READ ONLY VERZE! VYPNETE V PROHLIZECI PREDCHOZI OKNO. BUDU DELAT UPDATY OBCAS Z ORIGO VERZE.

MAT příprava na půlsemestrálku

Nejake online dokumenty z lonska jsou, ale jsou na semestralku… tam je toho vice …
kdyby nekdo vedel konkretni typove priklady co se objevuji na pulsemce, tak sem s tim …
budu postupne pridavat, jak to budu prochazet

Neplanujete nekdo nejake spolecne pocitani na zitra? Ze bych se pripojil …
+1

SOUHRN NA FITUSCE:
https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1619&t=24975

Jine online dokumenty s matikou (Pripravy na zk z lonska):
řádný:
https://docs.google.com/document/d/1cFfn1mSrmgr4gsu8l5qu9ELwodR-yM075tIAO_OYVLg/edit
opravný 1:
https://docs.google.com/document/d/1Hk6vix27pqWc_EdakyBuU0ufBz-OKYt_gH9389bYqXE/edit
opravný 2:
https://docs.google.com/document/d/1WmEtJ6XjgT1ZeMSbgZd4f7s71kOUvnBeLbbtBooMJAI/edit

Odkazy na materialy:
stara videa ze cvik

Staré příklady:
2014/2015 zadani pulsemky:
https://fituska.eu/viewtopic.php?f=1412&t=24342

data ze zanikleho fit-serveru
https://mega.nz/#F!mUBRXBRb!CrE8UPsyvqdcHJEvpfxpDg!fEBnhZIb

algebra v obrazcich:
http://algebra.matfyz.info/

Co očekávát:
“povedal by som ze celu logiku. Naviac algebru do strany 47”
logika:
https://wis.fit.vutbr.cz/FIT/st/course-files-st.php/course/MAT-IT/texts/logikaaktual3.pdf?cid=10080
algebra:
https://wis.fit.vutbr.cz/FIT/st/course-files-st.php/course/MAT-IT/texts/Zaklady_obecne_algebry.pdf?cid=10080

V jakém videu a jakém čase se objevuje:

Priklady:

1. Dokažte větu $\exists x(\neg\varphi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \psi)$ Postup:

(1) Použijte tautologii $\varphi \Rightarrow \neg\neg\varphi$.
(2) Proveďte distribuci kvantifikátoru $\forall$.
(3) Užijte třetí axiom výrokové logiky ve tvaru $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
(4) Aplikujte pravidlo odloučení.
(5) Použijte tautologii $\neg(\forall x\varphi) \Rightarrow (\forall x\varphi \Rightarrow \psi)$.
(6) Složte implikace ze (4) a (5).
(7) Proveďte úpravu (nahraďte kvantifikátor $\forall x$ kvantifikátorem $\exists x$).

řešení:

1.) $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$

$\vdash \forall x \varphi \to \forall x(\neg\neg\varphi)$

$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

$\vdash (\forall x\varphi \to \forall x(\neg\neg\varphi)) \to (\neg\forall x(\neg\neg\varphi) \to \neg\forall x\varphi)$

$\vdash \underline{\neg\forall x(\neg\neg\varphi) \to \neg\forall x \varphi}$

$\vdash \underline{\neg(\forall x\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)}$

$\vdash \neg\forall x(\neg\neg\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$

$\vdash \exists x(\neg\varphi) \to (\forall x\varphi \to \psi)$

2. Převeďte negaci formule $(\forall x p(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y q(x,y)) \wedge \exists y(\forall x p(y,y) \Rightarrow \forall x p(x,y))$ do prenexního tvaru.

řešení: (tú negáciu si neurobil, alebo ju v tom len nevidím?)

(Řekl bych, že na ni zapoměl - stává se mi taky, je potřeba si to u zkoušky hlídat.)

POZOR - BEZ NEGÁCIE

$(\forall x' p(x',y) \to \exists x''\forall y' q(x'',y')) \wedge \exists y''(\cancel{\forall x}\, p(y'',y'') \to \forall x\, p(x,y''))$

$\exists x'(p(x',y) \to \exists x''\forall y' q(x'',y')) \wedge \exists y''(p(y'',y'') \to \forall x\, p(x,y''))$

$\exists x'\exists x''\forall y'(p(x',y) \to q(x'',y')) \wedge \exists y''\forall x(p(y'',y'') \to p(x,y''))$

$\exists x'\exists x''\forall y'\exists y''\forall x((p(x',y) \to q(x'',y')) \wedge (p(y'',y'') \to p(x,y'')))$

S NEGACI A TROSKU ROZEPSANE:

1. zbytecne kvantifikatory pryc
2. prejmenovani prommnych
3. pak zaramovanej radek s negacema, takova pomucka
4. pak nejak dovedeny ty negace
5. posledni radek, nikde neni implikace tak sem s tema kvantifikatorama nic nedelal, proste jsem je vypsal dopredu … je to ok? Otaceji se jen u implikace ne? pokud jsou na leve strane.

A negaci

$$\neg((\forall_x\, p(x,y) \to \exists_x \forall_y\, q(x,y)) \land \exists_y(\cancel{\forall_x}\, p(y,y) \to \forall_x p(x,y)))$$

1) Zbytečné kv pryč

2) Přejmenuj proměnné (z leva)

$$\neg((\forall_{x'}\, p(x',y) \to \exists_{x''}\forall_{y'}\, q(x'',y')) \land \exists_{y''}(p(y'',y'') \to \forall_x p(x,y'')))$$

$$\boxed{\neg(A \land B) \equiv \neg A \lor \neg B \;\big|\; \neg(A \to B) \equiv A \land \neg B \;\big|\; \neg(\forall_x A) \equiv \exists_x \neg A}$$

$$\neg(\forall_{x'}\, p(x',y) \to \exists_{x''}\forall_{y'}\, q(x'',y')) \lor \forall_{y''}\neg(p(y'',y'') \to \forall_x p(x,y''))$$

$$\forall_{x'}\, p(x',y) \land \neg(\exists_{x''}\forall_{y'}\, q(x'',y')) \lor \forall_{y''}\, p(y'',y'') \land \neg(\forall_x p(x,y''))$$

$$(\forall_{x'}\, p(x',y) \land \forall_{x''}\exists_{y'}\neg q(x'',y')) \lor (\forall_{y''}\, p(y'',y'') \land \exists_x \neg p(x,y''))$$

$$\forall_{x'}\forall_{x''}\exists_{y'}\forall_{y''}\exists_x\, (p(x',y) \land \neg q(x'',y')) \lor (p(y'',y'') \land \neg p(x,y''))$$

3. Buď $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}; f)$ algebra typu (1) ($\mathbb{Z}$ značí množinu celých čísel), kde $f(z) = |z| - 8$ pro každé $z \in \mathbb{Z}$. Popište

(1) podalgebru $\mathcal{B} = \langle\{-4\}\rangle$ algebry $\mathcal{A}$,

(2) přímý součin algeber $\mathcal{B} \times (\{0, 1, 2\}; g)$, kde g je permutace $g = (1, 2)$ (v cyklickém zápisu).

