

METRICS' PROTOR

1

$$X = (X, \rho)$$

$$\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

1: $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = \rho(y, x)$

~~2: $\forall x \in X : \rho(x, x) = 0$~~

3: $\forall x, y, z \in X : \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$

2: $\forall x, y \in X : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

②

$$X = (\{0, 1, 2\}, \rho)$$

$$\rho: \{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$\rho:$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	2
2	2	2	0

24

3

$$\mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}, \rho)$$

$$\rho(x, y) = |x - y|$$

$$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \rho)$$

$$\rho(x, y) = \rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Dokažte, že $\mathbb{R}^1 = (\mathbb{R}, \rho)$ $\rho(x, y) = |x - y|$ je metrický prostor.

1) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

" \Rightarrow " $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x - y| = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y$

" \Leftarrow " $x = y \Rightarrow |x - y| = |x - x| = |0| = 0 \Rightarrow \rho(x, y) = 0$

2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : \rho(x, y) = \rho(y, x)$

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1) \cdot (y - x)| = \cancel{|-1|} \cdot |y - x| = |y - x| = \rho(y, x)$$

(4)

$$3) \forall x, y, z. \quad \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$$

$$\rho(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| = | \underline{(x - y)} + \underline{(y - z)} | \leq |x - y| + |y - z| =$$

$$\underline{|A + B|} \leq \underline{|A| + |B|} \quad \nearrow$$

$$= \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

(5)

UKAŽTE, ŽE $X = (\mathbb{R}^2, \rho)$
JE METRICKÝ PROSTOR

$$\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$$

1) $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 0 \Leftrightarrow \underline{|x_1 - y_1|} + \underline{|x_2 - y_2|} = 0 \Leftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \wedge |x_2 - y_2| = 0$
 $\Leftrightarrow x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) = (y_1, y_2)$

2) $\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = |(-1) \cdot (y_1 - x_1)| + |(-1) \cdot (y_2 - x_2)| =$
 $= |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| = \rho((y_1, y_2), (x_1, x_2))$

3) $\rho((x_1, x_2), (z_1, z_2)) = |x_1 - z_1| + |x_2 - z_2| = \underbrace{|x_1 - y_1 + y_1 - z_1|}_{|A+B| \leq |A|+|B|} + \underbrace{|x_2 - y_2 + y_2 - z_2|}_{|A+B| \leq |A|+|B|} \leq$
 $\leq \underbrace{|x_1 - y_1| + |y_1 - z_1|}_{\rho((x_1, x_2), (y_1, y_2))} + \underbrace{|x_2 - y_2| + |y_2 - z_2|}_{\rho((y_1, y_2), (z_1, z_2))} = \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \rho((y_1, y_2), (z_1, z_2))$

$$X_1 = (\{1, 2, 3, 4\}, \rho_1)$$

$$X_2 = (\{1, 2, 3, 4\}, \rho_2)$$

6

Doplňte definici ρ tak, aby X_1/X_2 byl metrický prostor

ρ_1	1	2	3	4
1	0	3	4	5
2	3	0	5	6
3	4	5	0	7
4	5	6	7	0

$$\rho(3, 4) = 7 > \rho(3, -) + \rho(-, 4)$$

$$7 \leq \rho(3, 1) + \rho(1, 4) = 9 \quad \checkmark$$

$$7 \leq \rho(3, 2) + \rho(2, 4) = 11 \quad \checkmark$$

ρ_2	1	2	3	4
1	0	1	2	5
2	1	0		2
3	2		0	
4	5	2		0

NELZE, PŘOTIPŘÍKLAD

$$\rho(1, 4) = 5 > \rho(1, 2) + \rho(2, 4) = 1 + 2 = 3$$

$$X = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \rho) \quad \rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$$

7

ukážete, že X je metrický prostor.

$$1) \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$2) \rho(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = \left| (-1) \cdot \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right) \right| = \cancel{|-1|} \cdot \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right| = \rho(y, x)$$

$$3) \rho(x, y) + \rho(y, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| = \left| \underbrace{\frac{1}{x} - \frac{1}{z}}_a + \underbrace{\frac{1}{z} - \frac{1}{y}}_b \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \geq$$

