Faculty of Informatics
Masaryk University Brno

Cvičení k předmětům IB005 Formální jazyky a automaty a IB102 Automaty, gramatiky a složitost

poslední modifikace 5. května 2015

Tato sbírka byla vytvořena z příkladů ke cvičení z předmětu *Formální jazyky a automaty I*, které byly původně připraveny Ivanou Černou. Na opravě chyb a doplnění příkladů se podílelo mnoho studentů a cvíčící předmětů *IB005* a *IB102* Jiří Barnat, Vojtěch Řehák a Jan Strejček.

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 Jsou dány jazyky L_1, L_2 nad abecedou $\{x, y, z\}$, kde $L_1 = \{xy, y, yx\}$, $L_2 = \{y, z\}$. Vypočítejte:

a) $L_1 \cup L_2$
b) $L_1 \cap L_2$
c) $L_1 \cdot L_2$, $L_2 \cdot L_1$
d) L_2^0, L_2^1, L_2^2, L_2^3, L_2^*, L_2^+
e) $co - L_2$

1.2 Vypočítejte:

a) $\emptyset^*$, $\emptyset^+$, $\{\varepsilon\}^*$, $\{\varepsilon\}^+$
b) $\emptyset \cup \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cap L$, $\{\varepsilon\} \cap L$
c) $\emptyset \cdot \{\varepsilon\}$, $\emptyset \cdot L$, $\{\varepsilon\} \cdot \{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\} \cdot L$

1.3 Jsou dané jazyky $L_1, L_2 \subseteq \{a, b, c, d\}^*$, kde $L_1 = \{a, aa, ba\}$, $L_2 = \{ba, abc, a, \varepsilon\}$.

a) Vypočítejte $L_1 \cup L_2$.
b) Vypočítejte $L_1 \cap L_2$.
c) Vypočítejte $L_1 \cdot L_2$.
d) Rozhodněte, zda platí $L_1 \cdot L_2 = L_2 \cdot L_1$.
e) Najděte slovo $w \in L_1 \cdot L_2 \cap L_2 \cdot L_1$.
f) Rozhodněte, zda platí $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$. Pokud ano, platí tvrzení pro libovolnou dvojici jazyků L_1, L_2 ? Pro pokročilé: platí $\varepsilon \in L_2 \iff L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$?
g) Rozhodněte, zda platí
   - $aabaabc \in L_2^4$
   - $baaabc \in L_2^6$
   - $ababc \in L_2^3$
h) Popište $co - L_2$ (komplement jazyka L_2).

1.4 Buď L libovolný jazyk, rozhodněte zda platí:

a) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L^i = \{w^i \mid w \in L\}$
b) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $w \in L^i \Rightarrow |w| = i$
c) najděte jazyk, pro který oba výše uvedené vztahy platí

1.5 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_4$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{xyz\}^*$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_5 = (\{x, y\}^* \cup \{z\}^*)^*$

- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.6 Porovnejte (slovně popište) jazyky a rozhodněte zda $L_1 = L_3$

- $L_1 = \{x, y, z\}^*$
- $L_2 = \{x, y, z\}^+$
- $L_3 = \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
- $L_4 = \{x\}^* \cdot \{y\}^2 \cdot \{z\}^*$
- $L_5 = (\{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*)^*$
- $L_6 = \{x, y, z\}^* \cdot \{x\} \cdot \{x, y, z\}^*$

1.7 Pomocí jazyků $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{b\}$ nad abecedou $\{a, b\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace (*,$^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk, obsahující všechna slova, která

a) obsahují alespoň 2 znaky a
b) mají sudou délku
c) začínají znakem a a končí znakem b
d) začínají a končí stejným znakem
e) obsahují podslovo aba
f) splňují b) a c)
g) nesplňují b)

1.8 Pro libovolné jazyky L_1, L_2, L_3 dokažte, zda platí, nebo neplatí:

a) $L_1 \subset L_1 \cdot L_2$
b) $(L_1 \cup L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cup (L_2 \cdot L_3)$
c) $(L_1 \cap L_2) \cdot L_3 = (L_1 \cdot L_3) \cap (L_2 \cdot L_3)$
d) pro $\forall i \in \mathbb{N}$ platí $L_1^i \cdot L_2^i = (L_1 \cdot L_2)^i$
e) $L_1^* \cup L_2^* = (L_1 \cup L_2)^*$
f) $L_1^* \cdot L_1^* = L_1^*$
g) $(L_1 \cup L_2)^* = (L_1^* \cdot L_2 \cdot (L_1)^*)^*$

1.9 Jaký jazyk generuje gramatika G a jakého je typu?

a) $G = (\{S, A, B, C\},\{a, b, c, d\},P, S)$, kde
$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & S & \to & aSb & \mid & cAd, \\
& cA & \to & aB & \mid & Ca, \\
& Bd & \to & Sb & \mid & A, \\
& Cad & \to & ab & \mid & \varepsilon \ \}
\end{array}
$$
b) $G = (\{S, A\},\{b, c, a\},P, S)$, kde
$$
\begin{array}{lllllllllllll}
P = \{ & S & \to & bS & \mid & cS & \mid & aA, & & & & & \\
& A & \to & aA & \mid & bA & \mid & cA & \mid & a & \mid & b & \mid \ c \ \}
\end{array}
$$

1.10 Jaký jazyk generuje následující gramatika? Diskutujte vhodné označení neterminálů $(S_{00}, S_{01}, S_{10}, S_{11})$.

$G = (\{S, A, B, C\},\{a, b\},P, S)$, kde
$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & aA & \mid & bB & \mid & \varepsilon, \\
& A & \to & aS & \mid & bC, & & \\
& B & \to & aC & \mid & bS, & & \\
& C & \to & aB & \mid & bA \ \} & &
\end{array}
$$

1.11 Navrhněte regulární gramatiky pro následující jazyky:

a) $L = \{a, b, c, d\}^*$

b) $L = \{a, b, c, d\}^i \{a, b, c, d\}^*; i = 2, 10, 100$

c) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| \geq 3\}$

d) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*, |w| = 3k,\ k \geq 0\}$

e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ obsahuje podslovo $abb\}$

f) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*$, první 3 znaky $w =$ poslední 3 znaky $w\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w$ neobsahuje podslovo $abb\}$

i) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 3l + 1,\ k, l \geq 0\}$

j) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $5\}$

k) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $3\}$

l) $L = \{w \mid w \in \{0, 1, \ldots, 9\}^*, w$ je zápis přir. čísla dělitelného $25\}$

Deterministické konečné automaty, pumping lemma

2.1 Je dán následující konečný automat: $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$

$$\begin{array}{ll} \delta(q_0, a) = q_1 & \delta(q_0, b) = q_2 \\ \delta(q_1, a) = q_3 & \delta(q_1, b) = q_1 \\ \delta(q_2, a) = q_2 & \delta(q_2, b) = q_2 \\ \delta(q_3, a) = q_1 & \delta(q_3, b) = q_2 \end{array}$$

a) Uveďte jinou formu zápisu automatu.

b) Popište jazyk akceptovaný konečným automatem A.

c) Diskutujte variantu konečného automatu, kde $F = \{q_3, q_2\}$; $\delta(q_3, a) = q_0$

