

# FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



## TIN Teoretická informatika

### 1. domácí úloha

# Obsah

<b>1</b>	<b>Príklad číslo 1</b>	<b>2</b>
1.1	(a)	2
1.2	(b)	2
1.3	(c)	2
<b>2</b>	<b>Príklad číslo 2</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Príklad číslo 3</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Príklad číslo 4</b>	<b>4</b>
<b>5</b>	<b>Príklad číslo 5</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Literatúra</b>	<b>8</b>

# 1 Príklad číslo 1

## 1.1 (a)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa Vety 3.23 [1](str. č. 50) platí, že trieda regulárnych jazykov  $\mathcal{L}_3$  je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$$

Využitím hore uvedenej Vety 3.23 a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$$

## 1.2 (b)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa Vety 4.27 [1](str. č. 96) platí, že trieda deterministických bezkontextových jazykov  $\mathcal{L}_2^D$  je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$$

Využitím hore uvedenej Vety 4.27 a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2^D$$

## 1.3 (c)

Predpokladajme, že  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$  je pravdivý vzťah.

Ak berieme v úvahu, že  $L_1 = \Sigma^*$  (regulárny jazyk), tak musí platiť:

$$\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \textbf{SPOR}$$

Vznikol nám spor pri  $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$  z toho dôvodu, že podľa Vety 4.24 [1](str. č. 95) platí, že bezkontextové jazyky nie sú uzavreté voči prieniku a doplnku.

Takže  $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$  nie je pravdivý vzťah.

## 2 Příklad číslo 2

$$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$$

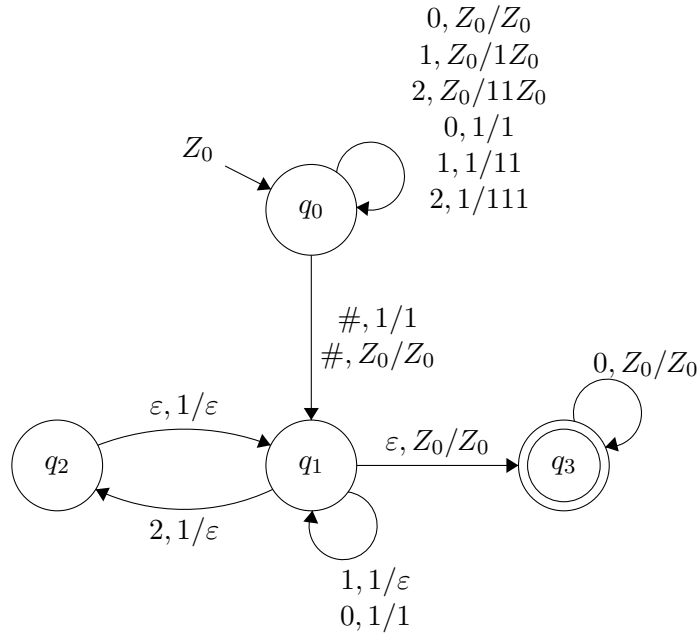
$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$$

$$\Sigma = \{\#, 0, 1, 2\}$$

$$\Gamma = \{Z_0, 1\}$$

$$F = \{q_3\}$$

$$\begin{aligned} \delta: \quad & \delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, Z_0) \\ & \delta(q_0, 1, Z_0) = (q_0, 1Z_0) \\ & \delta(q_0, 2, Z_0) = (q_0, 11Z_0) \\ & \delta(q_0, 0, 1) = (q_0, 1) \\ & \delta(q_0, 1, 1) = (q_0, 11) \\ & \delta(q_0, 2, 1) = (q_0, 111) \\ & \delta(q_0, \#, 1) = (q_1, 1) \\ & \delta(q_0, \#, Z_0) = (q_1, Z_0) \\ & \delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 1) \\ & \delta(q_1, 1, 1) = (q_1, \varepsilon) \\ & \delta(q_1, 2, 1) = (q_2, \varepsilon) \\ & \delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_3, Z_0) \\ & \delta(q_2, \varepsilon, 1) = (q_1, \varepsilon) \\ & \delta(q_3, 0, Z_0) = (q_3, Z_0) \end{aligned}$$



### 3 Príklad číslo 3

$$L = \{w_1 \# w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_1(w_1) + (2 * \#_2(w_1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w_2))\}$$

Veta 3.18 [1](str. č. 46): Nechť  $L$  je nekonečný regulární jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta  $p > 0$  taková, že platí:  $w \in L \wedge |w| \geq p \Rightarrow w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^i z \in L$  pro  $i \geq 0$

Predpokladáme že jazyk  $L$  je regulárny jazyk a tak tento jazyk musí spĺňať hore uvedenú Vetu 3.18.

