Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

TIN
Teoretická informatika

2. domáca úloha

Adrián Tóth (xtotha01) 3. decembra 2018

Obsah

1 Príklad číslo 1

1.1 (a)

Definice 4.29 [1](str. č. 97) Označme ZAV_n pre $n \geq 0$ jazyky setávající ze všech vyvážených řetězců závorek n typů. Tyto jazyky – označované též jako Dyckovy jazyky – jsou generovány gramatikami s pravidly tvaru: $S \rightarrow [^1\ S\ ]^1 \mid [^2\ S\ ]^2 \mid ... \mid [^n\ S\ ]^n \mid SS \mid \varepsilon$

Z hore uvedenej definície pre náš príklad vyplýva, že náš Dyckov jazyk L je generovaný gramatikou G_D, definovanou ako $G_D = (\{S'\}, \{[,]\}, P, S')$ kde množina prepisovacích pravidiel P je daná ako

$$S' \rightarrow \varepsilon \mid S'S' \mid [\ S'\ ]$$

ktorá obsahuje iba jeden typ zátvoriek ktorými sú [a].

Pre každé slovo $w \in L$, pre ktoré platí že $w \neq \varepsilon$, muselo byť aspoň raz použité pravidlo $S' \rightarrow [\ S'\ ]$ v derivácii. S využitím pravidla $S' \rightarrow [\ S'\ ]$ vygenerujeme jeden pár zátvoriek, pričom medzi zátvorkami sa nachádza neterminál S', ktorým je možné ďalej aplikovať ďalšie pravidlá a generovať reťazec u – presnejšie reťazec u patriaci do jazyka L. V prípade použitia pravidla $S' \rightarrow S'S'$ pred pravidlom $S' \rightarrow [\ S'\ ]$ vieme generovať ďalší reťazec na pravej strane čo odpovedá reťazcu v ktorý patrí do L, t.j. vieme generovať za $[u]$ reťazec v patriaci do jazyka L.

Takže, každé slovo $w \in L$, pre ktoré platí že $w \neq \varepsilon$, vieme zapísať v tvare $[u]v$ kde $u, v \in L$ pretože

$$S' \underset{G_D}{\Rightarrow} S'S' \underset{G_D}{\Rightarrow} [S']S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* [u]v$$

Keďže $S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* u$ a $S \underset{G_D}{\Rightarrow}^* v$ ktoré patria do jazyka L, tak $S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* [u]v$ tiež patrí do jazyka, keďže $u, v \in L$ a $[,] \in L$. Je zrejmé, že ak $S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* w$ a $S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* [u]v$ tak potom platí že $S' \underset{G_D}{\Rightarrow}^* w = [u]v$ t.j. $w = [u]v$.

1.2 (b)

Báza

Báza je bázový prípad **pre** $\mathbf{i = 0}$.

Pre $i = 0$ platí, že počet [a počet] v reťazci w je rovno nule z čoho vyplýva, že reťazec w sa musí rovnať ε. Formálne, pre $i = 0$ platí, že $\#_[(w) = 0 \wedge \#_](w) = 0$ z čoho vyplýva, že $w = \varepsilon$.

Keďže, existuje pravidlo $S' \rightarrow \varepsilon$ v gramatike G_D a taktiež, existuje pravidlo $S \rightarrow \varepsilon$ v gramatike G, potom existujú derivácie $S' \underset{G_D}{\Rightarrow} \varepsilon$ a $S \underset{G}{\Rightarrow} \varepsilon$ a tak platí, že $w = \varepsilon \wedge w \in L \wedge w \in L(G)$.

Indukčný predpoklad

$S \Rightarrow^* w$ kde $w \in L \wedge w \in L(G) \wedge w = [u]v$ čo platí pre všetky j kde $j < i$ pričom j, i značí počet zátvoriek typu [a počet zátvoriek typu].

