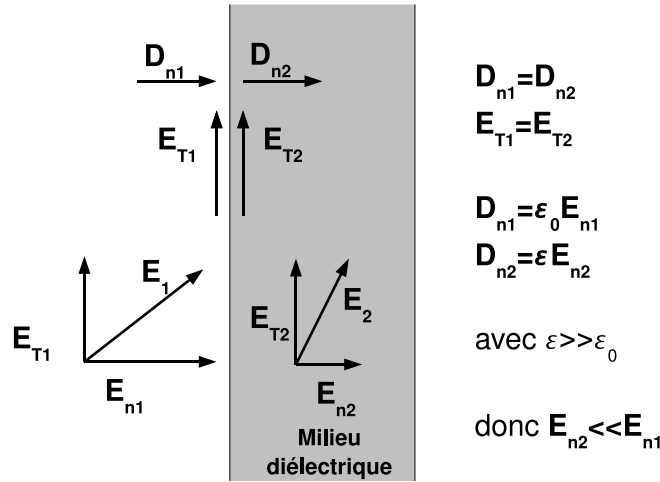
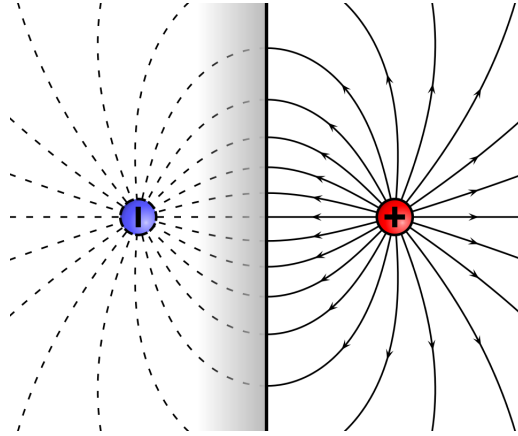


FIGURE 3.13 – conditions aux limites d'un diélectrique de permittivité  $\epsilon$ .

### 3.7.5 Méthode des images

La méthode des images est un moyen efficace d'obtenir la distribution de champ électrique autour d'une charge ou d'une distribution de charges à proximité d'un milieu conducteur ou diélectrique. Cette méthode reste simple à condition que la forme de la distribution de charge ainsi que la surface du conducteur ou du diélectrique soient simples. L'exemple le plus parlant qui permet d'illustrer cette méthode apparaît sur la figure ci-dessous représentant une charge ponctuelle positive  $+q$  à droite d'une plaque conductrice. La distance entre celles-ci vaut  $a$ .



La charge  $+q$  à droite de la plaque va induire un déplacement de charges dans le conducteur, créant ainsi une charge surfacique  $-\sigma$  à la surface de la plaque, de signe opposé, qui va compenser le champ électrique de la charge  $+q$  et ainsi annuler le champ électrique à l'intérieur du conducteur.

$$q = \iint_{(S)} \sigma dS \quad (3.33)$$

avec  $(S)$  la surface de la plaque conductrice.

Sans la méthode des images il est compliqué de calculer la distribution de charges créée à la surface du conducteur. Pour cela il faut connaître la forme de la distribution de champ électrique autour de la charge à proximité de la plaque. Une manière plus simple de l'obtenir est d'appliquer la méthode des images qui énonce que la surface conductrice va agir comme un miroir électrique. Ainsi la charge surfacique à la surface du conducteur va créer le même champ que la charge miroir de signe - à la même distance de l'autre côté de la surface de la plaque en regard de la charge  $+q$ . On obtient alors la figure ci-dessus qui fait apparaître les lignes de champ électrique réelles en trait plein, et les lignes virtuelles de la charge image en pointillés. On peut noter que les conditions aux limites énoncés plus haut restent valables ici. Il est donc facile de déduire la force d'attraction subie par la charge, ainsi que le champ électrique en tout point de l'espace.





## Chapitre 4

# Magnétostatique

L'électrostatique est l'étude des charges au repos. La magnétostatique s'applique aux charges en mouvement à vitesse constante. On parle alors d'un courant, et ce courant génère un champ magnétique constant ou statique.

### 4.1 Origine du magnétisme

Les premières observations du magnétisme remontent à l'antiquité et sont imputables à la pierre d'aimant appelée aussi magnétite capable d'attirer le fer. Une aiguille en pierre d'aimant s'orientait toujours dans la même direction quand elle était libre de se déplacer. Cette observation donna naissance à la boussole en Chine adoptée ensuite par les arabes et les Européens.

Au début du XIXe siècle l'étude du magnétisme progressa rapidement lorsque le lien avec l'électricité fut établi. En 1819 Oersted découvrit qu'une aiguille aimantée s'orientait perpendiculairement à un fil parcouru par un courant, et que l'orientation s'inversait avec le courant. En 1820, Ampère développe une théorie complète sur l'action réciproque des champs magnétiques et des courants.

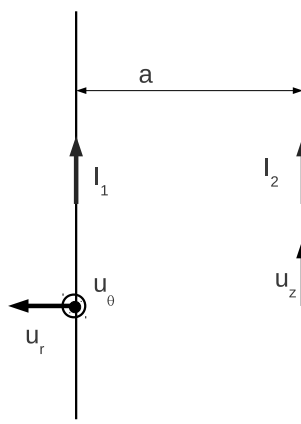
De même lorsque 2 fils parcourus par un courant identique sont placés côte à côte, ils s'attirent si les 2 courants circulent dans le même sens et se repoussent si les 2 courants circulent dans le sens opposé.

### 4.2 Forces magnétiques

Il est possible de calculer la force par unité de longueur  $F^*$  s'exerçant entre 2 fils séparés d'une distance  $a$  et parcourus par des courants  $I_1$  et  $I_2$ . Expérimentalement on trouve que cette force **par unité de longueur** exercée par le fil 2 sur le fil 1 est une force d'attraction que l'on peut exprimer ainsi :

$$\vec{F}_{12}^* = -\alpha \frac{I_1 I_2}{a} \vec{u}_r$$

avec  $\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}$



avec  $\alpha$  une constante positive,  $a$  la distance entre les 2 fils parallèles, et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire radial, perpendiculaire aux courants. Cette force est négative si les 2 fils s'attirent (courants dans le même sens) et positive si les 2 fils se repoussent (courants en sens opposé). Cette relation ressemble beaucoup à la loi de Coulomb pour l'électrostatique.

#### 4.2.1 Force de Lorentz

Les charges en mouvement créent un champ magnétique  $\vec{B}$  qui s'enroule autour de ce courant dans un plan perpendiculaire. Si d'autres charges sont en mouvement dans ce champ magnétique alors elles vont subir une force, la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (4.1)$$

Cette force regroupe une partie électrique  $q\vec{E}$  et une partie magnétique  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Nous nous intéresserons en magnétostatique à la partie magnétique. On trouve la direction de cette force grâce à la règle des 3 doigts de la main droite, ou la règle du tire-bouchon. Pour cette dernière l'ordre de  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  donne le sens de rotation du tire-bouchon (sens positif = sens des aiguilles d'une montre) et la direction et le sens de la force sont données par le mouvement longitudinal du tire-bouchon.

