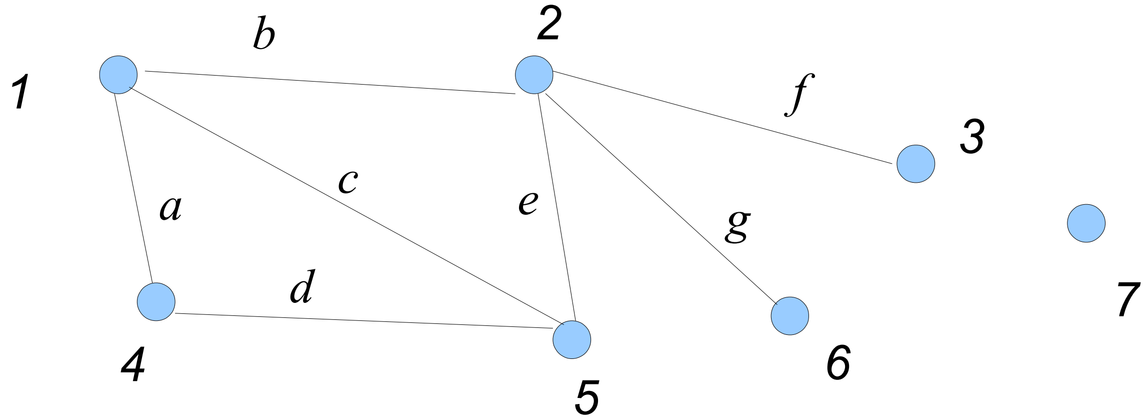
Obyčejný graf

Obyčejný graf je dvojice $G=(U,H)$, kde U je konečná množina uzlů (vrcholů) a $H\subseteq\{\{u,v\}:u,v\in U\wedge u\neq v\}$ je (konečná) množina hran. O hraně $h=\{u,v\}$ říkáme, že je incidentní s uzly *u* a *v* nebo že je mezi uzly *u* a *v*, spojuje uzly *u* a *v* a podobně.



$a=\{1,4\}$

$b=\{1,2\}$

$c=\{1,5\}$

$d=\{4,5\}$

$e=\{2,5\}$

$f=\{2,3\}$

$g=\{2,6\}$

$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $H=\{a,b,c,d,e,f,g\}$

Sled

Je-li $G=(U, H)$ obyčejný graf, definujeme sled mezi uzly u, v

o délce n jako posloupnost $(u=w_0, h_1, w_1, h_2, \ldots, w_{n-1}, h_n, w_n=v)$

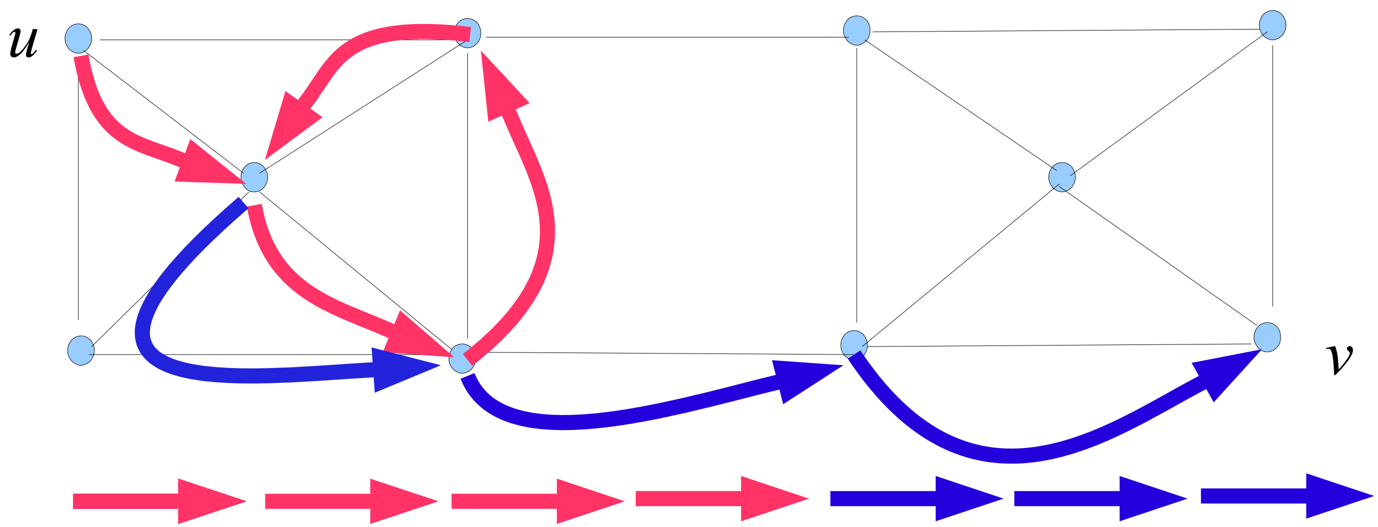
takovou, že

$$w_0, w_1, \ldots, w_n \in U \ , \ h_1, h_2, \ldots, h_n \in H$$

a

$$h_i=\{w_{i-1}, w_i\}, 1 \leq i \leq n.$$

Sled mezi uzly *u* a *v* o délce *n* je tedy posloupnost, ve které se střídají uzly a hrany, začínající uzlem *u*, končící uzlem *v* a obsahující *n* hran, přičemž sousední uzly v posloupnosti jsou spojeny mezi nimi ležící hranou. Ve sledu se mohou opakovat jak uzly tak hrany. Každý uzel je sled délky 0.



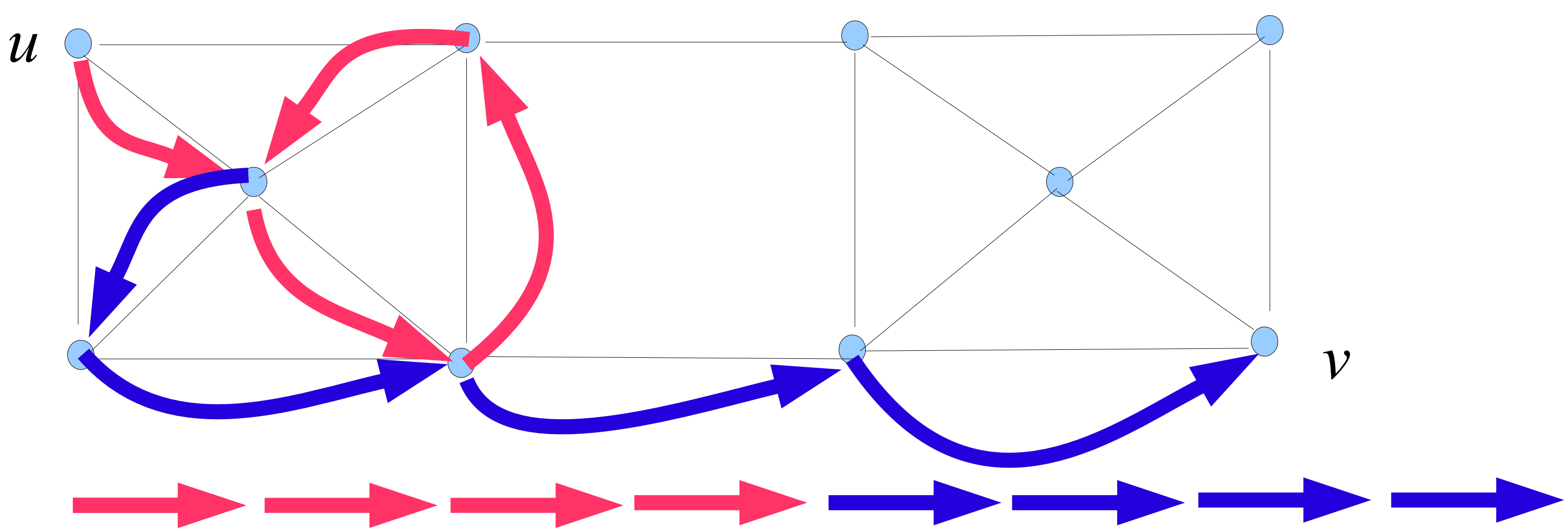
Tah

Je-li $G=(U,H)$ obyčejný graf, potom tahem mezi uzly *u*, *v* o délce *n* rozumíme sled $(u=w_0, h_1, w_1, h_2, \ldots, w_{n-1}, h_n, w_n=v)$ takový, že platí

