LINEÁRNÍ (VEKTOROVÝ) PROSTOR nad tělesem T

T je nejčastěji $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{Z}$

- $(L,+)$ je komutativní grupa
- operace $\cdot : T \times L \to L$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \qquad \text{pro } \alpha, \beta \in T \text{ a } x \in L$$

$$1 \cdot x = x \qquad \text{pro } x \in L$$

distributivní zákony

$$(\underbrace{\alpha + \beta}_{\text{„+" na } T})\, x = \alpha x \underbrace{+}_{\text{„+" na } L} \beta \cdot x \qquad \text{pro } \alpha, \beta \in T,\ x \in L$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \qquad \text{pro } \alpha \in T,\ x, y \in L$$

NORMA

$\| \ \| : L \to \mathbb{R}_0^+$

* $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ← neutrální prvek vzhledem k $(L, +)$
* $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$
* $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$(L, +)$ dohromady s normou $\| \ \|$ tvoří NORMOVANÝ PROSTOR

KAŽDÝ NORMOVANÝ PROSTOR JE METRICKÝM PROSTOREM S ~~NORMO~~ METRIKOU $\rho(x,y) = \|x-y\|$

Nechť X je množina zboží ③

a $c: X \to \mathbb{R}^+$ je cenová funkce

Ukažte, že $L = \{ k \mid k: X \to \mathbb{N}_0 \}$, kde

$k_1 + k_2$ je sčítání funkcí: $k_1 + k_2(x) = k_1(x) + k_2(x)$

1) lineární prostor

2) $\|k\| = \sum_{i \in X} |k(i) \cdot c(i)|$ je norma

---

1) $(L, +)$ musí být komutativní grupa

- uzavřenost : ANO
- komutativita – ANO
- asociativní – ANO
- nulový prvek – $k_0(x) = 0$
- inverzní prvky – NE

$(L, +)$ není lineární prostor

$$L' = \{ k \mid k : X \to \mathbb{Z} \}$$

$(L', +)$ je komutativní grupa

$$k^{-1}(x) = (-1) \cdot k(x)$$

NÁSOBENÍ SKALÁREM

$\alpha \cdot k(x)$ je definováno nad tělesem $\mathbb{Z}$

NENÍ def. nad $\mathbb{R}$

NAD $\mathbb{Z}$ je lineární prostor

---

1) $\|k\| = 0 \iff \sum_{i \in X} |k(i) \cdot c(i)| = 0 \iff k(i) \cdot \underbrace{c(i)}_{c(i) > 0} = 0$ pro každé $i \in X$

$\iff k(x) = 0$ pro každé x

2) $\|\alpha \cdot k\| = \sum_{i \in X} |\alpha \cdot k(i) \cdot c(i)| = \sum_{i \in X} |\alpha| \cdot |k(i) \cdot c(i)| = |\alpha| \cdot \underbrace{\sum_{i \in X} |k(i) \cdot c(i)|}_{\|k\|} = |\alpha| \cdot \|k\|$

3) $\|k_1 + k_2\| \leq \|k_1\| + \|k_2\|$

$\|k_1 + k_2\| = \sum_{i \in X} |(k_1 + k_2)(i) \cdot c(i)| = \sum_{i \in X} |(k_1(i) + k_2(i)) \cdot c(i)| = \sum_{i \in X} \underbrace{|k_1(i) \cdot c(i) + k_2(i) \cdot c(i)|}_{|A+B| \leq |A| + |B|}$

$\leq \sum_{i \in X} |k_1(i) \cdot c(i)| + |k_2(i) \cdot c(i)| = \sum_{i \in X} |k_1(i) \cdot c(i)| + \sum_{i \in X} |k_2(i) \cdot c(i)| =$

$= \|k_1\| + \|k_2\|$

ZÁVĚR $(L_1, +)$ s normou $\|k\|$ je normovaný prostor

UVAŽUJME PROSTOR $V = \mathbb{R}^2$

a normu def. $\|(a,b)\| = \max\{|2a|, |3b|\}$

$\boxed{\text{dokažte, že jde o normu.}}$

1) $\forall x \in V: \quad \|x\| = 0 \iff x = (0,0)$

„$\Rightarrow$"
„$\Leftarrow$" $\quad \underset{(a,b)}{\|x\|} = 0 \iff \max\{|2a|, |3b|\} = 0 \iff |2a| = 0 \wedge |3b| = 0$

$\iff a = 0 \wedge b = 0 \iff x = (0,0)$

2) $\forall x \in V \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}: \quad \|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$

$\boxed{\alpha \cdot (a,b) = (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b)}$

$\|\alpha \cdot (a,b)\| = \|(\alpha a, \alpha b)\| = \max\{|\alpha \cdot 2 \cdot a|, |\alpha \cdot 3 \cdot b|\} = \max\{|\alpha| \cdot |2a|, |\alpha| \cdot |3b|\} =$
$|\alpha| \cdot \max\{|2a|, |3b|\} = |\alpha| \cdot \|(a,b)\|$

