

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



TIN Teoretická informatika

1. domácí úloha

Obsah

1	Príklad číslo 1	2
1.1	(a)	2
1.2	(b)	2
1.3	(c)	2
2	Príklad číslo 2	3
3	Príklad číslo 3	4
4	Príklad číslo 4	4
5	Príklad číslo 5	5
6	Literatúra	8

1 Príklad číslo 1

1.1 (a)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa Vety 3.23 [1](str. č. 50) platí, že trieda regulárnych jazykov \mathcal{L}_3 je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$$

Využitím hore uvedenej Vety 3.23 a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$$

1.2 (b)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa Vety 4.27 [1](str. č. 96) platí, že trieda deterministických bezkontextových jazykov \mathcal{L}_2^D je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$$

Využitím hore uvedenej Vety 4.27 a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2^D$$

1.3 (c)

Predpokladajme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$ je pravdivý vzťah.

Ak berieme v úvahu, že $L_1 = \Sigma^*$ (regulárny jazyk), tak musí platiť:

$$\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \textbf{SPOR}$$

Vznikol nám spor pri $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$ z toho dôvodu, že podľa Vety 4.24 [1](str. č. 95) platí, že bezkontextové jazyky nie sú uzavreté voči doplnku.

2 Příklad číslo 2

$$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

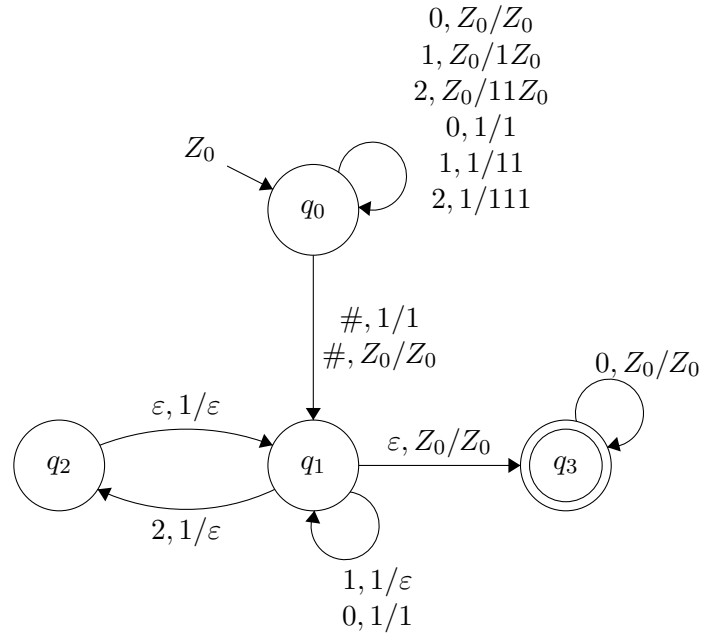
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\Sigma = \{\#, 0, 1, 2\}$$

$$\Gamma = \{Z_0, 1\}$$

$$F = \{q_3\}$$

$$\begin{aligned} \delta: \quad & \delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, Z_0) \\ & \delta(q_0, 1, Z_0) = (q_0, 1Z_0) \\ & \delta(q_0, 2, Z_0) = (q_0, 11Z_0) \\ & \delta(q_0, 0, 1) = (q_0, 1) \\ & \delta(q_0, 1, 1) = (q_0, 11) \\ & \delta(q_0, 2, 1) = (q_0, 111) \\ & \delta(q_0, \#, 1) = (q_1, 1) \\ & \delta(q_0, \#, Z_0) = (q_1, Z_0) \\ & \delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 1) \\ & \delta(q_1, 1, 1) = (q_1, \varepsilon) \\ & \delta(q_1, 2, 1) = (q_2, \varepsilon) \\ & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_3, Z_0) \\ & \delta(q_2, \varepsilon, 1) = (q_1, \varepsilon) \\ & \delta(q_3, 0, Z_0) = (q_3, Z_0) \end{aligned}$$



3 Príklad číslo 3

$$L = \{w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_1(w_1) + (2 * \#_2(w_1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w_2))\}$$

Veta 3.18 [1](str. č. 46): Nechť L je nekonečný regulární jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta $p > 0$ taková, že platí: $w \in L \wedge |w| \geq p \Rightarrow w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^i z \in L$ pro $i \geq 0$

Predpokladáme že jazyk L je regulárny jazyk a tak tento jazyk musí spĺňať hore uvedenú Vetu 3.18.