$$i \neq j \Rightarrow h_i \neq h_j, 1 \leq i, j \leq n.$$

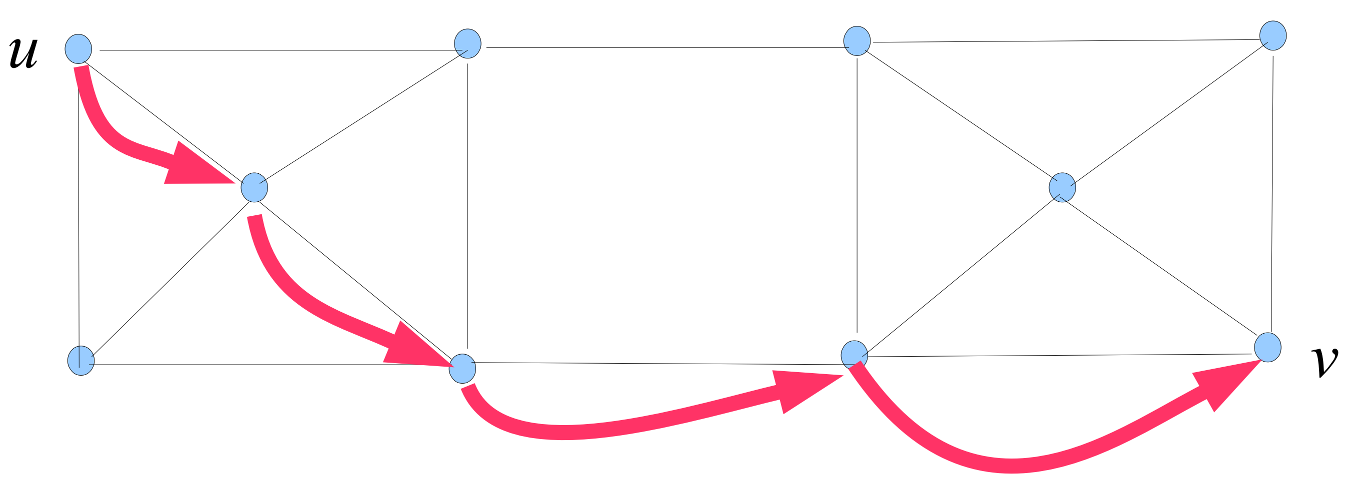
Je-li navíc $w_0=w_n$, pak se tento tah nazývá uzavřený.

Tah mezi uzly *u* a *v* o délce *n* je tedy sled mezi uzly *u*, *v* o délce *n*, kde se mohou opakovat uzly, ale všechny hrany jsou různé.



Cesta

Je-li $G=(U, H)$ obyčejný graf, potom cesta mezi uzly u, v o délce n je sled $(u=w_0, h_1, w_1, h_2, \ldots, w_{n-1}, h_n, w_n=v)$ mezi uzly u,v takový, že platí $i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j, 0 \leq i, j \leq n$.



- Cesta mezi uzly u a v o délce n je tedy sled mezi uzly u,v o délce n, v němž jsou všechny uzly různé.
- Snadno se dokáže, že v grafu G existuje cesta mezi uzly u a v, právě když mezi těmito uzly existuje sled.

Definice

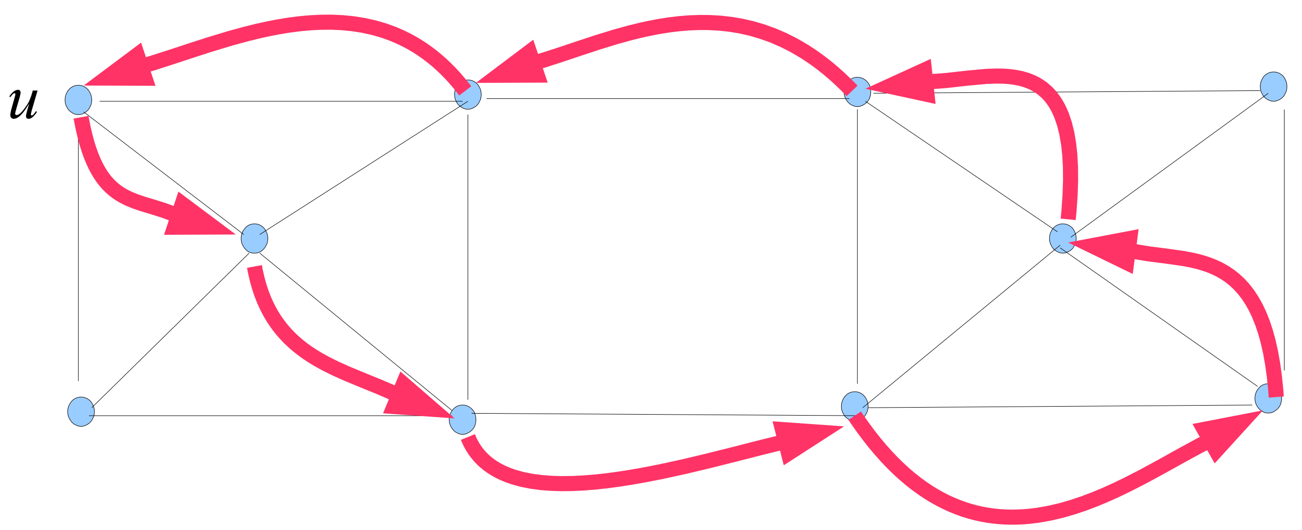
Graf $G=(U,H)$ se nazývá diskrétní, resp. úplný, jestliže $H=\emptyset$, resp. $H=\{\{u,v\} : u,v\in U \wedge u\neq v\}$.

Kružnice

Je-li $G=(U,H)$ obyčejný graf, kružnice v grafu G o délce n je sled $(w_{0,} h_{1,} w_{1,} h_{2,} \dots , w_{n-1}, h_n, w_n)$ takový, že platí

$$i \neq j \Rightarrow w_i \neq w_j, 0 \leq i, j \leq n-1 \wedge w_0 = w_n.$$

Kružnice v grafu G o délce n je tedy uzavřený tah, kde jsou všechny uzly různé s výjimkou prvního a posledního uzlu. Protože G je obyčejný graf, platí $n > 2$.



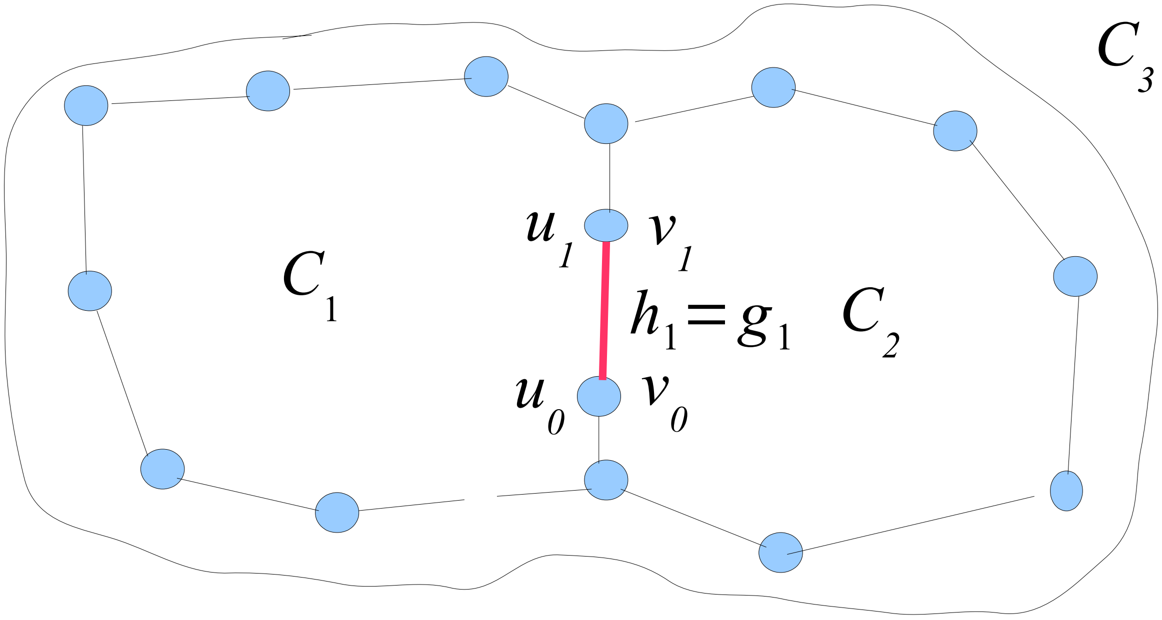
Věta 1

Nechť obyčejný graf $G=(U,H)$ obsahuje dvě různé kružnice

$C_1=(u_0, g_1, u_1, g_2, u_2, \ldots, u_{p-1}, g_p, u_p=u_0)$ a

$C_2=(v_0, h_1, v_1, h_2, v_2, \ldots, v_{q-1}, h_q, v_q=v_0)$,

kde $u_0=v_0, u_1=v_1, h_1=g_1$. Potom tento graf obsahuje i kružnici C_3 neobsahující hranu $h_1=g_1$.