řešení: *Algebra typu (1) = 1 unární symbol. Typ (2, 0, 1) by byla algebra s binárním, nulárním a unárním symbolem, třeba (R, +, 1, -).*

1. Podalgebra generovaná množinou <{-4}> - vezmu -4 a zkouším opakovaně všechny operace, v tomto případě jen f(x).
   - |-4| - 8 = -4
   - Takže operace *f* mi nikdy nevygeneruje nový prvek, nosná množina podalgebry B tedy je {-4}. B=: ({-4}; f)
2. Součin algeber: (M, *)
   - Nosná množina M = { (-4; 0), (-4; 1), (-4, 2) } - kartézský součin původních nosných množin.

- A operace: *(a, b) = [f(a), g(b)]

4. Vypočtěte v tělese $(\mathbb{Z}_5, \cdot, +)$

$$(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \cdot \frac{1}{4}$$

řešení: (1 + 2^(-1) + 3^(-1)) * 4^(-1)

2^(-1) = 3

3^(-1) = 2

4^(-1) = 4

(1+3+2) * 4 = 1 * 4 = 4

5. Mějme grupu regulárních matic řádu 2 nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ spolu s operací násobení matic, označíme ji $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)$. Uvažujme binární relaci $\sim$ na $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)$ definovanou předpisem $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$ (kde $|\,|$ značí determinant). Dokažte, že

(1) $\sim$ je kongurence na grupě $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)$ a

(2) faktorová grupa $(GL(2,\mathbb{R})/\sim, \cdot)$ je izomorfní s grupou $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ všech nenulových reálných čísel s násobením.

(3) Definujte normální podgrupu grupy $(GL(2,\mathbb{R}), \cdot)$, která odpovídá kongruenci $\sim$.

řešení:

1. aby to byla kongruence, musí platit:

(A1 ~ B1) and (A2 ~ B2) => (A1*A2) ~ (B1*B2)

dosadím podle definice ~:

(|A1| = |B1|) and (|A2| = |B2|) => |A1*A2| = |B1*B2|

to platí, protože:

(|A1| = |B1|) and (|A2| = |B2|) => |A1|*|A2| = |B1|*|B2| => |A1*A2| = |B1*B2|

ta druhá implikace vychází z toho, že u čtvercových matic součin determinantů je rovná determinantu součinu. jinak by si ty matice šlo rozepsat a udělat růčo ty součiny…

2.

GL(2,R) / ~ znamená rozklad té množiny matic na třídy ekvivalence podle ~. ~ je nadefinovaná tak, že v relaci jsou ty matice, jejichž determinanty se rovnají. takže v každé té třídě rozkladu budou matice jejichž determinanty se rovnají.

mám dokázat, že ta grupa je izomorfní s grupou (R\{0},*), tzn musím najít takové zobrazení z GL(2,R)/~ na R\{0}, které bude izomorfismus (bude homomorfimus + bijektivní). Protože prvky GL(2,R)/~ jsou množiny matic se stejným determinantem, můžu je zobrazovat na ten jejich determinant f([A]) = |A|. Pak musím dokázat, že je f izomorfismus:

napřed dokážu, že je to homomorfismus:

f(x) * f(y) = f(x*y)

f([A]) * f([B]) = f([A]*[B])

|A| * |B| = |A*B| <-- to platí
pak, že je bijektivní:
injektivita - dvě různé třídy [A],[B] se nemůžou zobrazit na stejné číslo, protože pak by platilo |A| = |B|, takže A ~ B, tedy nebyly by to různé třídy
surjektivita - pro každé číslo x z R\{0} existuje regulární čtvercová matice, jejíž determinant se rovná x (např [x 0; 0 1]). takže každé číslo z R\{0} má svůj vzor v GL(2,R)/~

3.
normální pogrupa odpovídající kongruenci je třída rozkladu podle té kongruence, ve které je neutrální prvek.
třídy rozkladu podle ~ jsou množiny matic, které mají stejný determinant. neutrální prvek vzhledem k operaci násobení matic je jednotková matice - ta má determinant 1. takže třída rozkladu podle ~, která obsahuje neutrální prvek je množina matic, které mají determinant 1.
tahle množina bude nosná množina té normální podgrupy...
výsledek je tedy ({A in GL(2,R) | |A| = 1}, *)

U každého příkladu je vždy právě jedna z možností správná - zaškrtněte příslušné písmeno.

1. Proveďte důkaz formule

$$\varphi,\ (\forall x\varphi \to \psi) \vdash \forall x\psi$$

dle následujícího návodu:
(1) Vezměte formuli φ jako předpoklad
(2) užijte pravidlo zobecnění
(3) vezměte formuli $\forall x\varphi \to \psi$ jako předpoklad
(4) užijte pravidlo odloučení (modus ponens)
(5) užijte pravidlo zobecnění.
Po provedení kroku (4) v důkazu dostaneme:

(a) $\forall x\varphi$

(b) ψ

(c) $\forall x\psi$

(d) $\forall x\varphi \to \phi$

(e) jinou formuli.

řešení: B.

dů: $\varphi, (\forall x \varphi \to \psi) \vdash \forall x \psi$

1) φ jako předpoklad

$$\varphi \vdash \varphi$$

2) užijte pravidla zobecnění (Generalizace

$$\varphi \vdash \forall x \varphi$$

3) vezměte $\forall x \varphi \to \psi$ jako předpoklad

$$\forall x \varphi \to \psi \vdash \forall x \varphi \to \psi$$

4) MP (asi pro předchozí

$$\varphi, (\forall x \varphi \to \psi) \vdash \psi$$

5) Užijte pravidla zobecnění

$$\varphi, (\forall x \varphi \to \psi) \vdash \forall x \psi$$

u bodu 3. Kdyz neco beru jako predpoklad, tak to proste opisu pred dokazovatko a za dokazovatko.