2.2 Konstruujte **deterministické** FA, které rozpoznávají následující množiny

a) $\{a, b, c\}^5 \cdot \{a, b, c\}^*$

b) $\{w \mid w \in \{a\}^*;\ |w| = 2k \text{ nebo } |w| = 7l;\ k, l \geq 0\}$

c) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = 3k; k \geq 0\}$

d) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } abbab\}$

e) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ obsahuje podslovo } ababb\}$

f) $\{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w \text{ neobsahuje podslovo } abbab\}$

g) $\{a, b\}^* \cdot (\{c, d\} \cup (\{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\})) \cdot \{a, b\}^+$

h) $(\{a\} \cup \{b\} \cdot \{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{a\} \cdot \{b\})^*$

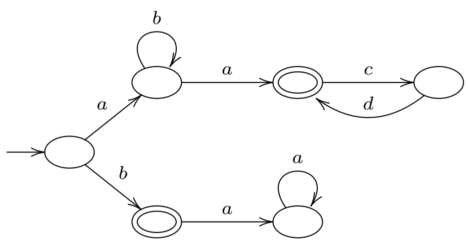
2.3 Konstruujte **deterministické** FA pro následující jazyk nad abecedou $\{a, b, c, d\}$

a) $L = \{a, b\}^* \cdot \{c\} \cdot \{aa, b\}^* \cdot \{d\}^+$

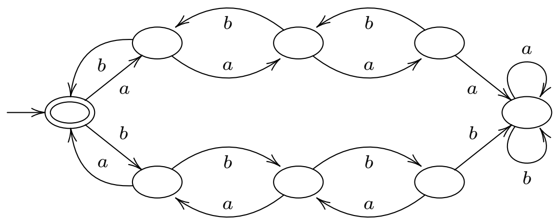
b) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, w \text{ neobsahuje podslovo } babb\}$

c) $L = \{a, b\}^* \cdot (\{cd\}^+ \cdot \{d\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{c\}) \cdot \{a, b\}^+$

2.4 Pomocí množin $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ a množinových operací sjednocení ($\cup$), průniku ($\cap$), konkatenace ($\cdot$), iterace ($^*, ^+$) a doplňku ($co-$) vyjádřete jazyk akceptovaný automatem:



2.5 Co akceptuje následující automat? ($\#_a(w) = \#_b(w)$ je špatná odpověď)



2.6 Pomocí **věty o vkládání** dokažte, že jazyk L není regulární:

a) $L = \{a^i b^j \mid j > i \geq 1\}$
b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ \#_a(w) = \#_b(w)\}$
c) $L = \{w \cdot w^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$
d) $L = \{a^n \mid n = 2^i;\ i \geq 0\}$
e) $L = \{a^i b^j \mid i \neq j;\ i, j \geq 0\}$
f) $L = \{a^n b^{(n!)^2} \mid n \geq 0\}$
g) $L = \{c^i a^j b^k \mid j \leq k;\ i, j, k \in \mathbb{N}\}$

2.7 Pro pokročilé: Zkonstruujte konečný automat A rozpoznávající jazyk $L = \{a\}^* \cdot \{b\}$. Dokažte, že automat rozpoznává zadaný jazyk, tedy že $L(A) = L$.

2.8 Konstruujte **deterministické** FA pro všechny regulární jazyky příkladu 1.11.

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 Pro následující konečné automaty zadané tabulkou:

- ověřte, že všechny stavy jsou dosažitelné
- zkonstruujte minimální automat
- minimální automat zapište v kanonickém tvaru

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	2	3
2	5	2
3	3	5
$\leftarrow 4$	12	2
$\leftarrow 5$	7	8
6	4	9
7	12	11
8	4	6
9	10	8
$\leftarrow 10$	3	2
$\leftarrow 11$	12	6
12	3	10

b)

	a	b
$\leftrightarrow 1$	3	2
2	6	4
3	3	5
$\leftarrow 4$	4	2
5	10	8
6	6	7
$\leftarrow 7$	7	5
$\leftarrow 8$	8	2
$\leftarrow 9$	11	2
10	10	9
$\leftarrow 11$	11	5

3.2 Odstraňte nedosažitelné stavy z DFA zadaného tabulkou vlevo a minimalizujte ho a převeďte do kanonického tvaru. Poté ověřte, zda je výsledný automat ekvivalentní s automatem zadaným tabulkou vpravo.

a)

	a	b
$\rightarrow 1$	5	2
2	2	8
3	2	7
$\leftarrow 4$	9	4
5	2	1
6	2	5
$\leftarrow 7$	8	6
8	2	4
9	8	9

	a	b
$\rightarrow 1$	4	2
2	2	5
3	3	6
4	4	2
$\leftarrow 5$	5	3
$\leftarrow 6$	6	2

b)

	a	b
1	3	1
$\to$ 2	9	4
3	–	1
$\leftarrow$ 4	9	4
5	8	5
6	5	4
$\leftarrow$ 7	6	9
8	11	–
9	7	9
10	12	3
11	8	1
12	–	10

	a	b
A	B	A
$\leftarrow$ B	C	A
C	D	E
D	D	D
$\to$ E	A	E

3.3 Ověřte, zda DFA z příkladu 3.1 **a)** je ekvivalentní s následujícím DFA zadaným tabulkou

	a	b
A	A	C
$\to$ B	D	A
$\leftarrow$ C	D	A
D	C	D

3.4 Navrhněte nedeterministické konečné automaty pro následující jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo bba nebo $aba\}$

b) $L = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid w$ obsahuje podslovo $abbc$ nebo $acbca$ nebo $bcabb\}$

c) $L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w$ končí řetězcem $aaaa\}$

d) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ má čtvrtý symbol od konce $1\}$

e) $L = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w$ končí řetězcem $01011\}$

f) $L = ((\{0\}^* \cdot \{1\}) \cup (\{0\}^+ \cdot \{1\}^* \cdot \{0\})^*)^*$

g) $L = ((\{0\} \cdot \{0\} \cdot \{0\}^*) \cup (\{1\} \cdot \{1\} \cdot \{1\}^*))^*$

3.5 K daným nedeterministickým FA zkonstrujte deterministické FA.

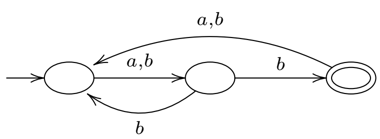
a)

	a	b	c
$\to$ 1	{2,3}	{3,4}	{1}
$\leftarrow$ 2	{3}	{4}	{2}
3	{1,2,3}	{1}	{3,4}
4	{1}	{1}	{3,4}

b)

	a	b	c
$\to$ 1	{1,2}	{1}	{1}
$\leftarrow$ 2	$\emptyset$	{3}	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\emptyset$	{4}
4	{5}	$\emptyset$	$\emptyset$
5	$\emptyset$	{6}	$\emptyset$
6	{7}	$\emptyset$	$\emptyset$
$\leftarrow$ 7	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

3.6 Popište jazyk akceptovaný automatem:



3.7 Kolik různých jazyků rozhodují automaty s jedním nebo se dvěma stavy nad abecedou $\{x\}$ nebo $\{x, y\}$?

3.8 Dokažte, že neexistuje automat se 4 stavy, který akceptuje jazyk:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \; |w| \geq 4\}$

b) $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| = 5k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$

3.9 Najděte a formálně popište alespoň dvě relace $\sim \subseteq \{a,b\}^* \times \{a,b\}^*$ splňující podmínky Nerodovy věty pro jazyk

$$L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*,\ w \text{ obsahuje podslovo } abb\}.$$

Určete indexy těchto relací.

