фd+ MAT - příprava na semestrálku 2015/16

Publikovaná ReadOnly verze: https://goo.gl/oCT81E

ReadWrite verze (pouze pro přispěvatele!!!): https://goo.gl/JoaihL

Zachovajte paniku!!

Starší online dokumenty:

MAT 2014/2015 - příprava na opravný: https://goo.gl/NI81ro

MAT 2014/2015 příprava na druhý opravný:

https://docs.google.com/document/d/1WmEtJ6XjgT1ZeMSbgZd4f7s71kOUvnBeLbbtBooMJAl/edit?pref=2&pli=1#heading=h.wcpae8jx1ysy

MAT (převážně grafy): https://goo.gl/P5BEXi

MAT_by_Marosik.pdf (34 stran příkladů): https://fituska.eu/download/file.php?id=10580

Pojmy souhrn (13 stran): https://fituska.eu/download/file.php?id=10581

FIT Wiki MAT semestralky: http://wiki.fituska.eu/index.php/Semestr%C3%A1lky

Gram-Schmidtov ortogonalizačný proces

1. Príklad: 2011/2012 řádný termín, skupina A

5. příklad (15 bodů) [editovat]

Na reálném vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ definujme skalární součin vztahem $(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Pomocí Gram-Schmidtova ortogonalizačního procesu najděte ortonormální bázi podprostoru prostoru $\mathbb{R}^3$ generovaného vektory $(1, 2, -1), (1, 2, -3), (4, 8, -8), (3, 6, -9)$.

Pokus o riesenie...ta definicia skalarneho sucinu je v zadani potrebna?

$f_1=(1,2,-1)$ $\qquad f_2 \cdot 3 = f_4$

$f_2=(1,2,-3)$ $\qquad f_1+f_2=(2,4,-4)\cdot 2 = f_3$ } lineárne závislé

$\cancel{f_3=(4,8,-8)}$

$\cancel{f_4=(3,6,-9)}$

$$\varphi_1=\frac{f_1}{\|f_1\|}=\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{1+4+1}}=\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)$$

$$d_2=(f_2,\varphi_1)=\left((1,2,-3),\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)\right)=\frac{1}{\sqrt6}+\frac{4}{\sqrt6}+\frac{3}{\sqrt6}=\frac{8}{\sqrt6}$$

$$h_2=f_2-d_2\cdot\varphi_1=(1,2,-3)-\frac{8}{\sqrt6}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt6},\frac{2}{\sqrt6},-\frac{1}{\sqrt6}\right)=(1,2,-3)-\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3},-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{5}{3}\right)$$

$$\varphi_2=\frac{h_2}{\|h_2\|}=\frac{\left(-\frac13,-\frac23,-\frac53\right)}{\sqrt{\left(-\frac13\right)^2+\left(-\frac23\right)^2+\left(-\frac53\right)^2}}=\frac{h_2}{\sqrt{\frac19+\frac49+\frac{25}{9}}}=\frac{h_2}{\sqrt{\frac{30}{9}}}=\frac{\left(-\frac13,-\frac23,-\frac53\right)}{\frac{\sqrt{30}}{3}}=$$

$$=\left(-\frac{1}{\sqrt{30}},-\frac{2}{\sqrt{30}},-\frac{5}{\sqrt{30}}\right)$$

myslím, že iba na zmätenie nepriateľa (vyšlo mi to rovnako). Potrebujeme spocitat normu v unitarnim prostoru ||x||, ktera je definovana jako odmocnina ze skalarniho soucinu z (x, x). Nema se ten skalar potom pocitat takto?

Myslím, že skalární součin může být definován i jinak (Definice 9.1. Funkcionální analýza). Postupovalo by se asi stejně, akorát by se jinak počítal ten skalární součin.

Proč to vypadá jinak než postup z SMT_2016_10.pdf, na straně 11?

Asi je to to samé jen u postupu SMT je na konci nutná normalizace výsledku (vydělení vektoru svou velikostí)

2. Príklad: 2011/2012 řádný termín, skupina C

f1=(2,-1,3); f2=(-1,2,-3); f3=(3,0,3); f4=(8,2,6)

f4 = f3 * 3 + f2

f3 = f2 + 2 * f1

Vyslo mi:

S1 = (2/sqrt(14), -1/(sqrt(14), 3/sqrt(14)))

S2 = (12/sqrt(378), 15/(sqrt(378), -3/sqrt(378)))

izomorfizmus

Prepocital som to s Gaussovou eliminaciou a vyslo mi toto:

$$f_1=(2;-1;3);\ f_2=(-1;2;-3);\ f_3=(3;0;3);\ f_4=(8;2;6)$$

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-1&2&-3\\3&0&3\\8&2&6\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}+\\ \\ /3\\ /2\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-3\\1&0&1\\4&1&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}*4\\ \\ \\ -\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&2&-3\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}+\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ /2\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \\ -\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}-\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\1&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ -\\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{array}{l}=f_1\\ =f_2\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{\varphi_1}=\frac{h_1}{\|h_1\|}=\frac{f_1}{\|f_1\|}=\frac{(1;0;1)}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{\sqrt2};0;\frac{1}{\sqrt2}\right)}}$$

$$(f_2;\varphi_1)=0\cdot\frac{1}{\sqrt2}+1\cdot0+(-1)\cdot\frac{1}{\sqrt2}=-\frac{1}{\sqrt2}$$

$$h_2=f_2-(f_2;\varphi_1)\cdot\varphi_1=(0;1;-1)+\frac{1}{\sqrt2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt2};0;\frac{1}{\sqrt2}\right)=$$

$$=\left(\frac12;1;-\frac12\right)$$

$$\underline{\varphi_2}=\frac{h_2}{\|h_2\|}=\frac{\left(\frac12;1;-\frac12\right)}{\sqrt{\frac14+1+\frac14}}=\frac{\left(\frac{1}{\cancel{2}};\frac{2}{\cancel{2}};-\frac{1}{\cancel{2}}\right)}{\frac{\sqrt6}{\cancel{2}}}=\underline{\underline{\left(\frac{1}{\sqrt6};\frac{2}{\sqrt6};-\frac{1}{\sqrt6}\right)}}$$

A nevadi tuto ze vysledky nie su rovnake, ked to robime s/bez Gaussovou eliminaciou?

3. Príklad: 2014/15 C

6.(10b) Uvažujme podprostor $\mathbb{V}$ lineárním prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný množinou

$$\{(1,2,0,-1),(1,1,0,0),(2,3,0,-1),(0,-1,0,1)\}.$$

Pomocí Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu nalezněte ortonormální bázi prostoru $\mathbb{V}$.

Riesenie s Gaussovou eliminaciou:

$f_1 = (1;2;0;-1)$; $f_2 = (1;1;0;0)$; $f_3 = (2;3;0;-1)$; $f_4 = (0;-1;0;1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} = f_1 \\ = f_2 \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\varphi_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{(0;1;0;-1)}{\sqrt{2}} = \left(0; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(f_2;\varphi_1) = 0 + \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$h_2 = f_2 - (f_2;\varphi_1)\cdot\varphi_1 = (1;1;0;0) - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(0;\frac{1}{\sqrt{2}};0;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(1; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \frac{\left(1;\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; 0; \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Morfizmy

1. Príklad: 2011/2012 opravný termín, skupina D

3. příklad (15 bodů)

Uvažujme univerzální algebru $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}^2, e, \delta, \oplus, \odot, \nabla)$, kde e je nulární operace, δ je unární operace, $\oplus$, $\odot$ jsou binární operace a ∇ je ternární operace. Tyto operace jsou dány následovně: $e = (0,1)$, $\delta(x,y) = (x, y+2)$, $(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, $(x_1, y_1) \odot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 + y_2)$, $\nabla((x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)) = (x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3)$. Zjistěte a zdůvodněte, zda zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ určené předpisem $\varphi(x, y) = (3x, x + y)$ je homomorfismus algebry $\mathcal{A}$ do $\mathcal{A}$.

$\varphi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2 : \varphi(x,y) = (3x, x+y)$ JE HOMOMORFISMUS?

$$\varphi(\delta(x,y)) = \delta(\varphi(x,y))$$
$$\varphi(x, y+2) = \delta(3x, x+y)$$
$$(3x, x+2y+2) = (3x, x+2y+2) \checkmark$$

$$\varphi((x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2)) = \varphi(x_1,y_1) \oplus \varphi(x_2,y_2)$$
$$\varphi(x_1+x_2, y_1+y_2) = (3x_1, x_1+y_1) \oplus (3x_2, x_2+y_2)$$
$$(3x_1+3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) = (3x_1+3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) \checkmark$$

$$\varphi((x_1,y_1) \odot (x_2,y_2)) = \varphi(x_1,y_1) \odot \varphi(x_2,y_2)$$
$$\varphi(x_1 x_2, y_1+y_2) = (3x_1, x_1+y_1) \odot (3x_2, x_2+y_2)$$
$$(3x_1 x_2, x_1 x_2 + y_1 + y_2) \neq (3x_1 \cdot 3x_2, x_1+y_1+x_2+y_2) \ //$$

NEPLATÍ HOMOMORFIZMUS!

Poznámka: Kdyby platil, pak by bylo potřeba dokázat i pro ni = 0:

fí(0,1) = (0,1)

(0,1) = (0,1)

2. Príklad: Bol rieseny na minulorocnej priprave

5. Uvažujte typ $\Omega = \{\circ, f\}$ s aritami $a(\circ) = 2, a(f) = 1$. Nechť algebra $A = (\{a,b,c,d,e\},*)$ patří do variety určené identitami {x*y = f(x)}, f(f(x)) = f(x)} a f je určeno na prvních a,c,e: f(a) = b, f(c) = d, f(e) = e.

a.) rozhodněte zda ({a,b,c,d,e},*) patří do variety pologrup
b.) najděte podalgebru algebry A generovanou množinou {a,e}
c.) najděte všechny izomorfismy Ω- algebry A do sebe

Ako riesit c) ?
Existují izomorfismus iz1.

iz1(a)=c
iz1(c)=a
iz2(b)=d
iz2(d)=b
Vše ostatní iz(x)=x

Izomorfismus znamená, že lze proměnné nějak přeznačit, tak aby se zachovali vztahy. Využiji toho
Izomorfismus bude asi platit len na podalgebre ({e},*), nie?

BLBĚ TO MÁTE!!

f(f(x)) = f(x) není to samé jako f(f(x)) = x (co je použitou výše u iz1, iz2)

f(f(x)) = f(x):

1) x=a - f(f(a)) = f(a) => f(b) = f(a) => f(b) -> b
2) x=c - f(f(c)) = f(c) => f(d) = f(c) => f(d) -> d

A z toho plyne, že jsou tři izomorfismy: f(x) -> x; x IN {b,d,e}

acko a bcko:

Neporusuje to nahodou uzavrenost operace? Pro b*a = f(b) = ??

$\Omega = \{\circ, f\}$ typu $(2,1)$

$A = (\{a,b,c,d,e\}, *)$

$x * y = f(x)$, $f(f(x)) = f(x)$

a,c,e : $f(a) = b$, $f(c) = d$, $f(e) = e$

(a) $A \in$ varieta pologrup $\equiv$ podmnožina pologrup ?

grupoid – $\circ$ ✓

pologrupa – asociativita

$$\underbrace{x * (y * z)}_{L} = \underbrace{(x * y) * z}_{P}$$

$L = (x * f(y)) = f(x)$

$P = (f(x)) * z = f(f(x)) = f(x)$

$L = P \Rightarrow$ platí asociativita $\Rightarrow$ pologrupa

(b) $\langle\{a,e\}\rangle = \{a,b,e\}$? co víc ?

