TEORIE je množina formulí T

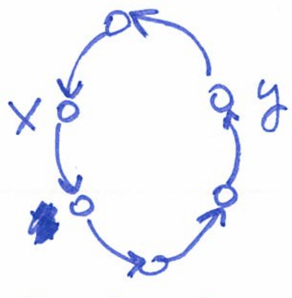
$\varphi \in T$ se nazývá axiomem T

Př: Jazyk s pred symbolem $<$

$$\left.\begin{array}{ll} (A1) & \forall x,y.\ (x<y) \rightarrow \neg(y<x) \\ (A2) & \forall x,y,z.\ (x<y) \rightarrow ((y<z) \rightarrow x<z)) \end{array}\right\} \boxed{T_u}$$

MODEL teorie T

$(\mathbb{N}, <)$ jsou modelem T_u



$(x<y) \wedge (y<x)$
ve sporu s (A1)

Důsledek teorie T $\qquad$ $\underline{T \models \varphi}$ $\qquad$ 2

$\Leftrightarrow$ pro každý model $M \models T$ platí že $M \models \varphi$

$\varphi_1 \equiv \forall x, y, z, g.\ (x<y) \wedge (y<z) \wedge (z<g) \to (x<g)$

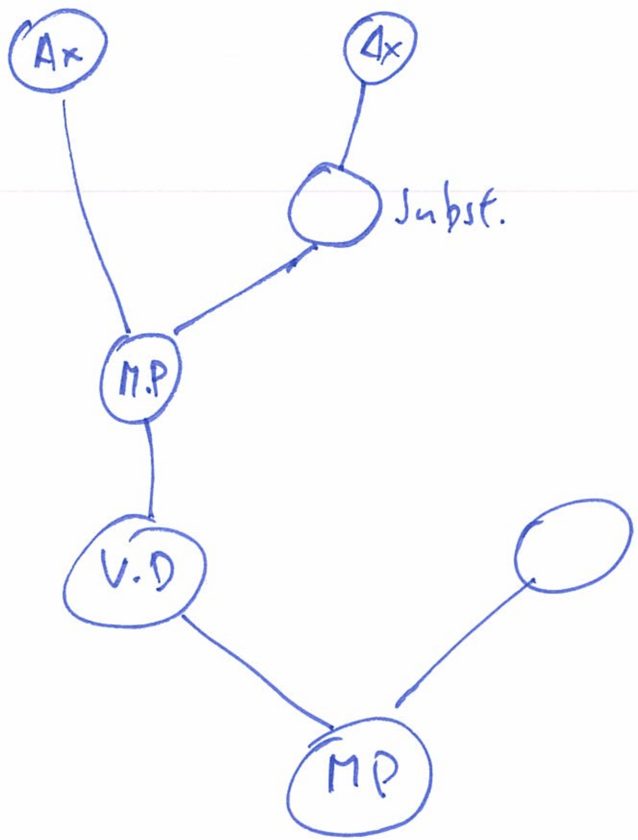
$\varphi_2 \equiv \forall x\, \exists y.\ (x<y)$ není důsledek teorie T_1

$\to$ stačí nalézt model ve kterém φ_2 neplatí.

$M = (\{0,1\}, <)$ $\qquad$ $\underline{0<1}$

$\varphi_1 \equiv \forall x, y, z, g. \quad (x<y) \to ((y<z) \to ((z<g) \to (x<g)))$

3



$\forall x, y, z, g. \quad (x < y) \rightarrow ((y < z) \rightarrow ((z < g) \rightarrow (x < g)))$ 4

(1) Ax. (A2) $\vdash \forall x, y, z. \; \{(x < y) \rightarrow ((y < z) \rightarrow (x < z))\}$

Ax. substituce: $x \leftarrow x, \; y \leftarrow y, \; z \leftarrow z$

(2) $\vdash (x < y) \rightarrow ((y < z) \rightarrow (x < z))$ 2x V.D

(3) $(x < y), (y < z) \vdash (x < z)$

(4) Ax (A2) T_4

substituce: $x \leftarrow x, \; y \leftarrow z, \; z \leftarrow g$

(4d) $\vdash (x < z) \rightarrow ((z < g) \rightarrow (x < g))$

M.P. (3) + (4d)

$(x < y), (y < z) \vdash (z < g) \rightarrow (x < g)$

5) 2x V.D.

$$\vdash (x<g) \to ((y<z) \to ((z<g) \to (x<g)))$$

6) generalizace

$$\vdash \forall x,y,z,g.\ (x<g) \to ((y<z) \to ((z<g) \to x<g)))$$

JAZYK s P.S.