Důkaz

Nechť r je největší index takový, že $u_0 = v_0, u_1 = v_1, \ldots, u_r = v_r$. Zřejmě $1 \leq r \leq \min\{p-1, q-1\}$ protože kružnice C_1 a C_2 jsou různé a graf G je obyčejný. Nechť s, t jsou nejmenší indexy takové, že

$$r < s, r < t, u_s = v_t, u_i \neq v_j, r < i < s, r < j < t.$$

Takové indexy existují, neboť $u_{r+1} \neq v_{r+1}$ a $u_p = v_q$. Potom sled

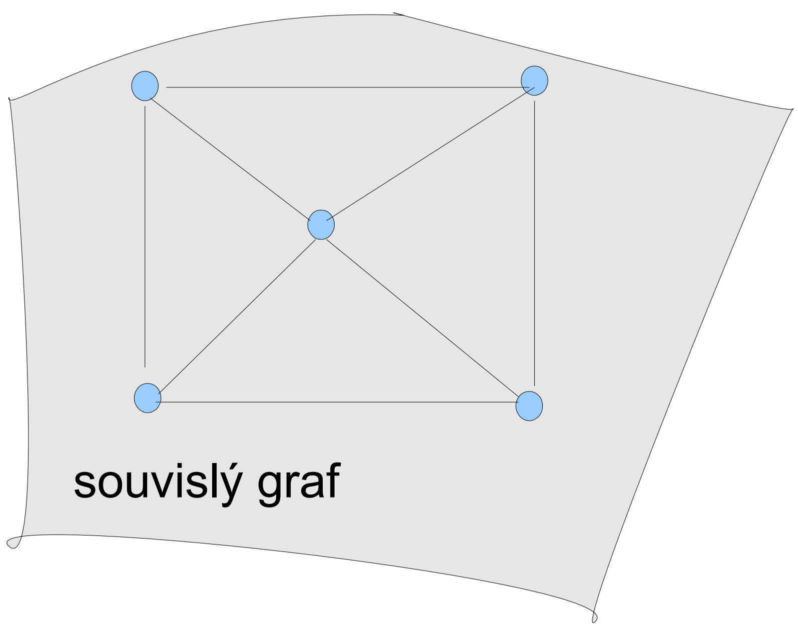
$$u_r, g_{r+1}, u_{r+1}, \ldots, u_{s-1}, u_s = v_t, h_t, v_{t-1}, \ldots, v_{r+1}, h_{r+1}, v_r$$

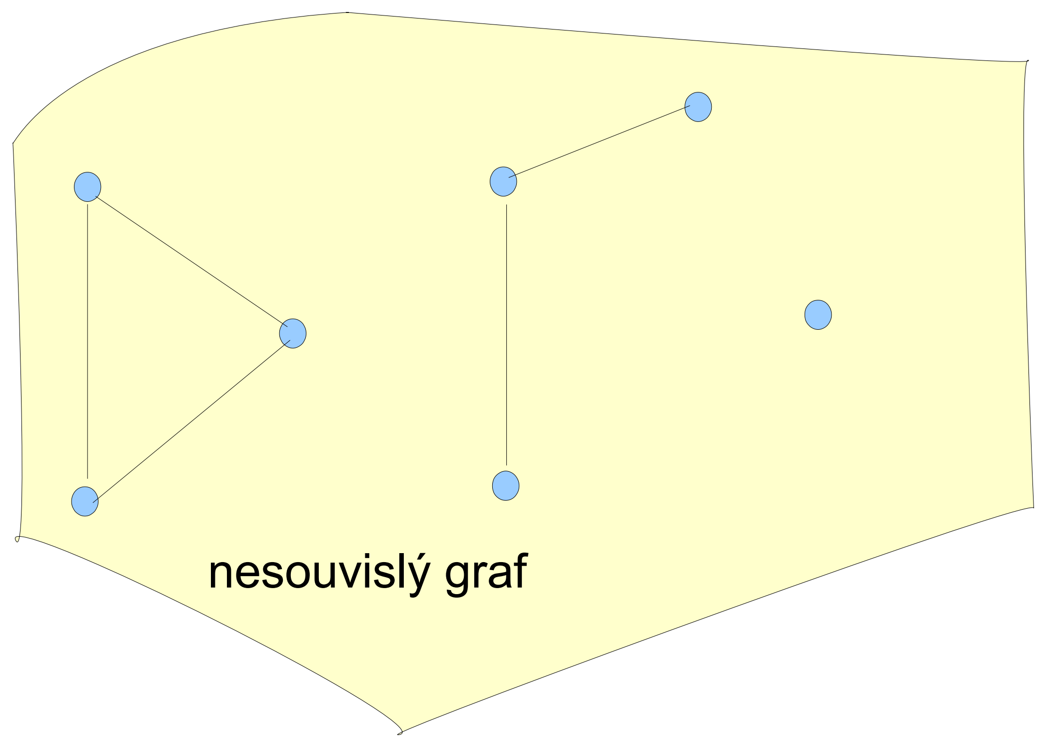
je kružnice, neboť $u_i \neq v_j$ pro $r < i < s, r < j < t$ a $u_r = v_r$. Tato kružnice zřejmě neobsahuje hranu $g_1 = h_1$.

Souvislý graf

Je-li $G=(U,H)$ obyčejný graf, řekneme, že je souvislý, když pro libovolné uzly $u,v\in U$ existuje sled $(u=w_{0,}h_{1,}w_{1,}h_{2,}\ldots,w_{n-1},h_n,w_n=v)$.

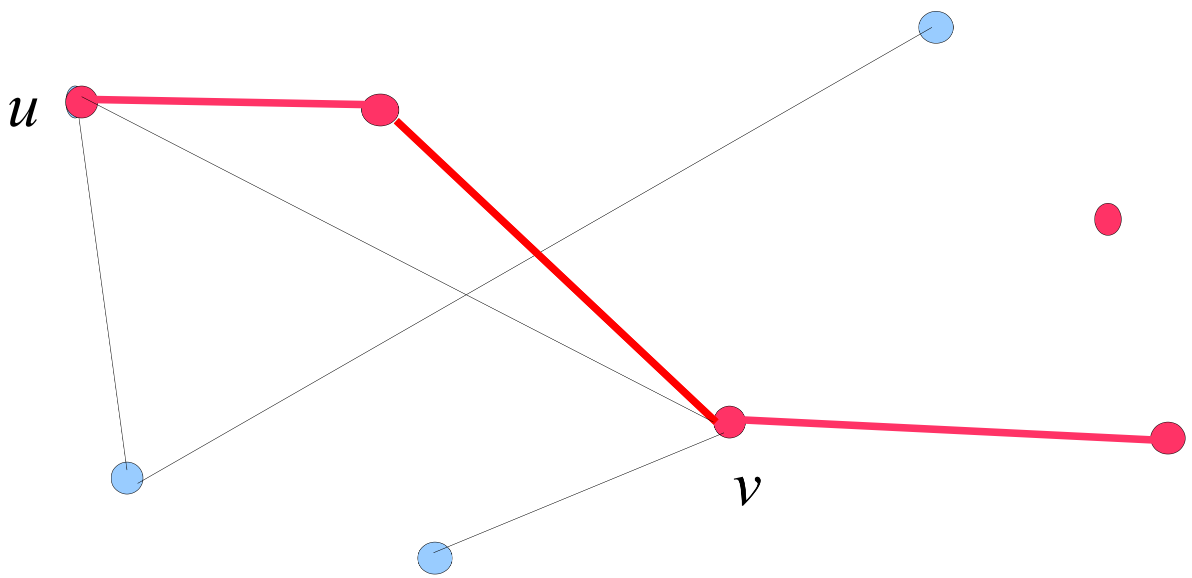
Graf G je tedy souvislý, když mezi libovolnými jeho dvěma uzly existuje sled, a tedy i cesta. Například každý úplný graf je souvislý. Naopak, každý diskrétní graf s více než 1 uzlem je nesouvislý.





Podgraf, faktor

Jsou-li $G=(U,H)$ a $G'=(U',H')$ obyčejné grafy, řekneme, že G' je podgrafem *G*, když $U'\subseteq U \wedge H'\subseteq H$. Pokud navíc platí $(u,v\in U' \wedge \{u,v\}\in H) \Rightarrow \{u,v\}\in H'$, říkáme, že podgraf G' je indukovaný (množinou uzlů U'). Faktorem grafu $G=(U,H)$ nazýváme takový jeho podgraf $G'=(U',H')$, pro který platí $U=U'$.