(c) ? (celý to je divný)

3. Príklad: Tiez nevyrieseny v inom googledocu

(G, *, -1, e), f(x) = x*x

Dokázať:

a) f nie je endomorfizmus

b) f je endomorfizmus, ale nie je automorfizmus

c) f je automorfizmus

~~f(x) = x*xj~~

~~x = x*x neplatí => nie je endomorfizmus, potom ani automorfizmus, staci to takto??~~

IMHO skor nejak takto ak je operacia * obycajne nasobenie:

f(x) * f(y) = f(x * y)

xx * yy = f(xy)

xxyy = xyxy

xxyy = xxyy

=> Je to homomorfizmus

endomorfizmus je homomorfizmus z objektu do seba sameho => je to endomorfizmus

automorfizmus = endomorfizmus + izomorfismus

izomorfizmus = bijektivny homomorfizmus
fbijektivny = injektivny + surjektivny a na to by to chcelo asi vediet aka je ta nosna mnozina G

Surjekce: pro každé a z G existuje b takové, že f(b) = a
tedy pro každé a existuje b, že a = b*b -- pro reálná čísla by neplatilo např. pro a = -2

Injekce: pokud f(a) = f(b) pak platí a = b
f(a) = f(b)
a*a = b*b
a^2 = b^2 implikuje a = b -- může platit, pokud se v G nevyskytují záporná čísla (pro záporná čísla by nastal spor (-2)^2 == 2^2 ale zároveň (-2) != 2)

Pozn.: Def. morfismu viz def. 2.40, Zaklady obecne algebry PDF

4. Príklad: 2007 B

$(\mathbb{C},+)$ $\quad f(a+bi) = a-bi \quad f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

a) GRUPA

1) uzavřenost + ✓

2) asociativita

$(a+bi + c+di) + (e+fi) = a+b+c+di+ei+fi$ ✓

$(a+bi) + (c+di + e+fi) = a+b+c+di+ei+fi$

3) neutrální prvek

$a+bi + e = a+bi$ ✓

$e = 0$

2007 B (3)

4) inverze

$a+bi + x = 0$ ✓

$x = -a-bi$

b) HOMOMORFIZMUS

$f(a+bi + c+di) = f(a+bi) + f(c+di)$

$f(a+c + (b+d)i) = a-bi + c-di$ ✓

$a+c-(b+d)i = a+c-bi-di$

c) IZOMORFIZMUS

SURJEKCE – každý obraz má vzor

$\forall (a-bi) : \exists\, (a+bi)$ ✓

INJEKCE – ani jeden obraz nemá 2 vzory

$\forall (a-bi) : \exists!_{(1)}\, (a+bi)$

d) AUTOMORFIZMUS

$f(a+bi) = a-bi$ ✗

$a+bi \neq a-bi$

Chyba - Je to automorfismus

Je to C -> C => je to endomorfizmus, a vypada to tak, ze je to aj izomorfizmus…

asociativita: drobna chyba (a + bi + c + di) + (e + fi) = a + c + e + bi + di + fi

(a + bi) + (c + di + e + fi) = a + c + e + bi + di + fi

5. Príklad:

5.(15b) Uvažujme algebru $\mathcal{A} = (M, \oplus, \otimes)$ typu (3, 1) definovanou následovně:

$$M = \mathcal{P}(N),\ N = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\oplus(A, B, C) = C,$$
$$\otimes(A) = A - \{3\}$$

a ekvivalenci $\sim$ na množině M danou vztahem

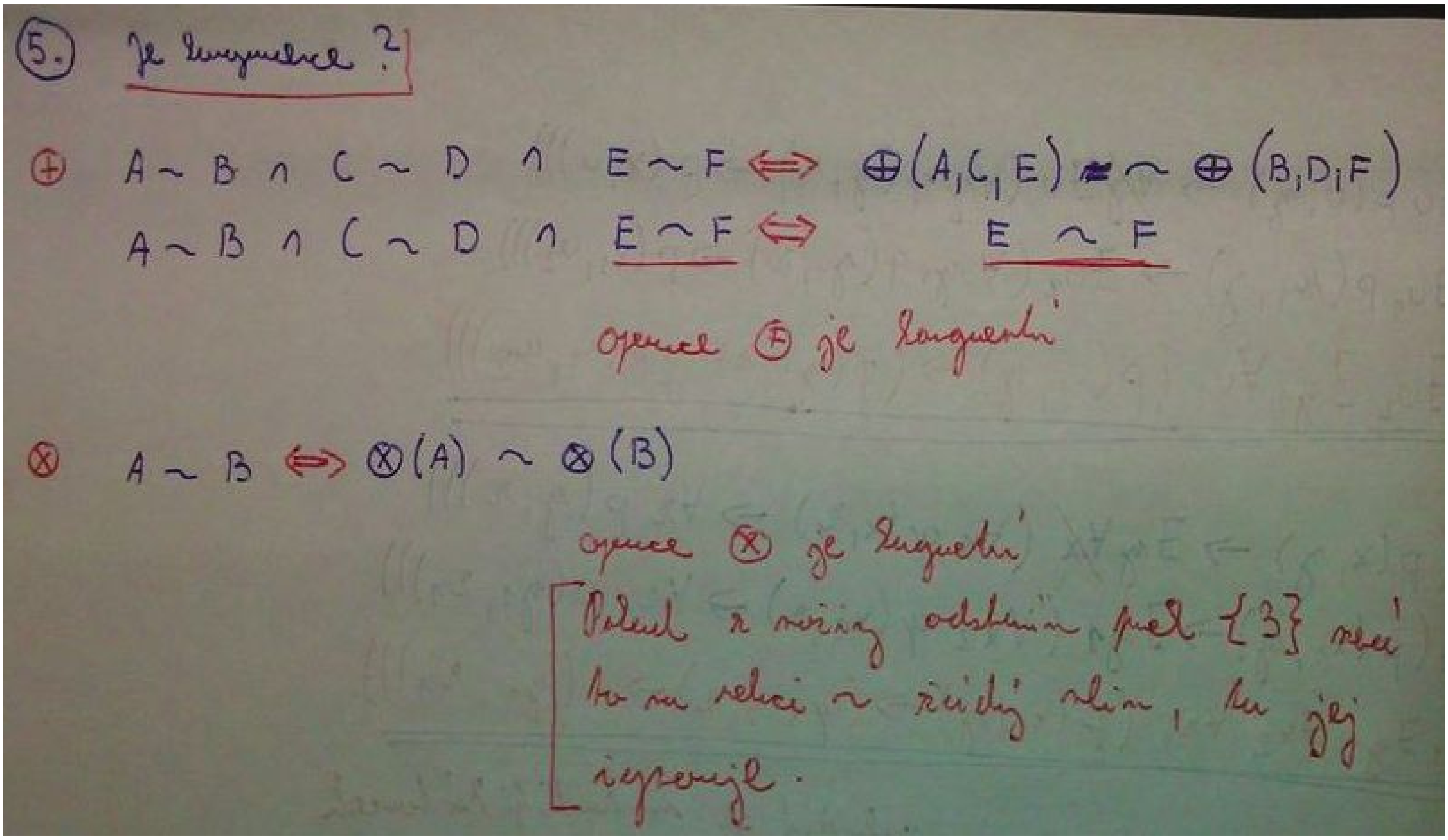
$$A \sim B \Leftrightarrow |A - \{3\}| = |B - \{3\}|.$$

Určete počet tříd ekvivalence $\sim$ a zjistěte, zda je kongruencí na algebře $\mathcal{A}$. Své závěry odůvodněte.

neviete niekto ? 4 třídy

T1: {∅},{3}
T2: {1}, {2}, {4}, {1,3}, {2,3}, {4,3}
T3: {1,2}, {1,4}, {2,4}, {1,2,3}, {1,4,3}, {2,4,3}
T4: {1,2,4}, {1,2,4,3}
...jen překopírované ze staršího docu… sestroj si všechny možné množiny, následně si od každé odečti {3}a zařaď do třídy

Já tomu asi nerozumím. Jak to, že (například) {1,2} a {1,4} jsou ve stejné třídě? Však spolu nejsou ekvivalentní navzájem. ?!
Edit: Tak už tomu rozumím. {1,2} a {1,4} jsou ve stejné třídě, protože jde o délku… Přehlídl jsem svislítka



Poznámka: V opoře je v definici relace kogruence pouze implikace, tzn.
a1~b1 and … an~bn => +a1...an ~ +b1...bn

Symetrické grupy + permutace

1. Príklad: 2014/2015 riadny B p

4. (15b) Uvažujme podgrupu symetrické grupy $\mathbf{S}_4$ (tj. grupy permutací množiny $\{1,2,3,4\}$) generovanou množinou permutací $\{(1234),(1432)\}$. Určete řád této podgrupy a zjistěte, zda je tato podgrupa komutativní, či zda je dokonce izomorfní s grupou $(\mathbb{Z}_n,+)$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$.

$(1\,2\,3\,4) \to \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} : a$

$(1\,4\,3\,2) \to \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} : b$

$a \circ a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} : c$

$a \circ b = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} : d$

$a \circ c = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} : b$

$b \circ a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} : d$

$b \circ c = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} : a$

$c \circ a = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} : b$

$c \circ b = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix} : a$

$c \circ c = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} : d$

$b \circ b = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix} : c$

Podgrupa $(\{a,b,c,d\},\circ)$ … řád 4

∘	a	b	c	d
a	c	d	b	a
b	d	c	a	b
c	b	a	d	c
d	a	b	c	d

tabulka je symetrická => podgrupa je komutativní

$(\mathbb{Z}_4,+)$

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Najdeme zobrazení:

$f(d) = 0$

$f(a) = 3$

$f(b) = 1$

$f(c) = 2$

→

	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Dostali jsme stejnou tabulku, zobrazení je izomorfní (bijekce + homo)

Mohli by ste k tomu niekto dat aj nejaky strucny popis? kde sa vzalo napr. "a" a "b" a ako sa to počítalo? Ďakujem

Aplikuješ ty zadané permutace. (1234) znamená, že zaměníš následně: 1→2, 2→3, 3→4, 4→1 (je to uzavřeno do kruhu). Když to napíšeš pod sebou, dostaneš tu závorku pro *a*. Dtto pro *b*, 1→4, …, 2→1. No

a pak zkoušíš všechny kombinace permutací a vyleze ti, že když dáš dvakrát *a*, tak dostaneš novou permutaci, co ještě neznáš: 1→2→3, 2→3→4, 3→4→1, 4→1→2, tedy v té závorce dole bude 3,4,1,2 (nahoře v závorce máš vždycky původní pořadí, sloupec ti říká co se mění na co).
Opakuješ pořád dokola, až vyzkoušíš všechny možnosti těch permutací. Podgrupa tady je množina možných permutací. A tabulka na ověření izomorfismu s nějakou zbytkovou třídou je snad jasná…

Ještě bych tedy dodal pro ty, co si toho jako já nevšimli, že u toho zobrazení je třeba počítat i se změnou výsledných sloupců a řádků v rámci zobrazení (tzn. sloupec 0 v nové tabulce odpovídá sloupci d ve staré tabulce ; tak stejně řádky).

5. p říklad (10 bodů) 2011/2012 řádný termín, skupina D

Najděte všechny generátory cyklické grupy $(\mathbb{Z}_5, +)$.

Riesenie:

Zobereme postupne kazdy prvok a zacneme ho scitat zo sebou a prvkami, co uz vygeneroval

<0> = {0} .. nieje generator

<1> = {1, 2, 3, 4, 0} .. je generator

<2> = {2, 4, 1, 3, 0} .. je generator

<3> = {3, 1, 4, 2, 0} .. je generator

<4> = {4, 3, 2, 1, 0} .. je generator

Takže 1: 1, 1+1, 1+1+1... dokud nezačne cyklit (a jedem ve zbytkové třídě 5)
2: 2, 2+2, 2+2+2,....