3.10 Pomocí Nerodovy věty a posléze pomocí Myhill-Nerodovy věty dokažte, že není regulární:

a) $L = \{a^n \mid n = 2^i,\ i \geq 0\}$

b) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 2n,\ n, m > 0\}$

c) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^+\}$

d) $L = \{a^i b^j | i \neq j;\ i, j \geq 0\}$

3.11 Pomocí MN věty dokažte, že je regulární:

- $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 3k,\ k \geq 0\}$

3.12 Každý jazyk jednoznačně určuje relaci $\sim_L$ předpisem $u \sim_L v$ právě když pro každé w platí $uw \in L \Leftrightarrow vw \in L$. Určete index této relace pro jazyky:

a) $L = \{a\}^* \cdot \{b\}^* \cdot \{c\}^*$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

3.13 Nechť $\Sigma = \{a, b\}$. Uvažte následující relace na množině Σ^*:

a) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$

b) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ nebo u i v končí na stejné písmeno

c) $u \sim v \iff \#_a(u) \bmod 4 = \#_a(v) \bmod 4$ a u i v končí na stejné písmeno

(Prázdné slovo končí na stejné písmeno jako prázdné slovo, ale žádné neprázdné slovo na stejné písmeno nekončí.) U každé relace určete, zda je to ekvivalence. Pokud ano, určete její index a zda je pravou kongruencí. Pokud ano, nalezněte jazyk L takový, že $\sim_L = \sim$. Nakonec nalezněte jazyk L', který je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim$, ale přitom $\sim_{L'} \neq \sim$.

Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, ε-kroky, Kleeneho věta

4.1 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

$G = (\{S, A, C, B\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

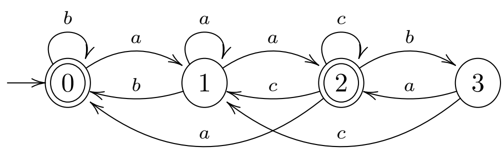
$$
\begin{array}{llllllllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid & bC & \mid & a & \mid & \varepsilon, & & \\
 & A & \rightarrow & bB & \mid & aA & \mid & b & \mid & c, & & \\
 & B & \rightarrow & aB & \mid & bC & \mid & aC & \mid & cA & \mid & c, \\
 & C & \rightarrow & a & \mid & b & \mid & aA & \mid & bB \} & &
\end{array}
$$

4.2 Zkonstruujte ekvivalentní konečný automat k následující gramatice:

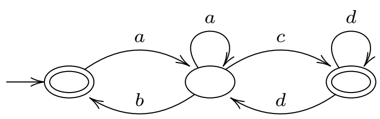
$G = (\{S, X, Y, Z\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \rightarrow & aX & \mid & bY & \mid & c, \\
 & X & \rightarrow & bX & \mid & bS, & & \\
 & Y & \rightarrow & bS & \mid & cZ, & & \\
 & Z & \rightarrow & aS & \mid & b & \mid & c \}
\end{array}
$$

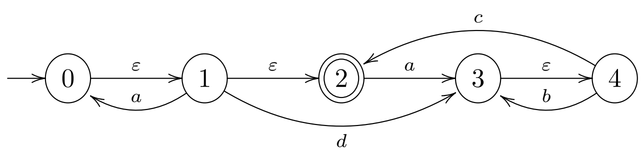
4.3 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



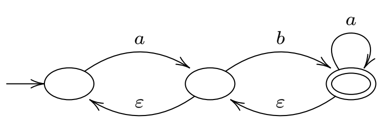
4.4 Zkonstruujte ekvivalentní gramatiku k automatu:



4.5 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.



4.6 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.



4.7 K danému automatu s ε-kroky zkonstruujte ekvivalentní automat bez ε-kroků.

	a	b	c	ε
$\rightarrow 1$	{1,2}	$\emptyset$	$\emptyset$	{2}
2	{5}	{3,5}	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	{6}	$\emptyset$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	{4}	$\emptyset$	{1,5}
5	{5}	$\emptyset$	{3}	{6}
$\leftarrow 6$	$\emptyset$	$\emptyset$	{3,6}	{2}

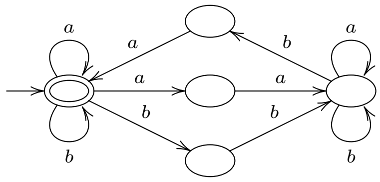
4.8 K danému regulárnímu výrazu zkonstruujte ekvivalentní FA

a) $(ab)^*(aa + bb)(a + ab)^*$

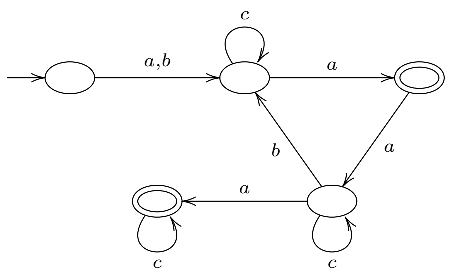
b) $((a + b(a + c))^* + (b + c))^*$

c) $(((a + b)^* + c)^* + d)^*$

4.9 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.10 K danému FA zkonstruujte ekvivalentní regulární výraz



4.11 Pomocí regulárních výrazů popište násl. jazyky:

a) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ končí na $ab\}$

b) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, k \geq 0\}$

c) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w$ začíná a končí stejným symbolem $\}$

d) $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w| = 2k, k \geq 0\}$

4.12 Ukažte, jaký je vztah mezi třídou regulárních jazyků $\mathcal{R}$ a nejmenší třídou

a) M_1, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, zřetězení a průniku $(\cup, \cdot, \cap)$.

b) M_2, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a komplementu $(\cup, \cap, co-\ )$.

c) M_3, která obsahuje všechny konečné jazyky a je uzavřená vzhledem k sjednocení, průniku a mocnině $(\cup, \cap, ^n)$.

Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Rozhodněte, zda platí: jsou-li jazyky $L_1, L_2, L_3, \ldots$ regulární, pak i jazyk

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i$$

je regulární jazyk.

5.2 Najděte takovou posloupnost regulárních jazyků $L_1, L_2, L_3, \ldots$ aby jazyk

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i$$

nebyl regulární.

5.3 Nechť L_1, L_2 jsou **ne**regulární jazyky nad abecedou $\{a, b\}$. Dokažte nebo vyvraťte, zda je či není regulární:

a) $L_1 \cap L_2$
b) $L_1 \cup L_2$
c) $L_1 \setminus L_2$
d) $L_1 \cdot L_2$
e) L_1^*
f) $co{-}L_1$

5.4 Nechť L_1 je regulární a $L_1 \cap L_2$ je neregulární jazyk. Platí, že jazyk L_2 je nutně neregulární?

5.5 Platí následující implikace?

a) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je neregulární
b) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \cap L_2$ je regulární
c) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je neregulární
d) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_1 \setminus L_2$ je regulární
e) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je neregulární
f) L_1 je regulární, L_2 je neregulární $\Rightarrow L_2 \setminus L_1$ je regulární

5.6 **Def:** operace $\odot$ rozšířeného sjednocení dvou jazyků takto:

$$L_1 \odot L_2 = \{u \cdot v \mid u, v \in (L_1 \cup L_2)\}$$

Dokažte, že jestliže jsou jazyky L_1 a L_2 regulární, pak i jazyk $L_1 \odot L_2$ je regulární. Dále najděte dva takové neregulární jazyky L_1 a L_2, aby jazyk $L_1 \odot L_2$ byl regulární.