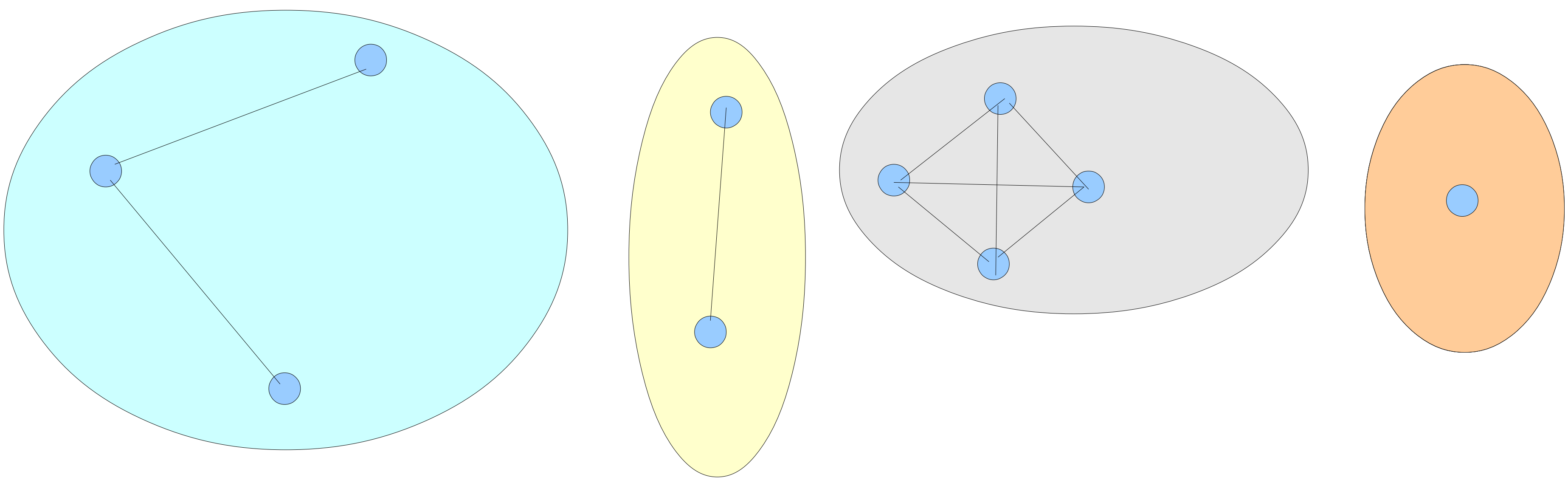
Červeně vyznačená část tvoří pograf grafu na obrázku, který není indukovaný množinou červených uzlů, protože neobsahuje hranu $\{u,v\}$.

Komponenta

Jsou-li $G=(U, H)$ a $G'=(U', H')$ obyčejné grafy, řekneme, že G' je komponentou grafu G, když G' je souvislým indukovaným podgrafem grafu G a pro libovolný obyčejný graf $G''=(U'', H'')$ platí:

$(U' \subset U''$ a G'' je podgraf $G) \Rightarrow G''$ není souvislý.

Komponenta je tedy uzlově maximální souvislý indukovaný podgraf grafu.

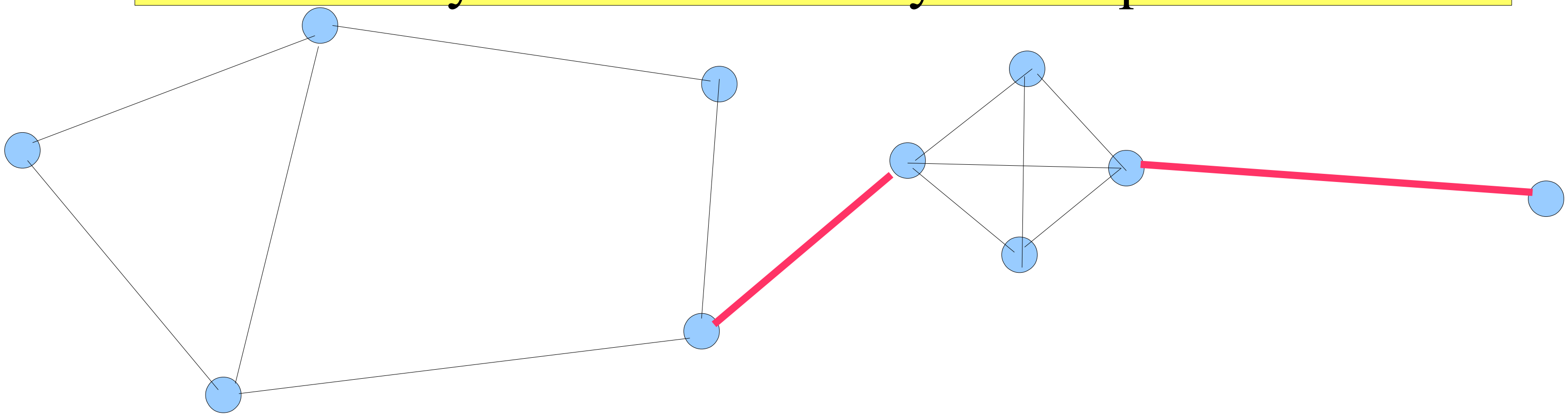


Graf na obrázku má 4 komponenty.

Most

Je-li $G=(U, H)$ obyčejný graf a $h \in H$, pak řekneme, že hrana h je mostem, když jejím odstraněním se zvýší počet komponent grafu.

Pokud je hrana $h = \{u,v\}$ mostem v G, pak (u,h,v) je jediná cesta mezi uzly u a v. Tedy po odstranění hrany h budou uzly u a v ležet v různých komponentách.



Červené hrany tvoří mosty v grafu na obrázku.

Stupeň uzlu

Je-li $G=(U,H)$ obyčejný graf a $u\in U$, definujeme číslo $\deg(u)$, tzv. stupeň uzlu u jako počet hran incidentních s uzlem u.

Nechť $G=(U,H)$ je obyčejný graf, $|H|=m$. Snadno se dokáže, že platí

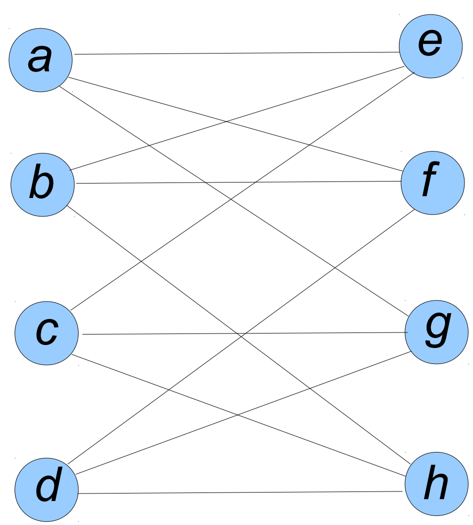
$$\sum_{u\in U}\deg(u)=2m.$$

V celkové sumě stupňů se totiž každá hrana zřejmě započítá přesně dvakrát (jednou do stupně každého ze dvou uzlů, s nimiž je incidentní).

Jsou-li $G_1=(U_{1,}H_1)$ a $G_2=(U_{2,}H_2)$ dva obyčejné grafy a $\phi: U_1 \rightarrow U_2$ bijekce mezi množinami uzlů, řekneme, že φ je isomorfismus G_1 na G_2, jestliže pro každé dva uzly $u, v \in H_1$ platí

$$\{u, v\} \in H_1 \Leftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in H_{2.}$$