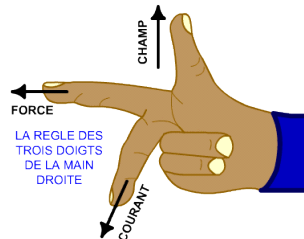


FIGURE 4.1 – Règle des 3 doigts de la main droite (courant ou vitesse  $v$  d'une charge positive).

La force de Lorentz est une forme locale. L'équivalent macroscopique de la partie magnétique de la force de Lorentz est la force de Laplace.

### 4.2.2 Force de Laplace

$$d\vec{F}_{Lap} = I d\vec{l} \wedge \vec{B} \quad (4.2)$$

que l'on peut retrouver grâce à  $\vec{F}_{Lap} = \sum q_i \vec{v}_i \wedge \vec{B} = \int \rho \vec{v} \wedge \vec{B} d\tau = \int \vec{j} d\tau \wedge \vec{B}$ . Ainsi pour une densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\vec{F}_{Lap} = \iiint \vec{j} d\tau \wedge \vec{B} \quad (4.3)$$

Et pour un courant :

$$\vec{F}_{Lap} = \int \vec{I} dl \wedge \vec{B} \quad (4.4)$$

Cette force est à l'origine de l'effet Hall qui dévie un courant plongé dans un champ magnétique.

#### Exemple : Effet Hall

L'effet Hall se manifeste lorsqu'un courant  $I$  circule dans un champ magnétique  $B$ .

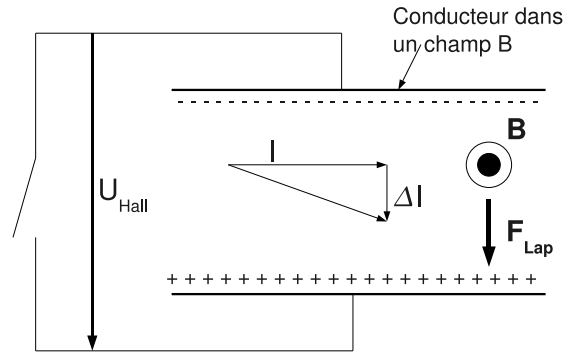


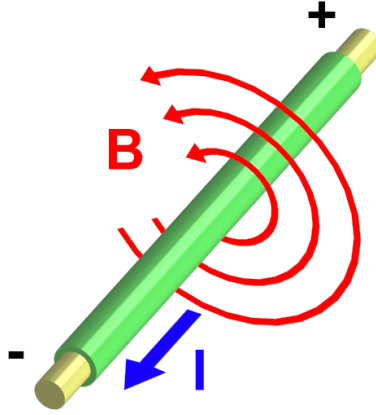
FIGURE 4.2 – Effet Hall.  $\Delta I = 0$  en stationnaire si le circuit est ouvert.

Sous l'effet des forces de Laplace le courant va subir une force perpendiculaire à sa direction et celle de  $B$ . Il en résulte une différence de potentiel dans la direction perpendiculaire à  $I$  et  $B$ .

C'est sur ce principe que fonctionne le Teslamètre qui mesure l'intensité d'un champ magnétique en 1 point de l'espace.

## 4.3 Champ magnétique B (ou induction magnétique B)

Le champ magnétique étant généré par un mouvement de charges, il dépend donc du courant. Il dépend aussi de la distance avec sa propre source.

FIGURE 4.3 – Champ magnétique  $B$  autour du courant.

#### 4.3.1 Loi de Biot et Savart

Cette loi donne le champ magnétique  $B$  en 1 point  $M$  et s'exprime ainsi :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{PM}}{PM^3} \quad (4.5)$$

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  étant la perméabilité du vide.  $PM$  est la distance entre l'élément de courant  $dl$  situé en  $P$  et le point  $M$  où l'on veut le champ magnétique.  $I$  est le courant parcourant le contour de l'intégrale.

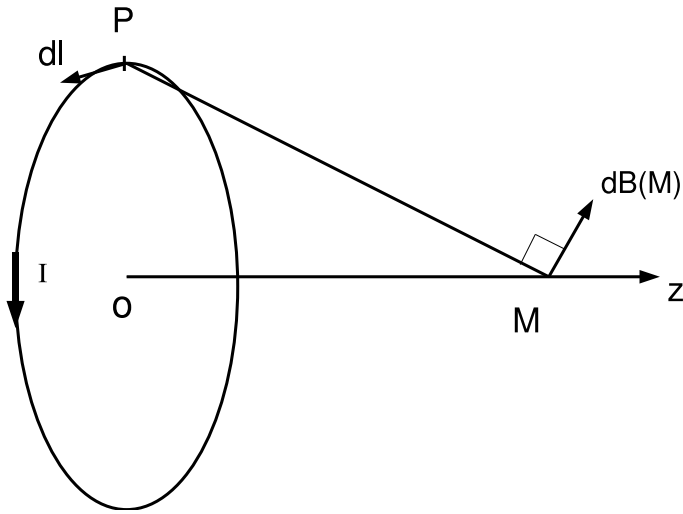


FIGURE 4.4 – Loi de Biot et Savart appliquée à une spire de courant.

Cette loi peut aussi s'écrire sous forme différentielle et en utilisant un vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  pour alléger la notation :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \wedge \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.6)$$

Avec  $r$  la distance entre l'élément de courant et le point  $M$ . Cette écriture est alors similaire à celle du champ électrique, le champ  $\vec{B}$  décroissant en  $1/r^2$  comme  $\vec{E}$ .

Le champ magnétique  $B$  s'exprime en tesla (T). Autrefois il était plus communément exprimé en gauss (1 gauss =  $10^{-4}$  T), soit la valeur approximative du champ magnétique terrestre (0.5 gauss) au centre de la Terre.

### 4.3.2 Le potentiel vecteur

De même que le champ électrique  $E$  dérive d'un potentiel  $V$ , le champ magnétique  $B$  dérive lui même du potentiel vecteur  $A$ . Mais tout d'abord nous devons montrer que le champ magnétique suit toujours une boucle fermée à l'instar du courant qui le crée. Un courant stationnaire ne peut circuler que le long d'une boucle fermée sinon des charges s'accumuleraient aux extrémités du fil comme dans un condensateur (qui ne peut fonctionner qu'en régime périodique ou transitoire). Donc la divergence du courant est nulle. Ceci se retrouve dans la relation de conservation d'un flux en mécanique générale mais appliquée ici à un flux de charges, donc à un courant.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad (4.7)$$

En stationnaire on a simplement  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$  pour la densité de courant.

Faisons maintenant la divergence de  $B$  obtenue par la relation de Biot et Savart :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_r}{r^2} d\tau \right) = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) \vec{e}_I \right)$$

$$\text{avec } \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) = \frac{\vec{j} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Il vient donc :

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{j}}{r} \right) \right) d\tau = 0$$

car  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge ())$  est toujours nul. On en déduit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (4.8)$$

Toujours en utilisant les propriétés de la divergence et du rotationnel, on a quel que soit  $A$  :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

On obtient ainsi le potentiel vecteur  $\vec{A}$  tel que :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (4.9)$$

Ce potentiel vecteur est utile puisqu'il permet de s'abstenir de l'utilisation du rotationnel, cela permet d'obtenir des expressions plus simples pour la relation de Biot et Savart par exemple :

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l}}{r} \quad (4.10)$$

### 4.3.3 Flux du champ magnétique

Une autre notion importante est le flux du champ magnétique que nous calculerons comme nous l'avons déjà fait pour le flux électrique. Le flux magnétique est la quantité de champ  $B$  qui "s'écoule" à travers la surface quelconque  $S$ . Ce flux s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (4.11)$$

avec  $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ ,  $\vec{n}$  étant la normale à la surface  $S$  à la position de  $dS$ . L'unité de  $\Phi$  est le Weber (Wb).