5.7 Nechť L je regulární jazyk. Dokažte, že jazyky $L^\#$ jsou regulární:

a) $L^\# = \{v \mid \text{existuje } u \text{ takové, že } u.v \in L\}$
b) $L^\# = \{w \mid \text{existuje } x, y, z \text{ takové, že } y \in L \text{ a } w = xyz\}$

5.8 Dokažte, že pro libovolný jazyk L a libovolný konečný jazyk K platí:

a) L je regulární $\iff$ $L \setminus K$ je regulární

b) L je regulární $\iff$ $L \cup K$ je regulární

5.9 **Def:** Homomorfismus $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ je daný předpisem:

$$\begin{aligned} h(\varepsilon) &= \varepsilon \\ h(u.v) &= h(u).h(v) \text{ pro všechny } u, v \in \Sigma^* \end{aligned}$$

Def: Nechť L je jazyk, pak $h(L) = \{w \mid w = h(u), \text{ kde } u \in L\}$
Def: Inverzní Homomorfismus:

$$\begin{aligned} h^{-1}(y) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) = y\} \\ h^{-1}(L) &= \{x \in \Sigma^* \mid h(x) \in L\} \end{aligned}$$

Příklad

$$\begin{aligned} h(a) &= 01 \\ h(b) &= 011, \text{ pak} \end{aligned}$$

- $h(abb) = 01011011$
- $h^{-1}(0101011) = \{aab\}$
- $h^{-1}(0010) = \emptyset$
- pokud navíc $h(c) = \varepsilon$ pak $h^{-1}(01011) = L(c^*ac^*bc^*)$

Ukažte, že $\mathcal{R}$ je uzavřena na h, h^{-1}.

5.10 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = ac, h(b) = cb, h(c) = ca$. Určete:

- $h(aabc), h(cbaa)$
- $h^{-1}(cccaaccb), h^{-1}(accba)$
- $h(L), L = \{a^n b^n c^n \mid n > 0\}$

5.11 Nechť je dána abeceda $\{a, b, c\}$ a homomorfismus h; $h(a) = aa, h(b) = ba, h(c) = a$. Určete:

- $h^{-1}(aabaaabaa)$
- $h(L), L = \{w \in \{a^*, b^*\} \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$
- $h^{-1}(L), L = \{w \in \{a^*\} \mid |w| = 2k, k \in N\}$

5.12 Dokažte nebo vyvraťte

- $h(L_1 \cdot L_2) = h(L_1) \cdot h(L_2)$
- $h(L_1 \cup L_2) = h(L_1) \cup h(L_2)$
- $h((L_1 \cdot L_2)^R) = h(L_1^R) \cdot h(L_2^R)$
- $h(L_1 \cap L_2) = h(L_1) \cap h(L_2)$
- $h(h(L)) = h(L)$
- $h^{-1}(h(L)) = L$
- $h^{-1}(L_1 \cdot L_2) = h^{-1}(L_1) \cdot h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cup L_2) = h^{-1}(L_1) \cup h^{-1}(L_2)$
- $h^{-1}(L_1 \cap L_2) = h^{-1}(L_1) \cap h^{-1}(L_2)$

Bezkontextové gramatiky

6.1 Co generují tyto gramatiky?

a) $G = (\{S, B, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{llllll} P = \{ & S & \rightarrow & aB & \mid bA & \mid \varepsilon, \\ & A & \rightarrow & aS & \mid bAA, & \\ & B & \rightarrow & bS & \mid aBB \} & \end{array}$$

b) $G = (\{S, A\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S & \rightarrow & aAS & \mid a, \\ & A & \rightarrow & ba & \mid Sba \} \end{array}$$

6.2 Pro následující gramatiku

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllll} P = \{ & S & \rightarrow & AaB & \mid BaA, \\ & A & \rightarrow & AB & \mid a, \\ & B & \rightarrow & BB & \mid b \ \} \end{array}$$

a) najděte derivační strom s výsledkem *bbbbaa*

b) je tento strom určený jednoznačně?

c) kolik různých nejlevějších odvození má slovo *bbbbaa*

d) je gramatika jednoznačná?

e) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.3 Jaké mají charakteristikcé vlastnosti derivační stromy pro regulární gramatiky?

6.4 Obsahuje množina jednoznačných CFL všechny regulární jazyky?

6.5 Odpovězte zda pro

$G = (\{S\}, \{a\}, P, S)$, kde

$P = \{ \ S \rightarrow SSS \mid a \ \}$

a) je gramatika jednoznačná?

b) je jazyk $L(G)$ jednoznačný?

6.6 Navrhněte jednoznačnou gramatiku generující jazyk $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\} \cup \{a^k \mid k \geq 1\}$.

6.7 Navrhněte gramatiku pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \geq 1, i = j \text{ nebo } j \neq k\}$, je gramatika jednoznačná?

6.8 Najděte ekvivalentní redukovanou gramatiku k této gramatice:

$G = (\{S, A, B, C, E, F, D\}, \{a, b, c\}, P, S)$, kde

$$\begin{array}{lllllll} P = \{ & S & \rightarrow & aA & \mid bB, & & \\ & A & \rightarrow & aAB & \mid aa & \mid AC & \mid AE, \\ & B & \rightarrow & bBA & \mid bb & \mid CB & \mid BF, \\ & C & \rightarrow & DE, & & & \\ & D & \rightarrow & cc & \mid DD, & & \\ & E & \rightarrow & FF & \mid FE, & & \\ & F & \rightarrow & EcE \ \} & & & \end{array}$$

6.9 Najděte bezkontextovou gramatiku, na níž lze ukázat, že opačné pořadí aplikace odstranění nenormovaných neterminálů a odstranění nedosažitelných symbolů vede k neredukované gramatice.

6.10 Je jazyk generovaný gramatikou G bezkontextový?

$G = (\{S,T\},\{x,y\},P,S)$, kde

$$
\begin{array}{lll}
P = \{\ S & \to & xT, \\
\phantom{P = \{\ }T & \to & Sx, \\
\phantom{P = \{\ }xTx & \to & y\ \}
\end{array}
$$

6.11 Navrhněte bezkontextové gramatiky pro jazyky:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a,b,c\}^*\}$

b) $L = \{w \mid w \in \{a,b,c\}^*, w = w^R\}$

c) $L = \{a^{3n+2}b^{2n} \mid n \geq 2\}$

d) $L = \{a^n b^n b^{m+1} c^{m-1} \mid n \geq 0, m \geq 1\}$

e) $L = \{a^n b^m c^m d^n \mid n, m \geq 0\}$

f) $L = \{uxv \mid u,x,v \in \{a,b,c\}^*, uv = (uv)^R, x = ca^n b^{2n} c, n \geq 0\}$

g) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) > \#_b(w)\}$

h) $L = \{w \mid w \in \{a,b\}^*, \#_a(w) = 2 * \#_b(w)\}$

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.1 Odstraňte ε-pravidla:

$$\begin{array}{l}
G = (\{S,A,B,C,D\},\{b,c,a\},P,S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllllll}
S & \to & ABC, \\
A & \to & AbA & \mid & BC, \\
B & \to & bB & \mid & b & \mid & cBbAa & \mid & \varepsilon, \\
C & \to & cD & \mid & c & \mid & Ab & \mid & \varepsilon, \\
D & \to & SSS & \mid & b \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.2 Odstraňte ε-pravidla:

$$\begin{array}{l}
G = (\{S,A,B,C,D\},\{b,c\},P,S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllllll}
S & \to & ABC, \\
A & \to & Ab & \mid & BC, \\
B & \to & bB & \mid & b & \mid & Ab & \mid & \varepsilon, \\
C & \to & cD & \mid & c & \mid & Ac & \mid & \varepsilon, \\
D & \to & SSD & \mid & cSAc \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.3 Odstraňte ε-pravidla:

$$\begin{array}{l}
G = (\{S,X,Y,Z\},\{1,0\},P,S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllll}
S & \to & 1X & \mid & Y1 & \mid & XZ, \\
X & \to & 0YZ1 & \mid & S1X & \mid & Y, \\
Y & \to & 1 & \mid & X1 & \mid & \varepsilon, \\
Z & \to & SZ & \mid & 0 & \mid & \varepsilon \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.4 Význam konstrukce množin N_ε na příkladu

$$\begin{array}{l}
G = (\{A,B,C\},\{a,b,c\},P,A), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllll}
A & \to & BC & \mid & a & \mid & \varepsilon, \\
B & \to & aB & \mid & ACC & \mid & b, \\
C & \to & cC & \mid & AA & \mid & c \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.5 Odstraňte jednoduché pravidla. Diskuse o významu N_A.