$next_2$

$list_1$

F.S.

nil_0

JAZYK S ROVNOSTÍ

(A1) $x = nil \rightarrow list(x) \wedge \forall y.\ \neg next(x,y)$

(A2) $\forall x,y.\ list(y) \wedge next(x,y) \wedge \text{UNIQUE\_NEXT}(x) \rightarrow list(x)$

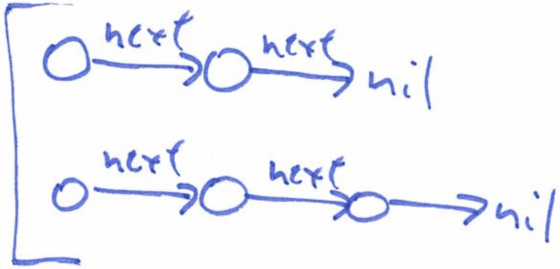
$\text{UNIQUE\_NEXT}(x) \equiv \forall y,z.\ next(x,y) \wedge next(\cancel{y}\,x, z) \rightarrow y = z$

(A3) $\forall x.\ list(x) \wedge x \neq nil \rightarrow next(x,y) \wedge list(y)$

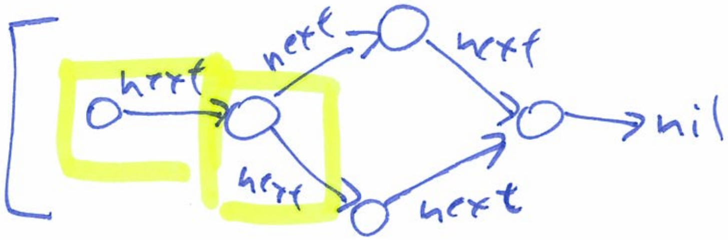
(A4) $\forall x\ \ list(x) \wedge x \neq nil \rightarrow \text{unique\_NEXT}(x)$

$\varphi \equiv list(x) \wedge x \neq nil$

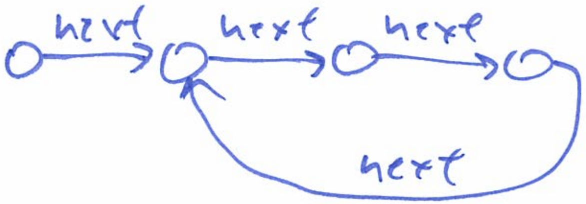
hledáme model T_L. $T_L \models \varphi$



ANO



NE



8

SPORNÁ TEORIE

T je sporná, pokud $\forall \varphi.\ T \vdash \varphi$

Př: 1 $T = \{T, F\}$

Př: 2 T.U. $\cup \{\neg \varphi_1\}$

Př: 3 T.U. s (A3) $\exists x.\ (x < x)$

ze substituce do (A1) $(x < x) \to \neg (x < x)$

Obecný příklad:

1) vezmeme $\varphi.\quad T \vdash \varphi$
2) uzavřeme φ pomocí generalizace

$$T \vdash \overline{\varphi}$$

3) sporná teorie je $T \cup \{\neg \overline{\varphi}\}$

$\boxed{\text{ÚPLNÁ TEORIE}}$

Teorie T je $\boxed{\text{úplná}}$, pokud $\boxed{\text{je bezesporná}}$ pro $\forall \varphi$ platí, že $T \vdash \varphi$ nebo $T \vdash \neg\varphi$

T_u není úplná

$\varphi_2 \equiv \forall x \exists y . (x < y)$

- platná pokud modelem jsou $(\mathbb{N}, <)$
- neplatná pro libovolný konečný model