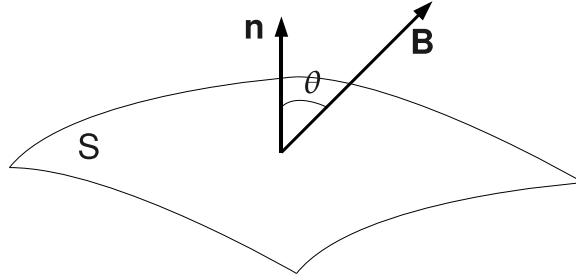


FIGURE 4.5 –

D'après le théorème de Green-Ostrogradski (voir section 2.3.2) :

$$\oint_{S_c} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{B} d\tau = 0$$

Il y a toujours conservation du flux sur la surface de flux fermée  $S_c$  puisque la divergence de  $B$  est nulle.

#### 4.3.4 Théorème d'Ampère

Ce théorème est l'équivalent du théorème de Gauss qui mettait en relation le champ et les charges électriques. Ici ce sont le champ magnétique et les courants qui sont reliés.

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_k I_k \quad (4.12)$$

Cela signifie que l'intégrale du champ magnétique sur un contour fermé  $(C)$  est égale à la somme des courants traversant ce contour fermé. On peut aussi l'écrire avec la densité de courant  $\vec{j}$  :

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (4.13)$$

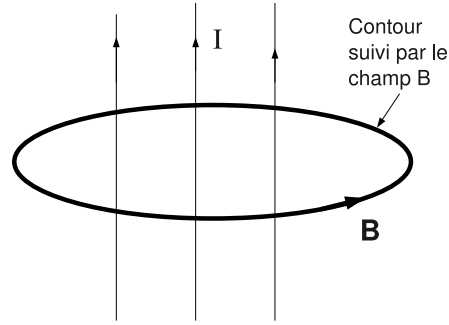


FIGURE 4.6 –

D'après le théorème de Stokes (voir section 2.3.3)

$$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

donc la forme locale du théorème d'Ampère s'écrit :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (4.14)$$

Nous retrouverons cette équation dans le dernier chapitre puisque c'est la partie stationnaire de la dernière équation de Maxwell (Maxwell-Ampère).

## 4.4 Dipôle magnétique

Le moment dipolaire magnétique est défini comme le produit du courant par la surface traversée par ce courant et est orienté selon la normale à cette surface.

$$\vec{\mu} = I \cdot \vec{S} \quad (4.15)$$

avec  $\vec{S} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \wedge d\vec{l}$  et  $\vec{\mu} = \frac{1}{2} \oint \vec{r} \wedge I d\vec{l}$

donc

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r} \wedge \vec{j} d\tau \quad (4.16)$$

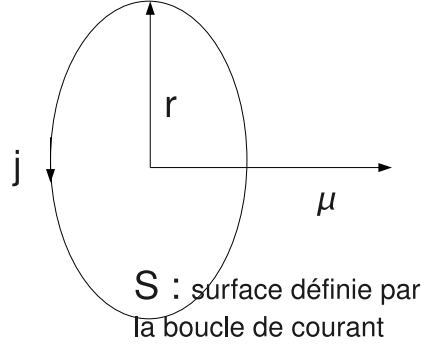


FIGURE 4.7 – moment dipolaire magnétique

#### 4.4.1 Force s'exerçant sur un dipôle magnétique

La force qui s'exerce sur un dipôle magnétique est égale à l'opposé du gradient de l'énergie potentielle magnétique :  $\vec{F}_m = -\vec{\nabla}U_m$   
donc

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\ \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \\ \vec{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

Cette force existe à condition qu'il y ait un gradient de champ B.

#### 4.4.2 Couple s'exerçant sur un dipôle magnétique

Le couple est le produit vectoriel de la force (de Laplace) par la distance qui sépare le point d'application de cette force et le point O où on veut calculer ce couple. On a alors  $\vec{C} = \int I d\vec{l} \wedge \vec{B} \wedge \vec{r} = \int I d\vec{S} \wedge \vec{B}$  avec  $r$  le rayon de la boucle de courant décrivant le dipôle magnétique (voir fig 3.7), on en déduit le couple subi par un dipôle magnétique de moment  $\mu$ .

$$\vec{C} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad (4.18)$$

Ce couple n'oriente pas directement le moment dipolaire dans la direction du champ  $\vec{B}$  mais tend à faire tourner le moment dipolaire autour de l'axe de  $\vec{B}$ , c'est un mouvement de précession (similaire au mouvement d'une toupie). Ce couple devient nul lorsque le moment dipolaire est aligné avec  $\vec{B}$ , c'est pourquoi il y a plus de probabilité qu'il soit orienté selon  $\vec{B}$ .

### 4.5 Énergie magnétique

On peut calculer l'énergie magnétique à partir du travail des forces de Laplace sur un fil de longueur L parcouru par un courant I et se déplaçant dans un champ magnétique B sur une distance D :



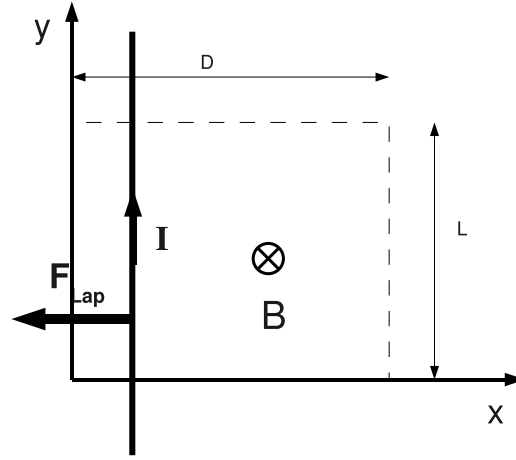


FIGURE 4.8 – Travail des forces de Laplace

La force de Laplace puis le travail de cette force donnent :

$$F_{Lap} = \int_0^L I d\vec{y} \wedge \vec{B} \text{ et } W = \int_0^D \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Ce travail est non nul si le fil n'est pas parallèle à  $\vec{B}$ . Supposons ici le fil perpendiculaire à  $\vec{B}$  pour simplifier le produit vectoriel :

$W = ILDB$  avec  $LD = S$ ,  $S$  étant la surface traversée par le champ magnétique, donc  $W = IBS$  et ainsi

$$W = I\Phi \quad (4.19)$$

Le travail magnétique est donc égal au produit du courant par le flux magnétique ou la variation de flux magnétique entre le point de départ et d'arrivée du fil transportant le courant. L'énergie potentielle est l'opposée du travail donc

$$U_m = -I\Phi \quad (4.20)$$

Énergie qui peut être exprimée à l'aide du moment magnétique  $\mu$  :

$$U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{ext} \quad (4.21)$$

On peut aussi définir l'énergie magnétique contenue dans une bobine d'inductance  $L$  et parcourue par un courant  $I$  :

$$U = \frac{1}{2}LI^2 \quad (4.22)$$

## 4.6 Milieux magnétiques

### Définition :

On appelle milieu aimanté un milieu dans lequel on observe une répartition continue de moments dipolaires magnétiques. C'est la manifestation à l'échelle macroscopique de l'existence de dipôles magnétiques à l'échelle microscopique.