Chapem, ze su tam napisane kroky, ale neni mi moc jasne, ze po MP, preco by mal hned vyjst psi. Netreba tam nahodou aplikovat VD najprv (asi da sa to zkratit...)?

Keby som to napisal takto, bolo by to spravne?:

3. (AxPhi -> Psi) |- (AxPhi -> Psi)

4. MP: (AxPhi -> Psi) |- (Phi -> Psi)

5. VD: (AxPhi -> Psi), Phi |- Psi

6. ZOB: (AxPhi -> Psi), Phi |- AxPsi

2. Převeďte formuli $\exists x\varphi(x,y) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$ do prenexního tvaru. K získané formuli (v prenexním tvaru) napište její negaci a upravte ji tak, aby se spojka negace vyskytovala jen před (některými) formulemi φ, ψ, χ.
Výsledek je (až na přeznačení proměnných):

(a) $\forall x\forall y(\neg\varphi(x,y) \rightarrow (\psi(x) \vee \chi(y,z))$.

(b) $\forall x\forall x'(\neg\varphi(x',y) \rightarrow (\psi(x) \vee \chi(y,z))$.

(c) $\exists x\forall x'(\neg\varphi(x',y) \rightarrow (\psi(x) \vee \chi(y,z))$.

(d) $\exists x\exists x'(\varphi(x',y) \wedge \neg\psi(x) \wedge \neg\chi(y,z))$.

(e) $\exists x\exists x'(\neg\varphi(x',y) \vee \neg\psi(x) \vee \neg\chi(y,z))$.

řešení: D

$$\exists x' \varphi(x',y) \rightarrow \forall x(\psi(x) \vee \chi(y,z))$$

$$\forall x' \forall x \quad \varphi(x',y) \rightarrow (\psi(x) \vee \chi(y,z))$$

$$\exists x' \exists x \quad \varphi(x',y) \wedge (\neg\psi(x) \wedge \neg\chi(y,z))$$

3. Na množině $\mathbb{C}$ komplexních čísel uvažujme operaci $+$ obvyklého sčítání. Buď $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zobrazení dané předpisem $f(a+ib) = a - ib$. Pak

(a) $(\mathbb{C},+)$ není grupa

(b) f je zobrazení grupy $(\mathbb{C},+)$ do sebe, které není homomorfismem

(c) f je homomorfismus grupy $(\mathbb{C},+)$ do sebe, který není izomorfismem

(d) f je izomorfismus grupy $(\mathbb{C},+)$ na sebe (tedy automorfismus)

(e) neplatí žádná z uvedených možností.

řešení (bez záruky):

A. neplatí, všechny prvky mají inverzi, je to grupa
B. Neplatí: f(x+y) = f(x) + f(y)
   - f((a+bj) + (c+dj)) = f(a+bj) + f(c+dj)
   - f((a+c) + (b+d)j) = (a-bj) + (c-dj)
   - (a+c) - (b+d)j = (a+c) + (-bj -dj) = (a+c) - (b+d)j
   - L = P, tedy JE HOMOMORFISMUS

C. Neplatí: izomorfismus = bijektivní homomorfismus. Zobrazení f je bijektivní, je izomorfismus
D. Asi platí, pořád se pohybujeme uvnitř té stejné grupy (C → C) a zároveň jde o izomorfismus.
E. neplatí, protože D.

4. Na množině $\mathbb{Z}$ všech celých čísel uvažujme binární operaci $\star$ definovanou takto: $x \star y = xy + x + y$. Tato operace tvoří na množině $\mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ komutativní grupu, ve které inverzní prvek k danému prvku x je:

(a) $\frac{1-x}{1+x}$

(b) $\frac{1}{-1+x}$

(c) $\frac{x}{-1-x}$

(d) $\frac{1}{1+x}$

(e) v jiném tvaru, než je uvedeno v (a)-(d).

řešení:

- Grupa má m.j. i neutrální prvek, v tomto případě 0.
  - Lze ověřit: a * 0 = a.0 + a + 0 = a
- Pro inverzní prvek *e* platí: *a * a^-1 = e*, tj. v našem případě z * z^-1 = 0
  - 0 = xy + x + y
  - -x = xy + y
  - -x = y(x+1)
  - -x/(x+1) = y = z^-1 = x/(-1-x)
- Tedy odpověď je C.

1. Uvažujme jazyk L s rovností, jedním binárním funkčním symbolem f a predikátovými symboly p a q arit 1 a 3.Nechť $\mathcal{R}$ je realizace jazyka L, kde univerzem je $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, tj. množina všech podmnožin množiny přirozených čísel, a symboly se realizují na množinách $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$ následovně:

$$f_{\mathcal{R}}(A, B) = A \cap B,$$
$$A \in p_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow A \neq \emptyset,$$
$$(A, B, C) \in q_{\mathcal{R}} \Leftrightarrow A \cap B \cap C \text{ je konečná.}$$

Rozhodněte, zda jsou následující formule splněny v $\mathcal{R}$:

(1) $\forall x \forall y\, q(x, y, f(x, y))$
(2) $p(f(x, y)) \Rightarrow (p(x) \wedge p(y))$
(3) $p(x) \wedge p(y) \Rightarrow \forall z\, q(x, y, z)$
(4) $p(x) \Rightarrow q(x, f(x, x), x)$

řešení:

f: binarni operace vracejici prunik dvou parametru

p: predikat 1 parametr vracejici 1, je li mnozina neprazdna, 0 je li mnozina prazdna

q: predikat 3 parametry vracejici zda je prunik parametru konecny = 1, neni = 0

(1) za x, y suda cisla, tak f vrati prunik (suda cisla) a q rekne ze to neni konecne. = NE

(2) musim najit neco kde je v implikaci 1 => 0, coz nejde. Pokud nenajdu, tak plati.