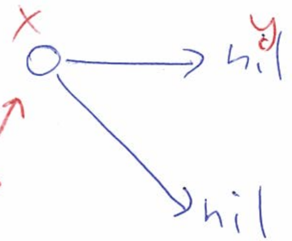
$\rightarrow$ nemůžeme dk. φ_2 ani $\neg\varphi_2$ $\Rightarrow$ teorie T_u není úplná

T není úplná pokud existují M_1, M_2. $T \models M_1 \wedge T \models M_2 \wedge \exists \varphi_2 . M_1 \models \varphi_2 \wedge M_2 \not\models \varphi_2$

$\varphi_1 \equiv next(x,y) \wedge y = nil \rightarrow list(x)$

$T_L \not\models \varphi_1$

M_1: $\circ \longrightarrow nil$ $\qquad M_1 \models \varphi_1$

M_2: 

TOTO NENÍ LIST

$M_2 \not\models \varphi_1$

$\varphi_2 \equiv next(x,y) \wedge y = nil \wedge \text{UNIQUE-NEXT}(x) \rightarrow list(x)$

Dokažte $T_L \vdash \varphi_2$

(A1) $\vdash y=nil \rightarrow list(y) \wedge \forall z.\ \neg next(y,z)$

mohu dokázat, že $\vdash A \rightarrow (B \wedge C)$ tak $\vdash A \rightarrow B$

$\vdash y=nil \rightarrow list(y)$

V.D. $y=nil \vdash list(y)$

(A2) $\vdash list(y) \wedge next(x,y) \wedge UNIQUE\_NEXT(x) \rightarrow list(x)$

$\vdash list(y) \rightarrow (next(x,y) \rightarrow (UNIQUE\_NEXT(x) \rightarrow list(x)))$

M.P. $y=nil \vdash next(x,y) \rightarrow (UNIQUE\_NEXT(x) \rightarrow list(x))$

V.D. $\vdash y=nil \rightarrow (next(x,y) \rightarrow (UNIQUE\_NEXT(x) \rightarrow list(x)))$

$\vdash y=nil \wedge next(x,y) \wedge UNIQUE\_NEXT(x) \rightarrow list(x)$

JAZYK L' je rozšířením L pokud každý funkční/pred. symbol L je obsažen v L'

Př: $L = (\underbrace{+_2, 0_0}_{\mathcal{F}}, \underbrace{=_2}_{\mathcal{P}})$

Pro $L' = (+_2, 0_0, \bullet_2, 1_0, =_2)$

Rozšíření teorie T jazyka L je „nová teorie" T' t. ž.

$$\forall \varphi.\quad T \vdash \varphi \rightarrow T' \vdash \varphi$$

Rozšíření teorie T' je konzervativní

$\forall \varphi.$ φ je v jazyce L původní teorie T : $T' \vdash \varphi \rightarrow T \vdash \varphi$

„Přidaní" axiomy mluví pouze o nově přidaných funkčních a pred. symbolech a neovlivňují původní funkční/pred. symboly

Rozšíření jazyka listů

- přidání nových pred. symbolů

  red_1, $black_1$

(A5) $\forall x.\ red(x) \vee black(x)$

(A6) $\forall x,y.\ red(x) \wedge next(x,y) \rightarrow black(y)$

(A7) $\forall x,y.\ black(x) \wedge next(x,y) \rightarrow red(y)$

assert $(x \geq 0) \wedge (x \leq 100)$

$y = 100 - x$

while $(x > 0)$

    $x--$

    $y++$

assert $(y = 100 \wedge x = 0)$

LOOP INV: $\boxed{x + y = 100 \wedge x \geq 0}$

---

1) $(x \geq 0) \wedge (x \leq 100) \wedge (x' = x) \wedge (y' = 100 - x) \rightarrow (x' + y' = 100) \wedge (x' \geq 0)$

2) $(x + y = 100) \wedge \cancel{(x \geq 0)} \wedge (x > 0) \wedge (x' = x - 1) \wedge (y' = y + 1) \rightarrow (x' + y' = 100) \wedge (x' \geq 0)$

3) $(x + y = 100) \wedge \underbrace{(x \geq 0) \wedge (x \leq 0)}_{x = 0} \wedge (x' = x) \wedge (y' = y) \rightarrow (y' = 100) \wedge (x' = 0)$