3) $\forall x,y \in V : \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

$$\|(a,b)+(c,d)\| = \|(a+c, b+d)\| = \max\{|2\cdot(a+c)|, |3\cdot(b+d)|\} =$$

$$\max\{|2a+2c|, |3b+3d|\} \leq \max\{|2a|+|2c|, |3b|+|3d|\} \leq$$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$$\leq \max\{|2a|, |3b|\} + \max\{\cancel{|3b}|2c|, |3d|\} = \|(a,b)\| + \|(c,d)\|$$

Ukažte, že se jedná o normu

* V je prostor spojitých funkcí ~~na intervalu~~ $\langle 0,1 \rangle$
* $||f|| = \max\limits_{0 \le i \le 1} \{|f(i)|\}$

1) $||f|| = 0 \iff \max\limits_{0 \le i \le 1} |f(i)| = 0 \iff \forall x \in \langle 0,1 \rangle : f(x) = 0$

$\iff f(x) = 0$

2) $||\alpha \cdot f|| = |\alpha| \cdot ||f||$

$||\alpha \cdot f|| = \max\limits_{0 \le x \le 1} |\alpha \cdot f(x)| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left(|\alpha| \cdot |f(x)| \right) = |\alpha| \cdot \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| = |\alpha| \cdot ||f||$

3) $||f+g|| \le ||f|| + ||g||$

$||f+g|| = \max\limits_{0 \le x \le 1} \left(|f(x) + g(x)| \right) \le \max\limits_{0 \le x \le 1} \left(|f(x)| + |g(x)| \right) \le \max\limits_{0 \le x \le 1} |f(x)| + \max\limits_{0 \le x \le 1} |g(x)|$

$= ||f|| + ||g||$

Podprostor lin. prostoru L je L' t. ž.

- $(L', +)$ je podgrupa $(L, +)$
- $(L', +)$ je uzavřeno na násobení skalárem

- Uvažujme prostor $(\mathbb{R}^4, +)$
- ukažte, že $L' = \{(x_1, x_2, x_3, 0) \mid x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$ je podprostor $\mathbb{R}^4$

* $\Theta = (0,0,0,0) \in L'$ ANO

* uzavřenost : $\forall x, y \in L' : x + y \in L'$

$$(a_1, a_2, a_3, 0) + (b_1, b_2, b_3, 0) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, 0) \in L'$$

PLATÍ

* $\forall x \in L'$ a $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot x \in L'$

$$\alpha \cdot (a_1, a_2, a_3, 0) = (\alpha \cdot a_1, \alpha \cdot a_2, \alpha \cdot a_3, 0) \in L'$$

PLATÍ

MNOŽINA VEKTORŮ $\{x_1, \dots, x_n\}$ je lineárně závislá

$\overset{def}{\iff}$

$\exists \alpha_1, \dots \alpha_n \in T$ t. ž. alespoň jedno $\alpha_i \neq 0$

$$\underline{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 \cdot x_2 + \dots + \alpha_n \cdot x_n = 0}$$

$$x_i = \frac{-\alpha_1}{\alpha_i} x_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_i} x_2 + \dots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} x_n$$

Prostor je dimenze ALESPOŇ k

$\iff \exists$ množina vektorů $\{x_1, \dots, x_k\}$ t. ž. $x_1, \dots x_k$ jsou nezávislé

SKALÁRNÍ SOUČIN V REÁLNÉM LINEÁRNÍM PROSTORU R je zobrazení

$$(-,-) : R \times R \to \mathbb{R}$$ pro které platí:

- $(x,y) = (y,x)$
- $(\underbrace{x_1 + x_2}_{\text{sčítání na } R}, y) = (x_1, y) \underbrace{+}_{\text{sčítání } \mathbb{R}} (x_2, y)$
- $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x,y)$
- $(x,x) \geq 0$
- $(x,x) = 0 \overset{def}{\iff} x = 0$

- LINEÁRNÍ PROSTOR SE SKALÁRNÍM SOUČINEM JE UNITÁRNÍ PROSTOR
- NORMA JE DEFINOVÁNA $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$

Nechť P_2 je V.P. všech polynomiálních funkcí stupně max. 2 (12)

$$P_2 = \{f(x) = ax^2 + bx + c\}$$

Rozhodněte, zda následující předpis je skalární součin

$$(f, g) = f(1)\cdot g(1) + f(3)\cdot g(3) + f(5)\cdot g(5) = \sum_{i=1}^{3} f(2i-1)\cdot g(2i-1)$$

1) $(x, y) = (y, x)$

$$(f, g) = f(1)\cdot g(1) + f(3)\cdot g(3) + f(5)\cdot g(5) = g(1)\cdot f(1) + g(3)\cdot f(3) + g(5)\cdot f(5) = (g, f)$$