$$\begin{array}{l}
G = (\{S,X,Y,A,D,B,C\},\{b,a\},P,S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllll}
S & \to & X & \mid & Y, \\
A & \to & bS & \mid & D, \\
D & \to & ba, \\
B & \to & Sa & \mid & a, \\
X & \to & aAS & \mid & C, \\
C & \to & aD & \mid & S, \\
Y & \to & SBb \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.6 Převeďte do Chomského normální formy

$$\begin{array}{l}
G = (\{S,A,B\},\{a,b\},P,S), \text{ kde} \\
P = \{ \begin{array}{lllllllll}
S & \to & SaSbS & \mid & aAa & \mid & bBb, \\
A & \to & aA & \mid & aaa & \mid & B & \mid & \varepsilon, \\
B & \to & Bb & \mid & bb & \mid & b \ \}
\end{array}
\end{array}$$

7.7 Převeďte do Chomského normální formy

$G = (\{S, H, L\}, \{0, 1\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllllll}
P = \{ & S & \to & 0H1 & \mid & 1L0 & \mid & \varepsilon, & & \\
 & H & \to & HH & \mid & 0H1 & \mid & LH & \mid & \varepsilon, \\
 & L & \to & LL & \mid & 1L0 & \mid & HL & \mid & \varepsilon \}
\end{array}
$$

7.8 Navrhněte gramatiku v CNF:

a) $L = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b) $L = \{a^{2i}b^{3i}c^j \mid i \geq 1, j \geq 0\}$

7.9 Nechť G je gramatika v CNF. Nechť $w \in L(G), |w| = n$. Jaká je minimální a maximální délka odvození slova w v G?

7.10 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllllllll}
P = \{ & S & \to & Aa & \mid & Bb & \mid & aaA & \mid & SaA & \mid & SbB, \\
 & A & \to & AAb & \mid & ab & \mid & SBb, & & & & \\
 & B & \to & Bbb & \mid & BBB & \mid & bAb \} & & & &
\end{array}
$$

7.11 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, A, B\}, \{1, 0\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & A1 & \mid & 0 & \mid & 1B, \\
 & A & \to & BS0 & \mid & 10 & \mid & SB0, \\
 & B & \to & 0B & \mid & B1B & \mid & S0 \}
\end{array}
$$

7.12 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, X, Y\}, \{c, d, b, a\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & Xc & \mid & Yd & \mid & Yb, \\
 & X & \to & Xb & \mid & a, & & \\
 & Y & \to & SaS & \mid & Xa \} & &
\end{array}
$$

7.13 Odstraňte levou rekurzi a transformujte do GNF

$G = (\{S, T\}, \{t, s\}, P, S)$, kde

$$
\begin{array}{llllllllll}
P = \{ & S & \to & TTt & \mid & Tt & \mid & TS & \mid & s, \\
 & T & \to & SsT & \mid & TsT & \mid & t \} & &
\end{array}
$$

7.14 Transformujte do Greibachové NT. Výslednou gramatiku převeďte do 3GNF.

$G = (\{A, B, C, D\}, \{a, b\}, P, A)$, kde

$$
\begin{array}{llllll}
P = \{ & A & \to & BC, & & \\
 & B & \to & CD & \mid & AB, \\
 & C & \to & Aa & \mid & b, \\
 & D & \to & bA & \mid & DD \}
\end{array}
$$

7.15 Dokažte, že následující jazyky nejsou bezkontextové

a) $L = \{wcw \mid w \in \{a, b\}^*\}$

b) $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

c) $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid n, m \geq 1\}$

Zásobníkové automaty

8.1 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_4\})$

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} & \delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} & \delta(q_1, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\} \\
\delta(q_1, \varepsilon, A) = \{(q_2, A), (q_3, A)\} & \delta(q_2, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, d, A) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} \\
\delta(q_3, \varepsilon, Z) = \{(q_4, Z)\} &
\end{array}$$

- Načrtněte stavový diagram ZA A.
- Naznačte 4 různé výpočty na vstupu a^3b^2c (stačí na obrázku).
- Popište jazyk $L(A)$.

8.2 Je daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a, b, c, d\}, \{X, Y, Z\}, \delta, q_0, Z, \{q_2, q_4\})$, kde

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, X)\} & \delta(q_0, a, X) = \{(q_0, XX), (q_1, YX)\} \\
\delta(q_1, a, Y) = \{(q_1, YY)\} & \delta(q_1, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, b, Y) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} \\
\delta(q_3, c, X) = \{(q_3, \varepsilon)\} & \delta(q_3, d, X) = \{(q_4, \varepsilon)\}
\end{array}$$

a) Popište jazyk akceptovaný automatem, pokud $F = \{q_2\}$.
b) Popište jazyk akceptovaný automatem s původním F, tj. $F = \{q_2, q_4\}$.

8.3 Konstruujte ZA (akceptující koncovým stavem nebo prázdným zásobníkem) pro jazyky:

a) $L = \{a^ib^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$
b) $L = \{w \mid w \in \{a, b\}^*;\ w = w^R\}$
c) $L = \{a^{3n}b^{2n} \mid n \geq 1\}$
d) $L = \{a^{3n+2}b^{2n-1} \mid n \geq 1\}$
e) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) = \#_b(w)\}$
f) $L = \{w \mid w \in \{a, b, c\}^*; \#_a(w) \neq \#_b(w)\}$
g) $L = \{a^kb^j \mid 1 \leq j \leq k \leq 2j\}$
h) $L = \{a^{n+m}b^{m+p}c^{p+n} \mid m, p, n \geq 1\}$
i) $L = \{a^ib^jc^j \mid i, j \geq 1\} \cup \{a^kb^kc^m \mid k, m \geq 1\}$
j) $L = \{a^{k_1}ba^{k_2}b \dots ba^{k_r} \mid r > 1,\ k_i \geq 1\ (i = 1, \dots, r;$ existuje $p, s : p \neq s, k_p = k_s)\}$

8.4 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \{Z, A\}, \delta, q_0, Z, \{q_1\})$ akceptující koncovým stavem transformujte na ekvivalentní automat akceptující prázdným zásobníkem. Určete $L(A)$.

$$\begin{array}{l}
\delta(q_0, a, Z) = \{(q_0, AZ)\} \\
\delta(q_0, a, A) = \{(q_0, AA)\} \\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, \varepsilon)\}
\end{array}$$

8.5 Daný ZA $A = (\{q\}, \{(,)\}, \{Z, L, P\}, \delta, q, Z, \emptyset)$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní automat akceptující koncovým stavem. Určete $L(A)$.

$$\begin{aligned}
\delta(q, (, Z) &= \{(q, L)\}\\
\delta(q, (, L) &= \{(q, LL)\}\\
\delta(q,), L) &= \{(q, \varepsilon)\}
\end{aligned}$$

8.6 Pro danou G navrhněte (rozšířený) ZA, který provádí syntaktickou analýzu:

a) shora dolů,

b) zdola nahoru.