### 4.6.1 Aimantation

**Définition :**

L'aimantation définie comme le champ de vecteur  $\vec{M}$  est une densité volumique de moments magnétiques.  $\vec{M}$  est une grandeur macroscopique et locale. L'unité de moment dipolaire magnétique étant l' $A.m^2$ , l'aimantation est exprimée en  $A.m^{-1}$ . L'aimantation est l'équivalent d'un champ magnétique (à une constante près) créée par l'alignement des moments magnétiques dans le matériau.

$M$  est l'analogie magnétique du vecteur polarisation  $P$ . Le moment dipolaire magnétique d'un volume élémentaire s'écrit :  $\vec{\mu} = \vec{M}\delta\tau$ .

Il vient ensuite une équivalence entre l'aimantation et les courants d'aimantation que nous noterons  $j_a$  la densité de courant volumique (en  $A/m^2$ ) et  $\vec{j}_{aS}$  la densité de courant surfacique (en  $A/m$ ) :

$$\vec{j}_a = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \quad (4.23)$$

et

$$\vec{j}_{aS} = \vec{M} \wedge \vec{n}_{ext} \quad (4.24)$$

Ces courants d'aimantations sont en fait des boucles de courants qui génèrent un moment magnétique.

### 4.6.2 Calcul du champ et du potentiel vecteur créé par une aimantation $M$

La loi de Biot et Savart donnait le champ  $B$  connaissant les courants  $j$  de charges libres. Ici nous écrivons la même relation mais pour les courants d'aimantation qui sont des courants virtuels mais qui permettent de retrouver  $B_m$  le champ dû à l'aimantation.

$$\vec{B}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{j}_a \wedge \vec{r}}{r^3} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{j}_{aS} \wedge \vec{r}}{r^3} dS$$

De la même façon le potentiel vecteur s'écrit ainsi :

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\tau} \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{M}}{r} d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} dS$$

### 4.6.3 Excitation magnétique $H$ (ou champ magnétique $H$ )

D'après la définition locale du théorème d'Ampère  $\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Attention ici  $\mu_0$  n'a plus rien à voir avec le moment magnétique, il s'agit bien de la perméabilité magnétique du vide. Le courant  $j$  peut se décomposer comme suit  $\vec{j} = \vec{j}_l + \vec{j}_a$ ,  $j_l$  étant la densité de courant des charges libres (électrons de conduction) et  $j_a$  la densité de courant d'aimantation. On peut alors écrire

$\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{j}_a = \vec{j}_l$  puis  $\vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{\nabla} \wedge \vec{M} = \vec{j}_l$ , enfin  $\vec{\nabla} \wedge \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_l$  et on obtient ainsi la définition de l'excitation magnétique  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (4.25)$$

qui ne s'applique qu'aux courants composées de charges libres.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_l \quad (4.26)$$

ce qui donne sous forme intégrale

$$\oint_{(C)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{(S)} \vec{j}_l \cdot d\vec{S} \quad (4.27)$$

avec (S) la surface non fermée s'appuyant sur le contour (C).

#### 4.6.4 Susceptibilité et perméabilité magnétiques

Enfin nous allons voir que l'aimantation peut aussi s'exprimer en fonction de l'excitation magnétique H selon la formule

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (4.28)$$

$\chi_m$  étant la susceptibilité magnétique du matériau magnétique.

D'autre part le champ magnétique dépend de l'excitation magnétique selon la formule

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (4.29)$$

avec  $\mu_r$  la perméabilité relative du matériau et  $\mu$  la perméabilité du milieu. Or

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (4.30)$$

On en déduit donc que  $\mu_r = 1 + \chi_m$ .

Les matériaux réagissent différemment lorsqu'ils sont plongés dans un champ d'excitation magnétique H. Certains possèdent des moments magnétiques permanents qui s'orientent pour créer une forte aimantation, c'est le cas des milieux ferromagnétiques. D'autres créent une aimantation faible puisque que leurs dipôles magnétiques sont générés et orientés par le champ exciteur : ce sont les milieux paramagnétiques,  $\chi_m > 0$ . Enfin les matériaux dits diamagnétiques ( $\chi_m < 0$ ), créent un champ opposé au champ exciteur empêchant ainsi le flux magnétique de rentrer dans le matériau. Nous allons voir en détails tous ces milieux magnétiques dans les sections suivantes.

#### 4.6.5 Conditions aux limites magnétiques

D'après  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_l$  on en déduit les conditions de continuité pour B et H à l'interface entre un milieu 1 et un milieu 2,  $n_{12}$  étant la normale à la surface séparant les 2 milieux.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \implies \vec{n}_{12} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{j}_l \implies \vec{n}_{12} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_l^S$$

$j_l^S$  est la densité de courant surfacique sur l'interface.

La première relation signifie que la composante normale du champ B est continue :

$$B_1^{norm} = B_2^{norm} \quad (4.31)$$

La seconde signifie que la composante tangentielle de H est continue en fonction des courants surfacique  $j_l$ . Si ceux-ci sont nuls, la condition s'exprime ainsi :

$$H_2^{tan} = H_1^{tan} \quad (4.32)$$

Ces conditions impliquent que le champ B dans un matériau magnétique a tendance à s'orienter suivant la longueur de l'échantillon. En effet la continuité de la composante normale de B implique qu'il reste constant à l'extérieur et à l'intérieur de celui-ci. Au contraire la continuité de H tangent implique que B tangent soit beaucoup plus grand dans le matériau magnétique

qu'à l'extérieur car  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ . Il en résulte que  $B$  interne au matériau s'oriente préférentiellement parallèlement à ses bords donc préférentiellement selon la longueur.

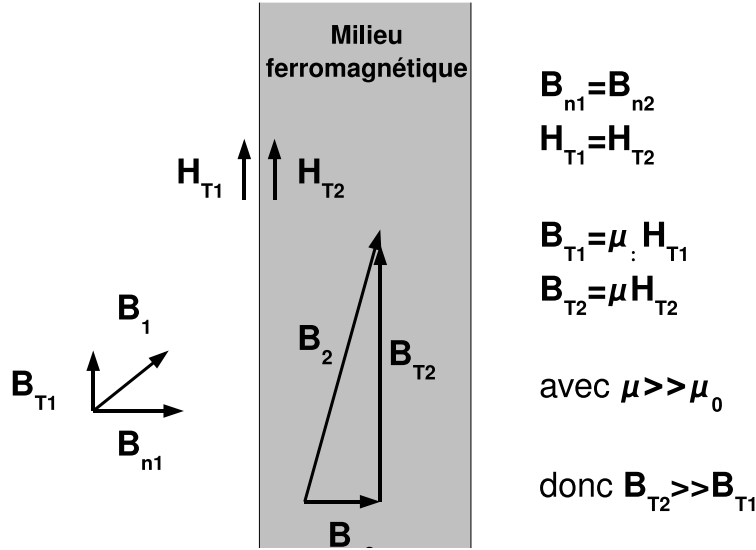


FIGURE 4.9 – Conditions aux limites magnétiques.