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$

$$(f_1 + f_2, g) = \sum_i \left(f_1(2i-1) + f_2(2i-1)\right)\cdot g(2i-1) = \sum_i \left(f_1(2i-1)\cdot g(2i-1)\right) + f_2(2i-1)\cdot g(2i-1) = \sum_i f_1(2i-1)\cdot g(2i-1) + \sum_i f_2(2i-1)\cdot g(2i-1) = (f_1, g) + (f_2, g)$$

3) $(\lambda x, y) = \lambda \cdot (x, y)$

$$(\lambda \cdot f, g) = \sum_i f(2i-1) \cdot g(2i-1) \cdot \lambda = \lambda \cdot \sum_i f(2i-1) \cdot g(2i-1) = \lambda \cdot (f, g)$$

4) $(x, x) \geq 0$

$$(f, f) = \sum_i \underbrace{\boxed{f^2}(2i-1)}_{\geq 0} \geq 0$$

5) $(x, x) = 0 \iff x = 0$

$$(f, f) = 0 \implies f^2(1) = 0 \wedge f^2(3) = 0 \wedge f^2(5) = 0$$

$$\implies f(1) = f(3) = f(5) = 0$$

funkce tvaru ax^2+bx+c :

~~nabývá více~~ má 2 kořeny maximálně

$\implies (f, f) = 0$ pouze pokud $a = b = c = 0$

$x = 0 \Rightarrow (x, x) = 0$

$f(x) = 0$ pro $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f^2(1) + f^2(3) + f^2(5) = 0 + 0 + 0 = \underline{0}$

Soustava nenulových vektorů je ORTOGONÁLNÍ

$\Leftrightarrow$

$i = j \Rightarrow (x_i, x_j) = K$

$i \neq j \Rightarrow (x_i, x_j) = 0$

Soustava je ORTONORMÁLNÍ pokud je ORTOGONÁLNÍ

$(x_i, x_i) = 1$

Soustava $\{x_i\}$ je báze prostoru R

$\Leftrightarrow$

- je lineárně nezávislá
- $\forall x \in R: \quad x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \qquad \alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{R}, \; x_1, \ldots, x_n \in \{x_i\}$

Na prostoru $\mathbb{R}^4$ uvažujme kanonický skalární součin

$$[x,y] = \sum_{i=1}^{4} x_i y_i$$

Najděte ortonormální bázi v podprostoru $\mathbb{R}^4$ generovaného vektory $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (3,3,-1,-1)$, $u_3 = (-2,0,6,8)$

$B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$

$[b_1, b_2] = 0$
$[b_2, b_3] = 0$
$[b_3, b_1] = 0$

1) najdeme ortogonální bázi
2) zkrátíme/prodloužíme vektory $b_1, \dots, b_3$ na délku 1

$$b_1 = u_1$$

$$b_2 = u_2 - \lambda b_1$$

$$0 = [b_1, b_2] = [b_1, u_2 - \lambda b_1] = [b_1, u_2] - \lambda [b_1, b_1]$$

$$\lambda = \frac{[b_1, u_2]}{[b_1, b_1]} = \frac{3+3-1-1}{1+1+1+1} = \frac{4}{4} = \underline{\underline{1}}$$

$$b_2 = (3,3,-1,-1) - (1,1,1,1) = (2,2,-2,-2)$$

$$b_3 = u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 \cdot b_1$$

$$0 = [b_1, b_3] = [b_1, u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1] = [b_1, u_3] - \cancel{\lambda_2 \underbrace{[b_1, b_2]}_{=0}} - \lambda_1 [b_1, b_1]$$

$$0 = [b_2, b_3] = [b_2, u_3 - \lambda_2 b_2 - \lambda_1 b_1] = [b_2, u_3] - \lambda_2 [b_2, b_2] - \cancel{\lambda_1 \underbrace{[b_2, b_1]}_{=0}}$$

$$\lambda_1 = \frac{[b_1, u_3]}{[b_1, b_1]} = \frac{12}{4} = 3 \qquad \lambda_2 = \frac{[b_2, u_3]}{[b_2, b_2]} = \frac{-32}{16} = -2$$

$$[b_1, u_3] = -2 + 0 + 6 + 8 = 12$$

$$[b_2, u_3] = -4 - 12 - 16 = -32$$

$$[b_2, b_2] = 4 + 4 + 4 + 4 = 16$$

$$b_3 = (-2, 0, 6, 8) + 2 \cdot (2, 2, -2, -2) - 3 \cdot (1, 1, 1, 1) = (-1, 1, -1, 1)$$

$$\|b_1\| = \|(1,1,1,1)\| = \sqrt{1+1+1+1} = 2$$

$$\|b_2\| = \|(2,2,-2,-2)\| = \sqrt{16} = 4$$

$$\|b_3\| = \|(-1,1,-1,1)\| = \sqrt{4} = 2$$

$$\overline{b_1} = \frac{1}{2} \cdot b_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{b_2} = \frac{1}{4} \cdot b_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$\overline{b_3} = \frac{1}{2} \cdot b_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$