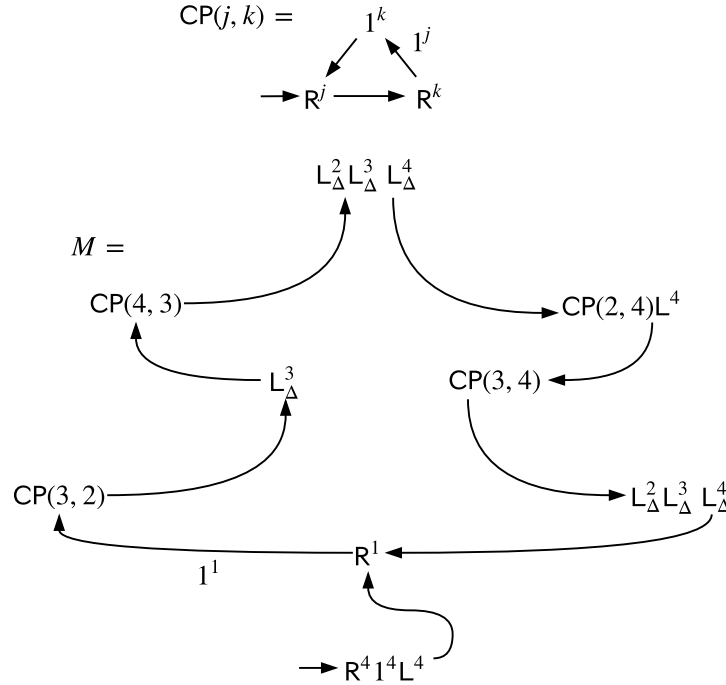


**Teoretická informatika (TIN) – 2018/2019**

**Úkol 3**

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)



Obrázek 1: Vánoční stroječek  $M$  a parametrizovaný stroj  $CP(j, k)$ . Horní index označuje pásku, na které se daná akce vykonává.

- Na obrázku je kompozitní diagram vánočního Turingova stroječku  $M$ . Jde o čtyřpáskový stroj se vstupní abecedou  $\Sigma = \{1\}$  a páskovou abecedou  $\Gamma = \{\Delta, 1\}$ . Obsahuje volání strojů  $CP(j, k)$ , které kopírují obsah  $j$ -té pásky nacházející se vpravo za její hlavou doprava za hlavu  $k$ -té pásky. Počáteční konfigurace pásek a hlav  $M$  je

- 1:  $\underline{\Delta} x \Delta^\omega$
- 2:  $\underline{\Delta} \Delta^\omega$
- 3:  $\underline{\Delta} \Delta^\omega$
- 4:  $\underline{\Delta} \Delta^\omega$ .

$M$  vyčísluje jistou funkci  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Vstupem je unární zápis  $x$  přirozeného čísla na pásce 1, výstupem je unární zápis přirozeného čísla nacházející se po zastavení stroje na pásce 4.

- (a) Identifikujte funkci  $f$ . Náповěda:  $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), \dots$  je dobře známá řada čísel.
- (b) Zapište  $f$  jako parciálně rekurzivní funkci. Můžete použít funkce  $eq, \neg eq, monus$  a  $plus$  z přednášek a použít zjednodušený zápis funkcí. Inspirujte se příklady z přednášek a STI.

10 bodů

- Uvažujte jazyk predikátové logiky  $L$  prvního řádu bez rovnosti s jedním predikátovým symbolem  $p$  s četností 1 a množinou spočetně mnoha nulárních funkčních symbolů  $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ . Pomocí diagonalizace dokažte, že množina realizací jazyka  $L$ , které mají jako univerzum množinu  $\mathbb{N}$ , je nespočetná.

13 bodů

3. Rozhodněte a dokažte, které ze vztahů  $\{\subseteq, \supseteq, =\}$  platí mezi  $\mathcal{O}(3^{2n})$  a  $\mathcal{O}(2^{3n})$ . Náповěda: zopakujte si pravidla pro počítání s mocninami a logaritmy.

5 bodů

4. Teta Květa peče cukroví na předvánoční setkání s kamarádkami; v Kauflandu nakoupila spoustu surovin v akci (např. mouku, mléko, mák) a od tety Běty si půjčila Vánoční kuchařku. Nyní stojí nad sporákem a přemýšlí, kolik jakého cukroví musí napéct, aby bylo dost cukroví pro všechny kamarádky. Dokažte, že *Problém Tety Květy* je NP-úplný.

Upřesnění: Každý kus cukroví v kuchařce tety Běty vyžaduje určitý počet (celé číslo) měrných jednotek jednotlivých surovin (např. gramy u mouky, mililitry u mléka). Příklad: Jeden vanilkový rohlíček vyžaduje 10 g cukru, 1 vanilkový lusk, 5 vlašských ořechů a 10 g másla. Teta Květa řeší následující rozhodovací problém: existuje počet kusů každého cukroví z kuchařky tak, že množství potřebných surovin pro jejich napečení nepřekročí množství nakoupených surovin a bude napečeno alespoň tolik kusů, kolik má teta Květa kamarádek?

Náповěda: Použijte redukci z některého z následujících vybraných NP-úplných problémů strejdy Karpa<sup>1</sup> (u optimalizačních problémů uvažujte jejich rozhodovací variantu, tj. pokud se optimalizační varianta ptá, jaké je nejlepší řešení, rozhodovací varianta se ptá, jestli existuje řešení, které má alespoň danou kvalitu):

- obarvitelnost grafu [https://en.wikipedia.org/wiki/Graph\\_coloring](https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring),
- problém batohu [https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem),
- celočíselné programování [https://en.wikipedia.org/wiki/Integer\\_programming](https://en.wikipedia.org/wiki/Integer_programming),
- vrcholové pokrytí grafu [https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex\\_cover](https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover) nebo
- Hamiltonovská cesta [https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian\\_path\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem).

14 bodů

5. Uvažujte definici jazyka Petriho sítě v přednášce o Petriho sítích na slajdu 18 (provedení přechodu odpovídá přečtení stejnojmenného symbolu) s tím, že přijímající jsou jen ty výpočetní posloupnosti, které vedou do deadlocku, tj. do značení, ze kterého není možné provést žádný přechod. Navrhněte Petriho síť, která přijímá jazyk  $\{a^i(b^j)c^k \in \{a, b, c, (, )\}^* \mid i \geq j = k\}$  (příklad ilustruje, že Petriho síť přijímají některé jazyky, které nejsou bezkontextové).

8 bodů

---

<sup>1</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Karp%27s\\_21\\_NP-complete\\_problems](https://en.wikipedia.org/wiki/Karp%27s_21_NP-complete_problems)