Pre i

$\#_[(u) + \#_[(v) \stackrel{?}{=} i$ analogicky pre $\#_](u) + \#_](v) \stackrel{?}{=} i$

1.) $\#_[(u) = 0 \Rightarrow \#_[(v) = i \quad \vee \quad \#_[(v) = 0 \Rightarrow \#_[(u) = i$

Ak je buď $\#_[(u)$ alebo buď $\#_[(v)$ rovné nule, tak ho vieme vygenerovať z pravidla S na základe indukčnej bázi.

Ak je buď $\#_[(u)$ alebo buď $\#_[(v)$ rovné i, tak ten prvok prepíšeme pomocou vzorca

$$w' = [u']v' \Rightarrow \#_[(u') + \#_[(v') = i - 1 = j, \text{ analogicky } \#_](u') + \#_](v') = i - 1 = j$$

Na základe indukčného predpokladu vieme z S vygenerovať u' a v'.

$$S \Rightarrow [S]S \Rightarrow^* [u']v' = w'$$

kde

$$\#_[(u') + \#_[(v') = i, \text{ analogicky } \#_](u') + \#_](v') = i$$

2.) $\#_[(u) \neq 0 \quad \wedge \quad \#_[(v) \neq 0 \quad \wedge \quad \#_[(u) + \#_[(v) \leq i$

Keď $\#_[(u)$ a $\#_[(v)$ sú nenulové, tak musí platiť že

$$\#_[(u) < i \wedge \#_[(v) < i$$

t.j.

$$\#_[(u) = i - M = j_1 \wedge \#_[(v) = i - N = j_2 \text{ kde } M, N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

Pre i + 1

$S \Rightarrow^* w$ kde $w \in L$ pre ktoré platí, že

$$\#_[(w) = i + 1$$

a z definicie Dyckovho jazyka platí, že

$$\#_](w) = i + 1$$

Potom vieme w zapísať ako $w = [u]v$ podľa bodu (a)(kapitola 1.1) $\Rightarrow \#_[(u)+\#_[(v) = i$, analogicky musí platiť $\#_](u) + \#_](v) = i$.

$S \Rightarrow [S]S \Rightarrow^* [u]v = w$ kde $\#_[(u) + \#_[(v) = i + 1$, analogicky $\#_](u) + \#_](v) = i + 1$.

2 Príklad číslo 2

Veta 4.19 [1](str. č. 92): Nechť L je bezkontextový jazyk. Pak existuje konstanta $k > 0$ taková že je-li $z \in L$ a $|z| \geq k$, pak lze z napsat ve tvaru:

$$z = uvwxy, vx \neq \varepsilon, |vwx| \leq k$$

a pro všechna $i \geq 0$ je $uv^iwx^iy \in L$.

Nech L_{primes} je bezkontextový jazyk.

Tak existuje celočíselná konštanta $k > 0$ taká, že ak $z \in L$ a $|z| \geq k$, tak

$$z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge uv^iwx^iy \in L \text{ kde } i \geq 0$$

Zvoľme prvočíslo r väčšie ako ako k t.j. $r \geq k$ kde r je prvočíslo.

Potom platí, že

$$a^r \in L \wedge |a^r| = r \text{ kde } r \geq k \implies a^r = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge uv^iwx^iy \in L \text{ pre } i \geq 0$$

Nech

$$v = a^m \Rightarrow |v| = m$$
$$x = a^n \Rightarrow |x| = n$$
$$w = a^o \Rightarrow |w| = o$$

Tak musí platiť že $m + n > 0$ pretože $vx \neq \varepsilon$ a $k \geq m + n + o$ pretože $|vwx| \leq k$.

Zvoľme $i = r + 1$, potom

$$uv^{r+1}wx^{r+1}y \in L$$
$$|uv^{r+1}wx^{r+1}y| = |uvwxy| + |v^r| + |x^r| = r + r \cdot m + r \cdot n = r \cdot (1 + m + n) \text{ čo nie je prvočíšlo}$$

A z toho vyplýva spor pretože

$$uv^{r+1}wx^{r+1}y \notin L$$

Takže jazyk L_{primes} nie je bezkontextový jazyk.