Pre  $w \in L : w = 1^p \# 1^p$  pre ktoré platí podmienka  $|w| \geq p$  pretože platí  $2p + 1 > p$ , pričom z dôvodu podmienky  $|xy| \leq p$  nastane jediný prípad a to:

$$x = 1^l \wedge y = 1^m \wedge z = 1^{p-l-m} \# 1^p \text{ kde } l \geq 0 \text{ a } m > 0 \wedge l + m \leq p \text{ pre } l, m \in N$$

$$xy^i z = 1^l (1^m)^i 1^{p-l-m} \# 1^p = 1^{l+(i*m)+p-l-m} \# 1^p = 1^{(i*m)+p-m} \# 1^p \notin L \text{ pre všetky } i \geq 0 \wedge i \neq 1 \wedge i \in N$$

Z predošlého vzťahu vyplýva, že jazyk  $L$  nie je regulárny.

### 4 Príklad číslo 4

#### ALGORITMUS

**Vstup:** Pravá lineárna gramatika  $G_P = (N, \Sigma, P, S)$

**Výstup:** Ľavá lineárna gramatika  $G_L = (N', \Sigma', P', S')$  taká, že  $L(G_P) = L(G_L)$

**Metóda:**

- 1.)  $N' = N \cup \{S'\}$  kde  $S' \notin N$
- 2.)  $\Sigma' = \Sigma$
- 3.)  $P'$ :  $\forall A, B, S \in N, w \in \Sigma^* :$ 
  - I.  $(S \rightarrow \varepsilon) \in P'$
  - II.  $(B \rightarrow Aw) \in P' \iff (A \rightarrow wB) \in P$
  - III.  $(S' \rightarrow Aw) \in P' \iff (A \rightarrow w) \in P$

#### DEMONŠTRÁCIA

**Vstup:** Pravá lineárna gramatika  $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$$\begin{aligned} P: \quad & S \rightarrow abA \mid bS \\ & A \rightarrow bB \mid S \mid ab \\ & B \rightarrow \varepsilon \mid aA \end{aligned}$$

**Realizácia:**

- 1.)  $N' = N \cup \{S'\}$
- 2.)  $\Sigma' = \Sigma$
- 3.)  $P'$ :
 

$S \rightarrow abA$	sa transformuje na	$A \rightarrow Sab$	podľa	II.
$S \rightarrow bS$	sa transformuje na	$S \rightarrow Sb$	podľa	II.
$A \rightarrow bB$	sa transformuje na	$B \rightarrow Ab$	podľa	II.
$A \rightarrow S$	sa transformuje na	$S \rightarrow A$	podľa	II.
$A \rightarrow ab$	sa transformuje na	$S' \rightarrow Aab$	podľa	III.
$B \rightarrow \varepsilon$	sa transformuje na	$S' \rightarrow B$	podľa	III.
$B \rightarrow aA$	sa transformuje na	$A \rightarrow Ba$	podľa	II.
	pridá sa	$S \rightarrow \varepsilon$	podľa	I.

**Výstup:** Ľavá lineárna gramatika  $G_L = (N', \Sigma', P', S')$  taká, že  $L(G) = L(G_L)$

**Overenie:**

Pravá lineárna gramatika  $G_P$  derivuje reťazec *babbaabb*.

$$S \Rightarrow bS \Rightarrow babA \Rightarrow babbB \Rightarrow babbaA \Rightarrow babbaS \Rightarrow babbaabA \Rightarrow babbaabbB \Rightarrow babbaabb$$