V obou případech proveďte analýzu slova *ababaa*.

$G = (\{S, A, B\},\{a, b\},P, S)$, kde

$$\begin{array}{llllllll}
P = \{ & S & \to & \varepsilon & \mid & abSA, & & \\
 & A & \to & AaB & \mid & aB & \mid & a, \\
 & B & \to & aSS & \mid & bA & \} &
\end{array}$$

8.7 Rozšířený zásobníkový automat, který vznikl metodou syntaktické analýzy zdola nahoru z gramatiky z příkladu 8.6 převeďte na standardní zásobníkový automat.

8.8 Daný ZA $A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, \delta, q_0, A, \emptyset\})$ akceptující prázdným zásobníkem transformujte na ekvivalentní bezkontextovou gramatiku.

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a, A) = \{(q_1, B)\} & \delta(q_1, c, A) = \{(q_2, \varepsilon)\} & \delta(q_2, \varepsilon, B) = \{(q_2, \varepsilon)\}\\
\delta(q_0, b, A) = \{(q_1, AB)\} & \delta(q_1, a, B) = \{(q_0, ABC)\} & \delta(q_2, \varepsilon, C) = \{(q_0, A)\}
\end{array}$$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.1 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá

a) L_1, L_2 bezkontextové $\Rightarrow L_1 \cup L_2$ je kontextový

b) L_1 bezkontextový $\wedge$ $L_1 \cap L_2$ není bezkontextový $\Rightarrow L_2$ není bezkontextový

c) L_1 regulární $\wedge$ L_2 bezkontextový $\Rightarrow co{-}(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

d) L_1 konečný $\wedge$ L_2 bezkontextový $\Rightarrow co{-}(L_1 \cap L_2)$ bezkontextový

9.2 Jsou dané jazyky

$$L = \{ww^R \mid w \in \{a,b\}^*\}$$
$$R = L((a^*b^+a)^* + a^*)$$

Navrhněte ZA pro jazyk $L \cap R$

$\delta_L(q_0, x, Z) = \{(q_0, xZ)\}$	$\forall x \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_0, a) = p_0$
$\delta_L(q_0, x, y) = \{(q_0, xy)\}$	$\forall x, y \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_0, b) = p_1$
$\delta_L(q_0, \varepsilon, x) = \{(q_1, x)\}$	$\forall x \in \{a,b,Z\}$	$\delta_R(p_1, b) = p_1$
$\delta_L(q_1, x, x) = \{(q_1, \varepsilon)\}$	$\forall x \in \{a,b\}$	$\delta_R(p_1, a) = p_0$
$\delta_L(q_1, \varepsilon, Z) = \{(q_2, Z)\}$		
$F_L = \{q_2\}$		$F_R = \{p_0\}$

9.3 Je dána bezkontextová gramatika
$G = (\{S\},\{a,b\},P,S)$, kde
$P = \{\ S \ \rightarrow\ aS \ \mid\ Sb \ \mid\ a\ \}$

a) Má tato gramatika vlastnost sebevložení?

b) Má jazyk generovaný gramatikou vlastnost sebevložení?

c) Je jazyk generovaný gramatikou regulární?

d) Jaký je vztah mezi vlastností sebevložení a regularitou?

9.4 Je dán bezkontextový jazyk L, $L \subseteq \{a,b\}^*$
Zkonstruujeme nový jazyk L_1 takto:

a) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ xy \in L\}$

b) $L_1 = \{x \mid \exists y \in \{a,b\}^*;\ yx \in L\}$

Dokažte, že L_1 je taky bezkontextový.

Konstrukce Turingových strojů

10.1 Navrhněte determinstický jednopáskový Turingův stroj rozhodující jazyk $L = \{a^n b^m c^n d^m \mid m, n \geq 1\}$

10.2 Navrhněte deterministický jednopáskový TS se vstupní abecedou $\{0, 1\}$ a takový, že výpočty na slovech tvaru 0^*1^* jsou akceptující a výpočty na ostatních slovech jsou nekonečné.

10.3 Navrhněte 3-páskový (vstupní + 2 pracovní pásky) TS pro jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

10.4 Navrhněte TS (determ. nebo nedeterm.) TS pro jazyk:

a) $L = \{a^i b^j c^k \mid k = ij, i, j \in \mathbb{N}\}$
b) $L = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$
c) $L = \{a^p \mid p$ není prvočíslo $\}$
d) $L = \{a^n w \mid w \in \{0, 1\}^*, w$ je binární zápis čísla $n\}$

Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.1 Objsaněte rozdíl mezi pojmy TS akceptuje a TS rozhoduje.

11.2 Je daný DTS T (resp. jeho část). Podle algoritmu ze skript navrhněte k němu ekvivalentní gramatiku:

$$\begin{array}{ll} \delta(q,\rhd) = (q,\rhd,R) & \delta(q,a) = (p,A,R) \\ \delta(p,b) = (q,a,L) & \delta(q,\sqcup) = (p,A,R) \\ \delta(p,\sqcup) = (q,a,L) & \delta(q,a) = (q_{accept},A,R) \end{array}$$

Kde $\rhd$ je levá koncová značka, $\sqcup$ označuje prázdné políčko, stavy jsou $\{p, q, q_{accept}\}$, q je počáteční stav, vstupní abeceda je $\{a, b\}$ a pásková abeceda odpovídá množině $\{\rhd, \sqcup, A, a, b\}$.

11.3 O každé z následujících implikací rozhodněte, zda je pravdivá.

a) R je regulární, L je rekurzivně spočetný $\Rightarrow R \cap L$ je regulární

b) L je rekurzivní $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní

c) L je rekurzivní $\Rightarrow L^*$ je rekurzivní

d) L je kontextový $\Rightarrow$ co-L je rekurzivní

e) L není rekurzivní $\Rightarrow co{-}L$ není rekurzivní

f) L není rekurzivní a R je rekurzivní $\Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

g) L není rekurzivní, R je rekurzivní a $R \subseteq L \Rightarrow L \smallsetminus R$ není rekurzivní

11.4 Navrhněte gramatiky pro následující jazyky:

- $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^*, \#_a(w) = \#_b(w) = \#_c(w)\}$
- $\{ww \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$
- $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
- $\{a^n \mid n$ je mocnina $2\}$

11.5 Ukažte, že jazyk $L = \{w \mid w$ je kód dvojice (A, v) takové, že TS A zastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$ je jazyk typu 0 dle Chomského hierarchie.

11.6 Existuje jazyk, který není ani jazykem typu 0 dle Chomského hierarchie?

Redukce

12.1 Rozhodněte, zda platí následující implikace. Své rozhodnutí zdůvodněte.

a) $A \leq_m B \Rightarrow co{-}A \leq_m co{-}B$

b) $A \leq_m B$ a B je regulární $\Rightarrow$ A je regulární

c) A je rekurzivně spočetná a $co{-}A \leq_m A \Rightarrow A$ je rekurzivní

d) A je rekurzivně spočetná a $A \leq_m co{-}A \Rightarrow A$ je rekurzivní

e) $A \leq_m B$ a A je rekurzivní $\Rightarrow$ B je rekurzivní

f) A je rekurzivně spočetná $\Rightarrow A \leq_m HALT$

12.2 Je dán jazyk $A = \{\langle M \rangle \mid$ výpočet TM M na slově ε je konečný$\}$.
Dokažte, že A není rekurzivní. (Návod: najděte redukci problému zastavení na A.)
Je jazyk A rekurzivně spočetný?
Je komplement jazyka A rekurzivně spočetný?