#### 4.6.6 Couples et forces magnétiques

De même que pour le moment magnétique il est possible d'obtenir les forces et couples engendrés par l'aimantation. Celles-ci n'étant en fait qu'un moment dipolaire macroscopique, on peut utiliser les mêmes formules que pour le moment dipolaire :

$$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B} \quad (4.33)$$

$C$  est le couple engendré par l'aimantation  $M$  dans le champ  $B$ .

Quant à la densité volumique de force magnétique, elle s'exprime ainsi :

$$\begin{pmatrix} F_x^* \\ F_y^* \\ F_z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial x} \\ \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial y} \\ \vec{M} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

avec  $F^* = \frac{\partial F}{\partial \tau}$  : c'est une force volumique (en  $N/m^3$ ).

#### 4.6.7 Travail des forces magnétiques

Le travail volumique élémentaire échangé vaut

$$\delta W^* = \vec{H} \cdot \delta \vec{B} \quad (4.35)$$

En notation intégrale :

$$W^* = \int \vec{H} \cdot d\vec{B} \quad (4.36)$$

avec l'étoile qui veut dire volumique, il s'agit bien d'une densité d'énergie magnétique.

### 4.6.8 Diamagnétisme

Le diamagnétisme est une propriété magnétique présente dans tous les milieux. Elle résulte de l'action des courants induits par un champ magnétique extérieur (voir chapitre Induction). En effet lorsqu'on approche un objet matériel d'un aimant, l'augmentation du champ magnétique dans le milieu induit des courants, qui par nature vont créer un champ magnétique opposé au champ extérieur. De même lorsqu'on éloigne l'objet le phénomène est identique. Ainsi l'application d'un champ magnétique dans un milieu diamagnétique induit un champ opposé. La susceptibilité diamagnétique est donc négative.

Nous ne calculerons pas ici le champ diamagnétique induit puisque cela fait appel à des notions d'induction (loi de Lenz) que nous verrons plus loin. Schématiquement le courant induit se traduit par une organisation de la rotation des électrons autour du noyau de telle sorte que la somme de leur mouvement rotationnel crée un courant. Celui-ci est infime, et génère un champ magnétique tout aussi infime de telle sorte que la susceptibilité magnétique est de l'ordre de  $-10^{-4}$ . D'ailleurs les effets diamagnétiques sont toujours masqués par les effets paramagnétiques et ferromagnétiques.

### 4.6.9 Paramagnétisme

Alors que le diamagnétisme s'applique à tous les matériaux, le paramagnétisme n'est présent que dans les matériaux possédant un moment magnétique permanent. Ce moment magnétique résulte de la somme des moments magnétiques orbitaux et des moments magnétiques de spin.

#### 4.6.9.1 Le moment orbital

Il est possible de relier le moment orbital  $\vec{J}$  au moment magnétique  $\vec{\mu}$  (voir section 4.4). Le moment orbital est un moment cinétique représenté par le produit vectoriel de la quantité de mouvement par le rayon de giration. Tout corps ayant un mouvement de rotation possède un moment cinétique orbital (Ex : la Terre décrivant une orbite autour du Soleil).

En effet  $\vec{J}_{orb} = m \vec{v} \wedge \vec{r}$  si  $r$  est le rayon du cercle décrit par le mouvement de l'électron et  $\mu_{orb} = IS = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2$ , avec  $I = \frac{qv}{2\pi r} = \frac{q}{T}$ ,  $T$  étant la période de rotation de l'électron autour du noyau. Ainsi

$$\vec{\mu}_{orb} = -\frac{q_e}{2m} \vec{J}_{orb} \quad (4.37)$$

$q_e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{C}$ . Il existe un autre moment magnétique associé à la rotation de l'électron sur lui-même, le spin noté  $\vec{\mu}_{spin} = -\frac{q_e}{m} \vec{J}_{spin}$ .

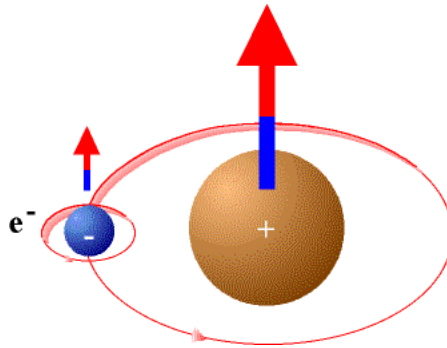


FIGURE 4.10 – Le moment orbital est représenté par le vecteur issu du proton et le spin par le vecteur issu de l'électron.

Le moment cinétique d'un nuage électronique complet est la somme des spins et du moment orbital de chaque électron du nuage.

Or dans un nuage électronique, les électrons ont des moments magnétiques (orbitaux et de spin) s'annulant 2 à 2. Les éléments ayant un nombre impair d'électrons sont susceptibles de posséder un moment magnétique non nul, sauf quand ils sont appariés pour former des molécules.

En moyenne la somme des moments élémentaires est nulle puisqu'ils ne sont pas alignés. Ceci est dû à l'agitation thermique au sein du matériau. Lorsque le champ magnétique appliqué devient suffisamment grand pour vaincre les forces de désorganisation thermique, alors les moments finissent par s'aligner pour donner un champ magnétique additionnel dans le même sens que le champ appliqué. Ce champ reste néanmoins très faible puisque la susceptibilité des matériaux paramagnétiques est bien plus petite que 1 à température ambiante. Pour trouver la susceptibilité magnétique il faut calculer l'aimantation.

#### 4.6.9.2 Susceptibilité d'un milieu paramagnétique

L'énergie magnétique d'un dipôle dans un champ  $B$  vaut  $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ . Or la probabilité de trouver le moment magnétique dans un état d'énergie  $U$  est donné par le facteur de Maxwell-Boltzmann égal à  $p = \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right)$ , avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température à l'équilibre thermodynamique. Ainsi l'aimantation moyenne est donnée par la somme de tous les moments magnétiques divisée par la somme des probabilités.

$$\langle M \rangle = \frac{\sum p_i \mu_i}{\sum p_i} = N \langle \mu \rangle$$

$\langle M \rangle$  est l'aimantation moyenne,  $\langle \mu \rangle$  est la valeur moyenne du moment des dipôles magnétiques de l'échantillon paramagnétique et  $N$  est la densité volumique de ces dipôles.  $\mu_i$  est le moment magnétique projeté dans la direction de  $\vec{B}$ . Pour tenir compte de cette projection, il faut écrire le produit scalaire de  $\vec{\mu}$  avec  $\vec{B}$  et diviser par la norme de  $\vec{B}$ . La somme des probabilités peut s'écrire sous forme intégrale entre  $-\mu B$  (moment  $\vec{\mu}$  opposé à  $\vec{B}$ ) et  $+\mu B$  (moment  $\vec{\mu}$  dans le même sens que  $\vec{B}$ ) :

$$\langle M \rangle = \frac{N \int_{-\mu B}^{+\mu B} \frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{B} \exp\left(\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{k_B T}\right) d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})}{\int_{-\mu B}^{+\mu B} \exp\left(\frac{\vec{\mu} \cdot \vec{B}}{k_B T}\right) d(\vec{\mu} \cdot \vec{B})}, \text{ posons } x = \vec{\mu} \cdot \vec{B} \text{ pour des raisons évidentes de}$$

simplification.