$|a+b| \geq |a| - |b|$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| - \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| = \rho(x, z)$$

die beiden 2

$$X = (X, \rho)$$

8

- poslanost $\{x_n\}$ $\forall n: x_n \in X$

- poslanost konvergenci k $x \in X$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) \right] = 0$$

$$X = (\mathbb{R}^1, \rho) \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

$$* \{x_n\} \quad x_i = \frac{1}{i}$$

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} = 0$$

poslanost konvergenci k 0

$$* \{x_n\} \quad x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, \forall i \geq 5: x_i = x_{i-1}$$

konvergenci k bodu $x = 4$

$$N(\varepsilon) = 5$$

CAUCHJOVSKA' POSLOUPNOST

9

Def: $\{x_n\}$ je CAUCHJOVSKA' $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 :$

$$\exists N(\varepsilon) : \forall m, n \geq N(\varepsilon) : \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

Posloupnost $\{x_n\}$ $x_i = \frac{1}{i}$

je tato posloupnost CAUCHJOVSKA'?

ukážu, že existuje $N: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{N}$

$$N(\varepsilon) = i \quad \text{t. z.} \quad \frac{1}{i} < \varepsilon$$

$$\text{pro } j > i : \rho\left(\frac{1}{i}, \frac{1}{j}\right) < \frac{1}{i} < \varepsilon \quad \Rightarrow N \text{ je funkce z def. C. P.}$$

ÚPLNÝ METRICKÝ PROSTOR

10

Jestliže každá Cauchyovská posloupnost konverguje v prostoru $X = (X, \rho)$,
potom nazýváme prostor úplný.


$$\exists x \in X : \lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, x) = 0$$

MEŤRICA METRICKÝ PROSTOR OBSAHUJÚCI CAUCHOVSKU POISLOUPNOSŤ

11

$X = (\mathbb{N}_0, \rho)$, kde ρ je definovaná následovne:

$$* \rho(x, x) = 0$$

$$* \rho(0, 1) = 1$$

$$* \rho(x, x+1) = \frac{\rho(x-1, x)}{2}$$

pro $x < y$:

$$\rho(x, y) = \rho(x, x+1) + \rho(x+1, y)$$

pro $x > y$:

$$\rho(x, y) = \rho(y, y+1) + \rho(y+1, x)$$

$\{0, 1, 2, \dots\}$ je cauchyovská

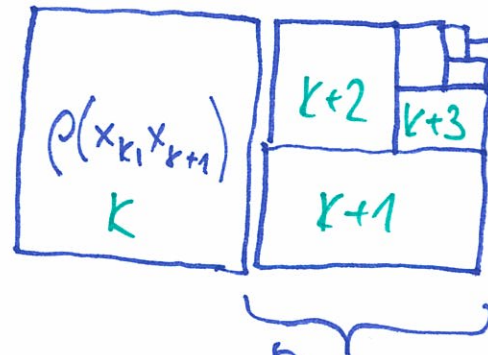
- pro každé $\varepsilon > 0$ reálné číslo existují x_k : $\rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$

$$- \text{ukládá se } \sum_{k=i}^{\infty} \rho(x_k, x_{k+1}) \leq 2 \cdot \rho(x_k, x_{k+1})$$

$$\sum_{i=k+1}^{\infty} \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$$

$$\sum_{i=k+1}^n \rho(x_i, x_{i+1})$$

12



$$\sum_{i=k+1}^n \rho(x_i, x_{i+1}) \leq \rho(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$$

KONTRAKCE

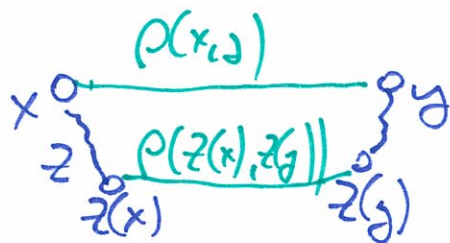
12

MAJE METRICKÝ PROSTOR $X=(X, \rho)$

ZOBRAZENÍ $z: X \rightarrow X$ JI KONTRAKCE $\stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\exists \alpha < 1 \text{ t. j. } \forall x, y \in X : \rho(z(x), z(y)) \leq \alpha \rho(x, y)$$

ekvivalentně zapisáno:
 $\forall x, y \in X : x \neq y \rightarrow \rho(z(x), z(y)) < \rho(x, y)$



PŘÍKLAD KONTRAKCE:

13

$$(\mathbb{R}, \rho) \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

$$\bullet z(x) = \frac{x}{2}$$

$$\alpha \cdot |x - y| \geq \left| \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right| = \frac{1}{2} \cdot |x - y|$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \cdot |x - y| \geq 0$$

platí pro $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$

$$\bullet z(x) = 0$$

$$\bullet z(x) = k, k \in \mathbb{R}$$

}

$$\bullet z(x) = z(y) \rightarrow \rho(z(x), z(y)) = 0$$

$$0 \leq \alpha \cdot \rho(x, y)$$

$$\bullet z(x) = \begin{cases} 1 & \Leftrightarrow x > 0 \\ 0 & \Leftrightarrow x = 0 \\ -1 & \Leftrightarrow x < 0 \end{cases}$$

NENÍ KONTRAKCE,

PROTI PŘÍKLAD $x = 0,5, y = -0,5$

$$\rho(x, y) = 1$$

$$\rho(z(x), z(y)) = \rho(1, -1) = 2$$

heltz najít $\alpha < 1$ t.j. $2 \leq \alpha \cdot 1$

$$X = (\mathbb{R}^2, \rho) \quad \rho((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

14

$$\bullet \quad z(x, y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} &\geq \sqrt{\left(\frac{x_1}{2} - \frac{y_1}{2} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{2} - \frac{y_2}{2} \right)^2} \\ 2^2 \cdot [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2] &\geq \frac{1}{4} \cdot (x_1 - y_1)^2 + \frac{1}{4} (x_2 - y_2)^2 \\ \underbrace{\left(2^2 - \frac{1}{4} \right)}_{j \geq 0} \cdot \underbrace{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]}_{\geq 0} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad z(x, y) = (k_1, k_2)$$

ji kontrakce

ji kontrakce

$$\bullet \quad z(x, y) = \left(\frac{x}{2}, y \right)$$

- není kontrakce
protipříklad $x = (0, 1)$ a $y = (0, 2)$
 $\rho(x, y) = 2 = \rho(z(x, y), z(y))$

BANACHOVA VĚTA O PEVNÉM BODĚ

15

Pokud $X = (X, \rho)$ je úplný metrický prostor a A je kontrakce

potom pro lib $x \in X$ posloupnost

$x, A(x), A^2(x), \dots$ konverguje k pevnému bodu $x \in X$

Přelom INTERVALU

16

vstup: $f(x)$ - funkce

interval $\langle a, b \rangle$ t. z. existují právě jedno $c : a \leq c \leq b$ a $f(c) = 0$

Přelom intervalu v kontextu BVPB :

$$* X = \left\{ \langle x, y \rangle \mid x \leq y \wedge \underbrace{f(x) \leq 0 \wedge f(y) \geq 0}_{[f(x) \geq 0 \wedge f(y) \leq 0]} \wedge \exists! z. x \leq z \leq y \wedge f(z) = 0 \right\}$$

$$* \rho(\langle x_1, y_1 \rangle, \langle x_2, y_2 \rangle) = |(y_1 - x_1) - (y_2 - x_2)|$$

* první bod je $\langle z, z \rangle, f(z) = 0$

1 ITERACE CYKLU JE KONTRAKCE

$$A(\langle x, y \rangle) = \langle x', y' \rangle \text{ t. z. } \frac{y-x}{2} = y' - x'$$

METODA PROSTÉ ITERACE

17

- funkce $f(x)$
- řešme rovnici $f(x)=0$ na intervalu $\langle a, b \rangle$
- $f(x)$ má pouze jedno řešení na $\langle a, b \rangle$
- převedeme $f(x)=0$ na $x = \overrightarrow{F}(x)$
- zvolíme $x_0 \in \langle a, b \rangle$
- počítáme posloupnost $\{x_i\}$ $x_i = \overrightarrow{F}(x_{i-1})$

pokud \overrightarrow{F} je kontrakce v metrickém prostoru

$$M = (\langle a, b \rangle, \rho) \quad \rho(x, y) = |x - y|$$

tak pak $\{x_i\}$ konverguje k řešení $f(x)$

\overrightarrow{F} je kontrakce pokud $|\overrightarrow{F}'(x)| \leq \alpha < 1$



Jízdní řád 1995/96

(Vydáný na základě § 22 odst. 1 zákona č. 226/94 Sb.)