<u>Příklad isomorfismu</u>

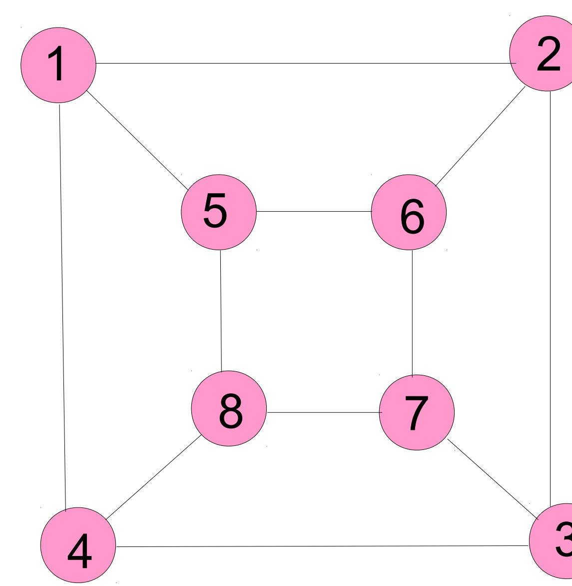


$\phi(a)=1,\quad \phi(e)=5,$

$\phi(b)=6,\quad \phi(f)=2,$

$\phi(c)=8,\quad \phi(g)=4,$

$\phi(d)=3,\quad \phi(h)=7$



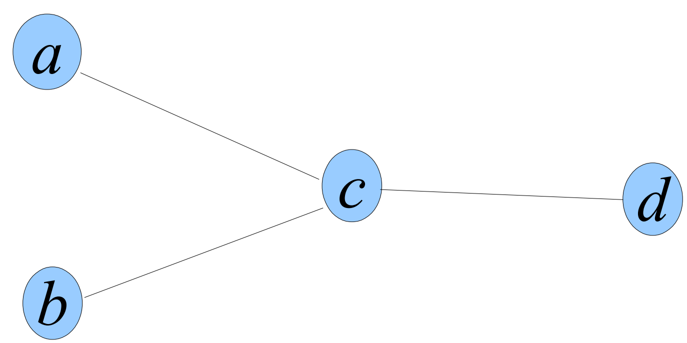
Poznámka

Je-li φ isomorfismus G_1 na G_2, pak je φ^{-1} isomorfismus G_2 na G_1.

Pokud existuje isomorfismus G_1 na G_2, říkáme, že G_1 a G_2 jsou isomorfní.

Isomorfismus grafu na sebe se nazývá ***automorfismus*** grafu.

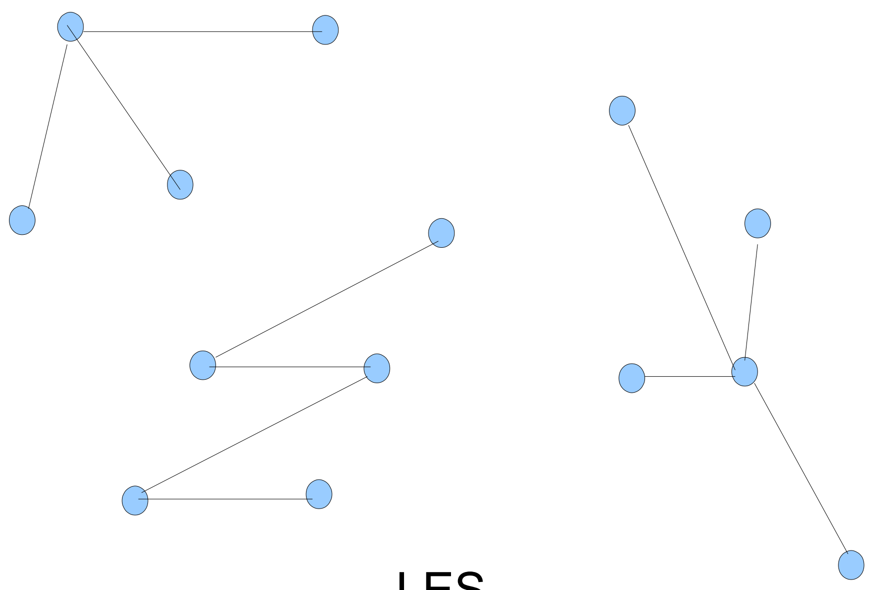
Příklad



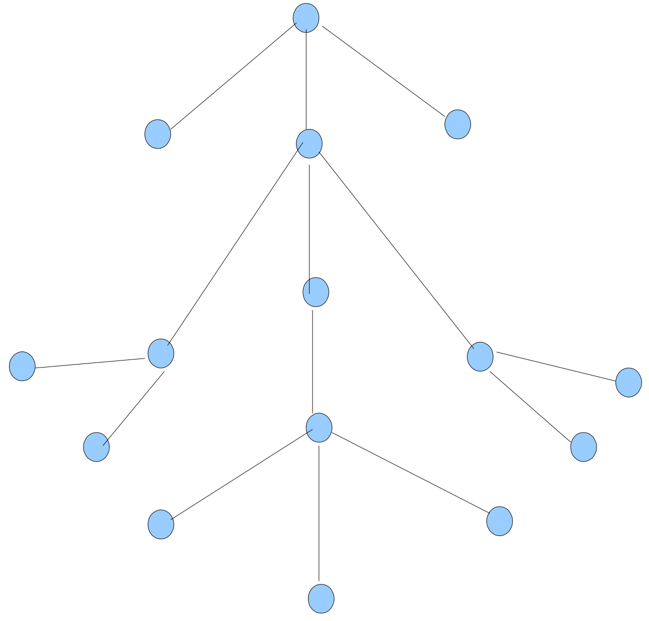
Zřejmě existuje 6 automorfismů grafu na obrázku. Uzel c musí být zřejmě vždy zobrazen na sebe a uzly a, b, d mohou být na sebe zobrazeny libovolnou permutací nad třemi prvky.

Obyčejný graf, jehož žádný podgraf není kružnicí, se nazývá **les**.

Obyčejný souvislý graf, jehož žádný podgraf není kružnicí, se nazývá **strom**.



LES



STROM

Věta 2

Nechť $S=(U, H)$ je les, který má alespoň jednu hranu. Pak existují dva uzly $u, v \in U$ takové, že deg(u) = deg(v) = 1.

Důkaz

V lese existuje alespoň jedna cesta. Nechť $(u, h_{1,} u_{1,} h_{2,} \ldots, u_{n-1}, h_n, v)$ je cesta v *S*, která má maximální délku. Zřejmě platí $\deg(u) \geq 1$ a $\deg(v) \geq 1$. Pokud by existovala hrana $h \neq h_1$ incidentní s uzlem *u*, potom buďto *h* je incidentní s některým z uzlů $\{u_{2,} u_{3,} \ldots, u_{n-1}, v\}$ nebo s nějakým uzlem, který není obsažen v cestě $(u, h_{1,} u_{1,} h_{2,} \ldots, u_{n-1}, h_n, v)$. V prvním případě to znamená, že *S* má jako podgraf kružnici a v druhém případě existuje v *S* cesta délky n + 1. V obou případech dostaneme spor. Podobně se dokáže tvrzení i o uzlu *v*.

Věta 3

Nechť $G=(U,H)$ je obyčejný graf a $|U|=n, |H|=m$. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní:

(a) G je strom;

(b) G je souvislý a $m = n - 1$;

(c) G neobsahuje jako podgraf kružnici a $m = n - 1$;

(d) G je souvislý a každá hrana je mostem;

(e) mezi každou dvojicí různých uzlů v G existuje jediná cesta;

(f) G neobsahuje kružnici a vznikne-li graf G' přidáním libovolné hrany ke grafu G, G' kružnici obsahuje;

(g) G je souvislý, pro $n>2$ je G neúplný a vznikne-li graf G' přidáním libovolné hrany ke grafu G, pak G' obsahuje právě jednu kružnici.

Důkaz

(a) ⇒ (b)

Pro $n=1$ je tvrzení zřejmé. Nechť tvrzení platí pro nějaké $n \geq 1$. Ukážeme, že pak platí i pro $n+1$. Buď tedy *G* strom s $n+1$ uzly. Podle Věty 2 existuje v G uzel *u*, který je incidentní s jediným uzlem *v*. Odstraněním uzlu *u* a hrany $\{u, v\}$ dostaneme strom G', který má *n* uzlů a tedy má $n-1$ hran. Graf *G* má ovšem o 1 hranu více, než graf G', tedy má *n* hran. Takže počet hran v grafu *G* je o 1 nižší než počet uzlů.

(b) ⇒ (c)

Nechť *G* je souvislý a $m=n-1$. Předpokládejme, že *G* obsahuje kružnici. Je zřejmé, že odstraněním libovolné hrany *h* ležící na kružnici se odstraní i tato kružnice a *G* přitom zůstane souvislý. Můžeme tedy odstraňovat hrany tak dlouho, dokud v grafu existují kružnice. Po odstranění všech kružnic dostaneme zřejmě strom, který má *n* uzlů. Protože (a) ⇒ (b), má tento strom $n - 1 = m$ hran, . To je však spor s tím, že jsme odstranili alespoň jednu hranu.

(c) ⇒ (d)

Pokud není *G* souvislý, potom obsahuje komponenty $K_{1,} K_{2,} \ldots, K_p, p \geq 2$, které mají postupně $n_{1,} n_{2,} \ldots, n_p$ uzlů, neobsahují jako podgraf kružnici, a jsou tedy stromy. Proto mají postupně $n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots, n_p - 1$ hran (jelikož (a) ⇒ (b)). Protože však zřejmě $\sum_{i=1}^{p} n_i = n$, musel by mít graf *G* $n - p$ hran, což je spor. Tedy *G* je souvislý.