A je generátor, když mi tato sčítání dají všechny prvky Z5.

2. Príklad:

5) (15b) Mějme grupu $G = S_2 \times S_3$, kde S_2, S_3 jsou symetrické grupy (tj. grupy permutací dvouprvkové, resp. tříprvkové množiny), a definujme zobrazení $f: G \to G$ předpisem

$$f(x, y) = (x \circ x, y \circ y).$$

Zjistěte, zda zobrazení f je homomorfismus. Dále nalezněte podgrupu generovanou množinou $\{x\}$, kde

$$x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right),$$

a určete, zda je tato podgrupa izomorfní grupě $(\mathbb{Z}_n, +)$ pro nějaké n.

SPATNE:

$$f(x \circ x; y \circ y) = f(x, y) \circ f(x, y)$$

$$((x \circ x) \circ (x \circ x), (y \circ y) \circ (y \circ y)) \stackrel{?}{=} (x \circ x, y \circ y) \circ (x \circ x, y \circ y)$$

$$(x \circ x \circ x \circ x, y \circ y \circ y \circ y) \stackrel{?}{=} (x \circ x \circ x \circ x, y \circ y \circ y \circ y)$$

OPRAVA DOLE!

OK: Proč se tady pracuje s celou množinou a nahoře (příklad výše) to rozdělil na a a b? Toto je dvojice a nahoře je množina dvou prvků.

→ PODGRUPA GEN. MNOŽINOU: $\Big\{\underbrace{\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{x}\Big\}$

$x \circ x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = y$

$x \circ y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = z$

$y \circ x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = z$

$y \circ y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = w$

$x \circ z = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = w$

$z \circ x = w$

$z \circ z = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = id$

$w \circ x = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = v$

$x \circ w = v$

$w \circ w = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = y$

$x \circ v = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = id = v \circ x$

$z \circ y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) = v$

$y \circ z = v$

$w \circ y = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = id$

$y \circ w = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = id$

$w \circ z = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = x$

$z \circ w = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = x$

$y \circ v = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right) = x = v \circ y$

$w \circ v = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = z$

$v \circ w = \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right) = z$

VÝSLEDOK: $\{x, y, z, w, v, id\}$

ŘÁD PODGRUPY = 6

KOMUTATIVNÍ

IZOMORFIZMUS S $\mathbb{Z}_6$

OPRAVA DOKAZU NA HOMOMORFIZMUS:

Grupy S_2, S_3 jsou grupy permutací na dvouprvkové a tříprvkové množině s operací skládání

$$S_2 = (\{(1), (12)\}, \circ)$$
$$S_3 = (\{(1), (12), (13), (23), (123), (132)\}, \circ)$$

Grupa G je jejich součin

$$G = (\{((1), (1)), ((1), (12)), ((1), (13)), ..., \\ ((12), (1)), ((12), (12)), ((12), (13)), ...\}, \circ')$$

tzn. v nosné množině jsou dvojice prvků z těch původních dvou grup (celkem jich bude 12) a ta operace vypadá takto:

$$(a_1, a_2) \circ' (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2)$$

Je f homomorfismus?

Jak už psal někdo na facebooku:

$$f(A) \circ' f(B) \stackrel{?}{=} f(A \circ' B)$$
$$f((a_1, a_2)) \circ' f((b_1, b_2)) \stackrel{?}{=} f((a_1, a_2) \circ' (b_1, b_2))$$
$$(a_1 \circ a_1, a_2 \circ a_2) \circ' (b_1 \circ b_1, b_2 \circ b_2) \stackrel{?}{=} f((a_1 \circ b_1, a_2 \circ b_2))$$
$$((a_1 \circ a_1) \circ (b_1 \circ b_1), (a_2 \circ a_2) \circ (b_2 \circ b_2)) \stackrel{?}{=} ((a_1 \circ b_1) \circ (a_1 \circ b_1), (a_2 \circ b_2) \circ (a_2 \circ b_2))$$

Toto obecně neplatí. Protipříklad:

$$a_1 = (1), a_2 = (123), b_1 = (1), b_2 = (12)$$
$$((1), ((123) \circ (123)) \circ ((12) \circ (12))) \stackrel{?}{=} ((1), ((123) \circ (12)) \circ ((123) \circ (12)))$$
$$((1), ((132) \circ (1)) \stackrel{?}{=} ((1), (13) \circ (13))$$
$$((1), (132)) \neq ((1), (1))$$

Není to homo!

Generování podgrupy

$< \{x\} >=?$

$$
\begin{aligned}
x &= ((12),(123)) \\
x \circ' x &= ((1),(132)) \\
x \circ' x \circ' x &= ((12),(1)) \\
x \circ' x \circ' x \circ' x &= ((1),(123)) \\
x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x &= ((12),(132)) \\
x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x \circ' x &= ((1),(1))
\end{aligned}
$$

Kdybych teď zkoušela ještě složit cokoli s čímkoli, tak už získám jenom prvky, co už tam mám. Navíc už tam mám i neutrální prvek a ke všem prvkům inverze, takže už nemusím nic přihazovat.

Je to izo se Z_6?

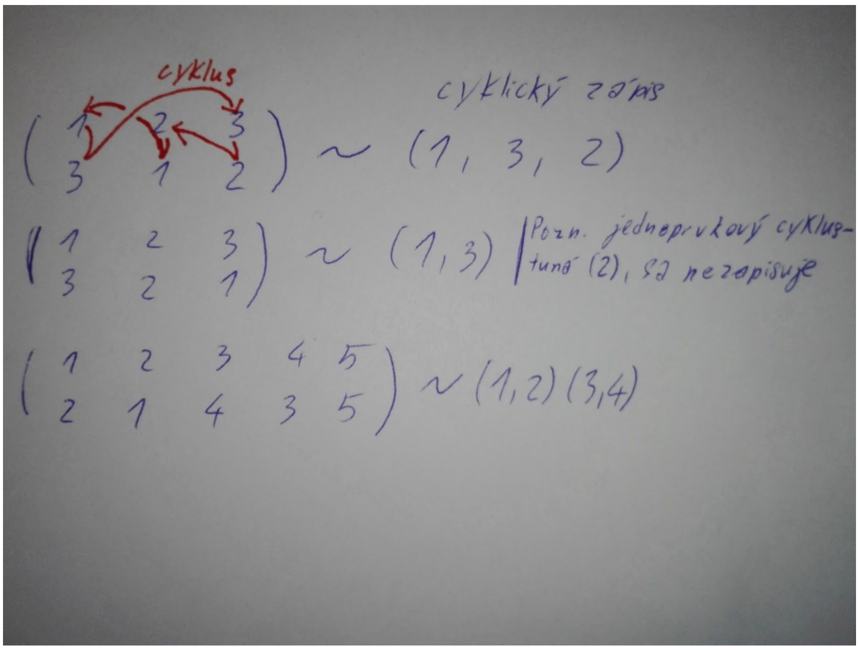
Ano, jde to vidět z toho, že všechny prvky té podgrupy jsou nějaké mocniny jednoho prvku x. Ten izomorfismus pak zobrazí $x \to 1$, $x \circ' x \to 1+1$, $x \circ' x \circ' x \to 1+1+1$, atd. takže takto:

$$
\begin{aligned}
((1),(1)) &\to 0 \\
((12),(123)) &\to 1 \\
((1),(132)) &\to 2 \\
((12),(1)) &\to 3 \\
((1),(123)) &\to 4 \\
((12),(132)) &\to 5
\end{aligned}
$$

Kdyby se udělaly tabulky operace $\circ'$ nad těmi dvojcemi permutací a $+$ nad Z_6, tak jsou stejné, jen s přejmenovanými prvky.

A to je vše!

K otazke prevodu standardneho zapisu na cyklicky:



Teorie, realizace, atd.

1. Príklad: 2011/12 opravný termín D

1. příklad (15 bodů) [editova

Uvažujme jazyk L s rovností, jedním unárním predikátovým symbolem p a jedním funkčním symbolem f. Nechť $\mathcal{M}$ je taková realizace jazyka L na množině $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ všech podmnožin reálné roviny $\mathbb{R}^2$, kde $p_{\mathcal{M}}(X)$ znamená, že X je neprázdná množina bodů ležících uvnitř nebo na hranici nějakého obdélníku v $\mathbb{R}^2$, jehož strany jsou rovnoběžné se souřadnými osami, $f_{\mathcal{M}}(X,Y) = X \cup Y$. Rozhodněte a zdůvodněte, zda

1. $\mathcal{M} \models (\exists x)(p(x) \Rightarrow f(x,x) = x)$
2. $p(f(x,y)) \models (p(x) \vee p(y))$
3. $\mathcal{M} \models p(f(x,y)) \Rightarrow (p(x) \vee p(y))$

Podla mna vsetky 3 su TRUE, ale nevidim prakticky rozdiel medzi 2 a 3. t

1: V realizacii M je splnitelna formula "existuje mnozina bodov, ktora je vnutri alebo na hranici obdlznika"

2: Za predpokladu, ze zjednotenie 2 mnozin je vnutri/na hranici obdlznika je splnitelna formula “bud 1. mnozina lezi vnutri/na hranici alebo 2. mnozina lezi vnutri/na hranici”

3: V realizacii M je splnitelna formula "ak zjednotenie 2 mnozin je vnutri/na hranici obdlznika, potom 1 mnozina lezi vnutri/na hranici a druha mnozina lezi vnutri/na hranici alebo je prazdna".

1: True - pravdaze podmnozina R^2 taka, co to splna, existuje

2: True - Bud obe mnoziny su neprazdne a lezia vnutri/na hranici, alebo je jedna z nich prazdna (v tom pripade p je False), avsak ta, ktora bola neprazdna, musela lezat vnutri/na hranici. Ak by boli obe prazdne, teoria neplati.

3: True - Opet bud su obe prazdne a vtedy lava strana implikacie = False, cize spolu impilkacia = True, alebo aspon jedna je neprazdna a potom lava strana = True, ale aj prava strana sa vzdy rovna True.

Rozdiel medzi 2 a 3: 2 hovorí, že formula napravo je “dôsledkom” formule naľavo, t.j. že formula napravo bude splnená v každej realizáci, kde je splnená formula naľavo. Takže riešenie 2 so zadanou realizáciou nesúvisí. Napr. ak by univerzom boli prirodzené čísla väčšie alebo rovné 2, a p(x) by znamenalo, že x nie je prvočíslo, tak p(f(x,y)) bude pravdivé, kým (p(x) alebo p(y)) nebude.

+1 tím pádem, by mělo být 2 False

Dalším příkladem kdy 2. nebude splněna, je realizace N, která má universum přirozená čísla a P(x) ⇔ x != 0, f(x,y) = x + y +1. V této realizaci bude p(f(x,y)) splněna vždy, protože ať vezmu kterákoliv dvě čísla nikdy nebude výsledek rovnice 0, ovsem rovnice (p(x) or p(y)) nebude splnněna např. pro čísla 1 a 2.

2. Príklad:

2.6 Příklad – Rok: 2008, Termín: 1. Skupina: A, Číslo příkladu: 2

Zadání

Buď L jazyk predikátové logiky 1. řádu s rovností a jediným binárním operačním symbolem p. Nechť T je teorie 1. řádu s jazykem L daná následujícími dvěma speciálními axiomy:

$$p(x,x) = x$$
$$p(p(x,y), p(z,t)) = p(x,t)$$

Uvažujme realizaci $\mathcal{M} = (\mathbb{Z}^2, p)$ jazyka L, kde binární opearace $p = p_{\mathcal{M}}$ na množině $\mathbb{Z}^2$ je definovaná předpisem $p((a,b),(c,d) = (a,d)$ pro libovolné prvky $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$. Dokažte, že

a) $\mathcal{M}$ je modelem teorie T

b) asociativní zákon je důsledkem teorie T (takže T je rozšířením teorie pologrup).