- pokud za x a y dosadim neco, aby byl prunik neprazdny a splnilo se tak pred implikaci, tak v x urcite neco je, v y taky. Takze strana za implikaci nikdy nebude 0. = ANO PLATI

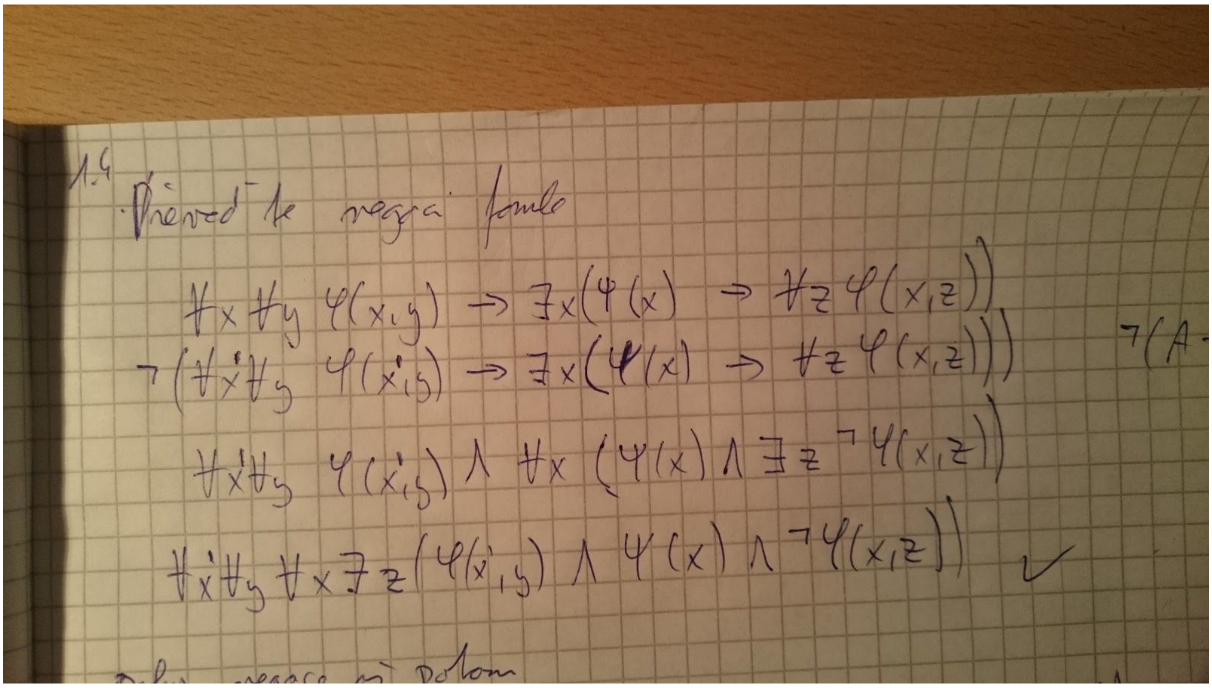
(3) ZDE NEVIM, ale kdyz dam za x suda, z y suda, tak vlevo bude 1, ale vpravo bude 0. Tedy neplati. Jen nevim jakou funkci tam ma to z.

“Z” tam je asi proto, že q má aritu 3. Potřebuješ teda nějaký symbol do třetího místa, a buď zopakuješ x, y, nebo, jak to udělali se zadáním, přidáš nový. Výraz jako takový neplatí, protože pokud za x i y dosadím třeba celé R, tak by Z muselo vždycky být konečné - jenže Z může být taky nějaká nekonečná podmnožina R. 1 -> 0

(4) Dam li v levo napr x = suda cisla, tak v pravo to bude q(suda, suda, suda) => neni konecna = 0 … NE NEPLATI

2. Převeďte negaci formule $\forall x\, \forall y\, \varphi(x,y) \Rightarrow \exists x\, (\psi(x) \Rightarrow \forall z\, \varphi(x,z))$ do prenexního tvaru.

řešení:



3. Vypočtěte v tělese $\mathbb{Z}_7$ zbytkových tříd modulo 7:

$$\frac{4(3+5)}{6} - \frac{2}{3}$$

řešení:

(4*1)/6 - 2/3 = 4*6^(-1) - 2*3(-1)

6^(-1) = 6

3^(-1) = 5

4*6 - 2*5 = 3 - 3 = 0

4. Uvažujme univerzální algebru $\mathcal{A} = (\mathbb{C}, +, conj, 1)$, kde $+$ je binární operace sčítání komplexních čísel, $conj$ je unární operace konjungace (komplexní sdruženost), tj. $conj(a+bi) = a - bi$, a 1 je nulární operace. Popište podalgebru $\langle\{i\}\rangle$ algebry $\mathcal{A}$ (tj. podalgebru generovanou jednoprvkovou množinou $\{i\}$).

řešení:

Vezmu generující množinu a používám všechny dostupné operace. Cokoliv co dostanu přidám do generované algebry.

1. Určitě tam bude *i* a prvek generovaný nulární operací 1.
2. i + i, i + i + i … tj. n*i*, n > 0
3. 1, 1+1, …, tj x, x>=0 (protože 1 tam nemusíme vygenerovat, je to jen možnost)
4. x + n*i*
5. conj(x+n*i*) = x-n*i*

Podalgebra tedy je {x +- y*i* | x>=0, y > 0 }   [pozn. y je podle nás ze Z včetně 0]

5. Mějme grupu $M(n,\mathbb{R})$ všech čtvercových matic řádu n ($n \in \mathbb{N} - \{0\}$) nad $\mathbb{R}$ s operací sčítání a grupu $\mathbb{R}$ všech reálných čísel s operací sčítání. Definujeme zobrazení $f : M(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ předpisem $f(A) = \mathrm{tr}(A)$ pro všechna $A \in M(n,\mathbb{R})$ (kde $\mathrm{tr}(A)$ značí stopu matice A, tj. součet prvků na hlavní diagonále matice A). Dokažte, že f je homomorfismus, popište třídy jádra $M(n,\mathbb{R})/f$ a určete normální podgrupu grupy $M(n,\mathbb{R})$ odpovídající jádru $M(n,\mathbb{R})/f$. Zjistěte, zda grupy $M(n,\mathbb{R})/f$ a $\mathbb{R}$ jsou izomorfní.

řešení:

1) Dokažte sestrojením důkazu, že pro libovolné formule B, C výrokové logiky platí

$$\vdash \neg B \Rightarrow (B \Rightarrow C).$$

Postupujte dle následujícího návodu:
1. $\neg B$ (předpoklad)
2. B (předpoklad)
3. $B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow B)$ (axiom A1)
4. $\neg B \Rightarrow (\neg C \Rightarrow \neg B)$ (axiom A1)
5. pravidlo odloučení aplikované na formule 2,3
6. pravidlo odloučení aplikované na formule 1,4
7. axiom A3
8. pravidlo odloučení aplikované na 6,7
9. pravidlo odloučení aplikované na 2,8
10. formule 9 je dokazatelná z formulí 1,2
11. věta o dedukci
12. věta o dedukci.