$$\langle M \rangle = \frac{N \int_{-\mu B}^{+\mu B} x \cdot \exp\left(\frac{x}{k_B T}\right) dx}{B \int_{-\mu B}^{+\mu B} \exp\left(\frac{x}{k_B T}\right) dx} = \frac{N}{B} \frac{[(k_B T + x) \exp(x/k_B T)]_{-\mu B}^{+\mu B}}{[\exp(x/k_B T)]_{-\mu B}^{+\mu B}}$$

En utilisant la fonction de Langevin  $L$ , on obtient l'aimantation du milieu en fonction de la température et du champ magnétique :

$$\langle M \rangle = \frac{N}{B} \left( -k_B T + \mu B \cdot \coth\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \right) = N \mu L\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \quad (4.38)$$

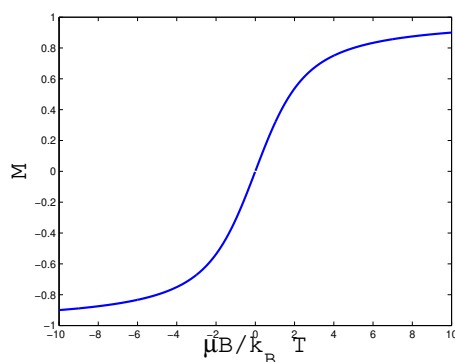


FIGURE 4.11 – Fonction de Langevin.

A basse température ou pour de très forts champs  $B$ ,  $\mu B/k_B T \gg 1$ . Dans ce cas  $L\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \rightarrow 1$  et  $M = N\mu$ .

Au contraire, quand l'énergie thermique est plus grande que l'énergie magnétique,  $\mu B/k_B T \ll 1$  et donc  $L\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right) \rightarrow \frac{\mu B}{3k_B T}$ . Ainsi  $M = \frac{N\mu^2 B}{3k_B T}$  et la susceptibilité  $\chi_m^{para}$  vaut  $\frac{N\mu^2}{3k_B T}$ , c'est à dire environ  $10^{-2}$  avec  $N = 10^{30} m^{-3}$ ,  $\mu = \mu_B = 9,3 \cdot 10^{-24} J \cdot T^{-1}$ ,  $\mu_B$  étant le magnéton de Bohr,  $T = 300 K$  et  $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} J \cdot K^{-1}$  la constante de Boltzmann.

#### 4.6.10 Ferromagnétisme

Le ferromagnétisme est analogue au paramagnétisme excepté qu'il est beaucoup plus puissant. Dans un ferromagnétique les moments magnétiques élémentaires s'alignent et peuvent rester alignés sous l'action d'un faible champ  $\vec{B}$ . Le champ à l'intérieur du ferromagnétique est ainsi amplifié. Un matériau ferromagnétique possède les mêmes propriétés magnétiques que le fer, c'est à dire qu'il est constitué de domaines possédant un moment magnétique propre et qui peuvent s'orienter dans la direction d'un champ magnétique appliqué que l'on nommera  $\vec{B}_0$ .

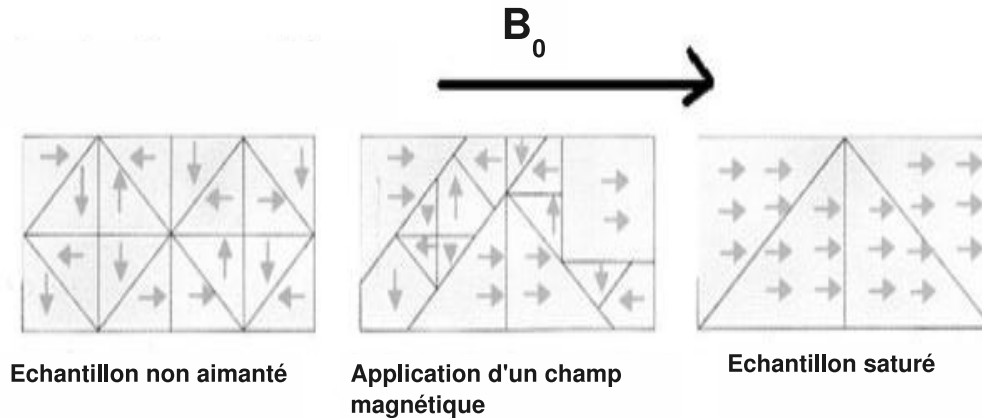


FIGURE 4.12 – Illustration des domaines magnétiques dans un échantillon ferromagnétique.

Le nickel est aussi un ferromagnétique de même que  $CrBr_3$ ,  $CrO_2$  ou  $EuS$ . Par exemple, les bandes magnétiques des magnétophones sont en oxyde de fer  $FeO_3$  ou en dioxyde de Chrome  $CrO_2$ .

Au delà d'une température critique appelée température de Curie  $T_c$ , les ferromagnétiques perdent leur propriété magnétique. La température de Curie du fer est de 1043 K.

#### 4.6.10.1 Courbe d'aimantation

Cette courbe peut être **approximée** par la fonction de Langevin calculée précédemment et qui est représentée sur la figure 4.11 . On constate qu'il y a saturation de l'aimantation pour de forts champs magnétiques de tel sorte que tous les moments magnétiques sont alignés dans le ferromagnétique. Il faut toutefois noter que la fonction de Langevin n'est quantitativement valable que pour les milieux paramagnétiques. Pour les milieux ferromagnétiques elle donne seulement l'allure de l'aimantation. Il faut donc remplacer le champ  $B_0$  par un autre champ tenant compte de tous les dipôles magnétiques qui influent sur l'orientation de leurs voisins et qui est environ 10000 fois plus grand que le champ appliqué. La saturation est très vite atteinte en raison d'un  $\mu_r$  pouvant atteindre  $10^5$  pour le mumétal.

Même à température ambiante une aimantation spontanée peut donc s'amorcer. Tous les barreaux de fer devraient alors se comporter comme des aimants permanents mais il n'en est rien. Si on décortique la structure d'un ferromagnétique, on remarque qu'il est composé de petites structures magnétiques appelés domaines magnétiques ou domaines de Weiss (voir figure 4.12) et qui sont eux complètement aimantés, donc jusqu'à  $M_{sat}$ . Ces domaines sont désorganisés, c'est à dire aléatoirement orientés, c'est pourquoi le champ magnétique résultant est nul. En revanche dès qu'un barreau de fer est plongé dans un champ magnétique, alors ces domaines s'alignent, créant ainsi une aimantation très importante dans le fer qui peut ensuite perdurer lorsqu'on retire le barreau du champ  $B_0$  extérieur.