AXIOMY: $p(x,x) = x$ ← A1

$p(p(x,y), p(a,d)) = p(x,d)$ ← A2

$M = (\mathbb{Z}^2, p)$; $p = p_M$ na $\mathbb{Z}^2$: $p((a,b),(c,d)) = (a,d)$

pro lib. prvky $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z}^2$

a) $M \models T$

A1: $p((a,b),(\overset{c}{a},\overset{d}{b})) \overset{?}{=} (a,\overset{d}{b})$ ✓

A2: $p(p((a,b),(c,d)), p((e,f),(g,h))) \overset{?}{=}$

$\overset{?}{=} p((a,b),(g,h))$

$p((a,d),(e,h)) \overset{?}{=} (a,h)$

$(a,h) = (a,h)$ ✓ => $M \models T$ PLATÍ

b) ASOCIATIVNÍ ZÁKON JE DŮSLEDKEM TEORIE T

$p((a,b), p((c,d),(e,f))) = p(p((a,b),(c,d)),(e,f))$

$p((a,b),(e,f)) = p((a,d),(e,f))$

$(a,f) = (a,f)$ ✓ PLATÍ ASOCITIVITA!

ASOCIATIVITA - dukaz:

$$(y°x°z) = (x°y)°z$$
$$p(x, p(y,z)) = p(p(x,y), z)$$
$$p(p(x,x), p(y,z)) = p(p(x,y), p(z,z))$$
$$p(x,z) = p(x,z)$$

vysvetleni: 1. radek - asociativni zakon; 2. radek - za operaci ° dana “operace” predikat; 3.radek - leva strana (pouzit axiom A1), prava strana (pouzit A1; 4.radek - pouzit axiom A2; A1 a A2 dle fotky nahore

Metricky prostor

1. Príklad:

3) (15b) Nechť je dána množina $M = \mathbb{R}^2 \setminus K$, kde $K = (-1,1) \times (0,1)$, a nechť $\rho: M \times M \to \mathbb{R}$ je zobrazení, kde $\rho(a,b)$ je délka nejkratší křivky ležící v M a spojující body a a b. Ukažte, že ρ je metrika na M, a graficky znázorněte, jak v této metrice vypadá „mezikruží“

$$\{a \in M | 1 \leq \rho(a,[0,0]) \leq 2\}.$$

a) $\forall x \forall y \in R \;\; \rho(x,y) = 0 \;\Leftrightarrow x = y$

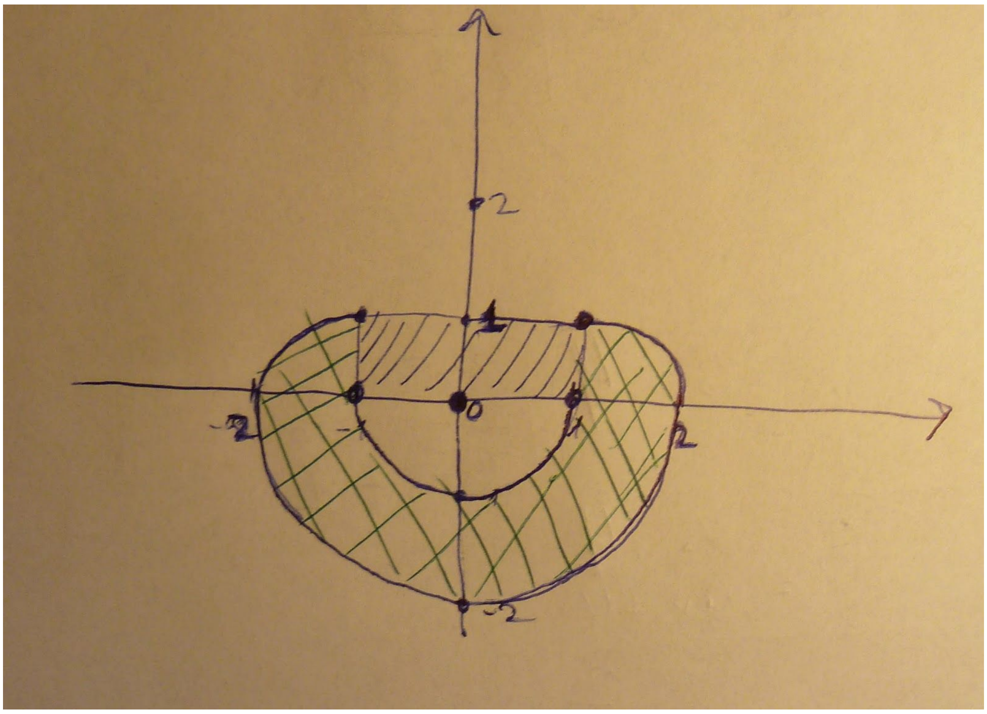
Toto pravidlo platí, protože vzdálenost nejkratší křivky bude 0 pouze pokud bod x a bod y splynou. OK

b)

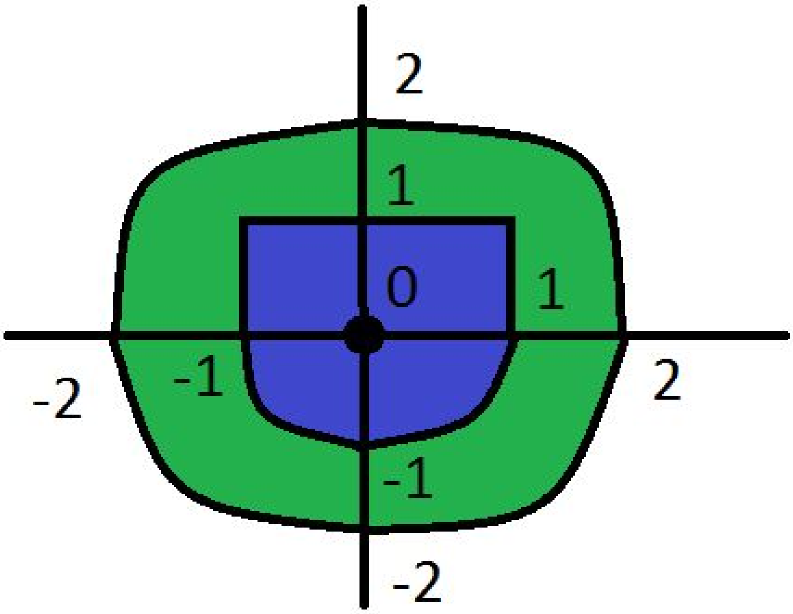
Nejkratší křivka bude mít stejnou nejkratší vzdálenost nehledě na to zda-li jdeme z bodu x do y a nebo z y do x. OK

c) $\forall x \forall y \in R \;\; \rho(x,y) + \rho(y,z) \;\geq \rho(x,z)$ (trojúhelníková nerovnost)

Toto pravidlo očividně platí, ani nevím jak to moc obkecat (někdo něco navrhněte).



Vzdálenost nejkratší křivky (její hodnota) je uzavřená nad R^2 Jedná se tedy o metriku.



Nemělo by to být spíše takto?
Odpoved: Nie:)
Ta cela krivka, s ktorym spojujes “a” a “b” musi byt v M.
M ale neobsahuje tu modru cast nad suradnicou X, co je specifikovana v zadani ako K.
Bod “b” mas v strede v [0,0], ako spojujes potom [0,0] s [0,2], ked nemozes vstupit na ten obdlznik???
Podla mna ziadna takova krivka neexistuje. Preto sa dostanes maximalne do [1,1] a [-1,1]

No a tak co třeba bod (0,2) a (0,1.1) to je přece v M. To co tam je jsou omezení pro ty celé dvojice nebo ne? jako myslím, že prostor mezi ((0,2)x(0,1)) by neměl být problém s pohledu té podmínky.

To som nepovedal, ze (0,2) neni v M :D … len to, ze to co “by bolo” medzi [0,0] a [0,2] by nebolo uz v M :D.

Tak to nedávejme z bodu (0,0), ale z bodu (0,1).

Vsak v zadani mas, ze [0,0], nie?

Ale to je jen počáteční bod a pro ten prostor, co tam je jen musí platit, že není v obdelníku od (-1,0) do (1,1), ale celkově ta plocha může být až do vzdálenosti 2. Což nad tím obdelníkem může být (tam žádné omezení není přece).

Tak v zadani je napisane “kde p(a,b) je delka nejkratsi **krivky LEZICI v M** a spojujici body z a do b.

Jo tak, jako, že ta křivka zkrátka nesmí jít přes ten obdelník.

Vsak ten obdelnik neni v M, nie? M = R^2 - K, kde K = obdelnik

No není :-) Hádám, že teda pak asi objasněno.

Hiphiphurra:) (Ale inak to, ze ta krivka musi byt cela v M uz som napisal ako prvu vetu :D)

Ď! No jo, jen to musí té druhé straně dopnout :-D

Jak jste přišli na to, že to K tvoří obdelník? Já vidím K jako konkrétní 4 body, které nepatří do M.
Odpoved: K = (-1,1)x(0,1) v tomto pripade znaci INTERVAL (-1,1) pro x, (0,1) pro y. Aspon tak jsem to po dlouhe dobe pochopil.

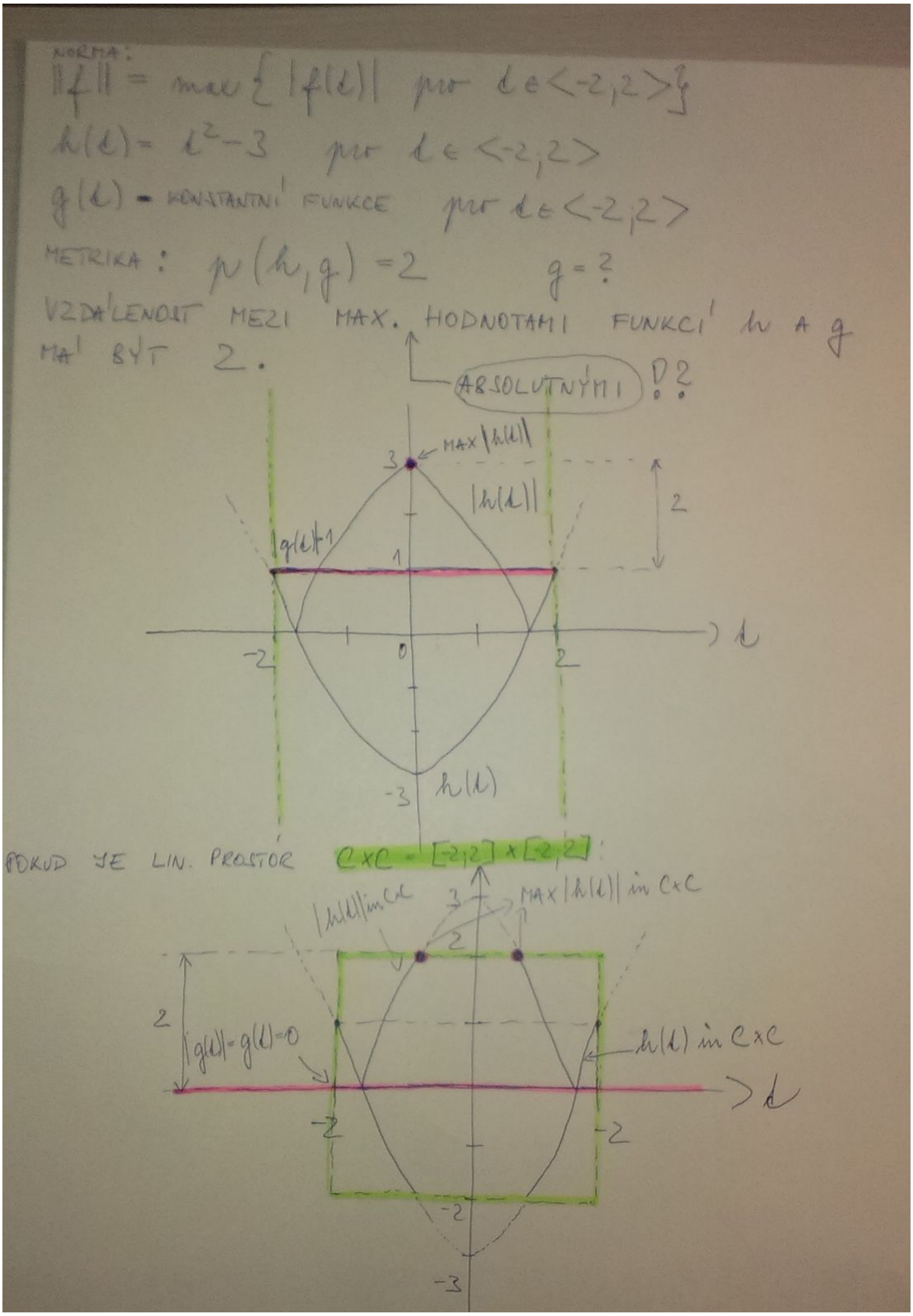
Tento příklad nejlépe vystihuje tohle.