Pre $w \in L : w = 1^p \# 1^p$ pre ktoré platí podmienka $|w| \geq p$ pretože platí $2p + 1 > p$, pričom z dôvodu podmienky $|xy| \leq p$ nastane jediný prípad a to:

$$x = 1^l \wedge y = 1^m \wedge z = 1^{p-l-m} \# 1^p \text{ kde } l \geq 0 \text{ a } m > 0 \wedge l + m \leq p \text{ pre } l, m \in N$$

$$xy^i z = 1^l (1^m)^i 1^{p-l-m} \# 1^p = 1^{l+(i*m)+p-l-m} \# 1^p = 1^{(i*m)+p-m} \# 1^p \notin L \text{ pre všetky } i \geq 0 \wedge i \neq 1 \wedge i \in N$$

Z predošlého vzťahu vyplýva, že jazyk L nie je regulárny.

4 Príklad číslo 4

ALGORITMUS

Vstup: Pravá lineárna gramatika $G_P = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: Ľavá lineárna gramatika $G_L = (N', \Sigma', P', S')$ taká, že $L(G_P) = L(G_L)$

Metóda:

- 1.) $N' = N \cup \{S'\}$ kde $S' \notin N$
- 2.) $\Sigma' = \Sigma$
- 3.) P' : $\forall A, B, S \in N, w \in \Sigma^* :$
 - I. $(S \rightarrow \varepsilon) \in P'$
 - II. $(B \rightarrow Aw) \in P' \iff (A \rightarrow wB) \in P$
 - III. $(S' \rightarrow Aw) \in P' \iff (A \rightarrow w) \in P$

DEMONŠTRÁCIA

Vstup: Pravá lineárna gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow abA \mid bS \\ & A \rightarrow bB \mid S \mid ab \\ & B \rightarrow \varepsilon \mid aA \end{aligned}$$

Realizácia:

- 1.) $N' = N \cup \{S'\}$
- 2.) $\Sigma' = \Sigma$
- 3.) P' :

$S \rightarrow abA$	sa transformuje na	$A \rightarrow Sab$	podľa	II.
$S \rightarrow bS$	sa transformuje na	$S \rightarrow Sb$	podľa	II.
$A \rightarrow bB$	sa transformuje na	$B \rightarrow Ab$	podľa	II.
$A \rightarrow S$	sa transformuje na	$S \rightarrow A$	podľa	II.
$A \rightarrow ab$	sa transformuje na	$S' \rightarrow Aab$	podľa	III.
$B \rightarrow \varepsilon$	sa transformuje na	$S' \rightarrow B$	podľa	III.
$B \rightarrow aA$	sa transformuje na	$A \rightarrow Ba$	podľa	II.
	pridá sa	$S \rightarrow \varepsilon$	podľa	I.

Výstup: Ľavá lineárna gramatika $G_L = (N', \Sigma', P', S')$ taká, že $L(G) = L(G_L)$

Overenie:

Pravá lineárna gramatika G_P derivuje reťazec *babbaabb*.

$$S \Rightarrow bS \Rightarrow babA \Rightarrow babbB \Rightarrow babbaA \Rightarrow babbaS \Rightarrow babbaabA \Rightarrow babbaabbB \Rightarrow babbaabb$$