12.3 Nalezněte řešení následujícího Postova systému:

$$\left\{ \left[\frac{aa}{a}\right], \left[\frac{ab}{abab}\right], \left[\frac{b}{a}\right], \left[\frac{aba}{b}\right] \right\}$$

12.4 Ukažte, že Postův korespondenční problém je nerozhodnutelný, i když se omezíme na abecedu $\{0, 1\}$.

12.5 Ukažte, že problém ekvivalence dvou Turingových strojů

$$EQ = \{\langle \mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2 \rangle \mid \mathcal{M}_1 \text{ a } \mathcal{M}_2 \text{ jsou Turingovy stroje a } L(\mathcal{M}_1) = L(\mathcal{M}_2)\}$$

je nerozhodnutelný.

Složitost

13.1 Rozhodněte, které z následujících vztahů platí. Odpovědi zdůvodněte.

a) $2n \in \mathcal{O}(n)$

b) $n^2 \in \mathcal{O}(n)$

c) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n^2)$

d) $n \log_2 n \in \mathcal{O}(n)$

e) $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$

f) $3n^2 + 4n + 17 \in \mathcal{O}(n^2 - n + 1)$

g) $(2n)! \in \mathcal{O}(n!^2)$

13.2 Rozhodněte, zda platí následující vztah. Odpověď zdůvodněte.

$$g(n) \notin \mathcal{O}(f(n)) \quad \Longrightarrow \quad f(n) \in o(g(n))$$

13.3 Dokažte, že třída P je uzavřená na operace sjednocení, komplement a zřetězení. Rozhodněte, na které z těchto operací je uzavřena třída NP. Odpověď zdůvodněte.

13.4 Třída coNP je definována jako $\mathsf{coNP} = \{co{-}L \mid L \in \mathsf{NP}\}$. Rozhodněte, které z následujících tvrzení platí. Odpovědi zdůvodněte.

a) $\mathsf{coNP} = co{-}\mathsf{NP}$

b) $L_1, L_2 \in \mathsf{coNP} \implies L_1 \cap L_2 \in \mathsf{coNP}$

c) $L_1 \in \mathsf{NP}, L_2 \subsetneq L_1, L_2 \in \mathsf{coNP} \implies L_1 \smallsetminus L_2 \in \mathsf{NP}$

13.5 Rozhodněte, zda jsou následující formule splnitelné. U splnitelných formulí popište nějaké splňující přiřazení.

a) $(x \vee y) \wedge (x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee \neg y)$

b) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$

c) $(x \vee \neg y) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg z)$

d) $(u \vee \neg v \vee \neg w) \wedge (w \vee \neg y \vee z) \wedge (w \vee \neg z \vee x) \wedge (x \vee y \vee z)$

e) $(x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z) \wedge (x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee \neg z)$

13.6 Dokažte, že následující problémy jsou NP-úplné.

a) Problém Hamiltonovské cesty v grafu:
$\mathit{HAMPATH} = \{\langle G, s, t\rangle \mid G$ je orientovaný graf obsahující Hamiltonovskou cestu z s do $t\}$

b) Problém k-kliky (k-klika je úplný podgraf s k vrcholy):
$\mathit{CLIQUE} = \{\langle G, k\rangle \mid G$ je neorientovaný graf s k-klikou$\}$

c) Problém podgrafového izomorfismu (Subgraph Isomorphism, SGI):
$\mathit{SGI} = \{\langle H, G\rangle \mid H = (V, E), G = (U, F)$ jsou neorientované grafy takové, že existuje injektivní zobrazení $f : V \to U$ splňující $(u, u') \in E \Longrightarrow (f(u), f(u')) \in F\}$

13.7 Určete vztahy inkluze/rovnost mezi následujícími dvojicemi složitostních tříd. Svoje tvrzení zdůvodněte.

a) $\mathsf{TIME}(n^2)$ a $\mathsf{TIME}(n^3)$
b) $\mathsf{SPACE}(2n^2)$ a $\mathsf{SPACE}(100n^2)$
c) $\mathsf{SPACE}(n^2)$ a $\mathsf{TIME}(n^2)$
d) $\mathsf{NSPACE}(n^2)$ a $\mathsf{SPACE}(n^5)$
e) P a $\mathsf{TIME}(2^n)$

13.8 Zkonstruujte jednopáskový deterministický Turingův stroj, který rozhoduje jazyk $L = \{0^k 1^k \mid k \geq 0\}$ v čase $\mathcal{O}(n \log n)$. Není nutné uvádět formální popis stroje.

Zadání cvičení IB005

1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte základní terminologii a definice
- Připomeňte základní operace nad jazyky a přitom cvičte příklady 1.1 a 1.2
- Cvičte 1.3, u 1.3 d) nacvičte "neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem".
- Cvičte 1.4
- Cvičte 1.6
- Cvičte 1.7
- Cvičte 1.8 b) a c) (jednu inkluzi skutečně dokažte)
- Připomeňte pojem gramatiky
- Cvičte 1.9
- Dle zbývajícího času, jinak za DÚ, přiklady 1.10, 1.11

2. cvičení: Konečné automaty a regulární gramatiky

- K čemu slouží Konečné automaty?
- Na příkladu 2.1 vysvětlete co jsou a jak fungují konečné automaty
- Uveďte formální definici DFA
- Příklad 2.2a-d,f (!deterministické FA!)
- Příklad 2.2g,h volitelně dle času
- Příklad 2.3a
- Příklad 2.4
- Příklad 2.5
- Příklad 1.11

3. cvičení: Pumping lemma, (Myhill-)Nerodova věta

- Znění a použití Pumping Lemma pro regulární jazyky
- Příklad 2.6a poctivě, b zrychleně, g poctivě, e zrychleně
- Znění Nerodovy věty a Myhill-Nerodovy věty
- Vztah $\sim$ a deterministických automatů a vztah $\sim_L$ a mininimálního automatu

- Příklad 3.9
- Příklad 3.12
- Příklad 3.10 jednu odrážku pořádně, další případně zrychleně

4. cvičení: Minimalizace a kanonizace DFA, nedeterministické FA a determinizace

- Připomeňte si $\sim_L$.
- Definujte minimální konečný automat.
- Příklad 3.2
- Příklad 3.3
- Definujte nedeterministikcé FA, a způsob akceptování NFA.
- Příklad 3.4
- Příklad 3.5
- Upozorněte, ze pro minimalizaci, je třeba vyjít z deterministického automatu.

5. cvičení: Ekvivalence FA, regulárních gramatik a regulárních výrazů, ε-kroky, Kleeneho věta

- Vysvětlete princip transformace odstranění ε-kroků
- Příklad 4.7
- Zopakujte vyjadřovací ekvivalenci dosud známých formalismů
- Formulujte podstatu algoritmů pro převod FA na regulární gramatiky a zpět
- Příklad 4.2
- Příklad 4.4
- Připomeňte si definici regulárních výrazů (syntax a sémantika)
- Příklad 4.11
- Princip transformace regulárních výrazů na FA a zpět
- Příklad 4.8 c)
- Příklad 4.10

6. cvičení: Uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Příklad 5.1
- Příklad 5.2
- Příklad 5.3a – formulujte formalní konstrukci synchronního součinu
- Příklad 5.3b-f – slovní argumentace (hint důkazu) proč ano či ne
- Příklad 5.4
- Příklad 5.5

- Příklad 5.6
- Příklad 5.7 – formální konstrukce
- Příklad 4.12 a) a diskuze k 4.12 b)