řešení:

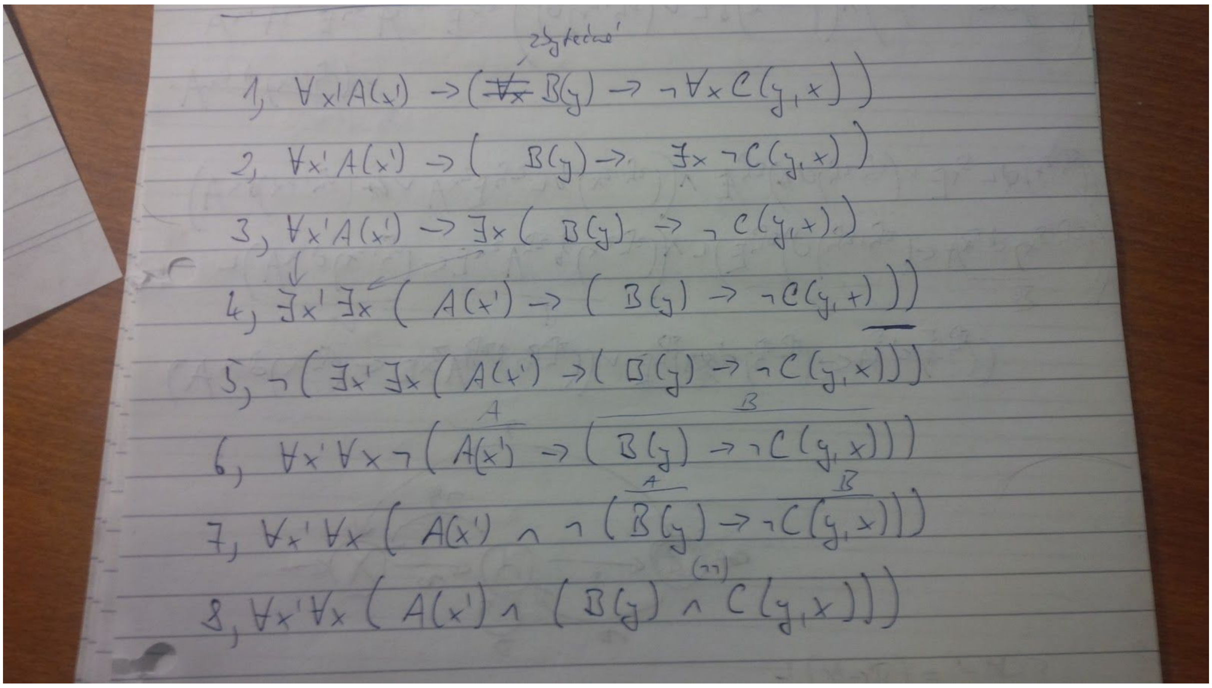
POKUS:

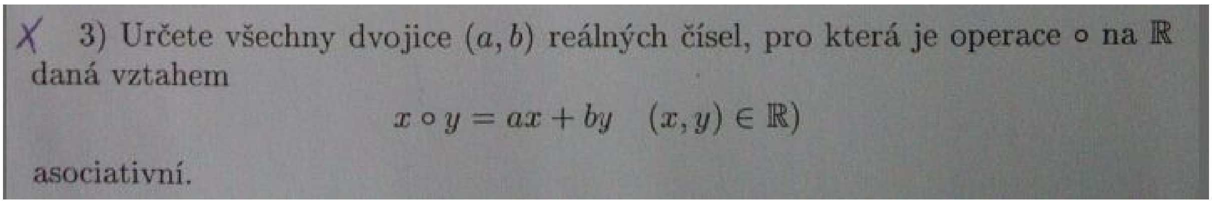
1. ^B |-- ^B predpoklad
2. B |-- B predpoklad
3. B -> (^C -> B) A1
4. ^B -> (^C -> ^B) A1
5. B |-- (^C -> B) MP 2,3
6. ^B |-- (^C -> ^B) MP 1,4
7. (^C -> ^B) -> (B -> C) A3
8. ^B |-- B -> C MP 6,7
9. ^B, B |-- C MP 2,8
10. ^B,B |-- C … opis pred dokazovatkem z 1 a 2
11. ^B |-- B -> C VD
12. |-- ^B -> (B -> C) VD

2) Převeďte následující formuli do prenexního tvaru. Potom napište její negaci a upravte ji tak, aby se v ní nevyskytovala spojka $\Rightarrow$:

$$\forall x A(x) \Rightarrow (\forall x B(y) \Rightarrow \neg \forall x C(y, x)).$$

řešení:




3) Určete všechny dvojice (a, b) reálných čísel, pro která je operace $\circ$ na $\mathbb{R}$ daná vztahem

$$x \circ y = ax + by \quad (x, y) \in \mathbb{R})$$

asociativní.

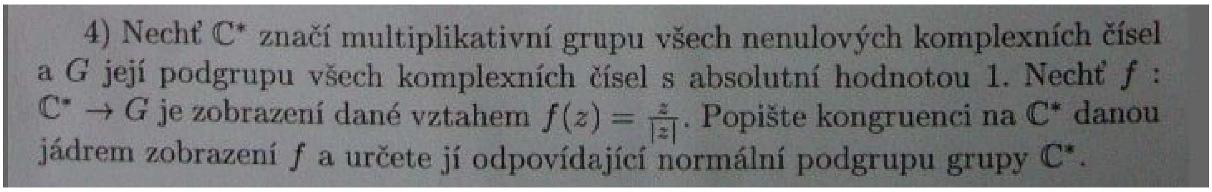
řešení:

Musí platit *x o (y o z) = (x o y) o z*

Pokud rozepíšu operaci, dostávám nakonec:

ax + bay + bbz = aax + aby + bz

Prostřední člen (*aby*) je stejný v obou stranách, rozdíl je v *ax/aax* a *bz/bbz*. Aby rovnost platila, musí platit *ax=aax* a *bz = bbz*. Tedy *a = aa, b = bb*. Což platí pouze pro (0,0) a (1,1).


4) Nechť $\mathbb{C}^*$ značí multiplikativní grupu všech nenulových komplexních čísel a G její podgrupu všech komplexních čísel s absolutní hodnotou 1. Nechť $f : \mathbb{C}^* \to G$ je zobrazení dané vztahem $f(z) = \frac{z}{|z|}$. Popište kongruenci na $\mathbb{C}^*$ danou jádrem zobrazení f a určete jí odpovídající normální podgrupu grupy $\mathbb{C}^*$.

