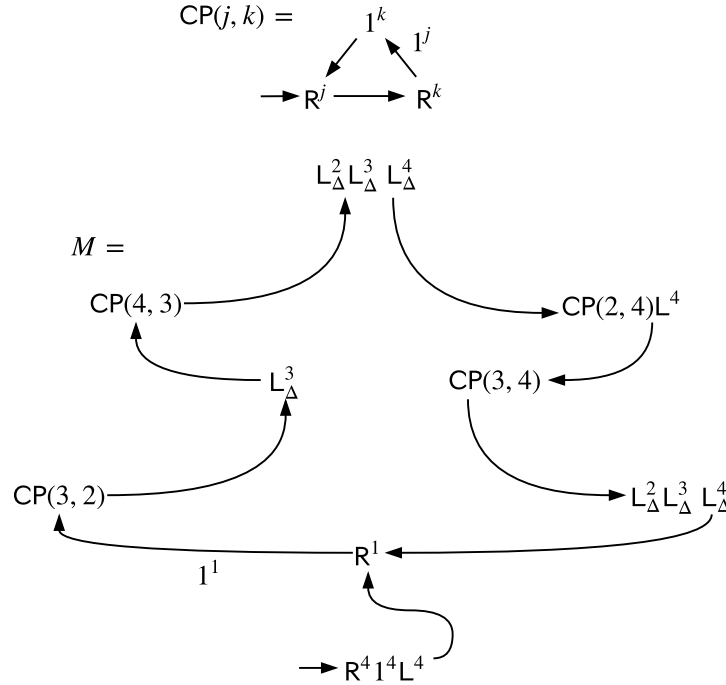


Teoretická informatika (TIN) – 2018/2019

Úkol 3

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)



Obrázek 1: Vánoční stroječek M a parametrizovaný stroj $CP(j, k)$. Horní index označuje pásku, na které se daná akce vykonává.

- Na obrázku je kompozitní diagram vánočního Turingova stroječku M . Jde o čtyřpáskový stroj se vstupní abecedou $\Sigma = \{1\}$ a páskovou abecedou $\Gamma = \{\Delta, 1\}$. Obsahuje volání strojů $CP(j, k)$, které kopírují obsah j -té pásky nacházející se vpravo za její hlavou doprava za hlavu k -té pásky. Počáteční konfigurace pásek a hlav M je

- 1: $\underline{\Delta}x\Delta^\omega$
- 2: $\underline{\Delta}\Delta^\omega$
- 3: $\underline{\Delta}\Delta^\omega$
- 4: $\underline{\Delta}\Delta^\omega$.

M vyčísluje jistou funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Vstupem je unární zápis x přirozeného čísla na pásce 1, výstupem je unární zápis přirozeného čísla nacházející se po zastavení stroje na pásce 4.

- (a) Identifikujte funkci f . Náповěda: $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$ je dobře známá řada čísel.
- (b) Zapište f jako parciálně rekurzivní funkci. Můžete použít funkce $eq, \neg eq, monus$ a $plus$ z přednášek a použít zjednodušený zápis funkcí. Inspirujte se příklady z přednášek a STI.

10 bodů

- Uvažujte jazyk predikátové logiky L prvního řádu bez rovnosti s jedním predikátovým symbolem p s četností 1 a množinou spočetně mnoha nulárních funkčních symbolů $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí diagonalizace dokažte, že množina realizací jazyka L , které mají jako univerzum množinu \mathbb{N} , je nespočetná.

13 bodů

3. Rozhodněte a dokažte, které ze vztahů $\{\subseteq, \supseteq, =\}$ platí mezi $\mathcal{O}(3^{2n})$ a $\mathcal{O}(2^{3n})$. Náповěda: zopakujte si pravidla pro počítání s mocninami a logaritmy.

5 bodů

4. Teta Květa peče cukroví na předvánoční setkání s kamarádkami; v Kauflandu nakoupila spoustu surovin v akci (např. mouku, mléko, mák) a od tety Běty si půjčila Vánoční kuchařku. Nyní stojí nad sporákem a přemýšlí, kolik jakého cukroví musí napéct, aby bylo dost cukroví pro všechny kamarádky. Dokažte, že *Problém Tety Květy* je NP-úplný.

Upřesnění: Každý kus cukroví v kuchařce tety Běty vyžaduje určitý počet (celé číslo) měrných jednotek jednotlivých surovin (např. gramy u mouky, mililitry u mléka). Příklad: Jeden vanilkový rohlíček vyžaduje 10 g cukru, 1 vanilkový lusk, 5 vlašských ořechů a 10 g másla. Teta Květa řeší následující rozhodovací problém: existuje počet kusů každého cukroví z kuchařky tak, že množství potřebných surovin pro jejich napečení nepřekročí množství nakoupených surovin a bude napečeno alespoň tolik kusů, kolik má teta Květa kamarádek?

Náповěda: Použijte redukci z některého z následujících vybraných NP-úplných problémů strejdy Karpa¹ (u optimalizačních problémů uvažujte jejich rozhodovací variantu, tj. pokud se optimalizační varianta ptá, jaké je nejlepší řešení, rozhodovací varianta se ptá, jestli existuje řešení, které má alespoň danou kvalitu):

- obarvitelnost grafu https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring,
- problém batohu https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem,
- celočíselné programování https://en.wikipedia.org/wiki/Integer_programming,
- vrcholové pokrytí grafu https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover nebo
- Hamiltonovská cesta https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem.

14 bodů

5. Uvažujte definici jazyka Petriho sítě v přednášce o Petriho sítích na slajdu 18 (provedení přechodu odpovídá přečtení stejnojmenného symbolu) s tím, že přijímající jsou jen ty výpočetní posloupnosti, které vedou do deadlocku, tj. do značení, ze kterého není možné provést žádný přechod. Navrhněte Petriho síť, která přijímá jazyk $\{a^i(b^j)c^k \in \{a, b, c, (,)\}^* \mid i \geq j \geq k\}$ (příklad ilustruje, že Petriho síť přijímají některé jazyky, které nejsou bezkontextové).

8 bodů

¹https://en.wikipedia.org/wiki/Karp%27s_21_NP-complete_problems