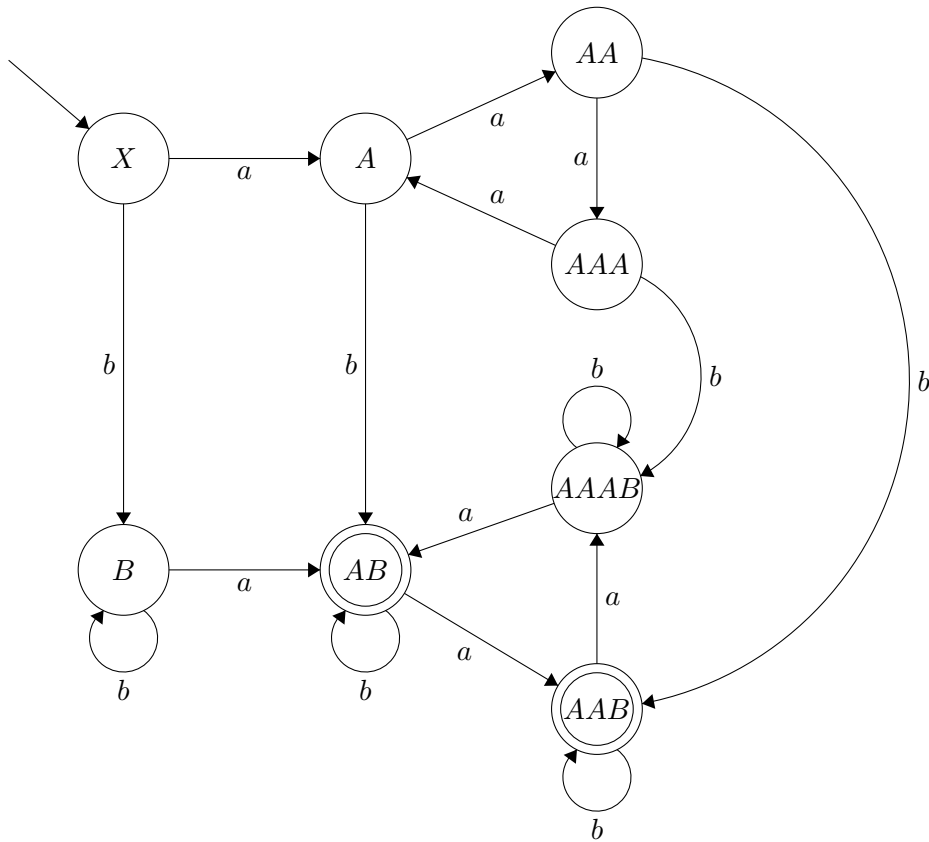
Ľavá lineárna gramatika G_L musí tiež derivovať reťazec *babbaabb*, keďže platí $L(G_P) = L(G_L)$.

$$S' \Rightarrow B \Rightarrow Ab \Rightarrow Sabb \Rightarrow Aabb \Rightarrow Baabb \Rightarrow Abaabb \Rightarrow Sabbaabb \Rightarrow Sbabbaabb \Rightarrow babbaabb$$

5 Príklad číslo 5

Definícia \sim_L pre jazyk L :

$$u \sim_L v \stackrel{\text{def}}{\iff} (\#_a(u) \bmod 3 = \#_a(v) \bmod 3 \wedge ((\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0)))$$

