

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ
VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



TIN
Teoretická informatika

3. domácí úloha

Obsah

1	Príklad číslo 1	2
1.1	(a)	2
1.2	(b)	3
2	Príklad číslo 2	4
3	Príklad číslo 3	5
4	Príklad číslo 4	7
5	Príklad číslo 5	8
6	Literatúra	9

2

Pre $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ odpovedá rada čísel 1, 1, 2, 3, 5, 8. Na základe získaných hodnôt ktoré sú uvedné vyššie v tabuľke a faktu, že sa jedná o veľmi známu radu čísel vyplýva, že funkcia f generuje čísla z Fibonacciho rady.

1.2 (b)

Funkciu f môžeme definovať ako parciálne rekurzívnu funkciu nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi_1^2 \circ h(x) \\ h(x+1) &= (\pi_2^2 \circ h(x), plus(\pi_1^2 \circ h(x), \pi_2^2 \circ h(x))) \\ h(0) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Demonštrácia na príklade pre $f(5)$

$$\begin{aligned} f(5) &= \pi_1^2 \circ h(5) \\ &= \pi_1^2(8, 13) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(5) &= (\pi_2^2 \circ h(4), plus(\pi_1^2 \circ h(4), \pi_2^2 \circ h(4))) \\ &= (\pi_2^2(5, 8), plus(\pi_1^2(5, 8), \pi_2^2(5, 8))) \\ &= (8, plus(5, 8)) \\ &= (8, 13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(4) &= (\pi_2^2 \circ h(3), plus(\pi_1^2 \circ h(3), \pi_2^2 \circ h(3))) \\ &= (\pi_2^2(3, 5), plus(\pi_1^2(3, 5), \pi_2^2(3, 5))) \\ &= (5, plus(3, 5)) \\ &= (5, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(3) &= (\pi_2^2 \circ h(2), plus(\pi_1^2 \circ h(2), \pi_2^2 \circ h(2))) \\ &= (\pi_2^2(2, 3), plus(\pi_1^2(2, 3), \pi_2^2(2, 3))) \\ &= (3, plus(2, 3)) \\ &= (3, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(2) &= (\pi_2^2 \circ h(1), plus(\pi_1^2 \circ h(1), \pi_2^2 \circ h(1))) \\ &= (\pi_2^2(1, 2), plus(\pi_1^2(1, 2), \pi_2^2(1, 2))) \\ &= (2, plus(1, 2)) \\ &= (2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(1) &= (\pi_2^2 \circ h(0), plus(\pi_1^2 \circ h(0), \pi_2^2 \circ h(0))) \\ &= (\pi_2^2(1, 1), plus(\pi_1^2(1, 1), \pi_2^2(1, 1))) \\ &= (1, plus(1, 1)) \\ &= (1, 2) \end{aligned}$$

$$h(0) = (1, 1)$$

2 Příklad číslo 2

Nevypracované.

3 Príklad číslo 3

Dôkaz:

1.) Dôkaz sporom pre ' \subseteq '

Predpokladajme, že platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

Potom

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : 3^{2n} \leq c 2^{3n}$$

Môžeme krátiť vzhľadom ku tomu, že $3^{2n} \neq 0$ pre žiadne n

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{c 2^{3n}}{3^{2n}} \geq 1$$

Uvážme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c 2^{3n}}{3^{2n}}$$

Vypočítame hore uvedenú limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c 2^{3n}}{3^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c (2^3)^n}{(3^2)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c 8^n}{9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \frac{8^n}{9^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \left(\frac{8}{9}\right)^n = c 0 = 0$$

Nemôže súčasne platiť, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c 2^{3n}}{3^{2n}} = 0$$

a

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{c 2^{3n}}{3^{2n}} \geq 1$$

z čoho vyplýva, že sa jedná o spor z čoho vyplýva, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \not\subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

2.) Dôkaz sporom pre ' \supseteq '

Predpokladajme, že platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

Potom

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : c 3^{2n} \geq 2^{3n}$$

Môžeme krátiť vzhľadom ku tomu, že $2^{3n} \neq 0$ pre žiadne n

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{c 3^{2n}}{2^{3n}} \geq 1$$

Uvážme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c 3^{2n}}{2^{3n}}$$

Vypočítame hore uvedenú limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c3^{2n}}{2^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(3^2)^n}{(2^3)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c9^n}{8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \frac{9^n}{8^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \left(\frac{9}{8}\right)^n = c(+\infty) = +\infty$$

Keďže platí, že

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c3^{2n}}{2^{3n}} = +\infty$$

a

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \frac{c3^{2n}}{2^{3n}} \geq 1$$

tak z toho vyplýva, že predpokladaný vzťah platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

3.) Priamy dôkaz pre '='

Keďže z hore uvedených dôkazov platí, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \not\subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

a

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

tak z toho vyplýva, že nasledujúci vzťah neplatí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) = \mathcal{O}(2^{3n})$$

teda musí platiť, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \neq \mathcal{O}(2^{3n})$$

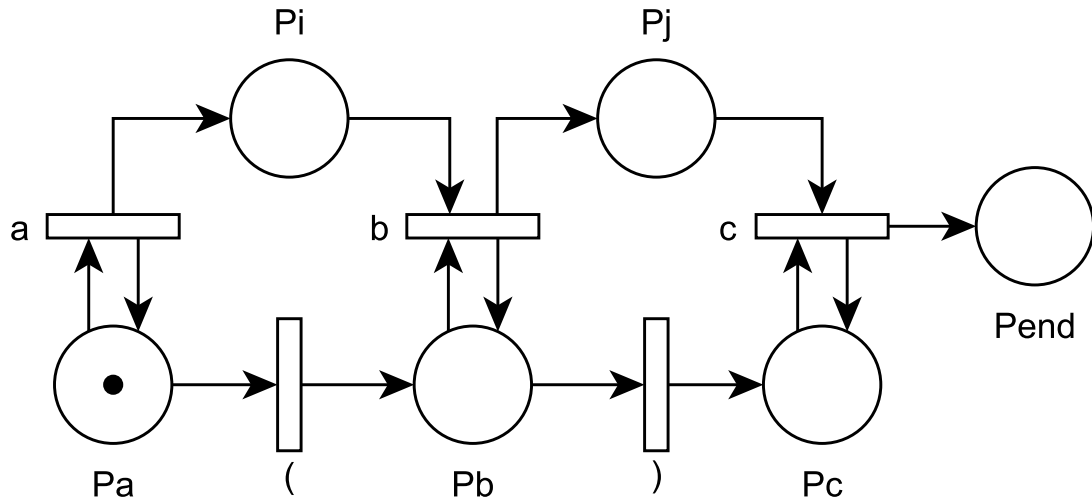
4 **Príklad číslo 4**

Nevypracované.

5 Príklad číslo 5

Na obrázku 1 je nakreslená petriho sieť ktorá akceptuje jazyk

$$L = \{a^i(b^j)c^k \in \{a, b, c, (,)\}^* \mid i \geq j = k\}$$



Obr. 1: Petriho sieť.

6 Literatúra

- [1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text*. 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].
URL: <http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>