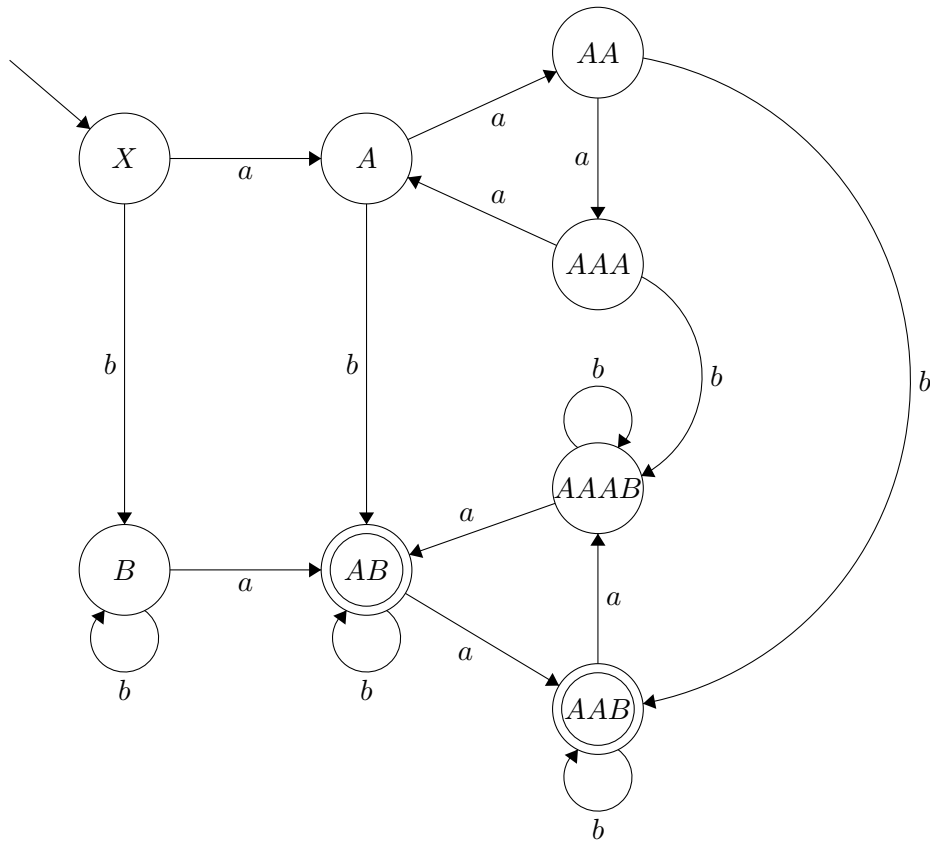
Ľavá lineárna gramatika  $G_L$  musí tiež derivovať reťazec *babbaabb*, keďže platí  $L(G_P) = L(G_L)$ .

$$S' \Rightarrow B \Rightarrow Ab \Rightarrow Sabb \Rightarrow Aabb \Rightarrow Baabb \Rightarrow Abaabb \Rightarrow Sabbaabb \Rightarrow Sbabbaabb \Rightarrow babbaabb$$

## 5 Príklad číslo 5

Definícia  $\sim_L$  pre jazyk  $L$ :

$$u \sim_L v \stackrel{\text{def}}{\iff} (\#_a(u) \bmod 3 = \#_a(v) \bmod 3 \wedge ((\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0)))$$

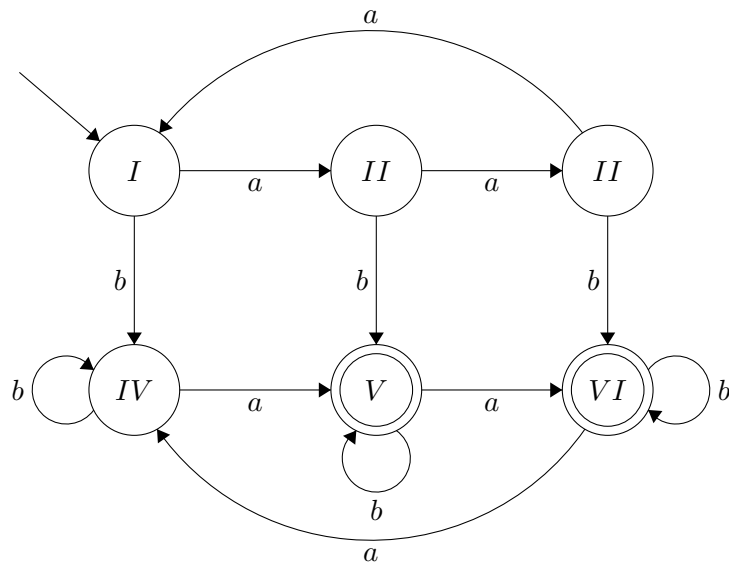


	$\equiv^0$	a	b
I	X	A(I)	B(I)
	A	AA(I)	AB(II)
	AA	AAA(I)	AAB(II)
	AAA	A(I)	AAAB(I)
	B	AB(II)	B(I)
	AAAB	AB(II)	AAAB(I)
II	AB	AAB(II)	AB(II)
	AAB	AAAB(I)	AAB(II)