3 Príklad číslo 3

3.1 Nerozhodnuteľnosť

Problém môžeme charakterizovať jazykom L pre ktorý platí

$$L = \{ \langle M_L \rangle \mid M_L \text{ je } TS : \exists w \in \mathit{Affine} : w \in L(M_L) \}$$

Problém členstva je charakterizovaný jazykom MP pre ktorý platí

$$MP = \{ \langle M_{MP} \rangle \# w \mid M_{MP} \text{ je } TS \text{ ktorý prijme } w \}$$

Zostavíme redukciu

$$\sigma : \{0, 1, \#\}^* \longrightarrow \{0, 1\}^* \text{ z jazyka } MP \text{ na } L$$

TS M_σ implementujúci σ priradí každému vstupu $x \in \{0, 1, \#\}^*$ reťazec $\langle M_x \rangle$, kde M_x je TS, ktorý na vstupu $y \in \{0, 1\}^*$ pracuje následovne:

1. M_x zmaže svoj vstup y.
2. Zapíše na pásku reťazec x.
3. M_x posúdi, zda $x = x_1\#x_2$ pre x_1, ktorý je kódom TS, a x_2, ktorý je kódom jeho vstupu. Pokiaľ nie, odmietne.
4. Inak M_x simuluje činnosť TS s kódom x_1 na reťazci s kódom x_2.
   - Ak x_1 prijme x_2, tak M_x prijme.
   - Ak x_1 odmietne x_2, tak M_x odmietne.
   - Inak cyklí.

M_σ je možné implementovať úplným TS. Konečne tento TS vypíše kód M_x, ktorý sa skladá zo štyroch komponent, ktoré odpovedajú vyššie uvedeným krokom. Tri z nich sú pritom konštantné (nezávisia na x) – konkrétne (1) zmazanie pásky, (2) test na dobré sformovanie instancie MP a (3) simulácia daného TS na danom vstupe (pomocou úplného TS). TS implementujúci tieto kroky, ktoré evidentne existujú, môžeme pripraviť vopred a M_σ vypíše kód spolu s kódom na predanie riadenia. Zostáva vygenerovať kód TS, ktorý zapíše na pásku dané $x = a_1a_2...a_n$. To je možné ale ľahko realizovať pomocou TS $Ra_1Ra_2R...Ra_n$.

Skúmajme možné jazyky TS M_x:

- $L(M_x) = \emptyset \iff$ (x nie je správne sformovaná instancia MP) alebo ($x = x_1\#x_2$ a TS s kódom x_1 na reťazci s kódom x_2 odmietne) alebo ($x = x_1\#x_2$ a TS s kódom x_1 na reťazci s kódom x_2 neskončí t.j. cyklí)
- $L(M_x) = \Sigma^* \iff$ (x je správne sformovaná instancia MP, kde $x = x_1\#x_2$ a TS s kódom x_1 na reťazci s kódom x_2 prijme)

Ak $L(M_x) = \Sigma^*$ je zrejmé, že jazyk $L(M_x)$ iste obsahuje aspoň jeden reťazec ktorý patrí do jazyka *Affine*.

Teraz už ľahko ukážeme, že σ zachováva členstvo $\langle M_x \rangle \in L \Leftrightarrow L(M_x) = \Sigma^* \Leftrightarrow x = x_1\#x_2$ kde x_1 je kód TS, ktorý zastaví na vstupe s kódom $x_2 \Leftrightarrow x \in MP$.

3.2 Čiastočná rozhodnuteľnosť

Majme $TS\ M$ pre ktorý platí, že $\exists w \in \mathit{Affine} : w \in L(M)$ kde jazyk *Affine* je rekurzívny jazyk.

