

- (1) $\vdash (\neg\varphi \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \varphi)$ (A3)
- (2) $\vdash \neg A \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \neg A)$ (A1)
- (3) $\neg A \vdash \neg\varphi \rightarrow \neg A$ (2), VD
- (4) $\neg A \vdash A \rightarrow \varphi$ (1)(3), NP
- (5) $\neg A, A \vdash \varphi$ { VD

$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$

L1

(1) $\vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (A3)

(2) $\vdash \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (A1)

(3) $\neg A \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ (2), VD

(4) $\neg A \vdash A \rightarrow B$ (3), (1), NP

(5) $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$ (4), VD

~~$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$~~

$$(A1) \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$(A2) \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$(A3) \quad (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

$$\frac{\neg \neg A}{A}$$

$$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

- (1) $\vdash \neg A \rightarrow A$ (L3)
- (2) $\neg A \vdash A$ (1), VD
- (3) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$ (L2)
- (4) $(A \rightarrow B) \vdash A \rightarrow B$ (3), VD
- (5) $\neg A, (A \rightarrow B) \vdash B$ (2), (4), NP
- (6) $\vdash B \rightarrow \neg B$ (L4)
- (7) $\neg A, (A \rightarrow B) \vdash \neg B$ (5), (6), NP
- (8) $(A \rightarrow B) \vdash \neg A \rightarrow \neg B$ (7), VD
- (9) $\vdash (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (A3)
- (10) $(A \rightarrow B) \vdash \neg B \rightarrow \neg A$ (8), (9), NP
- (11) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ (10), VD

$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

L4

- (1) $\vdash \neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$ (L3)
- (2) $\vdash (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$ (A3)
- (3) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$ (1), (2), $\Box P$

$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

L3

$$(1) \vdash \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \quad (\text{L1})$$

$$(2) \vdash (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (A3)$$

$$(3) \neg\neg A \vdash \neg A \rightarrow \neg\neg\neg A \quad (1), \text{VD}$$

$$(4) \neg\neg A \vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (2), (3), \text{NP}$$

$$(5) \vdash \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (4), \text{VD}$$

$$(6) \vdash (\neg\neg A \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)) \quad (A2)$$

$$(7) \vdash (\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A) \quad (5), (6), \text{NP}$$

$$(8) \vdash \neg\neg A \rightarrow \neg\neg A \quad (\text{L2})$$

$$(9) \vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (7), (8), \text{NP}$$

$$(10) \vdash \neg\neg\neg A \rightarrow A \quad (4), \text{VD}$$

$$(11) \vdash \neg\neg A \rightarrow A \quad (10), \text{VD}$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$

$\vdash A \rightarrow A$

(1) $\vdash \{A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)\} \quad (\text{A1})$

(2) $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow ((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)) \quad (\text{A2})$

(3) $\vdash (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (1), (2), \text{NP}$

(4) $\vdash \{A \rightarrow (A \rightarrow A)\} \quad (\text{A1})$

(5) $\vdash A \rightarrow A \quad (3), (4), \text{NP}$

A, B

NAND

$\neg(A)$	$\neg(B)$	$\neg(\neg A)$	$\neg(T)$	$\neg(\perp)$	$\neg(A \wedge B)$	$\neg(A \vee B)$	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg(A \equiv B)$	$\neg(A \mid B)$
0	0	1	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	0	1	1	1	1	0

$$A \equiv B \Leftrightarrow \underbrace{(A \rightarrow B)}_{\psi} \wedge \underbrace{(B \rightarrow A)}_{\psi}$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

↓

NNF = \wedge, \vee, \neg
jen na atomech

$$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$$

1. odstranit ekvivalence \equiv ✓

2. odstranit implikaci \rightarrow

$$\neg(A \wedge (\neg A \vee B)) \vee B \quad \checkmark$$

3. použijte DeMorganovo vztah na
počtu $\neg \Sigma$ atomů

$$(\neg A \vee \neg(\neg A \vee B)) \vee B$$

$$(\neg A \vee (A \wedge \neg B)) \vee B$$

$\neg(A)$	$\neg(B)$	$\neg(A \mid B)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$\neg(A)$	$\neg(A \mid A)$	$\neg(A \mid (A \mid A))$	$\neg(\top \mid A)$
0	1	1	1
1	0	1	0

$$\neg A \Leftrightarrow A \mid A$$

$$\top \Leftrightarrow A \mid (\neg A) \Leftrightarrow A \mid (A \mid A)$$

$$\perp \Leftrightarrow \neg \top \Leftrightarrow (A \mid (A \mid A)) \mid (A \mid (A \mid A))$$

$$A \wedge B \Leftrightarrow (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

$$A \vee B \Leftrightarrow \neg (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg ((A \mid A) \wedge (B \mid B)) \Leftrightarrow \neg (A \mid (A \mid (B \mid B))) \Leftrightarrow \neg (A \mid (A \mid (B \mid B))) \Leftrightarrow \neg (A \mid (B \mid B))$$

$$(A \wedge B) \rightarrow C \Leftrightarrow$$

$$\neg(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow$$

~~$$\neg((A \wedge B) \wedge (\neg(A \wedge B)) \vee C)$$~~

$$(A \mid B) \vee C$$

$$((A \mid B) \mid (A \mid B)) \mid (C \mid C)$$

$\vdash A \rightarrow A$

L2

$\vdash (A \rightarrow ((\underline{A \rightarrow A}) \rightarrow A)) \rightarrow (((A \rightarrow (\underline{A \rightarrow A})) \rightarrow (A \rightarrow A))) \quad (A2)$

$\vdash A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (A1)$

$\vdash A \rightarrow (A \rightarrow A) \quad (A\top)$