KILOMETROVNÍK

pro přepravu cestujících, cestovních zavazadel a spěšnin

OBSAH:

ČÁST A:	
Všeobecné pokyny	A 2
Návrhy na úpravu JŘ, termíny změn JŘ	A 3
Kalendář	A 6
General instructions	A 7
Allgemeine Hinweise	A 11
Instructions generales	A 15
Klarigo de signoj	A 19
Abecední seznam železničních stanic	A 22
Stručný výňatek z tarifních ustanovení	A 40
Mezistátní přeprava cestujících	A 53
Místenky, lůžkové a lehátkové lístky	A 56
ČÁST B (zelená):	
Mezistátní vlakové spoje	B 1
ČÁST C (červená):	
Vnitrostátní dálkové spoje	C 1
Přehled expresů, rychlíků a spěšných vlaků	C 16
ČÁST D:	
Železniční jízdní řád (trati 010 - 345)	1
Jízdní řád lanových drah v provozu Českých drah	586
Změny za tisku	591

Platí od 28. května 1995 do 1. června 1996

Doporučená cena 64,- Kč (včetně DPH)

Tiskárna MÍR, Praha

© České dráhy s.o., Divize provozu, o.z.

Číslo pásma	Tarifní vzdálenost	CENÍK 1		CENÍK 2		
		Obyčejné jízdné		Zvláštní jízdné		
		2. vozová třída	1. vozová třída	A		B
	km	Kč	Kč	2. vozová třída	1. vozová třída	2. vozová třída
01	001 - 010	4,-	6,-	2,-	3,-	1,-
02	011 - 015	6,-	9,-	3,-	4,50	1,50
03	016 - 020	8,-	12,-	4,-	6,-	2,-
04	021 - 025	10,-	15,-	5,-	7,50	2,50
05	026 - 030	12,-	18,-	6,-	9,-	3,-
06	031 - 035	14,-	21,-	7,-	10,50	3,50
07	036 - 040	16,-	24,-	8,-	12,-	4,-
08	041 - 050	20,-	30,-	10,-	15,-	5,-
09	051 - 060	24,-	36,-	12,-	18,-	6,-
10	061 - 070	28,-	42,-	14,-	21,-	7,-
11	071 - 080	32,-	48,-	16,-	24,-	8,-
12	081 - 090	36,-	54,-	18,-	27,-	9,-
13	091 - 100	40,-	60,-	20,-	30,-	10,-
14	101 - 110	44,-	66,-	22,-	33,-	11,-
15	111 - 120	48,-	72,-	24,-	36,-	12,-
16	121 - 140	56,-	84,-	28,-	42,-	14,-
17	141 - 160	64,-	96,-	32,-	48,-	16,-
18	161 - 180	72,-	108,-	36,-	54,-	18,-
19	181 - 200	80,-	120,-	40,-	60,-	20,-
20	201 - 225	90,-	135,-	45,-	67,50	22,50
21	226 - 250	100,-	150,-	50,-	75,-	25,-
22	251 - 275	110,-	165,-	55,-	82,50	27,50
23	276 - 300	120,-	180,-	60,-	90,-	30,-
24	301 - 350	138,-	207,-	69,-	103,50	34,50
25	351 - 400	156,-	234,-	78,-	117,-	39,-
26	401 - 450	174,-	261,-	87,-	130,50	43,50
27	451 - 500	192,-	288,-	96,-	144,-	48,-
28	501 - 550	210,-	315,-	105,-	157,50	52,50
29	551 - 600	226,-	339,-	113,-	169,50	56,50
30	601 - 650	240,-	360,-	120,-	180,-	60,-
31	651 - 700	254,-	381,-	127,-	190,50	63,50
32	701 a více	270,-	405,-	135,-	202,50	67,50
Rychlíkový příplatek		16,-*		8,-**		8,-**
Příplatek EC/IC		30,-	50,-	30,-	50,-	30,-

Ceník 2A - jízdné v 1. a 2. třídě pro děti ve věku 6 až 15 let,
- jízdné ve 2. třídě pro důchodce do 70 let, občany starší 70 let, žáky (ŽŽ), rodiče při návštěvě dětí umístěných v ústavech při cestě oběma směry,
- dovozně za psy;

Ceník 2B - jízdné pro držitele průkazů ZTP, ZTP/P a rodiče při návštěvě dětí umístěných v ústavech při cestě jedním směrem.

* Platí důchodci do 70 let, občané starší 70 let při použití 2. třídy rychlíku a rodiče při návštěvě dětí umístěných v ústavech (použití rychlíku oběma směry)

** Platí držitelé průkazů ZTP, ZTP/P, ŽŽ a rodiče při návštěvě dětí umístěných v ústavech (použití rychlíku jedním směrem).

Ostatní ceníky uvedeny v části A.