K čiastočnému rozhodovaniu uvedeného problému môžeme využiť $TS\ M'$ ktorý na svojej prvej páske simuluje beh $TS\ M$ pre jednotlivé možné vstupné reťazce podľa určitého usporiadania (viz dole uvedený príklad) a na druhej páske vykonáva kontrolu podmienky patričnosti reťazca do jazyka *Affine*.

$$
\begin{array}{l}
konf_M(\varepsilon, 0)\\
konf_M(\varepsilon, 1)\#konf_M(0, 0)\\
konf_M(\varepsilon, 2)\#konf_M(0, 1)\#konf_M(1, 0)\\
konf_M(\varepsilon, 3)\#konf_M(0, 2)\#konf_M(1, 1)\#konf_M(00, 0)\\
konf_M(\varepsilon, 4)\#konf_M(0, 3)\#konf_M(1, 2)\#konf_M(00, 1)\#konf_M(01, 0)\\
\ldots
\end{array}
$$

M' nemôže len systematicky generovať vstupy pre $TS\ M$ a na nich nechať $TS\ M$ neobmedzene bežať pretože hrozí zacyklenie.

$TS\ M'$ ale môže mať na svojej páske súčastne rozbehnutú simuláciu $TS\ M$ pre ľubovoľný počet vstupných reťazcov, jednotlivé konfigurácie pásky budú vhodne oddelené.

$TS\ M'$ môže vždy prejsť všetky aktuálne rozbehnuté simulácie a na každej vykonať práve jeden krok. Pokiaľ v niektorom prípade dôjde k prijatiu reťazca $TS\ M$, vykoná kontrolu pratričnosti prijatého reťazca do jazyka *Affine* na druhej páske. Ak kontrola patričnosti prijatého reťazca skončila úspechom, t.j. reťazec bol prijatý $TS\ M$ a súčastne patrí do jazyka *Affine* môžeme tvrdiť, že existuje reťazec ktorý patrí do *Affine* a súčastne do $L(M)$. Ak $TS\ M$ neprijal reťazec alebo reťazec nepatrí do jazyka *Affine*, tak $TS\ M'$ pridá páskovú konfiguráciu pre ďalší reťazec a celý krok opakuje.

$TS\ M'$ vykonáva kontrolu patričnosti reťazca do jazyka *Affine* na druhej páske tak, že TODO.

Funkčnosť $TS\ M'$ môžeme chápať tak, že najskôr $TS\ M'$ spustí simuláciu $TS\ M$ na prvej páske. Ak $TS\ M$ zastaví a prijme určitý reťazec, tak tento reťazec $TS\ M'$ overí na druhej páske zda patrí do jazyka *Affine* t.j. skontroluje podmienku patričnosti tohto reťazca do jazyka *Affine*.

4 Príklad číslo 4

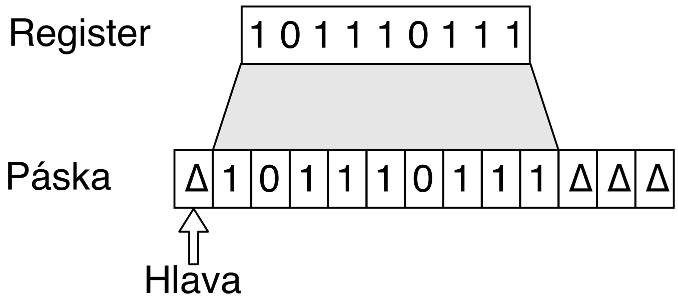
4.1 (a)

...

4.2 (b)

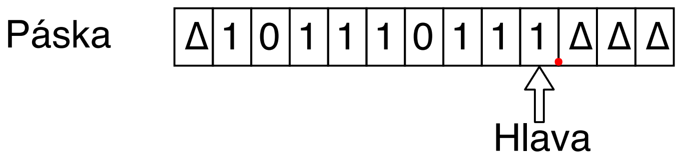
Dôkaz, že pre každý program P v jazyku *RationalC* a počiatočnú hodnotu $x_0 \in \mathbb{N}$ $(0 \in \mathbb{N})$ je možné zostrojiť TS $M_P = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{first}, F)$ a reťazec $w \in \{0,1\}^*$ tak, že $w \in L(M_P)$ práve vtedy, keď P s počiatočnou hodnotou x_0 skončí s návratovou hodnotou 1.