řešení: POKUS

- jádro zobrazení (= relace ekvivalence) tvoří třídy takové, že všechny prvky dané třídy mají po aplikaci funkce *f* stejnou hodnotu. (x,y) ker f x|x|= y|y| , x,yC
- Prvky *a* a *b* jsou v relaci kongruence tehdy, pokud a, b C, f(a) = f(b), tedy patří do stejné třídy.
  Podla mna to nemozes len tak jednoducho napisat, ja si myslim, ze tam sa ocakavalo

cely dokaz tej kongruencie, co je asi nasledujuci:
(a+bi) ~ (c+di) ⇔ f(a+bi) = f(c+di) ⇔ (a+bi)/sqrt(a^2 + b^2) = (c+di)/sqrt(c^2 + d^2)
(e+fi) ~ (g+hi) ⇔ f(e+fi) = f(g+hi) ⇔ (e+fi)/sqrt(e^2 + f^2) = (g+hi)/sqrt(g^2 + h^2)
Potom:
[(a+bi) * (e+fi)] ~ [(c+di) * (g+hi)] ⇔ f((a+bi)*(e+fi)) = f((c+di)*(g+hi))
1. Vyjadrim prvu cast:
f((a+bi)*(e+fi)) = ((a+bi)*(e+fi)) / |(a+bi)*(e+fi)| =
((a+bi)*(e+fi)) / | (a*e - b*f) + (a*f + b*e)*i | =
((a+bi)*(e+fi)) / sqrt((a*e - b*f)^2 + (a*f + b*e)^2) =
To co je pod odmocninou da sa zjednodusit:
((a+bi)*(e+fi)) / sqrt((a^2+b^2) * (e^2+f^2)) =
[(a+bi)/sqrt(a^2+b^2)] * [(e+fi)/sqrt(e^2+f^2)] <= podla coho uz vieme, ze kongruencia opravdu PLATI:) (aspon dufam)

- Normální podgrupu P grupy (G, o) chápu jako takovou podgrupu, pro jejíž všechny prvky *p* a libovolný prvek *g* z G platí komutativita: *gP* = *Pg*. V tom případě odpovídající normální podgrupa bude taková podgrupa C*, v níž prvky nosné množiny mají absolutní hodnotu 1.

5) Nechť $G = \{x + y\sqrt{7};\ x, y \in \mathbb{Q}\}$. Zjistěte, zda $(G, +, \cdot)$ je těleso ($+$ a $\cdot$ značí obvyklé operace sčítání a násobení).

množina všech

řešení (Prosim o kontrolu):
Podmienky, ktore musia platit, ked je to teleso:

1. (G,+,*) typu (2,2) = okruh:
   a. (G,+) = kom. grupa:
   b. (G,*) = pologrupa:
   c. plati distributivita
2. (G,+,0,-,*,1) typu (2,0,1,2,0) = okruh s jednotkovym prvkom:
   a. (G,+,0,-,*) = okruh
   b. “*” ma neutralny prvok “1”
   c. plati komutativita na “*”
3. Teleso:
   a. 0 != 1
   b. (G\{0}, *) = grupa

1. a. uzavr. plati (grupoid), asociativita plati x+(y+z) = (x+y)+z (pologrupa), neutr. prvok = 0 (monoid), inverz. prvok = -x (grupa), komutativita plati x+y=y+x (kom. grupa) => PLATI
1. b. uzavr. plati (grupoid), asociativita plati x*(y*z) = (x*y)*z (pologrupa) => PLATI

1. c. distr. plati x*(y+z) = x*y + x*z => PLATI

2. a. podla 1. => PLATI

2. b. x*1=1*x=x => PLATI

2. c. x*y = y*x => PLATI

3. a. PLATI

3. b. uzavr. plati (grupoid), asociativita plati (pologrupa), ma neutralny prvok 1 (monoid), MA KAZDY PRVOK INVERZNY PRVOK??

Napr: ziskame prvok x+y*sqrt(7) = 1 + 1*sqrt(7); inverze: 1/(sqrt(7)+1).

Da sa ziskat 1/(sqrt(7)+1) z x+y*sqrt(7) , kde x,y in Q?

x=0, y = 1/(7+sqrt(7)) co neni v Q => NEPLATI, NIE JE TO TELESO

1 – Buď φ formule v jazyce L teorie T(lineární uspořádání), která má tvar: $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

a) Napište negaci formule φ tak aby neobsahovala logickou spojku negaci (¬).
b) Uvažujte množinu Z všech celých čísel s obvyklým uspořádáním (podle velikosti) jako model M teorie T. Zjistěte, zda platí M ⊨ φ nebo M ⊨ ¬ φ.
c) Převeďte formuli φ do prenexního tvaru.

řešení:

a. Ex Ey(x < y and Az(x>=z or z>=y))
b.
c.

2 – Dokažte, že platí $\vdash \forall x \forall y\ f(x,y) \rightarrow \forall x\ f(x,x)$
Návod: Formuli $\forall x \forall y\ f(x,y)$ vezměte jako předpoklad a pak postupně použijte:

- Axiom substituce
- Pravidlou odloučí
- Axiom substituce
- Pravidlo odloučení
- Pravidlo zobecnění
- Věta o dedukci

řešení:

1. VxVy f(x,y) |-- VxVy f(x,y)
2. VxVy f(x,y) |-- VxVy f(x,y) → Vy f(x,y)
3. VxVy f(x,y) |-- Vy f(x,y)   (MP 1,2)
4. VxVy f(x,y) |-- Vy f(x,y) → f(x,x)   !!!!!! důležitá část postupu, tady z y získám x.
5. VxVy f(x,y) |-- f(x,x)   (MP 3,4)
6. VxVy f(x,y) |-- Vx f(x,x)
7. |-- VxVy f(x,y) → Vx f(x,x)

3 – Buď $\Omega = \{p,e\}$ kde p je lineární a e nulární operační symbol.
Položme $Q^* = Q - \{0\}$ (Q je množina č. všech racionálních čísel.)
Uvažujeme Ω – algebra Q^* kde $p_{Q^*}(x,y) = x/y$ pro libovolné $x,y \in Q^*$ a $e_{Q^*} = 1$.

a) Rozhodněte, zda zobrazení $\varphi: Q^* \to Q^*$ dané vztahem $\varphi(x) = 1/x$ pro libovolné $x \in Q^*$ je homomorfismus
b) Zjistěte, zda relace N definovaná na Q^* předpisem $x \sim y \iff xy > 0$ je kongruence na Ω – algebře Q^*.
c) Určete, zda Q^* patří do variety V typu Ω určené teorií $T = \{p(x,y) = x, p(p(x,y),z) = p(x,p(y,z))\}$
d) Určete (svými prvky) podalgebru $<\{2\}>$ v Ω – algebře.