Nechť dále existuje hrana $h=(u, v)$, která není mostem v G. Jejím odstraněním vznikne graf G', který má stejný počet komponent jako G, a je tedy souvislý. Proto v G' existuje cesta mezi uzly u a v. To však znamená, že G obsahuje kružnici, což je spor.

(d) $\Rightarrow$ (e)

Existence cesty (jisté délky k) mezi dvěma různými uzly v G plyne ze souvislosti G. Zbývá tedy dokázat jednoznačnost. Ta je zřejmá pro cesty délky $k=1$(neboť podle předpokladu je každá hrana grafu G most). Nechť tedy každá cesta délky $k\geq 1$ mezi dvěma různými uzly je jediná cesta mezi těmito uzly. Uvažujme cestu $(u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, u_k, h_{k+1}, u_{k+1})$délky $k+1$.

Protože h_{k+1} je most, musí každá cesta mezi u_0 a u_{k+1} obsahovat hranu h_{k+1}. Cesta $(u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, h_k, u_k)$ je ovšem jediná mezi uzly u_0 a u_k dle indukčního předpokladu.

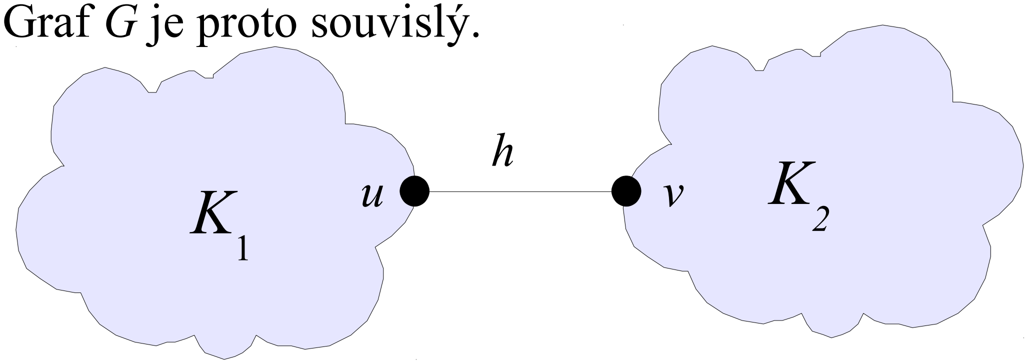
Tedy i cesta $(u_0, h_1, u_1, h_2, \ldots, u_k, h_{k+1}, u_{k+1})$ je jediná cesta mezi uzly u_0 a u_{k+1}.

(e) $\Rightarrow$ (f)

G nemůže obsahovat kružnici, protože potom by mezi libovolnými dvěma uzly této kružnice zřejmě existovaly nejméně dvě cesty. Protože však mezi každými dvěma uzly v G existuje cesta, vznikne zřejmě přidáním hrany mezi tyto uzly kružnice.

(f) ⇒ (g)

Předpokládejme, že platí podmínka (f) a G není souvislý. Potom obsahuje nejméně dvě různé neprázdné komponenty K_1, K_2. Nechť $u \in K_1$, $v \in K_2$. Označme G' graf, který vznikne z grafu G přidáním hrany $h=(u, v)$. Podle předpokladu obsahuje G' kružnici. Z definice komponenty plyne, že hrana h je jedinou hranou mezi uzly, z nichž jeden je z komponenty K_1 a druhý z komponenty K_2. Proto žádná kružnice nemůže obsahovat hranu h. Kružnici tedy musí obsahovat graf G, což je spor. Graf G je proto souvislý.



Pro $n > 2$ je zřejmě graf G neúplný. Předpokládejme, že graf vzniklý z G přidáním nové hrany h obsahuje dvě různé kružnice C_1 a C_2. Potom hrana h leží jak v kružnici C_1, tak v kružnici C_2. Podle Věty 1 tedy existuje kružnice, která neobsahuje hranu h. Potom ale tato kružnice leží v grafu G, což je spor.

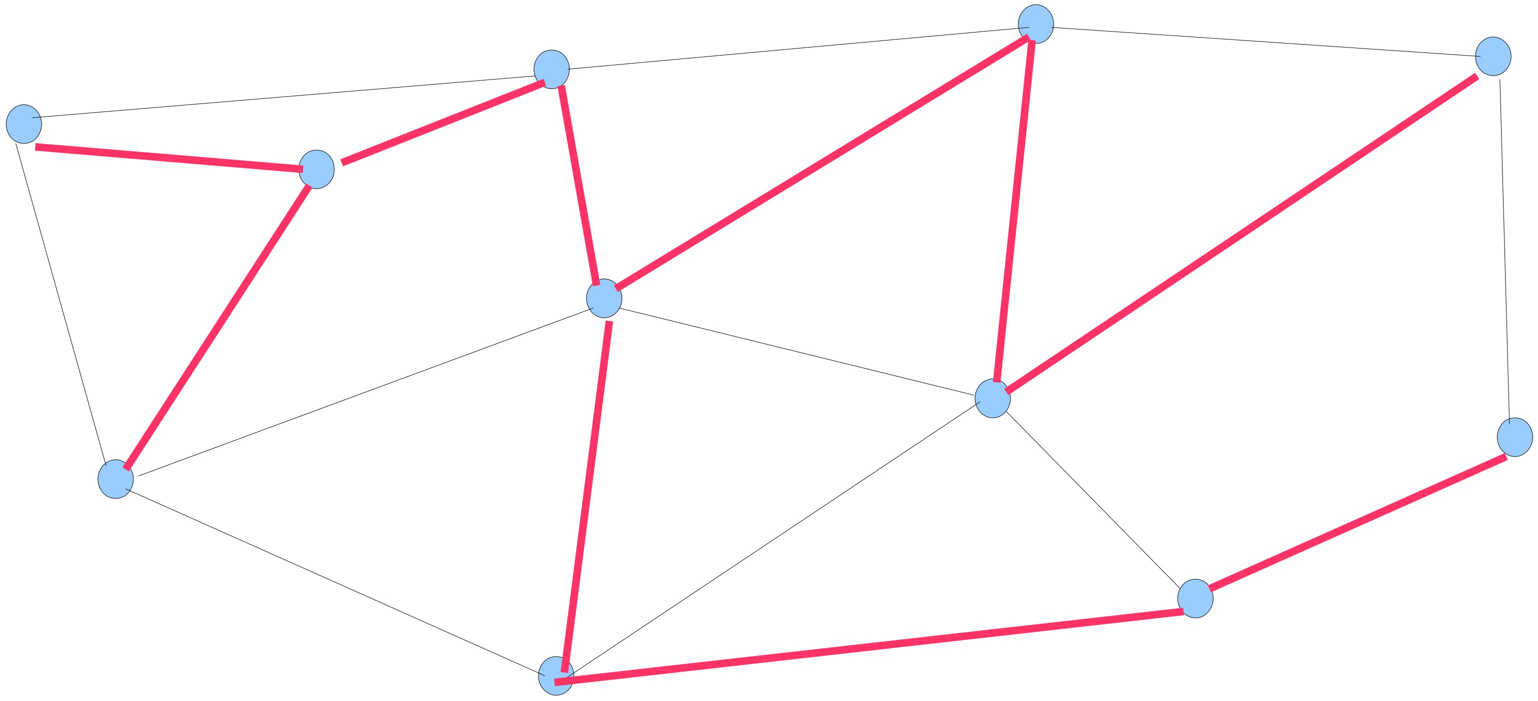
$(g) \Rightarrow (a)$

Předpokládejme, že G není stromem, tedy že obsahuje kružnici. Potom $n > 2$, takže G je neúplný. Přidáme-li do grafu G novou hranu h spojující uzly u a v, mezi kterými hrana v G není, pak dostaneme novou kružnici, neboť mezi u a v existuje cesta (délky větší než jedna) neobsahující h. Tedy graf G' vzniklý z grafu G přidáním hrany h obsahuje nejméně dvě kružnice, což je spor.

Kostra grafu

Je-li dán obyčejný graf $G=(U, H)$, pak jeho faktor $K=(U, H')$ nazveme kostrou grafu *G*, pokud je *K* strom.

Každá kostra grafu *G* je tedy uzlově maximální strom obsažený jako podgraf v grafu *G*.



Následující dvě tvrzení plynou z Věty 3:

Věta 4

Nechť G je obyčejný graf. G je souvislý, právě když má kostru.