2. Príklad: NECO NEVYRESENEHO Z MINULEHO ROKU:

V lineárním prostoru C=[-2,2] všech reálných spojitých funkcí na intervalu [-2,2] uvažujte normu ||f|| = max{|f(t)| | t in [-2,2]} a funkci h in C [-2,2] danou vztahem h(t) = t^2 - 3 pro všechna t in [-2,2]. Určete všechny konstantní funkce g in C [-2,2] s vlastností p(g,h) = 2, kde p je metrika indukovaná danou normou.

1. Otazka: Co znamena linearni prostor C=[-2,2]? Znamena to, ze ten prostor je dany ako C x C, akoze kartezsky soucin C?
2. Otazka: Ta funkce v tej norme je opravdu mezi || - je to tam absolutni hodnota?

Riesenie (potvrdte/vyvratte): 1.otazka: NIE (jedna se o interval [-2,2]): 1. obrazok, ANO: 2. obrazok; 2.otazke ANO (obidve obrazky)



3. Příklad

Daná metrika ρ((x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2))=max{|x_1-x_2 |,|y_1-y_2 |,|z_1-z_2 | }. nad R^2×Z. Zakreslete množinu M={(x,y,z)| ρ((x,y,z),(0,0,0))=1}.

~~Vsak to je gula normalne v 3D nie?~~

~~Já bych spíš řekl, že by to měla být 3D krychle. Ta se definuje jako max s abs. hodnotou. Kdyby to byla koule, tak by tam měla být odmocnina.~~

~~A kde by mala vrcholy ta kocka? Podla mna prave tie vrcholy, uz by nemali byt v M, preto je to gula...aspon si myslim~~

Podle mě by to měly být 3 čtverce, které se posouvají na ose z. První čtverec má střed z=0, tj. i x=0 a y=0 a další dva mají středy v z=1 a z=-1. Co vy na to?
Souhlasím s posledním, protože z náleží množině celých čísel. Ja souhlasim taky.

Prenex

1. Príklad: 2014/15 opravny A

$$1:\ \exists!\, x\,(p(x) \land p(y)),$$ kde $\exists!$ = „existuje práve 1"

$$2:\ \neg\left\{\left[\forall x_1 \forall z_1 \left(\overbrace{\left(p(x_1) \Rightarrow (p(z_1) \Rightarrow \neg q(y))\right) \Rightarrow x_1 = z_1}^{\text{LEFT}}\right) \Rightarrow \right.\right.$$

$$\left.\left. \Rightarrow \forall x_2 \left(\overbrace{q(z) \Rightarrow \neg p(x_2)}^{\text{RIGHT}}\right)\right]\right\}$$

$$1 \overset{?}{\Longleftrightarrow} 2$$

$$1:\ \exists x\,(p(x) \land p(y)) \land \neg \exists e\,(p(e) \land p(y) \land e \neq x)$$

$$\exists x\,(p(x) \land p(y)) \land \forall e\,(\neg p(e) \lor \neg p(y) \lor e = x)$$

$$\exists x \forall e\,[(p(x) \land p(y)) \land (\neg p(e) \lor \neg p(y) \lor e = x)]$$

$$2:\ \left(\forall x_1 \forall z_1 (\text{LEFT}) \land \exists x_2\,(q(z) \land p(x_2))\right)$$

$$\forall x_1 \forall z_1 \exists x_2\,((\text{LEFT}) \land (\text{RIGHT}))$$ ← 1. APLIKACE DVOJITÉ NEGACE

$$\forall x_1 \forall z_1 \exists x_2\,(\neg[\neg \text{LEFT} \lor \neg \text{RIGHT}])$$

$$\forall x_1 \forall z_1 \exists x_2\,(\neg[[(p(x_1) \Rightarrow (p(z_1) \Rightarrow \neg q(y))) \land x_1 \neq z_1] \lor \neg \text{RIGHT}])$$

$$\forall x_1 \forall z_1 \exists x_2\,([[(p(x_1) \land (p(z_1) \land q(y))) \lor x_1 = z_1] \land \text{RIGHT}])$$

Podla mna vobec nie su ekvivalentne tie dve vyrazy…

1. (15 b) Dokažte vztah $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ napsáním příslušného důkazu ve výrokové logice.
Návod: Formuli nejprve převeďte do tvaru obsahujícího pouze logické spojky $\neg$ a $\rightarrow$ (kde se bude vyskytovat $\neg\varphi$). K důkazu použijte: 1) dosazení vhodných formulí (obě budou ve tvaru negace) do axiomu (A1), 2) negaci předpokladu dokazovaného vztahu, 3) pravidlo odloučení, 4) dosazení vhodných formulí do axiomu (A3), 5) pravidlo odloučení, 6) předpoklad dokazovaného vztahu, 7) pravidlo odloučení a 8) větu o dedukci.

1) Dokažte $\varphi \vdash \varphi \vee \psi$

1) nejprve převeďte na formule tvaru $\neg$ a $\Rightarrow$ obsahující $\neg\varphi$

$$\varphi \vee \psi \equiv \neg\neg\varphi \vee \neg\neg\psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi \equiv \neg\varphi \rightarrow \psi$$

① $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$

2) Dosaďte vhodné formule (ve tvaru negace) do A_1 $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

A_1 ② $\neg\varphi \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$

3) Negaci předpokladu (φ) dokazovaného vztahu

③ $\neg\varphi \vdash \neg\varphi$

4) Pravidlo odloučení $MP_{2,3}$

④ $MP_{2,3}$ $\varphi, \neg\varphi \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$

5) A_3 $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$

⑤ A_3 $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$

6) $MP_{4,5}$

⑥ $\varphi, \neg\varphi \vdash \varphi \rightarrow \psi$

7) Předpoklad dokazovaného vztahu (φ)

⑦ $\varphi \vdash \varphi$

8) Pravidlo odloučení $MP_{6,7}$

⑧ $MP_{6,7}$ $\varphi, \neg\varphi \vdash \psi$

9) VD

⑨ $\varphi \vdash \neg\varphi \rightarrow \psi$ $\Rightarrow$ viz ①

2.(10b) Najděte formuli φ jazyka L s jedním binárním funkčním symbolem f, konstantou c a rovností, která bude v realizaci $\mathcal{R}$ s univerzem $\mathbb{N}$ (množina kladných celých čísel), kde $f_{\mathcal{R}}(k,l) = kl, c_{\mathcal{R}} = 1$, vyjadřovat vlastnost, že existuje prvočíslo (tj. přirozené číslo větší číslo než 1 dělitelné pouze sebou samým a číslem 1).

Výsledok: (E - existuje, A - pre všetky)

ExAyAz(f(y,z) != x & y != c & z != c)

(je to takto dobré?)

------ TOTO NE -------

Podla mna je to tak spatne:)

Chceme udelat formulu na to, ze obecne existuju prvocisla, ze?

Tak potom nasledujuce moze byt ono:

Ex Aw Av [x != c & f(y,z) = x & (y = c | z = c) & (f(w,v) != x | w = c | v = c)]

------ TOTO NE -------

To prvni je dobre, kdyz uz jistotu tak takhle :D

Ex Aa Ab [a != c & b != c & a != x & b != x & f(a,b) != x]

Taky bych řekl, že první je dobře - píše se tam ,,Dokažte, že existuje prvočíslo” -> Jedno stačí

3. Uvažujme univerzální algebru $\mathcal{A} = (\Sigma^*, \cdot, \star, \epsilon)$, kde $\Sigma = \{a, b, c\}$ a Σ^* je množina všech slov nad abecedou Σ včetn
rázdného slova ϵ, $\cdot$ je binární operace $x \cdot y = xay$ a $\star$ je unární operace $x^\star = xcc$. Na Σ^* definujeme binární relace $\sim_1$ a $\sim$
kto:

$$x \sim_1 y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_b,$$
$$x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c,$$

de $|x|_p$ je počet výskytů písmene $p \in \{a, b, c\}$ ve slově x. Rozhodněte o každé z relací $\sim_i$, $i \in \{1, 2\}$, zda je kongruencí na
gebře $\mathcal{A}$. V kladném případě popište prvky příslušné faktorové algebry. Svá tvrzení zdůvodněte.

3

Je $\sim_1$ kongruence?

op* $\quad A \sim B \Rightarrow A^* \sim B^*$

$|A|_a = |B|_b \Rightarrow |Acc|_a = |Bcc|_b$

$1 \Rightarrow 1$ ✓

op$\cdot$ $\quad A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow A \cdot C \sim B \cdot D$

$|A|_a = |B|_b \wedge |C|_a = |D|_b \Rightarrow |AaC|_a = |BaD|_b$

Zvýšil se počet **a**, ale zůstal počet **b**! ✗

$\sim_1$ $\boxed{\text{NENÍ}}$

Je $\sim_2$ kongruence?

op* $\quad A \sim B \Rightarrow A^* \sim B^*$

$|A|_c = |B|_c \Rightarrow |Acc|_c = |Bcc|_c$

$1 \Rightarrow 1$ ✓

op$\cdot$ $\quad A \sim B \wedge C \sim D \Rightarrow A \cdot C \sim B \cdot D$

$|A|_c = |B|_c \wedge |C|_c = |D|_c \Rightarrow |AaC|_c = |BaD|_c$

$1 \Rightarrow 1$ ✓

$\sim_2$ $\boxed{\text{JE}}$

Riesenie s faktoralgebrou:

$A = (\Sigma^*, \cdot, *, \varepsilon)$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, ε = PRÁZDNÉ SLOVO

$x \cdot y = xay$ $\qquad x \sim_1 y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_b$

$x^* = xcc$ $\qquad x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c$

$\sim_1$: $x \sim_1 y \Leftrightarrow |x|_a = |y|_b$

$u \sim_1 v \Leftrightarrow |u|_a = |v|_b$

$\cdot$: $x \cdot u \sim_1 y \cdot v \Leftrightarrow |x \cdot u|_a = |y \cdot v|_b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |xau|_a = |yav|_b \Leftrightarrow |x|_a + |a|_a + |u|_a = |y|_b + |a|_b + |v|_b$

$\Leftrightarrow |a|_a = |a|_b$ – NEPLATÍ! → NENÍ KONGRUENCE

$\sim_2$: $x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c$

$u \sim_2 v \Leftrightarrow |u|_c = |v|_c$

$\cdot$: $x \cdot u \sim_2 y \cdot v \Leftrightarrow |xau|_c = |yav|_c \Leftrightarrow |a|_c = |a|_c$ ✓

$*$: $x \sim_2 y \Leftrightarrow |x|_c = |y|_c$

$x^* \sim_2 y^* \Leftrightarrow |xcc|_c = |ycc|_c$ ✓

JE KONGRUENCE!