Na začiatku si zapíšeme obsah registra x v ktorom sa nachádza číslo $x_0 \in \mathbb{N}$ v binárnej podobe na pásku TS M_P čo je zobrazené v ilustračnom obrázku 1.



Obr. 1: Ilustračný obrázok prevodu registra x na pásku TS M_P.

Potom, pre TS M_P je potreba inicializovať hlavu čo v našom prípade znamená, že posunieme hlavu TS M_P na *least significant bit* (*LSB*) t.j. na *most right nonblank symbol* (najpravejší neblankový symbol) čo je realizovateľné TS. Táto inicializácia nášho TS M_P je nutná z toho dôvodu, že na začiatku máme celé nezáporné číslo ale neskôr sa môžeme dopracovať ku desatinným číslam kde je potreba vedieť kde je desatinná čiarka. V TS M_P budeme desatinnú čiarku reprezentovať tak, že pozícia hlavy ukazuje na *LSB* čísla z čoho vieme, že desatinná bodka sa nachádza na pravej strane od tohto *LSB* čísla. Proces inicializácie hlavy je ilustrovaný na obrázku 2 v ktorom je hypotetická desatinná bodka znázornená červenou bodkou.



Obr. 2: Ilustračný obrázok inicializácie hlavy TS M_P na páske.

Predpokladajme, že zdrojový kód pre program P v jazyku *RationalC* má určitú formu kde každý jeden príkaz je zapísaný na osobitnom riadku kde všetky riadky sú očíslované od 0 (pre prvý riadok) až po N (posledný riadok).

Potom, pre každý jeden riadok, kde označíme číslo riadka ako N, vytvoríme jeden stav $q_N \in Q$ a pre každý príkaz na týchto riadokoch platí, že jednotlivé príkazy vieme previesť podľa nasledujúcich pravidiel.

- Príkaz `if` x % $2 == A$ `goto` B kde $A = \{0,1\}$ a $0 \leq B \leq N_{MAX}$ na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

$$\delta(q_N, A) = (q_B, A)$$
$$\delta(q_N, \bar{A}) = (q_{N+1}, \bar{A})$$

  kde $q_B, q_N, q_{N+1} \in Q$.

- Príkaz x `/=` 2 na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{N+1}, L)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{N+1}, L)$$

  kde $q_N, q_{N+1} \in Q$.

- Príkaz x `*=` 2 na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{N+1}, R)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{N+1}, R)$$

  kde $q_N, q_{N+1} \in Q$.

- Príkaz `return` 0 na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{reject}, 0)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{reject}, 1)$$

  kde $q_N, q_{reject} \in Q$ a $q_{reject} \in F$.

- Príkaz `return` 1 na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{accept}, 0)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{accept}, 1)$$

  kde $q_N, q_{accept} \in Q$ a $q_{accept} \in F$.

- Príkaz `odd`(x) na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{N+1}, 1)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{N+1}, 1)$$

  kde $q_N, q_{N+1} \in Q$.

- Príkaz `even`(x) na riadku N

  TS M_P bude obsahovať nasledujúce prechodové pravidlá pre tento príkaz

  $$\delta(q_N, 0) = (q_{N+1}, 0)$$
  $$\delta(q_N, 1) = (q_{N+1}, 0)$$

  kde $q_N, q_{N+1} \in Q$.

Pri násobení a delení (pri použití príkazov x `/=` 2 a x `*=` 2) môže ale dôjsť ku tomu, že sa hlava dostane zo symbolu 0 alebo 1 na symbol blank. Môžu nastať dve možnosti a to keď sa hlava dostaneme na ľavý blank (prvý symbol pásky) alebo na pravý blank (blank za posledným znakom 0 alebo 1 ktorý je uložený na páske).
TODO: Ak sa hlava dostane na ľavý blank... Ak sa hlava dostane na pravý blank...

5 Literatúra

[1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text.* 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].
URL: `http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`