Věta 5

Nechť $G=(U, H)$ je obyčejný graf a $|U|=n$. Pokud faktor $K=(U, H')$ grafu G splňuje kterékoliv dvě z následujících podmínek, pak je kostrou grafu G:

(a) K je souvislý;

(b) $|H'|=n-1$;

(c) K neobsahuje jako podgraf kružnici.

Oceněný graf

Nechť $G=(U,H)$ je obyčejný graf. Je-li navíc dáno zobrazení $c: H \to R$, potom trojici $G=(U,H,c)$ nazýváme **oceněným grafem**. Každé hraně *h* grafu *G* je tak přiřazeno reálné číslo $c(h)$, které se nazývá **cenou** hrany *h*. Je-li $G'=(U',H')$ podgraf grafu *G*, potom $c(G')=\sum_{u \in H'} c(u)$ se nazývá cenou podgrafu *G*'.

Minimální kostra

Nechť $G=(U, H, c)$ je obyčejný oceněný graf. Nechť $K=(U, H')$ je kostra grafu *G*. Řekneme, že *K* je minimální kostra grafu *G*, jetliže platí $c(K) \leq c(L)$ pro každou kostru *L* grafu *G*.

Dále uvedeme dva algoritmy pro nalezení minimální kostry obyčejného oceněného grafu $G=(U, H, c)$. To, že tyto algoritmy skutečně naleznou minimální kostru, vyplývá z následujících vět.

Věta 6

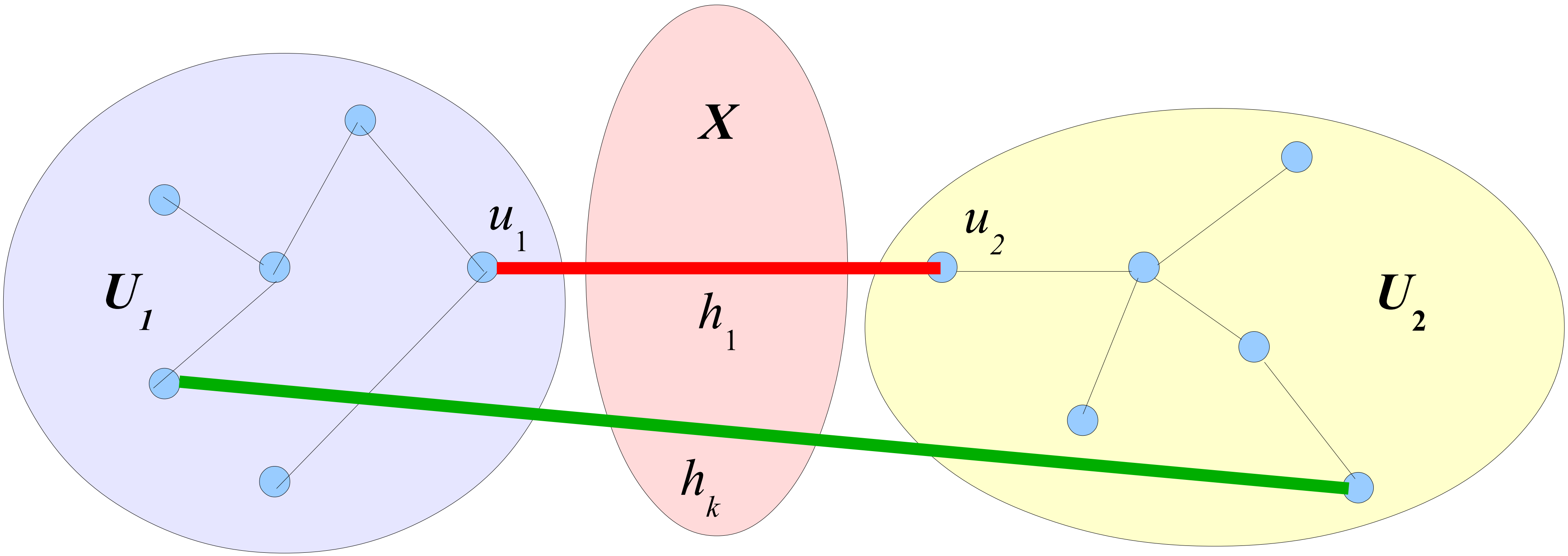
Nechť $G=(U,H,c)$ je obyčejný souvislý oceněný graf a nechť

$$C=(v,h_1,u_1,h_2,u_2,\dots,u_{p-1},h_p,v),\ \ p\geq 3$$

je kružnice v grafu G. Jestliže platí $c(h_1)>c(h_i), 2\leq i\leq p$, potom hrana h_1 není obsažena v žádné minimální kostře grafu G.

Důkaz Nechť $M=(U,H')$ je minimální kostra grafu G a předpokládejme, že $h_1\in H'$. Nechť hrana h_1 je incidentní s uzly u_1 a u_2. Označme dále U_1 resp. U_2 množiny uzlů spojených s uzly u_1, resp. u_2 cestou neobsahující hranu h_1. Protože M je strom, plyne z Věty 3, že $U_1\cap U_2=\emptyset$ a podgrafy indukované v M podmnožinami uzlů U_1 a U_2 jsou stromy. Označme X množinu všech hran v G, které jsou incidentní jak s nějakým uzlem z U_1 tak s nějakým uzlem z U_2. .

Množina hran X zřejmě obsahuje hranu h_1 a alespoň jednu další hranu h_k kružnice C, $1 < k \leq p$.



Podle předpokladu, zaměníme-li v grafu hranu h_1 za hranu h_i, dostaneme lacinější kostru, což je spor.

Důsledek 7

Nechť $G=(U, H, c)$ je obyčejný souvislý oceněný graf a nechť

$$C=(v, h_1, u_1, h_2, u_2, \ldots, u_{p-1}, h_p, v),\ \ p \geq 3$$

je kružnice v grafu *G*. Jestliže platí $c(h_1) \geq c(h_i), 2 \leq i \leq p$, potom existuje aspoň jedna minimální kostra, ve které není hrana h_1 obsažena.

Tento důsledek se vztahuje na oceněné grafy, kde ceny dvou různých hran mohou být stejné. Metodami stejnými jako v důkazu Věty 10 lze snadno dokázat, že pokud jsou všechny ceny hran grafu *G* rozdílné, existuje pouze jedna minimální kostra grafu *G*.

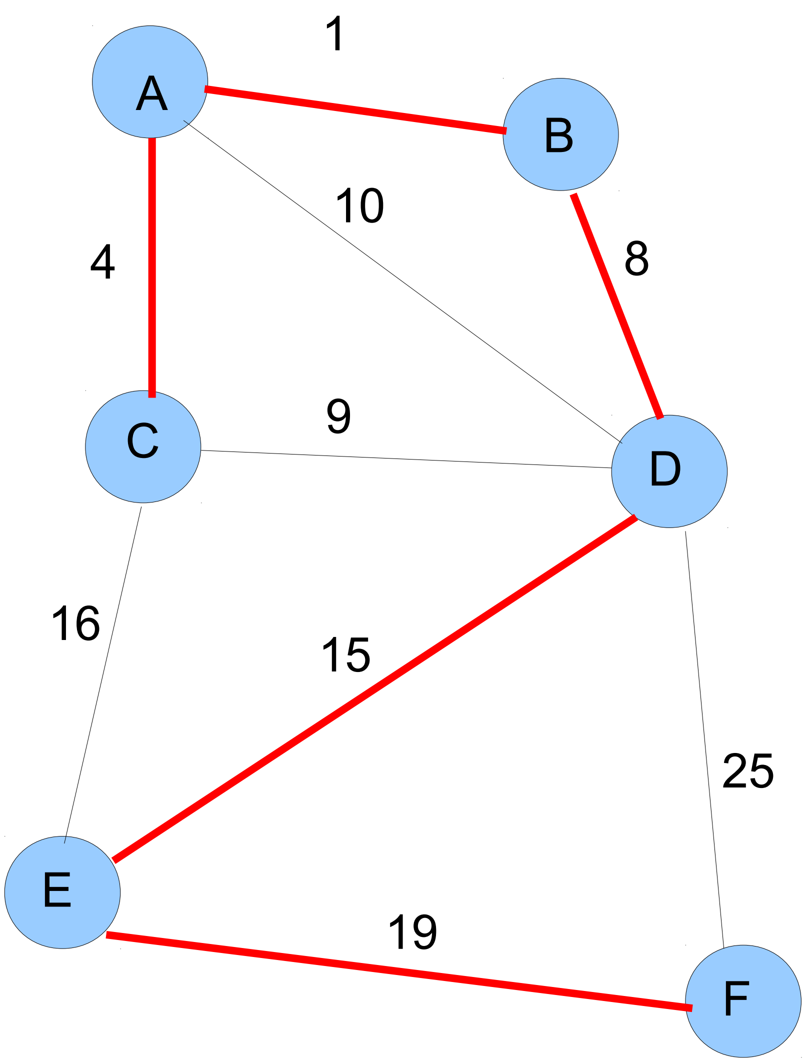
Kruskalův algoritmus

Je dán oceněný obyčejný souvislý graf $G=(U, H, c)$, kde $|U|=n$ a $H=\{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$. Setřiďme hrany z H do posloupnosti $S=(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ tak, že platí $c(s_i) \leq c(s_j)$ pro $i<j$. Budeme nyní postupně vytvářet grafy $K_1=(U, Q_1), K_2=(U, Q_2), \ldots, K_{n-1}(U, Q_{n-1})$ tak, aby platilo

(a) $Q_1=\{s_1\}$.