## 4.6.10.2 Cycle d'hystérésis

Le cycle d'hystérésis apparaît lorsque l'excitation magnétique  $H$  varie. L'aimantation  $M$  résultante n'est alors plus une bijection de  $H$ . La figure 4.13 décrit un cycle d'hystérésis pour l'aimantation en fonction de  $\mu_0 H = B_0$ ,  $B_0$  étant le champ dans le vide. La courbe de 1ere aimantation (augmentation du champ à partir de 0 jusqu'à  $H_{max}$ ) apparaît en pointillés. Ensuite le champ oscille d'abord en décroissant et suit la courbe passant au dessus de la courbe de 1ere aimantation, puis en croissant en suivant la courbe en dessous de celle de 1ere aimantation. L'aimantation ne suit pas le même chemin en phase montante et descendante : il existe donc une résistance magnétique au sein du matériau, une inertie qui empêche les moments magnétiques de se retourner durant une période d'oscillation du champ. L'inertie magnétique peut être modélisée par la friction des domaines magnétiques qui se retournent à chaque demi-période, libérant de l'énergie par échauffement.

Cette propriété est d'ailleurs utilisée dans le chauffage par induction : les plaques à induction sont composées d'une bobine traversée par un courant alternatif de quelques dizaines de kHz qui induit un champ magnétique dans le fond d'une casserole dont le retournement des domaines magnétiques génère du chauffage par effet joule. Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer ce ne sont donc pas les courants de Foucault qui sont à l'origine de l'échauffement, c'est pourquoi le chauffage n'est optimale que pour les matériaux ferromagnétiques.

L'aire délimitée par le cycle d'hystérésis correspond à la densité de travail  $W_{cycle}^*$  perdue durant un cycle. Cette notion est utile pour évaluer l'énergie perdue par effet joule dans le noyau des transformateurs dont on cherche à minimiser l'aire du cycle d'hystérésis.

$$W_{cycle}^* = \oint_{cycle} \vec{H} \cdot d\vec{B} = \mu_0 \oint_{cycle} \vec{H} \cdot (d\vec{H} + d\vec{M}) = \mu_0 \oint_{cycle} \vec{H} \cdot d\vec{M} \quad (4.39)$$

puisque  $\oint_{cycle} \vec{H} \cdot d\vec{H} = 0$ .

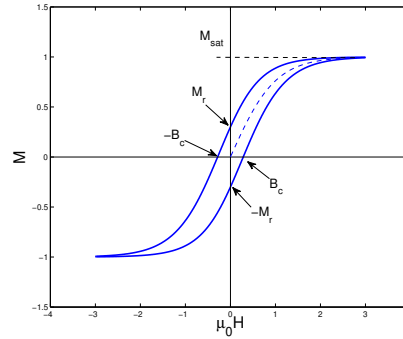


FIGURE 4.13 – Cycle d'hystérésis

On peut noter quelques points particuliers sur le cycle :

- Le champ coercitif  $B_c$  est le champ qu'il faut appliquer pour annuler l'aimantation ( $M=0$ ).
- L'aimantation rémanente  $M_r$  est l'aimantation qui reste lorsque  $H = 0$ .



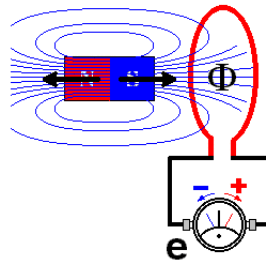
## Chapitre 5

# Induction magnétique

L'induction magnétique introduit la physique des champs électromagnétiques variables. Alors qu'une charge au repos crée un champ électrique statique et qu'un courant stationnaire crée un champ magnétique statique, une charge oscillante crée un courant oscillant qui va générer à son tour un champ magnétique oscillant qui va lui même induire un champ électrique variable. Ainsi toute variation de courant va induire une force électromotrice qui pourra à son tour générer un courant de sens opposé. C'est le phénomène d'induction qui fut découvert par Faraday en 1831. Les phénomènes d'induction sont de première importance puisqu'ils sont à la base de toute l'électrotechnique qui décrit le fonctionnement des transformateurs, de la dynamo, des moteurs électriques, etc....

### 5.1 Loi de Lenz

Pour mettre en évidence la loi de Lenz, il suffit d'approcher un aimant d'une spire relié à un voltmètre. On constate alors que tant que l'aimant s'approche on mesure une tension induite  $e$  et que si on l'éloigne à la même vitesse on mesure une tension  $-e$ . Cette tension est la force électromotrice (f.e.m) induite. Si au lieu d'un voltmètre on place un ampèremètre, la résistivité de la spire devient très faible, permettant à un courant de circuler sous l'action de la f.e.m induite. Ce courant induit crée alors un champ magnétique opposé au champ de l'aimant qui tend donc à freiner son mouvement.



### 5.2 Loi de Faraday

La f.e.m induite dépend uniquement de la variation de flux magnétique  $\Phi$  de telle sorte que

$$e = - \frac{d\Phi}{dt} \quad (5.1)$$

La f.e.m induite dans un circuit fermé est égale à l'opposé de la dérivée par rapport au temps du flux magnétique à travers le circuit.  $e$  s'exprime en volt (V), le flux  $\Phi$  en V.s.

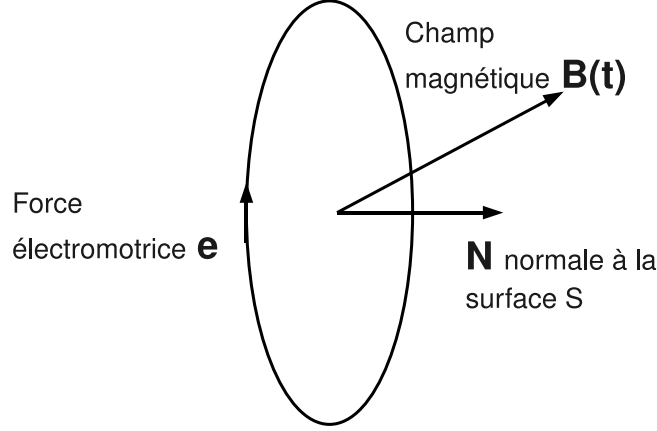


FIGURE 5.1 – Illustration de la loi de Faraday : la variation de flux magnétique crée une f.e.m.

On peut développer cette expression en disant que

$$e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

d'après le théorème de Stokes. Or

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Ainsi donc

$$\iint \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

ce qui revient à écrire localement :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.2)$$

qui est l'équation de Maxwell-Faraday.

### 5.3 Potentiel vecteur et champ électrique

Nous avons vu dans les premiers chapitres que le champ  $\vec{E}$  dérivait d'un potentiel  $V$  de telle sorte que  $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$  en statique.

Désormais les champs varient dans le temps, il convient donc de vérifier si cette relation est toujours valable en dynamique.

Rappelons que  $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$  que nous pouvons introduire dans Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{\nabla} \wedge \vec{A}}{\partial t} = - \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \text{ on en déduit que } \vec{\nabla} \wedge \left( \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

On a alors  $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$  qui dérive d'un potentiel, d'où

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (5.3)$$

Cette équation signifie que  $E$  dérive spatialement d'un potentiel  $V$  mais dérive aussi temporellement du potentiel vecteur  $A$ . Ainsi une variation temporelle du champ magnétique crée automatiquement un champ électrique comme l'indique l'équation de Maxwell-Faraday.