řešení:

A. ANO - Homomorfismus: ψ(p(x,y)) = p(ψ(x), ψ(y))
    - 1/(x/y) = (1/x)/(1/y)
    - y/x = y/x
B. ANO - kongruence - ekvivalence pro všechny operace - reflexivní, symetrická, tranzitivní
    - U následujících kroků využívám toho, že pokud x~y, tak musí být obě čísla kladná, nebo záporná. Kombinace kladného a záporného čísla není v relaci.
    - reflexivita: x ~ x, platí, x Q*, x2>0
    - symetrie: x~y <-> y~x, platí, protože xy = yx
    - tranzitivita: x~y, y~z -> x~z platí, protože pokud xy > 0 a yz >0, tak xz >0
    - A tato relace nám nijak nevadí u operace *p*:
        i. pokud x~y tak i p(x,z) ~ p(y,z), x,y,z ∈ Q*
C. ??? Co myslí tou varietou? Ve skriptech takové slovo není.
    - Pokud to má realizace teorie, tak:
    - pQ*(x,y) = x/ya p(x,y) = x - což nesouhlasí, x x/y
    - Tedy nepatří do variety. (Pokud by byla shoda na prvním výrazu, tak bych ověřil i ty další.)
D. Vezmeme 2 a používáme operace…
    - 2 a *e*=1 tam budou určitě
    - p(2,1) = 2, p(1,2) = ½, p(2,2) = 1, p(1,1) = 1
    - p(2, ½) = 4
    - p(p(p(..., …),p(..., …)))
    - Podalgebra: {2n:nZ}

4 – Buď G grupa s příslušnými operacemi $\cdot, ^{-1}, e$
Buď $H \subseteq G$ podmnožina, $H \neq \emptyset$. Dokažte, že platí: H je podgrupa grupy G, právě když pro každou dvojici prvků $a,b \in H$ platí $ab^{-1} \in H$.

řešení:

V Z31 vyřešit rovnici: 22x - 1 = x + 1
řešení:

- 21x = 2
- x = 2 * 21^(-1)
-
-
- 31/21 = 1*21 + 10
- 21 = 2*10 + 1
- 10 = 10*1 + 0
-
-
- Vyjádříme zbytek 1
- 1 = 21 - 2*10 = 21 - 2*(31-21) = 3*21 - 2*31 = 3*21
-
-
- 21^(-1) = 3
-
-
- x = 2 * 3 = 6

V Z_{37} vy řešit rovnici: 22x - 1 = x + 1
řešení:

- 21x = 2
- x = 2 * 21^(-1)
-
-
- 37/21 = 1*21 + 16
- 21 = 1*16 + 5
- 16 = 3*5 + 1
- 5 = 5*1 + 0
-
-
- Vyjádříme zbytek 1
- 1 = 16 - 3*5 = 16 - 3*(21 - 1*16) = 16 - 3*21 + 3*16 = 4*16 - 3*21 = 4*(37 - 1*21) - 3*21 = 4*37 - 4*21 - 3*21 = 4*37 - 7*21 = -7*21

-
-
- 21^(-1) = -7 mod 37 = 30
-
-
- x = 2 * 30 = 60 mod 37 = 23

P-1) Mejme jazyk L nad univerzem {a, b, c, d}, s binarnim predikatovym symbolem p a unarnim funkcnim symbolem u a teorii T = { p(x,u(x)), u(u(x))=x, p(x,y) -> (x = y v x = u(y)) }.
a) Naleznete realizaci R tohoto jazyka takovou, ze je modelem teorie T. Meli jsme to zadat tabulkou, tj. 4x4 pro predikat (zapisujte 0 a 1) a 4x1 pro unarni operaci.
b) Rozhodnete, zda T ⊨ p(x, y) => (x = y)

a) p(x,y) ⇔ x=y
u(x) = x (identita)

	a	b	c	d
a	1	0	0	0
b	0	1	0	0
c	0	0	1	0
d	0	0	0	1

a	a
b	b
c	c
d	d

P-2) Uvazte algebru A = (Σ*, cat, δ, b) typu (3,1,0), kde nosic je nam dobre znamy univerzalni jazyk nad Σ, cat(x, y, z) = xyz, δ(w) je retezec vznikly nahradou vsech 'a' v w retezcem "ab" a b je vyber prvku b, b ≠ a. Uvazte relaci ~ nad Σ* definovanou takto: u ~ v <=> |u| = |v|. Rozhodnete, zda je ~ kongruence nad algebrou A. Pokud neni, naleznete podalgebru B, ze prislusne zuzeni ~ kongruenci bude.

Mějme x1, x2, x3, y1, y2, y3 v Σ takové, že x1~y1, x2~y2, x3~y3, pak |x1| = |y1|, |x2|=|y2|, |x3|=|y3|

Pokud je ~ kongruence vůči cat, pak musi platit cat(x1,x2,x3) ~ cat(y1,y2,y3),

Vidíme, že |x1.x2.x3| = |x1| + |x2| + |x3| = |y1| + |y2| + |y3| = |y1.y2.y3|, takže pro cat to kongruence je

Mějme x,y v Σ takové, že x ~ y, pokud je ~ kongruence vůči δ, musí platit δ(x) ~ δ(y).
δ ale mění délku řetězce v závislosti na jeho obsahu, který není omezen - ekvivalence po aplikaci δ není zaručena

T.j. ~ není kongruence na A

Podalgebra B , na které ~ je kongruencí by (snad) mohla být (Σ\{a})*

P-3) S vyuzitim predem dokazane formule α = "(A => ¬B) => (B => ¬A)" dokazte φ, ψ ⊢ ¬(φ => ¬ ψ).

