Dokažte, že posunutí jsou podgrupou grupy afinních transformací (ve 2D)

- grupa afinních transformací $\mathcal{A} = (A, \circ)$ kde
  A jsou matice formy $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ d_x & d_y & 1 \end{bmatrix}$ a ab není násobkem cd
  $\circ$ je násobení matic
- posunutí jsou množinou transformací P formy $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ d_x & d_y & 1 \end{bmatrix}$
- ukážeme že
  1) $P \subseteq A$
  2) $e \in P$
  3) $\forall a, b \in P: a \circ b \in P$
  4) $\forall a \in P: a^{-1} \in P$

víme že
pokud $\forall a, b: a^{-1} \circ b \in P$ a 1) $\wedge$ 2),
potom 3) $\wedge$ 4), protože

$a^{-1} \circ e = a^{-1} \in P$ (4)

$(a^{-1})^{-1} \circ b = a \circ b \in P$ (3)

1) - zrejmé ✓

2) $e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ je neutrálny prvok $\circ$ a je v P ✓

3) a 4) - pomocí $\forall a, b \in P : a^{-1} \circ b \in P$

nechť $a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx & dy & 1 \end{bmatrix}$, potom a^{-1} je $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -dx & -dy & 1 \end{bmatrix}$.

nechť $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx' & dy' & 1 \end{bmatrix}$. Potom $a^{-1} \circ b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -dx+dx' & -dy+dy' & 1 \end{bmatrix} \in P$ ✓

$(P, \circ)$ je teda podgrupou G.

Mějme grupu $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, *)$. Je podalgebra generovaná $\sqrt[3]{2}$ podgrupou $\mathcal{A}$?

Jistě, je $\mathcal{B} = (\{\sqrt[3]{2}^{k} \mid k \in \mathbb{Z}\}, *)$ podalgebrou $\mathcal{A}$?

1) má $\mathcal{B}$ neutrální prvek? $\sqrt[3]{2}^{0} = 2^{\frac{0}{3}} = 2^{0} = 1$ ✓

2) má $\mathcal{B}$ inverzní prvky? pro každé k je $2^{\frac{-k}{3}}$ v $\mathcal{B}$ a $2^{\frac{k}{3}} * 2^{-\frac{k}{3}} = 1$ ✓

3) je $\mathcal{B}$ uzavřená na $*$? $2^{\frac{k}{3}} * 2^{\frac{l}{3}} = 2^{\frac{k+l}{3}} \left(= \sqrt[3]{2}^{k+l}\right)$ ✓

$\mathcal{B}$ je tedy podgrupou $\mathcal{A}$.

Permutace je bijekce z množiny M do M.

S_n je bijekce z $\langle 1, n \rangle$ do $\langle 1, n \rangle$.

Mějme s a t z S_9 takové, že

$$s = \{(1,3), (2,4), (3,7), (4,2), (5,1), (6,9), (7,8), (8,6), (9,5)\}$$

a

$$t = \{(1,5), (2,2), (3,1), (4,4), (5,3), (6,8), (7,7), (8,6), (9,9)\}$$

a) Rozložte s a t na součin nezávislých cyklů.

$$s = (1\ 3\ 7\ 8\ 6\ 9\ 5) \circ (2\ 4)$$

$$t = (1\ 5\ 3) \circ (6\ 8)$$

$$s = (\underbrace{1\ 3\ 7\ 8\ 6\ 9\ 5}_{s'}) \circ (\underbrace{2\ 4}_{s''}) \qquad t = (1\ 5\ 3) \circ (6\ 8)$$

b) spočtěte $s \circ t$ a $t \circ s$

$$t \circ s = (1\,3\,7\,8\,6\,9\,5) \circ (2\,4) \circ (1\,5\,3) \circ (6\,8) = (8\,9\,5\,7) \circ (2\,4)$$

$$s \circ t = (1\,5\,3) \circ (6\,8) \circ (1\,3\,7\,8\,6\,9\,5) \circ (2\,4) = (2\,4) \circ (9\,3\,7\,6)$$

Všimněte si, že $s \circ t \neq t \circ s$. Skládání permutací **není komutativní**!

c) spočtěte $s^{120} \circ t^{-3}$

$$s'^{7} = id, \quad s''^{2} = id, \quad \text{tedy } s^{2 \cdot 7} = s^{14} = id.$$

$$s^{120} = s^{120 \% 14} = s^{8} = s'^{8} \circ s''^{8} = s'^{8 \% 7} \circ s''^{8 \% 2} = s'^{1} \circ s''^{0} = s' = (1\,3\,7\,8\,6\,9\,5)$$

$$t^{-3} = (t^{-1})^{3}, \quad t^{-1} = (3\,5\,1) \circ (8\,6), \quad a \ (t^{-1})^{3} = (8\,6)$$

Tedy $s^{120} \circ t^{-3} = (1\,3\,7\,8\,6\,9\,5) \circ (8\,6) = (8\,9\,5\,1\,3\,7)$

Určete podgrupu S_8 generovanou množinou

$$X = \{ \underbrace{(4\,5\,2\,1)\circ(4\,6\,3\,1\,5\,2)}_{a},\ \underbrace{(4\,5\,2\,1)\circ(4\,5\,6)\circ(2\,1\,3)}_{b} \}$$

Tedy, máme najít nejmenší mn. X' : $X \subseteq X'$ a X' je uzavřená na $\circ$

Rozložíme a, b na součin nezáv. cyklů

$$a = (4\,6\,3)\circ(1\,2\,5), \quad b = (2\,4)\circ(1\,3)\circ(5\,6)$$

Generujme prvky X' násobením a a b dokud dostáváme nové prvky.

$$a\circ a = (4\,3\,6)\circ(1\,5\,2)$$

$$a\circ b = (1\,4\,5\,3\,2\,6)$$

$$(a\circ a)\circ a = id$$

$$(a\circ b)\circ a = (1\,6\,2\,3\,5\,4)$$

$$(a\circ a)\circ b = (1\,6\,2\,3\,5\,4)$$

$\vdots$

Žádný prvek se už z předchozích násobení a a b nedá dostat.

Tedy $X' = \{a, b, a\circ a, a\circ b, a\circ b\circ a, a\circ a\circ a\}$.

Rozložte s na součin transpozic

$$s = (1\ 3)\circ(3\ 7)\circ(7\ 8)\circ(6\ 9)\circ(9\ 5)\circ(5\ 1)\circ(2\ 4)$$

parita permutace podle počtu transpozic

1 - sudá

−1 - lichá

POZN: u cyklů nezáleží na „rotaci"

$$(1,2,3) = (2,3,1) = (3,1,2)$$

$\circ$ je komutativní v případě nezávislosti i jinak ne

$$(1,2)\circ(3,4) = (3,4)\circ(1,2)$$

$$(1,2)\circ(2,3) \neq (2,3)\circ(1,2)$$