(b) Jestliže $Q_i=\{s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_i}\}$, kde $1<i<n-1$, $c(s_{j_1}) \leq c(s_{j_2}) \leq \ldots \leq c(s_{j_i})$, potom $Q_{i+1}=\{s_{j_1}, s_{j_2}, \ldots, s_{j_i}, s_q\}$, kde s_q je hrana z posloupnosti S s nejmenším indexem q taková, že $s_q \neq s_{j_k}$, $1 \leq k \leq i$ a K_{i+1} neobsahuje kružnici.

Při Kruskalově algoritmu se tedy kostra vytváří postupným přidáváním předem setříděných hran počínaje hranou s nejmenší cenou. Vznikla-li by přidáním nějaké hrany kružnice, hrana "se přeskočí".



c(A,B)=1

c(A,C)=4

c(B,D)=8

c(C,D)=9

c(A,D)=10

c(D,E)=15

c(C,E)=16

c(E,F)=19

c(D,F)=25

Primův algoritmus

Je dán oceněný obyčejný souvislý graf $G=(U, H, c)$. Pro podgraf $K=(V, J)$ grafu G, označme $K^+=(V^+, J^+)$ graf, který vznikne z grafu K přidáním uzlu u do V a hrany h do J takové, že h je incidentní s uzlem u a s nějakým uzlem ve V, a přitom h je hranou nejmenší ceny s takovouto vlastností. Sestrojíme postupně grafy K_1, K_2, ..., $K_{n\text{-}1}$ následovně:

(a) $K_1=(\{u, v\}, \{\{u, v\}\})$ kde $c((u, v)) \leq c(\{u, w\})$ pro všechna $w \in U$.

(c) $K_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} K_i^+$ pro každé $i=1,2, \ldots, n-2$.

Primův algoritmus vyjde z libovolného uzlu a postupně se přidává vždy hrana s nejmenší cenou taková, že předchozí graf rozšíří tak, aby byl souvislý a přitom neobsahoval kružnici.

Oproti Kruskalovu algoritmu má Primův tu výhodu, že se nemusejí předem seřazovat podle vzrůstající ceny všechny hrany. Při Kruskalově algoritmu se totiž většinou hrany s vysokými cenami vůbec nevyužijí.

Algoritmus je založen na následujících tvrzeních:

Věta 8

Nechť $G=(U, H, c)$ je obyčejný oceněný souvislý graf a $\{u, v\} \in H$ hrana taková, že $c(\{u, v\}) < c(\{u, w\})$ pro každý uzel $w \in U$. Potom hrana $\{u, v\}$ leží v každé minimální kostře grafu *G*.

Důsledek 9

Nechť $G=(U, H, c)$ je obyčejný oceněný souvislý graf a $\{u, v\} \in H$ hrana taková, že $c(\{u, v\}) \leq c(\{u, w\})$ pro každý uzel $w \in U$. Potom existuje minimální kostra grafu *G,* ve které hrana $\{u, v\}$ leží.

Důsledek 10

Nechť $G=(U, H, c)$ je obyčejný oceněný souvislý graf, $V \subseteq U$, $S=(V, H')$ je strom a nechť tento strom je podgrafem minimální kostry grafu *G*. Pak existuje minimální kostra grafu *G*, která obsahuje *S* jako podgraf a navíc hranu *h* s nejmenší cenou takovou, že $h=\{u, v\}, u \in V, v \in U - V$.

Maticová forma Primova algoritmu

Pokud jsou ceny hran grafu $G=(U, H)$, kde $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, zadány ve formě matice

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

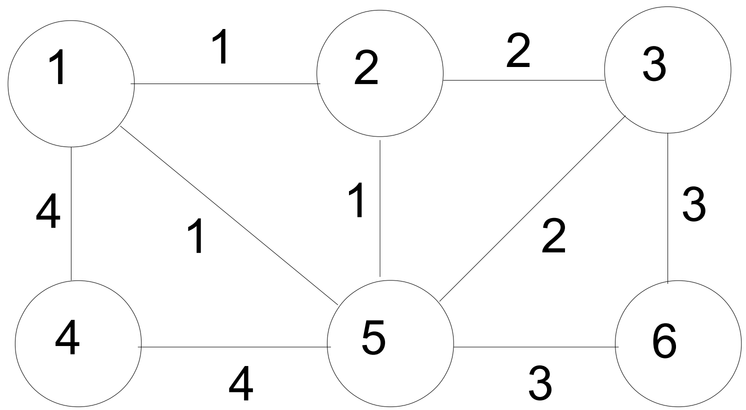
kde prvek na *i*-tém řádku a v *j*-tém sloupci označuje cenu hrany incidentní s uzly u_i, u_j, je možno Primův algoritmus vyjádřit v následující formě:

Krok 1: Vyškrtnou se všechny prvky v 1. sloupci a 1. řádek se označí.

Krok 2: Pokud v označených řádcích neexistuje žádný nepodtržený prvek, algoritmus končí a podtržené prvky označují hrany v minimální kostře. Jinak se vybere minimální takový prvek .

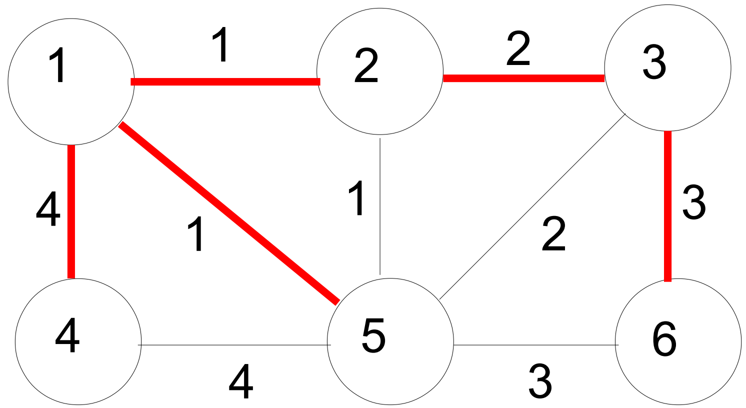
Krok 3: Je-li vybraný prvek c_{ij}, podtrhne se, označí se *j*-tý řádek a vymažou se nepodtržené prvky *j*-tého sloupce. Přechod ke Kroku 2.

<u>**Příklad**</u>



$$C_1 = \begin{pmatrix} - & 1 & - & 4 & 1 & - \\ - & - & 2 & - & 1 & - \\ - & 2 & - & - & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 4 & - \\ - & 1 & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & 3 & - \end{pmatrix} \begin{array}{c} * \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & 1 & - \\ - & - & 2 & - & 1 & - \\ - & - & - & - & 2 & 3 \\ - & - & - & - & 4 & - \\ - & - & 2 & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & 3 & - \end{pmatrix} \begin{array}{c} * \\ * \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad C_3 = \begin{pmatrix} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & 2 & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 4 & - & 3 \\ - & - & 3 & - & - & - \end{pmatrix} \begin{array}{c} * \\ * \\ \\ \\ * \\ \\ \end{array}$$



$$C_4 = \left(\begin{array}{cccccc} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 4 & - & 3 \\ - & - & - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ \\ * \\ \\ \end{array}$$

$$C_5 = \left(\begin{array}{cccccc} - & \underline{1} & - & 4 & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & \underline{3} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & 4 & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ \\ * \\ * \end{array}$$

$$C_6 = \left(\begin{array}{cccccc} - & \underline{1} & - & \underline{4} & \underline{1} & - \\ - & - & \underline{2} & - & - & - \\ - & - & - & - & - & \underline{3} \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \\ - & - & - & - & - & - \end{array}\right) \begin{array}{c} * \\ * \\ * \\ \\ * \\ * \end{array}$$