## 5.4 Force électromotrice (champ électromoteur)

La force électromotrice  $e$  est l'intégrale du champ  $E$  le long du contour  $C$  :

$$e = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

et d'après la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ , il y a une équivalence entre le champ  $\vec{E}$  et  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ , on peut donc écrire la force  $\vec{F}$ , soit en fonction de  $\vec{E}$ , soit en fonction de  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

**Exemple :** Équivalence entre un conducteur mobile se déplaçant à une vitesse  $v$  dans un champ magnétique  $B$  (schéma de gauche) et un conducteur fixe soumis à un champ  $E'$  (schéma de droite).

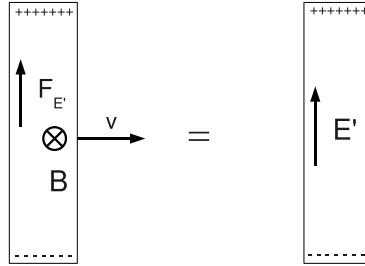


FIGURE 5.2 – Les forces résultantes sur les 2 schémas sont équivalentes.

D'après la figure ci-dessus, appliquer un champ  $E'$  dans le conducteur immobile ( $\vec{F}_{E'} = q\vec{E}'$ ) est strictement équivalent à déplacer ce conducteur à la vitesse  $v$  dans le champ  $B$  ( $\vec{F}_{E'} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ ). On obtient ainsi la définition du champ électromoteur  $E'$  :

$$\vec{E}' = \vec{v} \wedge \vec{B} \quad (5.4)$$

Dans le cas le plus général, donc pour un conducteur en mouvement dans un champ  $\vec{B}$  et un champ électrique  $\vec{E}$ , on a :

$$e = \int_A^B (\vec{E} + \vec{E}') \cdot d\vec{l} = \int_A^B (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (5.5)$$

## 5.5 Inductance

### 5.5.1 Auto-induction

La variation du flux magnétique d'une bobine parcourue par un courant  $i$  induit une force contre-électromotrice dans cette même bobine. Cette force tend à diminuer la variation du courant dans la bobine, augmentant ainsi l'inertie du courant. L'auto-induction est proportionnelle à la valeur de l'inductance propre  $L$  de la bobine :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (5.6)$$

#### Exemple : Circuit RL

Équation du circuit :  $e_0 + e = Ri$

$$e_0 - L \frac{di(t)}{dt} = Ri \text{ dont la solution est } i(t) = \frac{e_0}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$$

Le temps  $\tau = \frac{L}{R}$  est le temps caractéristique d'établissement du courant dans la bobine et dépend de l'inductance  $L$ . Plus l'inductance est grande, plus le courant mettra de temps à atteindre sa valeur maximale.

### 5.5.2 Inductance mutuelle

L'inductance mutuelle apparaît lorsque 2 bobines sont couplées (comme dans les transformateurs), l'une agissant sur l'autre et vice versa. Le coefficient d'induction mutuelle est noté  $M_{12}$ . La bobine 1 parcourue par un courant  $i_1$  induit une fem  $e_2$  dans la seconde bobine tel que

$$e_2 = -M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5.7)$$

Par réciprocité  $M_{12} = M_{21}$ . La force électromotrice totale dans la bobine 2 si elle est parcourue par un courant  $i_2$  est donc la somme de la force électromotrice d'auto-induction et d'induction mutuelle :

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M_{21} \frac{di_1}{dt} \quad (5.8)$$

## 5.6 Courants de Foucault

Ce sont les courants induits dans le volume d'un conducteur se déplaçant dans un champ  $B$ , ou d'un conducteur fixe soumis à un champ  $B$  variable dans le temps.

#### Exemples :

Dans un transformateur les courants de Foucault sont induits dans le noyau de fer (ou alliage de fer), le fer étant conducteur. Ces courants provoquent un échauffement du noyau magnétique par effet Joule. Pour minimiser ces pertes thermiques les noyaux magnétiques sont feuilletés afin d'augmenter la résistance électrique dans le sens de ces courants.

Les freins électromagnétiques sont fabriqués à partir de conducteurs se déplaçant dans un champ  $B$ . Les courants de Foucault créés dans le conducteur génèrent des forces de Laplace opposées au mouvement (pendule de Foucault, TP 1A, illustration : ). Les forces de freinage sont proportionnelles aux courants et donc à la vitesse de déplacement du conducteur. Ainsi une dynamo peut servir de frein électromagnétique si ses bobinages sont court-circuités permettant ainsi aux courants induits de circuler et de générer leur propre champ magnétique.

## Chapitre 6

# Les équations de Maxwell

### 6.1 Dans le vide

Équation de Maxwell-Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (6.1)$$

Équation de Maxwell-Thompson

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.2)$$

Équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.3)$$

Équation de Maxwell-Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (6.4)$$

### 6.2 Dans la matière (donc en présence de charges et de courants)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (6.5)$$

Cette équation généralise la loi de Coulomb. C'est la forme locale du théorème de Gauss.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.6)$$

La deuxième équation de Maxwell signifie que le champ magnétique se reboucle toujours comme le champ d'un dipôle et qu'il n'existe pas de monopôle magnétique.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

L'équation de Maxwell-Faraday permet d'expliquer les phénomènes d'induction. C'est la forme locale de la loi de Faraday.

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \left( \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (6.8)$$

Quant à l'équation de Maxwell-Ampère c'est la forme locale du théorème d'Ampère qui donne l'équivalence entre courant, champ magnétique et variation du champ électrique.



## Chapitre 7

### Tableau récapitulatif

| paramètre | électrostatique  | magnétostatique   |
|-----------|--|---|
| Force     | <b>de Coulomb</b><br>$\vec{F} = q \vec{E}$   | <b>de Lorentz</b><br>$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$  |
| Champ     | <b>électrique</b> (charge ponctuelle)<br>$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$  | <b>magnétique</b><br>$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I \vec{dl} \wedge \vec{PM}}{PM^3}$ (loi de Biot et Savart)                                     |
| Potentiel | <b>électrique</b> (charge ponctuelle)<br>$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$   | <b>vecteur</b><br>$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \vec{dl}}{r}$<br>avec $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ |
| théorème  | <b>de Gauss</b><br>$\oiint_{S_G} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} d\tau$<br>ou<br>Maxwell-Gauss<br>$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ | <b>d'Ampère</b><br>$\oint_{(C)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$<br>ou<br>Maxwell-Ampère<br>$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ |
| milieu    | <b>diélectrique</b><br>Polarisation : $\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E}$<br>Déplacement électrique :<br>$\vec{D} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$          | <b>magnétique</b><br>Aimantation : $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$<br>Excitation magnétique $H$ :<br>$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$                  |

TABLE 7.1 – Analogies entre électrostatique et magnétostatique.

|   |
|---|
| <p style="text-align: center;"><b>Induction magnétique</b><br/> Loi de Faraday :<br/> <math>e = -\frac{d\Phi}{dt}</math><br/> avec <math>\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}</math> et <math>e = \int \vec{E} \cdot d\vec{l}</math><br/> ou<br/> Maxwell-Faraday<br/> <math>\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}</math></p> |
|---|