FAKTOR ALGEBRA: $A/{\sim_2} = \{ [x]_{\sim_2} \mid x \in (\Sigma^*, \cdot, *, \varepsilon) \}$

$[x]_{\sim_2} = \{ y \mid |y|_c = |x|_c \}$

4. Mějme grupu $(GL(2,\mathbb{R}),\cdot)$ regulárních (tj. invertibilních) čtvercových matic řádu 2 spolu s operací násobení. Naleznětе podgrupu $B \subseteq GL(2,\mathbb{R})$ této grupy generovanou jednoprvkovou množinou

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

a rozhodněte, zda zobrazení $f : B \to (\mathbb{Q},+)$, kde

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac,$$

je homomorfismus grup. Své tvrzení zdůvodněte.

Potvrdte/vyvratte (OPRAVENO):

GRUPA: $(GL(2;R);\cdot)$

PODGRUPA: $B \subseteq GL(2;R)$

GENERATOR: $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ $\quad B = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ldots\right.$

+ inverze: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; m \in \mathbb{Z} \right\}$$

$f: B \to (\mathbb{Q};+)$

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ac$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + f\left(\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\right) = ac + eg$$

$$(ae+bg)\cdot(ce+dg) \neq ac + eg$$

NEPLATÍ HOMOMORFIZMUS!

Toto je zle - f homomorfizmus bude, keďže uvažujeme len matice z B. Bude totiž vždy platiť a = e = d = h = 1, b = f = 0, takže posledný riadok je vlastne (1+0)*(c+g) = c + g, čo zrejme platí.

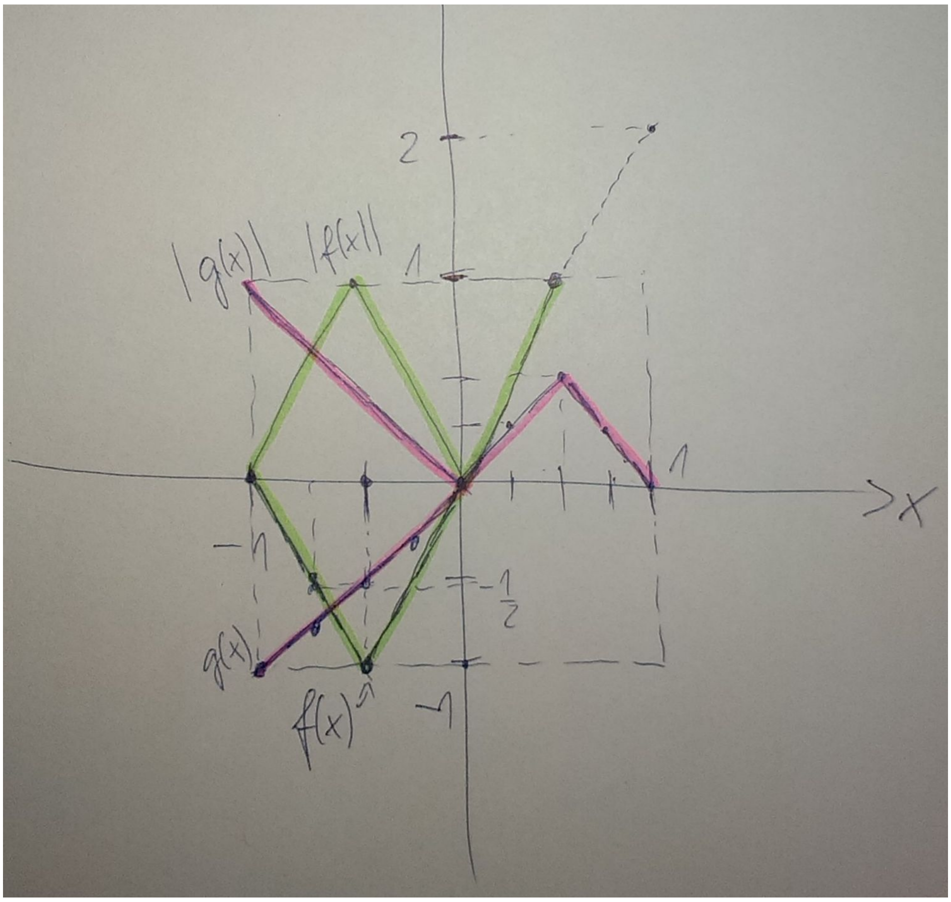
$$f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a+b & 1\end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ b & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$1*(a+b) = 1*a + 1*b$$

$$a+b = a+b$$

Homomorfismus platí



Podla toho vzdialenost je 0, lebo max(|f(x)|) = max(|g(x)|) = 1

NIE:

je to len C <-1,1>, cize nie je orezane z hora a z dola.

takze f(x) v bode [1,2] je maximum f(x) a vzialenost je teda 1

Nemohl by nekdo vysvetlit, mezi kterymi dvema body se bere ta vzdalenost? :/ nejak to tam nevidim...

- medzi maxima funkci f a g

Maximum |f(x)| je v bodech [0.5, 1] a [-0.5, 1]; maximum |g(x)| je v bode [-1, 1], … stale nevidim, ze by byla vzdalenost rovna 1.. pokud to teda beru "jak kdyby" po ose y….a to by byla rovna 0… ne?

1. Maximum funkcie nie je bod ale HODNOTA (na ose y)!
2. Otazka je ci bereme prostor C x C (tam hore nakresleny, asi dobre), alebo interval na ose x = C

Ked bereme len interval, graf nebude ohraniceny zdola a zhora, preto max{|f(x)|} nebude 1, ale 2, preto bude vzdalenost 1. (| max{|g(x)|} - max{|f(x)|} | = |1 - 2| = 1).

Diky moc! :) uz jsem pochopil jak je to myslene..

6. (10 b) Je dán obyčejný graf $G = (U, H)$, kde $U = \{1, 2, \dots, n\}$, $n > 0$ přirozené číslo, a H má 12 prvků. Pro každé číslo $i = 1, 2, \dots, n$ má uzel i tentýž stupeň $n - 2$. Určete hodnotu čísla n a pak graf G přehledně nakreslete.

$|H| = 12$

$U = \{1, 2, \dots n\}$ $n > 0$

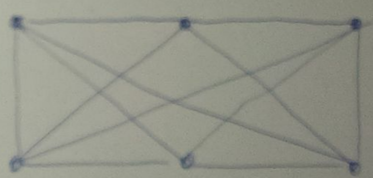
každý uzel : $\forall u \in U : \deg(u) = n - 2$

$$\sum_{u \in U} \deg(u) = 2|H|$$

$$n \cdot (n-2) = 2 \cdot 12$$

$$n^2 - 2n = 24$$

$\underline{n = 6}$



Řádný termín 2015/16

(zadání by Thomasko na fitusce)

(1) Vytvorte jazyk L s rovnosťou a funkčným symbolom f. Nech R je realizácia jazyka s univerzom $\mathbb{Z}$, kde f_R je násobenie na $\mathbb{Z}$. Napíšte formulu predikátovej logiky, ktorá bude v realizácii R odpovedať vlastnosti, že každé 2 prvky majú NSD.

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{Z} \ n | x \land n | y \land \forall m \in \mathbb{Z} \ m | x \land m | y \Rightarrow m | n$$

formule:

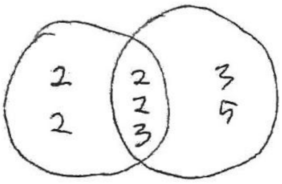
$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : \exists a, b \in \mathbb{Z} : x = a . n \land y = b . n$$

$$\land \ \forall m \in \mathbb{Z} \ (\exists c, d \in \mathbb{Z} : x = c . m \land y = d . m) \Rightarrow \exists g : m . g = n$$

pak n je $NSD(x, y)$

$48 = 2 . 2 . 2 . 2 . 3$

$180 = 2 . 2 . 3 . 3 . 5$



NSN:

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \ \exists n \in \mathbb{Z} : x | n \land y | n \land \forall m \in \mathbb{Z} : x | m \land y | m \Rightarrow n | m$$

pak n je $NSN(x, y)$

③ V množine univerz. alg. $A = (A, p, q)$ typu $(1,1)$ na množine f-cí $A = \{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}\}$ s def. oborom $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

$p(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ $q(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ pre $f(x) \in A$. Dokážte, že A je uzavretá vzhľadom k p a q

---

p: $\frac{1}{x} \in A$, $\frac{1}{1-x} = 1-\frac{1}{x} \in A$, $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x \in A$, $\frac{1}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1-x}{1} = 1-x \in A$, $\frac{1}{1-\frac{1}{x}} =$

$= \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{1} \frac{x}{x-1} \in A$, $\frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \in A$

q: $\frac{x}{x-1} \in A$; $\frac{1-x}{1-x-1} = \frac{x-1}{x} = 1-\frac{1}{x} \in A$, $\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}} = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \in A$, $\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}-1} = \frac{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x}} =$

$= \frac{x-1}{x} \cdot (-1) \frac{x}{1} = 1-x \in A$, $\frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{1}{x-1}} = \frac{x}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{1} = x \in A$

je uzavretá

\+ chybí výpočet algebry generované prvkem 1-x

④ V telese zvyškových tried $\mathbb{Z}_7$ vypočítajte:

$3-2(2-4)^{-1}+5^3$

$3+(-2.(2+(-4))^{-1})+5.5.5$	$(-4)+4 \equiv 0$
$3+(-2.(2+3)^{-1}+5.4$	$3+4 \equiv 0$
$3+(-2.(5)^{-1})+6$	$5.(5^{-1})=1$
$3+(-2.3)+6$	$5.a=(7_n)+1$
$3+(-6)+6$	$5.3 \equiv (2.7)+1$
$3+1+6$	$5^{-1} \equiv 3$
$4+6$	
3	

⑤ Uvažujte priestor V vektorového priestoru $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory: $v_1 = (1,1,1,1)$ $v_2 = (0,1,0,1)$ $v_3 = (1,-1,1,-1)$

Určite dimenziu priestoru V a jeho ortonormálnu bázu

$g_1 = v_1 = (1,1,1,1)$ $\|g_1\| = \sqrt{4} = 2$

$\text{proj}_{g_1}(v_2) = \frac{(g_1, v_2)}{\|g_1\|^2} g_1 = \frac{((1,1,1,1);(0,1,0,1))}{4}(1,1,1,1) = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$g_2 = v_2 - \text{proj}_{g_1}(v_2) = (0,1,0,1) - \frac{1}{2}(1,1,1,1) \equiv (-1,1,-1,1)$ $\|g_2\| = \sqrt{4} = 2$

$\text{proj}_{g_1}(v_3) = \frac{(g_1, v_3)}{\|g_1\|^2} \cdot g_1 = \frac{((1,1,1,1);(1,-1,1,-1))}{4}(1,1,1,1) = 0$

$\text{proj}_{g_2}(v_3) = \frac{(g_2, v_3)}{\|g_2\|^2} \cdot g_2 = \frac{(-1,1,-1,1),(1,-1,1,-1))}{4}(-1,1,-1,1) = -\frac{4}{4}(-1,1,-1,1) =$
$= (1,-1,1,-1)$

$g_3 = v_3 - \text{proj}_{g_1}(v_3) - \text{proj}_{g_2}(v_3) = (1,-1,1,-1) - 0 - (1,-1,1,-1) = 0$

v_3 není lin. nezávislé od v_1, v_2 $v_3 = v_1 - 2 \cdot v_2$

$u_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$ $u_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)$ – normalizace

$B = \{u_1, u_2\} = \{\frac{1}{2}(1,1,1,1), \frac{1}{2}(-1,1,-1,1)\}$ – ortonormální báze

$\langle B \rangle = V$ $\dim V = |B| = 2$

V prostor generovaný bází B

6) Na športovom turnaji sa každé 2 družstvá stretli práve raz a každé z týchto stretnutí skončilo víťazstvom jedného zo súperov. Turnaj vyhralo družstvo, ktoré získalo najviac víťazstiev. Toto družstvo však 2x prehralo. Aký bol najmenší možný počet družstiev?

