

Teoretická informatika (TIN) – 2018/2019

Úkol 2

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Mějme gramatiku $G = (\{S\}, \{[,]\}, P, S)$ s pravidly

$$S \rightarrow \epsilon \mid [S]S.$$

Nechť L je Dyckův jazyk nad jednou dvojicí závorek $\{[,]\}$. Dokažte, že $L \subseteq L(G)$. Postupujte takto:

- Ukažte, že každé slovo $w \in L$ lze napsat ve formě $[u]v$ kde $u, v \in L$. (Nápověda: Jak se dá napsat nejkratší neprázdný prefix slova w , který je sám také v L ?)
- Dokažte, že $L \subseteq L(G)$, a to indukcí k počtu $[$ ve slově. Tvrzení (a) použijte v indukčním kroku. (Báze: důkaz pro 0; Indukční krok: důkaz pro $i > 0$ za předpokladu, že tvrzení platí pro všechna $j < i$.)

15 bodů

2. Je jazyk $L_{primes} = \{a^n \mid n \text{ je prvočíslo}\}$ bezkontextový? Dokažte.

10 bodů

3. Nechť $a_0, a_1 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ jsou dané konstanty. Uvažujte jazyk

$$Affine = \{w \in \{0, 1\}^* \mid a_0 \cdot \#_0(w) + a_1 \cdot \#_1(w) - a_0 a_1 = 0\}.$$

Dokažte pomocí redukce z problému členství (membership problem), že problém, zda jazyk daného Turingova stroje M obsahuje alespoň jeden řetězec z jazyka $Affine$, je nerozhodnutelný. Dále uveďte ideu důkazu, že problém je částečně rozhodnutelný.

10 bodů

4. Uvažujte programovací jazyk **RationalC** s následující gramatikou:

$$\begin{aligned} \langle stmt \rangle &::= x = \lceil \text{odd}(x) \rceil \mid x = \lfloor \text{even}(x) \rfloor \mid x *= 2 \mid x /= 2 \mid \text{return } b \mid \\ &\quad \text{if } x \% 2 == b \text{ goto } n \\ \langle stmt\text{-list} \rangle &::= \langle stmt \rangle; \langle stmt\text{-list} \rangle \mid \langle stmt \rangle \\ \langle program \rangle &::= \langle stmt\text{-list} \rangle; \text{return } b; \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $b \in \{0, 1\}$ a počáteční neterminál je $\langle program \rangle$ (uvažujeme že $0 \in \mathbb{N}$). Sémantika je následující:

- Program v **RationalC** je spuštěn na stroji s jedním registrem x , jenž může obsahovat racionální číslo s neomezenou přesností.
- Na začátku běhu programu je v registru x uloženo přirozené číslo $x_0 \in \mathbb{N}$ (vstup programu).
- Příkaz $x = \lceil \text{odd}(x) \rceil$ změní celou část čísla v registru x na nejbližší větší nebo rovné liché číslo. Např. $\lceil \text{odd}(42.1337) \rceil = 43.1337$ a $\lceil \text{odd}(1.00777) \rceil = 1.00777$.
- Příkaz $x = \lfloor \text{even}(x) \rfloor$ změní celou část čísla v registru x na nejbližší menší nebo rovné sudé číslo. Např. $\lfloor \text{even}(42.1337) \rfloor = 42.1337$ a $\lfloor \text{even}(1.00777) \rfloor = 0.00777$.
- Příkaz $x *= 2$ vynásobí číslo v registru x dvěma.
- Příkaz $x /= 2$ vydělí číslo v registru x dvěma.
- Příkaz **return** b ukončí program s návratovou hodnotou b .
- Příkaz **if** $x \% 2 == b$ **goto** n provede podmíněný skok na n -tý příkaz (příkazy jsou číslovány od 1 a odděleny znakem středníku) v případě, že celá část čísla v registru x je (pro $b = 0$) či není (pro $b = 1$) dělitelná dvěma. Uvažujte, že syntakticky správný program neobsahuje skoky, kde n je větší než číslo posledního příkazu v programu.

Obrázek 1 obsahuje příklady programů v jazyce **RationalC**.

Dokažte, že programovací jazyk **RationalC** je Turingovsky úplný, tj., dokažte, že

Příklad 1: program vracející 1 právě tehdy, když je x_0 dělitelné 8

```
0 if x % 2 == 1 goto 6;  
1 x /= 2;  
2 if x % 2 == 1 goto 6;  
3 x /= 2;  
4 if x % 2 == 1 goto 6;  
5 return 1;  
6 return 0;
```

Příklad 2: program vracející 1 právě tehdy, když binární zápis čísla x_0 patří do jazyka popsaného regulárním výrazem $(0 + 1)^*0011(01 + 10)^*$.

```
0 if x % 2 == 0 goto 3;  
1 if x % 2 == 1 goto 3;  
2 x /= 2; // loop head  
3 if x % 2 == 1 goto 7;  
4 x /= 2;  
5 if x % 2 == 1 goto 2;  
6 if x % 2 == 0 goto 14;  
7 x /= 2;  
8 if x % 2 == 0 goto 2;  
9 x /= 2; // found '11'  
10 if x % 2 == 1 goto 14;  
11 x /= 2;  
12 if x % 2 == 1 goto 14;  
13 return 1;  
14 return 0;
```

Obrázek 1: Příklady programů v jazyce **RationalC**

- (a) pro každý TS M nad abecedou $\{0, 1\}$ a řetězec $w \in \{0, 1\}^*$ lze sestrojit program P_M v jazyce **RationalC** a zvolit počáteční hodnotu x_0 tak, že P_M skončí s návratovou hodnotou 1 právě tehdy, když $w \in L(M)$;
- (b) pro každý program P v jazyce **RationalC** a počáteční hodnotu x_0 lze sestrojit TS M_P a řetězec $w \in \{0, 1\}^*$ tak, že $w \in L(M_P)$ právě tehdy, když P s počáteční hodnotou x_0 skončí s návratovou hodnotou 1.

Nápověda: binární zápis čísla 42.625_{10} je 101010.101_2 .

15 bodů