1) predpoklad φ → ¬ψ
2) α (φ → ¬ψ) → (ψ → ¬φ)
3) MP -- toto nedavalo smysl. Aspon mne ne. Vypadalo to, jako kdyby tu chtel proste napsat (A, A=>B) => B
4) MP 1,2 (φ → ¬ψ) |-- (ψ → ¬φ)
5) VD, presunte antecendent do predpokladu (φ → ¬ψ), ψ |-- ¬φ
6) VD, odstrante (φ => ¬ψ) z predpokladu ψ |-- (φ → ¬ψ) → ¬φ
7) α ((φ → ¬ψ) → ¬φ) → (φ → ¬(φ → ¬ψ))
8) MP 6,7 φ → ¬(φ → ¬ψ)
9) VD ψ, φ |-- ¬(φ → ¬ψ)

Dokazte:

Poprosim o kontrolu

|-- Vx φ(x,x) → (Vx Vy φ(x,y) → Vy φ(y,y))

0.) predpoklad Vx φ(x,x)
1.) AS Vx φ(x,x) → φ(x,x)
2.) MP φ(x,x)
3.) MG φ(x,x) |-- Vx φ(x,x)
4.) A1 Vy φ(y,y) → (Vx Vy φ(x,y)) → Vy φ(y,y))
5.) MP Vx φ(x,x) |-- (Vx Vy φ(x,y)) → Vy φ(y,y))

6.) VD $\vdash \forall x\, \varphi(x,x) \rightarrow (\forall x \forall y\, \varphi(x,y)) \rightarrow \forall y\, \varphi(y,y))$

Dokazte:

Poprosim o kontrolu

ok

$(A \rightarrow B), (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C)$

1. predpokl. $B \rightarrow C$
2. A1 $(B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow (B \rightarrow C))$
3. MP $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
4. A2 $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
5. MP $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
6. predpokl. $A \rightarrow B$
7. MP 6,5 $A \rightarrow C$

Dokazte bez navodu:

Staci to takto jednoducho?

$A \rightarrow B \vdash C \rightarrow (A \rightarrow B)$

1. predpokl. $A \rightarrow B$
2. A1 $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow (A \rightarrow B))$
3. MP $C \rightarrow (A \rightarrow B)$

Dokazte:

$\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall x(p(x,x) \rightarrow \forall y\, p(x,y))$

1. predpokl. $\forall x \forall y\, p(x,y)$
2. AS $\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall y\, p(x,y)$
3. MP $\forall y\, p(x,y)$
4. A1 $\forall y\, p(x,y) \rightarrow (p(x,x) \rightarrow \forall y\, p(x,y))$
5. MP $p(x,x) \rightarrow \forall y\, p(x,y)$
6. MG $\forall x \forall y\, p(x,y) \vdash \forall x\, (p(x,x) \rightarrow \forall y\, p(x,y))$
7. VD $\forall x \forall y\, p(x,y) \rightarrow \forall x\, (p(x,x) \rightarrow \forall y\, p(x,y))$

Dokazte:

$\varnothing(x,y) \vdash \varnothing(y,x)$

1. predpokl. $\varnothing(x,y)$
2. MG $\varnothing(x,y) \vdash \forall x\, \varnothing(x,y)$
3. MG $\forall x\, \varnothing(x,y) \vdash \forall x \forall y\, \varnothing(x,y)$
4. AS $\forall x \forall y\, \varnothing(x,y) \rightarrow \forall y\, \varnothing(z,y)$
5. MP $\vdash \forall y\, \varnothing(z,y)$
6. AS $\forall y\, \varnothing(z,y) \rightarrow \varnothing(z,x)$

7. MP |-- ø(z,x)
8. MG ø(z,x) |-- Vz ø(z,x)
9. AS Vz ø(z,x) → ø(y,x)
10. MP ø(y,x)

REALIZACE:
Uvazujme realizaci R jazyka s jednim binarnim predikatovym symbolem p, rovnosti a binarnim funkcnim symbolem f s univerzem R, kde
p_R (a, b) ⇔a ≤ b a f_R (a, b) = a + b.
a) Rozhodnete, zda R |= T_U a R |= T_AG , kde T_U , resp T_AG jsou teorie usporadani, resp. komutativnich grup.
b) Najdete formuli φ, ktera bude pri ohodnoceni promennych
e(x) =a, e(y) = b, e(z) = c znamenat, ze existuje trojuhelnik o stranach a, b, c.
c) Rozhodnete, zda

1. T_U ∪ T_AG |-- φ
2. T_U ∪ T_AG ∪ {φ} |-- p(a, f (a, b))
3. T_U ∪ T_AG ∪ {φ} |-- p(f (a, b), b)
4. T_U ∪ T_AG ∪ {φ} |--

Reseni:
(jen hrubý odhad tak diskutujte a opravujte)
a) T_U musí splňovat ireflexivitu a tranzitivitu (SMT 8.10. a opora příklad 7.1)

- p_R nesplňuje ieflexibilitu, tudíž uspořádání není splněno?

T_AG musí splňovat asociativitu, musí mít pravý neutrální a inverzní prvek (opora příklad 7.1) a ještě i komutativitu

- f_R je definované jako sčítání, to je asociativní i komutativní, v univerzu (v reálných číslech) najdeme ke sčítání neutrální i inverzní prvek ke každému x - tudíž splněno?

b) pro strany trojúhelníku platí a+b>c.
máme k dispozici p_R a f_R, tedy <= a +, vztah přepíšeme pomocí ních:
c<=a+b & not(a+b<=c) neboli φ[e] ≡ ∃ a,b,c p_R(f_R(a,b),c) & not(p_R(c,f(a,b))
c)

Uvazujme jazyk L s rovnosti, binarnim predikatovym symbolem p, nularnim funkcnim symbolem e a binarnim funkcnim symbolem f .
Necht M je takova realizace jazyka L na univerzu Z vsech celych cisel, kde
p_M (m, n) ⇔ existuje cele cislo k, kde km = n,

$e\_M = 0$,
$f\_M (m, n) = m - n$.

Doplnte nasledujici tabulku (1 = pravda, 0 = nepravda).

α	$M \models \alpha$	$M \models \neg\alpha$
$p(x, y) \to f(x, y) = f(y, x)$		
$p(e, x) \to p(y, f(x, y))$		
$\exists x \forall y(p(x, y) \to \neg p(y, x))$		
$p(x, e) \lor p(y, f(x, y))$		

V jazyce s jednim binarnim funkcnim symbolem f a rovnosti uvazujeme
realizaci M s univerzem Z, kde $f\_M (a, b) = a + b$. Najdete formuli vyjadrujici vlastnost
$a < b$ pro $a, b \in Z$.