V - vítěz

$deg_+(V) = 2$

$deg_-(V) + deg_+(V) = n-1$

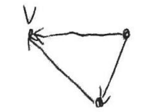
$deg_-(V) = n-3$

n - počet uzlů

$n=1$: $deg_+(V) \neq 2$

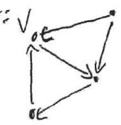
$n=2$: $deg_+(V) \neq 2$

$n=3$:



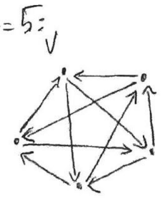
V není vítězem

$n=4$:



V není vítězem

$n=5$:



každý uzel je vítěz

Pokud je povoleno vícero vítězů, $n=5$

Zbytkové třídy

Našel jsem dva vzorečky/postupy na výpočet zbytkové třídy, co je správně?
zb.třída **Z7**

a) $\frac{4}{3} \Rightarrow 4 * 3^{-1} \Rightarrow 4 * 5 \Rightarrow 6$ $\qquad 3^{-1}: (x * 3) \bmod 7 = 1 \Rightarrow x = 5$

b) $\frac{4}{3} \Rightarrow 6$ $\qquad \frac{4}{3}: (x * 3) \bmod 7 = 4 \Rightarrow x = 6$

….. ve výsledku je to stejný

1.opravný termín, skupina žltý papier (2012/2013 **)**

5. príklad (15 bodov)

A = (R^2, op1, op2) (2,1)

op1((x1,y1),(x2,y2)) = (2x1+x2, 2y1+y2)

op2(x,y) = (2x+y,2y)

zobrazenie f(x,y,) = (ax+by,0) -> najst hodnoty parametrov aby to bol endomorfizmus a graficky znazornit triedy jadra

vie niekto ako sa riesi take nieco?

Proč není pařez stromem? Protože obsahuje kružnice.

2015/2016

Materiály posbírané Fitušky a FB z minulého roku: https://mega.nz/#F!gh1gCILC!s_S0pVRjGFJCmxcMzfuICQ

2. opravný

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE 2015/2016 - písemná zkouška za 80 bodů, sk. D

1. (10 b) Uvažujme jazyk L teorie uspořádání, tj. jazyk s rovností a binárním predikátovým symbolem $<$. Napište formuli v tomto jazyce vyjadřující vlastnost, že každé dva prvky daného univerza mají infimum.

2. (15 b) Pomocí převodu na prenexní tvar rozhodněte, zda φ a ψ jsou ekvivalentní formule v jazyce predikátové logiky obsahujícím unární predikátové symboly p, q:

$$\varphi \equiv \exists x p(x) \leftrightarrow \exists y q(y), \qquad \psi \equiv \forall x \exists y \exists z((p(x) \to q(y)) \land (q(x) \to p(z))).$$

3. (15 b) Zjistěte, zda lze doplnit následující Cayleyovu tabulku binární operace $*$ tak, aby $(\{a, b, c, d\}, *)$ byla grupa, a v kladném případě doplnění proveďte:

$*$	a	b	c	d
a		c		
b				
c			d	
d				

Zadané

Návod: Využijte obecné vlastnosti grup nebo ověřte, zda grupa $(\{a, b, c, d\}, *)$ nemůže být izomorfní s některou z algeber $(\mathbb{Z}_n, +) \times (\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Z}_n, \cdot) \times (\mathbb{Z}_n, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Z}_n, \cdot)$ pro vhodné $n \in \mathbb{N}$.

4. (15 b) Najděte největší společný dělitel polynomů nad polem zbytkových tříd $\mathbb{Z}_5$: $p = x^4 + 3x^2 + 2$, $q = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$.

5. (10 b) Uvažujme normu na $\mathbb{R}^3$ definovanou rovností

$$\|(x, y, z)\| = \max\{|x|, |y|\} + |z|.$$

Načrtněte a slovně popište jednotkovou kouli v této normě, tj. množinu $\{(x, z, y) \in \mathbb{R}^3;\ \|(x, y, z)\| = 1\}$.

6. (15 b) Graf G má 7 uzlů a 13 hran. Každý uzel má stupeň n, kde $n \in \{2, 3, 5, 6\}$, a uzlů stupně 6 je o jeden méně než uzlů stupně 5. Vypočtěte, kolik uzlů stupně n má graf G pro každé $n \in \{2, 3, 5, 6\}$.

1. opravný

2. (10 b) Dokažte (napsáním důkazu), že platí

$$\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \forall x \psi,$$

kde φ a ψ jsou formule a x nemá v φ volný výskyt. Návod: kromě předpokladu užijte pravidlo zobecnění, axiom kvanitfikátoru, tautologický důsledek a pravidlo odloučení (ve vhodném pořadí a s případným opakováním).

1, předpoklad $\varphi \to \psi$

2, MG: $\varphi \to \psi \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$

3, AK: $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x \psi)$

4, $MP_{2,3}$: $\varphi \to \psi \vdash \varphi \to \forall x \psi$

3. Uvažujme binární operaci $*$ na množině $\mathbb{R}^2_+$ dvojic kladných reálných čísel definovanou vztahem

$$(a, b) * (c, d) = (a^d c, bd).$$

zda algebra $(\mathbb{R}^2_+, *)$ je

a, pologrupa

b, monoid

c, komut. monoid

d, grupa

e, komutativní monoid

f, najděte nějaký netriviální homomorfismus do grupy $(\mathbb{R}_+, \cdot)$.

Moje řešení příkladu tři: je asociativní, má neutrální prvek a ke každému prvku můžeme najít inverzi, není komutativní = Grupa

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE 2015/2016 - písemná zkouška za 80 bodů, sk. A

1. (15 b) Mějme jazyk s rovností, unárním funkčním symbolem f a binárním predikátovým symbolem p. Buď $\mathcal{R}$ realizace ohoto jazka s univerzem $\{a,b,c\}$, kde $f_{\mathcal{R}} : \{a,b,c\} \to \{a,b,c\}$ je operace definovaná přiřazením $a \mapsto c$, $b \mapsto a$, $c \mapsto b$ a $p_{\mathcal{R}} = \{(a,a),(a,c),(c,a),(c,c)\}$. Uvažujme formule

$\varphi \equiv \forall x \exists y p(f(x),y)$,

$\chi \equiv p(x,y) \to (x = y \vee y = f(x) \vee x = f(y))$,

$\psi \equiv \forall x \exists y (p(x,x) \to \neg x = f(y))$.

Ověřte, zda $\mathcal{R}$ je modelem některé z teorií $S = \{\varphi, \chi, \psi\}$, $T = \{\neg\varphi, \chi, \psi\}$, $U = \{\psi, \neg\chi\}$. Svůj závěr odůvodněte.

φ|

$\forall x \exists y \, p(\underline{f(x)}, y)$ — zde dostanu vždy: c, a, b

pro $\exists y \, p(b,y)$ ale je nepravdivá

χ|

$p(x,y) \to (x = y \vee y = f(x) \vee x = f(y))$

jako by zde bylo $\forall x \forall y$

Zajímá mne jen situace, kdy $p(x,y)$ bude TRUE, protože pak konsekvent musí být také TRUE.

$p(a,a) \to (a = a \ldots)$ ok ✓

$p(a,c) \to (a = c \vee c = \underbrace{f(a)}_{c} \ldots)$ ok ✓

$p(c,a) \to (c = a \vee a = \underbrace{f(c)}_{b} \vee c = \underbrace{f(a)}_{c})$ OK ✓

$p(c,c) \to (c = c \ldots)$ ok ✓

pravdivá

ψ|

$\forall x \exists y (p(x,x) \to \neg x = f(y))$

zde mne opět zajímá $p(x,x)$, které bude TRUE v těchto případech:

$\exists y \, p(a,a) \to \neg a = f(y)$ — např. pro $y = a$:

$p(a,a) \to \neg a = \underbrace{f(a)}_{c}$

$p(a,a) \to \neg a \neq c$

TRUE $\to$ TRUE ✓

$\exists y \, p(c,c) \to \neg c = f(y)$

TRUE $\to$

např. pro $y = b$:

$p(c,c) \to \neg c = f(b)$

$p(c,c) \to \neg c \neq a$

TRUE $\to$ TRUE ✓

T je modelem teorie

1) Uvažujme jazyk K s rovností a jedním funkčním binárním symbolem f. Nechť R je realizace jazyka K s univerzem $\mathbb{Z}$, kde f_R je násobení na $\mathbb{Z}$. Napište formuli predik. logiky, která bude v realizaci R odpovídat vlastnosti, že každé dva prvky v $\mathbb{Z}$ mají nejmenší společný násobek.

2) Uvažujme jazyk L s rovností, unárním predik. symbolem v, unárním funkčním symb. d a binárním funkčním symbolem g. Nechť M je realizace jazyka L s univerzem $\mathbb{R}^2$, kde:

$$d_M(a,b) = (b,a)$$

$$g_M((a,b),(c,d)) = \begin{cases} (c,d) & b \neq c \\ (a,d) & b = c \end{cases}$$

Uvažujme teorii:

$$T = \{(x = d(x)) \to v(x),\ (v(x) \wedge v(d(x))) \to (x = d(x)),\ (v(x) \wedge v(y)) \to v(g(x,y))\}.$$

Najděte unární relaci v_M takovou, aby realizace M byla modelem teorie T, a rozhodněte, zda $T \models d(d(x)) = x$.

3) Uvažujme univerzální algebru $\mathcal{A} = (A, p, q)$ typu $(1,1)$ na množině funkcí $A = \{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}\}$ s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, kde $p(f(x)) = 1 - f(x)$ a $q(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ pro $f(x) \in A$. Dokažte, že množina A je uzavřená vzhledem k operacím p i q, a najděte podalgebru algebry $\mathcal{A}$ generovanou prvkem $\frac{1}{x}$.

Řádný 2015/16

4, V tělese ~~$\mathbb{Z}_{7}$~~ zbytkových tříd $\mathbb{Z}_7$ vypočtěte

$$3 - 2 \cdot (2-4)^{-1} + 5^3 = \underline{\underline{3}} \ ?$$

5, Uvažujte podprostor V vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný-mi vektory

$v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (0,1,0,1)$, $v_3 = (1,-1,1,-1)$. Určete dimenzi prostoru V a jeho ortonormální bázi

$$\varphi_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \varphi_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \ \varphi_3 = (0,0,0,0)$$

6, Na sportovním turnaji se každá dvě družstva utkala právě jednou a každé z těchto utkání skončilo vítězstvím jednoho z obou soupeřů. Turnaj vyhrálo družstvo, které získalo nejvíce vítězství. Toto družstvo však dvakrát prohrálo. Jaký byl nejmenší možný počet družstev na turnaji? Návod: Uvažujte turnaj jako orientovaný graf.