	$\equiv^1$	a	b
I	X AAA	A(II) A(II)	B(III) AAAB(III)
II	A AA	AA(II) AAA(I)	AB(IV) AAB(V)
III	B AAAB	AB(IV) AB(IV)	B(III) AAAB(III)
IV	AB	AAB(V)	AB(IV)
V	AAB	AAAB(I)	AAB(V)

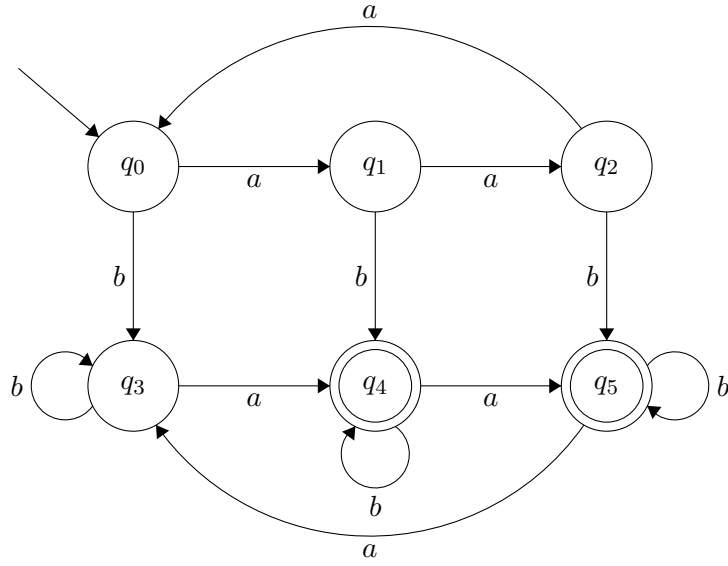
	$\equiv^2$	a	b
I	X AAA	A(II) A(II)	B(IV) AAAB(IV)
II	A	AA(III)	AB(V)
III	AA	AAA(I)	AAB(VI)
IV	B AAAB	AB(V) AB(V)	B(IV) AAAB(IV)
V	AB	AAB(VI)	AB(V)
VI	AAB	AAAB(IV)	AAB(VI)

$$\equiv^2 = \equiv^3 = \equiv$$



Premenujeme si jednotlivé stavy automatu:

$$\begin{aligned}
I &\rightarrow q_0 \\
II &\rightarrow q_1 \\
III &\rightarrow q_2 \\
IV &\rightarrow q_3 \\
V &\rightarrow q_4 \\
VI &\rightarrow q_5
\end{aligned}$$



Rozklad  $\Sigma^* / \sim_L$  je tvorený nasledujúcimi šiestimi triedami:

$$\begin{aligned}
 L^{-1}(q_0) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
 L^{-1}(q_1) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
 L^{-1}(q_2) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
 L^{-1}(q_3) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 0 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
 L^{-1}(q_4) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \wedge \#_b(w) > 0\} \\
 L^{-1}(q_5) &= \{w \mid \#_a(w) \bmod 3 = 2 \wedge \#_b(w) > 0\}
 \end{aligned}$$

Rozklad  $\Sigma^* / \sim_L$  má tak konečný počet tried (šesť tried t.j. relácia  $\sim_L$  má index 6) z čoho vyplýva podľa Vety 3.20 [1](str. č. 48), že sa jedná o regulárny jazyk t.j. platí Veta 3.21 [1](str. č. 48), keďže sme vedeli zostrojiť minimálny konečný automat.

Jazyk  $L$  je tvorený zjednotením dvoch predošlých tried:

$$L = L^{-1}(q_4) \cup L^{-1}(q_5)$$



## 6 Literatúra

- [1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text*. 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].  
URL: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>