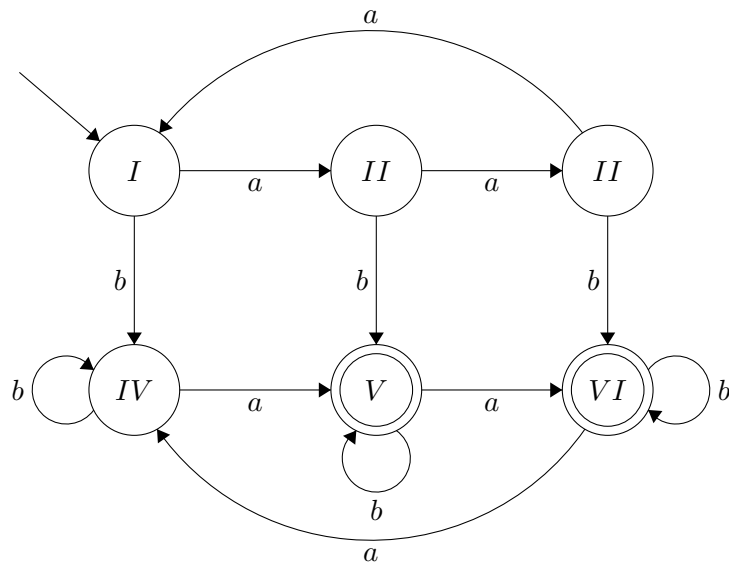


	\equiv^0	a	b
I	X	A(I)	B(I)
	A	AA(I)	AB(II)
	AA	AAA(I)	AAB(II)
	AAA	A(I)	AAAB(I)
	B	AB(II)	B(I)
	AAAB	AB(II)	AAAB(I)
II	AB	AAB(II)	AB(II)
	AAB	AAAB(I)	AAB(II)

	\equiv^1	a	b
I	X AAA	A(II) A(II)	B(III) AAAB(III)
II	A AA	AA(II) AAA(I)	AB(IV) AAB(V)
III	B AAAB	AB(IV) AB(IV)	B(III) AAAB(III)
IV	AB	AAB(V)	AB(IV)
V	AAB	AAAB(I)	AAB(V)

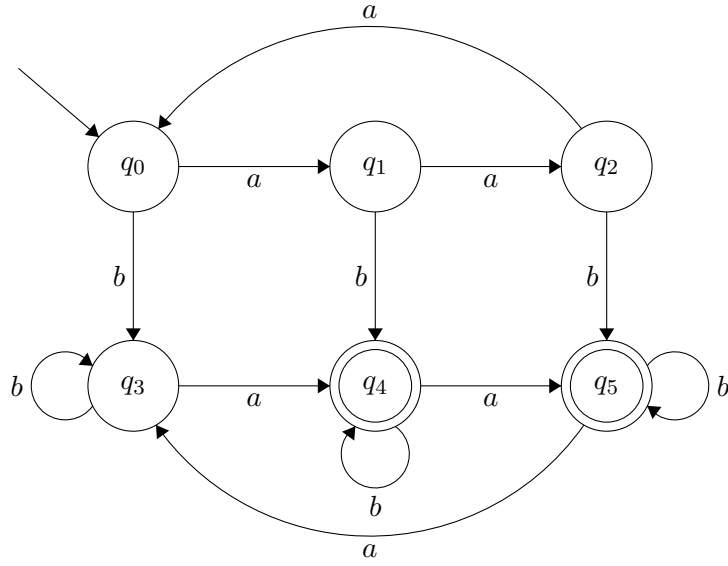
	\equiv^2	a	b
I	X AAA	A(II) A(II)	B(IV) AAAB(IV)
II	A	AA(III)	AB(V)
III	AA	AAA(I)	AAB(VI)
IV	B AAAB	AB(V) AB(V)	B(IV) AAAB(IV)
V	AB	AAB(VI)	AB(V)
VI	AAB	AAAB(IV)	AAB(VI)

$$\equiv^2 = \equiv^3 = \equiv$$



Premenujeme si jednotlivé stavy automatu:

$$\begin{aligned}
I &\rightarrow q_0 \\
II &\rightarrow q_1 \\
III &\rightarrow q_2 \\
IV &\rightarrow q_3 \\
V &\rightarrow q_4 \\
VI &\rightarrow q_5
\end{aligned}$$



Rozklad Σ^* / \sim_L je tvorený nasledujúcimi šiestimi triedami:

$$\begin{aligned}
L^{-1}(q_0) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_1) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_2) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_3) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
L^{-1}(q_4) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
L^{-1}(q_5) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) > 0\}
\end{aligned}$$

Rozklad Σ^* / \sim_L má tak konečný počet tried (šesť tried t.j. relácia \sim_L má index 6) z čoho vyplýva podľa Vety 3.20 [1](str. č. 48), že sa jedná o regulárny jazyk t.j. platí Veta 3.21 [1](str. č. 48), keďže sme vedeli zostrojiť minimálny konečný automat.

Jazyk L je tvorený zjednotením dvoch predošlých tried:

$$L = L^{-1}(q_4) \cup L^{-1}(q_5)$$

6 Literatúra

- [1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text*. 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].
URL: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>