7 družstev

2015/2016 řádný D

1| na $\mathbb{Z}$

$f(x,y) = x \cdot y$

Každé dva prvky v $\mathbb{Z}$ mají největší společný dělitel.

$\boxed{x \text{ dělí } y}$

~~$\forall x,y \in \mathbb{Z}\ \exists z: f(z,x) = y$~~ $\forall x,y \in \mathbb{Z}: \exists z \in \mathbb{Z}: f(z,x) = y$

$\boxed{z \text{ je společným dělitelem } x \text{ a } y}$

z dělí x

z dělí y

~~$\exists a,b,z: f(a,z) = x \wedge f(b,z) = y$~~

$\forall x,y \in \mathbb{Z}: \exists z \in \mathbb{Z}: \exists a,b \in \mathbb{Z}: f(a,z) = x \wedge f(b,z) = y$

$\boxed{z \text{ je největším společným dělitelem}}$

$$\forall x,y \in \mathbb{Z}: \exists z \in \mathbb{Z} \big(\exists a,b \in \mathbb{Z}: f(a,z) = x \wedge f(b,z) = y\big)$$
$$\wedge\ \forall m \in \mathbb{Z}: \big(\exists c,d \in \mathbb{Z}: f(m,c) = x \wedge f(m,d) = y\big) \Rightarrow$$
$$\exists g \in \mathbb{Z}: f(m,g) = z$$

přepis do tvaru formule $\quad p(x) \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

$$\forall x,y\Big(\big(p(x) \wedge p(y)\big) \rightarrow \exists z\Big(p(z) \rightarrow \exists a,b\big((p(a) \wedge p(b)) \rightarrow (f(a,z) = x \wedge f(b,z) = y)\big)$$
$$\wedge\ \forall m\Big(\big(p(m) \rightarrow \exists c,d\big((p(c) \wedge p(d)) \rightarrow f(m,c) = x \wedge f(m,d) = y\big)\big) \rightarrow \exists g\big(p(g) \rightarrow f(m,g)$$
$$= z\big)\Big)\Big)\Big)$$

2015/2016 – řádný – sk. D

Nechť R je realizace jazyka K

MATEMATICKÉ STRUKTURY V INFORMATICE

1. (10 b) Uvažujme jazyk K s rovností a jedním funkčním binárním symbolem f. Nechť $\mathcal{R}$ je realizace jazyka K s univerzem $\mathbb{Z}$, kde $f_{\mathcal{R}}$ je násobení na $\mathbb{Z}$. Napište formuli predikátové logiky, která bude v realizaci $\mathcal{R}$ odpovídat vlastnosti, že každé dva prvky v $\mathbb{Z}$ mají největší společný dělitel.

R odpovídá vlastnosti,

2)

2015/2016 – řádný D

2. (15 b) Uvažujme jazyk L s rovností, unárním predikátovým symbolem v, unárním funkčním symbolem d a binárním funkčním symbolem g. Nechť $\mathcal{M}$ je realizace jazyka L s univerzem $\mathbb{R}^2$, kde

$$d_{\mathcal{M}}(a, b) = (b, a),$$

$$g_{\mathcal{M}}((a, b), (c, d)) = \begin{cases} (a, b), & b \neq c \\ (a, d), & b = c \end{cases}.$$

Uvažujme teorii

$$T = \{(x = d(x)) \rightarrow v(x), v(x) \rightarrow v(d(x)), (v(x) \wedge v(y)) \rightarrow v(g(x, y))\}.$$

Najděte unární relaci $v_{\mathcal{M}}$ takovou, aby realizace $\mathcal{M}$ byla modelem teorie T, a rozhodněte, zda $T \models v(d(x)) \rightarrow v(x)$.

$V_M(x, y) \Longleftrightarrow x = x$

dá vždy true

bude vždy false — je jedno, co zde

$(x = d(x)) \rightarrow v(x)$

$v(x) \rightarrow v(d(x))$

$(v(x) \wedge v(y)) \rightarrow v(g(x, y))$

$T \models v(d(x)) \rightarrow v(x)$

Vyjdu z $\underbrace{v(x) \rightarrow v(d(x))}_{\alpha}$ a z důsledku $\underbrace{v(d(x)) \rightarrow v(x)}_{\beta}$

$v(x)$	$v(d(x))$	α	β
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	$\boxed{1}$	$\boxed{0}$
1	1	1	1

~~Není důsledkem, protože se v ohodnocení liší pravdivosti α~~

Když je pravdivá α, musí být pravdivá i β $\Longrightarrow$ není.

Takže není důsledkem.

3)

řádný 2015/16 ; D

3. (15 b) Uvažujme univerzální algebru $\mathcal{A} = (A, p, q)$ typu $(1, 1)$ na množině funkcí $A = \{x, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}, 1-\frac{1}{x}, \frac{x}{x-1}\}$ s definičním oborem $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, kde $p(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$ a $q(f(x)) = \frac{f(x)}{f(x)-1}$ pro $f(x) \in A$. Dokažte, že množina A je uzavřená vzhledem k operacím p i q, a najděte podalgebru algebry $\mathcal{A}$ generovanou prvkem $1-x$.

Kontrola uzavřenosti

x

$$p(x) = \frac{1}{x} \in A \qquad q(x) = \frac{x}{x-1} \in A$$

$1-x$

$$p(1-x) = \frac{1}{1-x} \in A \qquad q(1-x) = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} = -\frac{1-x}{x} = -\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\right) = -\left(\frac{1}{x} - 1\right) = 1 - \frac{1}{x} \in A$$

$\frac{1}{x}$

$$p\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \in A \qquad q\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \in A$$

$\frac{1}{1-x}$

$$p\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{1-x}} = 1-x \in A \qquad q\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x} - 1} = \frac{1}{\cancel{1-x}} \cdot \frac{\cancel{1-x}}{1-(1-x)} = \frac{1}{x} \in A$$

$1 - \frac{1}{x}$

$$p\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} \in A$$

$$q\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x} - 1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1}{x} - 1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1-x}{x}} = \frac{x-1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{-1} = 1-x \in A$$

$\frac{x}{x-1}$

$$p\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x} \in A \qquad q\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - 1} = \frac{\frac{x}{x-1}}{\frac{x-(x+1)}{x-1}} = \frac{x}{\cancel{x-1}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{+1} = x \in A$$

Je uzavřená.

Podalgebra generovaná $1-x$

$$\langle 1-x\rangle = \left\{1-x,\ \frac{1}{1-x},\ 1-\frac{1}{x},\ \frac{x}{x-1},\ \frac{1}{x},\ x\right\}$$

$$p(1-x) = \frac{1}{1-x} \qquad q(1-x) = \frac{1-x}{1-x-1} = 1-\frac{1}{x}$$

+ využity výpočty z předchozí strany

řádný term. 2015/16, sk D

4. (10 b) V tělese zbytkových tříd Z_7 vypočtěte
$$6^2 - 2(1-5)^{-1} + 1.$$

$6^2 - 2\cdot(1-5)^{-1} + 1 =$

$1 - 2\cdot(-4)^{-1} + 1 =$

$1 - 2\cdot 3^{-1} + 1 =$

$1 - 2\cdot 5 + 1 =$

$1 - 10 + 1 = 1 + 4 + 1 = \underline{\underline{6}}$

$3^{-1}\ldots \quad x\cdot 3 \bmod 7 = 1$

$x = 5$

5. (15 b) Uvažujte podprostor V vektorového prostoru $\mathbb{R}^4$ generovaný vektory $v_1 = (1,1,-1,1)$, $v_2 = (-1,0,1,0)$, $v_3 = (-1,1,1,1)$. Určete dimenzi prostoru V a jeho ortonormální bázi.

$$v_1 = (1,1,-1,1)$$
$$u_2 = (-1,0,1,0)$$
$$u_3 = (-1,1,1,1)$$

$$v_3 = u_3 - (u_3, \varphi_1)\cdot\varphi_1 - (u_3,\varphi_2)\cdot\varphi_2 =$$
$$(-1,1,1,1) - \left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\varphi_1 - \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\right)}_{2}\cdot\varphi_2 =$$
$$= (-1,1,1,1) - 0\cdot\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) - (-1,1,1,1) =$$
$$= (0,0,0,0)$$

$$\varphi_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{(1,1,-1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{(1,1,-1,1)}{2} = \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

$$v_2 = u_2 - (u_2,\varphi_1)\cdot\varphi_1 = (-1,0,1,0) - \left(-\tfrac{1}{2}+\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) =$$
$$= (-1,0,1,0) + 1\cdot\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \cancel{(-1,0,1,0) + \left(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8}\right)} =$$
$$\cancel{= \left(-\tfrac{8}{8},0,\tfrac{8}{8},0\right) + \left(\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{8}\right) = \left(-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8}\right)}$$
$$\cancel{\varphi_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\left(-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8}\right)}{\sqrt{\tfrac{49}{56}+\tfrac{1}{56}+\tfrac{49}{56}+\tfrac{1}{56}}} = \frac{\left(-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8},-\tfrac{7}{8},\tfrac{1}{8}\right)}{\sqrt{\tfrac{100}{56}}} = \left(-\tfrac{7\sqrt{56}}{80},\tfrac{\sqrt{56}}{80},-\tfrac{7\sqrt{56}}{80},\tfrac{\sqrt{56}}{80}\right)}$$
$$\cancel{\sqrt{\tfrac{100}{56}} = \frac{10}{\sqrt{56}} = \frac{10}{2\sqrt{14}} = \frac{5}{\sqrt{14}}}$$
$$\cancel{= \left(-\tfrac{7\sqrt{14}}{40},\tfrac{\sqrt{14}}{40},-\tfrac{7\sqrt{14}}{40},\tfrac{\sqrt{14}}{40}\right)}$$

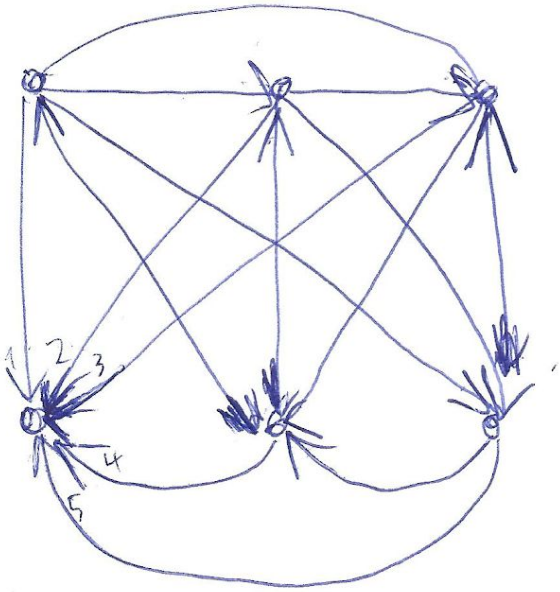
$$= (-1,0,1,0) + \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\varphi_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)}{\sqrt{\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}}} = \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right)$$

6. (15 b) Sportovního turnaje se zúčastnilo 6 družstev. Každá dvě družstva se utkala právě jednou a každé z těchto utkání skončilo vítězstvím jednoho z obou soupeřů. Turnaj vyhrálo družstvo, které získalo nejvíce vítězství. Jaký nejvyšší počet porážek mohlo toto družstvo utrpět? Návod: Uvažujte turnaj jako orientovaný graf.

$$\sum \deg(v) = 2 \cdot |H|$$

max. 1 porážky



---

https://mega.nz/#F!gh1gCILC!s_S0pVRjGFJCmxcMzfulCQ

KONEC