7. cvičení: Bezkontextové gramatiky a derivační stromy, redukovaná CFG

- Připomeňte CFG a ukažte jak vypadá a jak funfuje CFG pro $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Příklad 6.1
- Příklad 6.2
- Příkald 6.3
- Příklad 6.4
- Příklad 6.5
- Příklad 6.6
- Příklad 6.8
- Příklad 6.9
- Příklad 6.10
- Příklad 6.11 (dle času)
- Příklad 6.7 rozmyslet za DÚ

8. cvičení: Normální formy CFG

- Připomeňte princip ostraňování ε-pravidel
- Příklad 7.2
- Připomeňte princip ostraňování jednoduchých pravidel
- Příklad 7.5
- Definujte Chomského NF (CNF) a připomeňte postup převodu CFG do CNF
- Příklad 7.6
- Příklad 7.8a)
- Příklad 7.9
- Vysvětlete odtranění přímé levé rekurze na `A->Ab|Ac|d|e`
- Příklad 7.12

9. cvičení: Zásobníkové automaty a syntaktická analýza

- Příklad 8.1 (zadejte přechodovou relaci tabulkou $[q_0 Z/a \to (q_0, AZ)]$
- Příklad 8.2
- Příklad 8.3b
- Příklad 8.6
- Příklad 8.8
- Diskutujte ekvivalence způsobu akceptování zás. automatů a podstatu převodu
- Zbude-li čas, cvičte příklady 8.4, 8.5 a 8.7

10. cvičení: Uzávěrové vlastnosti bezkontextových jazyků a pumping lemma pro bezkontextové jazyky

- Příklad 7.15
- Příklad 9.1
- Příklad 9.2 (není nutné konstruovat celou přechodovou funkci)
- Příklad 9.3
- Příklad 9.4 (formální konstrukce)

11. cvičení: Konstrukce Turingových strojů

- Připomeňte jak fungují Turingovy stroje
- Příklad 10.1
- Příklad 10.2
- Příklad 10.3
- Příklad 10.4 – formulujte princip algoritmu pro TS

12. cvičení: Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

- Příklad 11.1
- Diskutujte vztah TS acceptuje/rozhoduje a gramatiky typu 0
- Příklad 11.2
- Příkald 11.3
- Příklad 11.4a
- Příklad 11.4b-d pouze myšlenky fungování CFG
- Příklad 11.5
- Příklad 11.6

13. cvičení: Redukce

Zadání cvičení IB102

1. cvičení: Operace nad jazyky

- Připomeňte pojmy abeceda, slovo, jazyk apod.
- Připomeňte základní operace nad jazyky a procvičte je s využitím příkladů 1.1 (průnik a sjednocení cvičit netřeba) a 1.2.
- Příklad 1.3 d) e) f) h). U d) vysvětlete, že neplatnost tvrzení dokazujeme protipříkladem.
- Příklad 1.4.
- V sudých skupinách cvičte příklad 1.5, v lichých příklad 1.6.
- Příklad 1.7.
- Příklad 1.8 b). Zdůrazněte, že dva jazyky jsou stejné, právě když platí obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$. Jednu inkluzi dokažte.
- Příklad 1.8 c). Pozor, rovnost neplatí.

2. cvičení: Gramatiky, deterministické konečné automaty

- Připomeňte pojem gramatiky a cvičte příklad 1.9 a) anebo b).
- Příklad 1.11 a) d).
- Příklad 2.1.
- Příklad 2.2 a) b) c) d). Dejte prosím studentům možnost, aby se pokusili alespoň nějaký automat sestrojit sami. Pozor, automaty musí být deterministické.
- Příklad 2.3 a) b).
- Pokud vám zbyde čas, cvičte příklad 2.5 a zbylé části příkladu 1.11.

3. cvičení: Pumping lemma, minimalizace a kanonizace konečných automatů, nedeterministické automaty

- Zopakujte Pumping lemma.
- Příklad 2.6. Z lehčích příkladů a)–c) udělejte jeden pořádně, ostatní zrychleně. Dále udělejte pořádně příklad g) a zrychleně příklad e). Upozorněte studenty, že vlastní text důkazu zůstává v podstatě stejný (důkaz lze prezentovat jako formulář, který se vždy na pár místech doplní).
- Zdůrazněte, že před minimalizací automatu je třeba odstranit nedosažitelné stavy a ztotálnit přechodovou funkci.
- Příklad 3.2 b).

- Budete-li mít pocit, ze jeden příklad na minimalizaci nestačil, pokračujte příkladem 3.1 a) a případně 3.3.
- Zopakujte nedeterministické FA.
- Příklad 3.4 a) c) d). Zbude-li čas, udělejte i ostatní části.

4. cvičení: Determinizace, odstranění ε-kroků, uzávěrové vlastnosti regulárních jazyků

- Zopakovat determinizaci.
- Příklad 3.5 a) nebo b). Upozorněte, že determinizací může vzniknout stav $\emptyset$ a jeho následníci se počítají běžným způsobem.
- Zopakovat odstranění ε-kroků.
- Příklad 4.5. Příklad řešte pomocí tabulkového zápisu. Chcete-li, můžete nejdřív ukázat, jak snadno se v tom udělá chyba, když se to dělá přímo na grafu.
- Budete-li mít pocit, že příklad 4.5 nestačil, pokračujte příkladem 4.7 (obvykle stačí spočítat jen pár řádků).
- Zopakujte, na které operace jsou regulární jazyky uzavřené. Diskutujte, na které operace je/není uzavřena třída konečných jazyků.
- Příklad 5.8. Tento příklad ukazuje, že konečná změna jazyka (tj. přidání či odebrání konečně mnoha slov) nemá vliv na jeho (ne)regularitu. Toto pozorování lze použít v dalších příkladech, např. v příkladu 5.3.
- Příklad 5.1.
- Dokažte uzavřenost neregulárních jazyků na komplement (včetně formálního důkazu).
- Příklad 5.2.
- Příklad 5.3.
- Příklad 5.4.

5. cvičení: Regulární výrazy, ekvivalence FA, regulárních výrazů a gramatik

- Příklad 5.5.
- Příklad 5.6.
- Příklad 4.8. Stačí 2 odrážky.
- Příklad 4.9.
- Příklad 4.10.
- Příklad 4.11.
- Příklad 4.2.
- Příklad 4.4.

6. cvičení: Bezkontextové gramatiky, derivační stromy, jednoznačnost, redukované gramatiky

- Příklad 6.11 a).
- Příklad 6.1. U druhé gramatiky neztrácejte moc času, příklad slouží jen jako demonstrace popisné síly bezkontextových gramatik.
- Příklad 6.2.
- Příklad 6.3.
- Příklad 6.5.
- Příklad 6.6. Není třeba formálně dokazovat, že je navržená gramatika jednoznačná. Slovní argumentace postačí.
- Příklad 6.7. Stačí identifikovat problém.
- Příklad 6.8. Připomeňte, že nejdříve je třeba odstranit nenormované symboly a až pak ty nedosažitelné. Opačné pořadí může vyústit v neredukovanou gramatiku, což lze ukázat i na příkladu 6.8.
- Zbyde-li čas, dělejte další odrážky z příkladu 6.11.

7. cvičení: Transformace bezkontextových gramatik

- Příklad 7.2.
- Příklad 7.5.
- Příklad 7.6.
- Příklad 7.8 a). Pokud stíháte, udělejte i část b).
- Připomeňte odstranění přímé levé rekurze na pravidlech $A \to Ab \mid Ac \mid dA \mid e$.
- Příklad 7.12. Cvičte pouze odstranění levé rekurze (transformaci do GNF v IB102 neučíme). Pokud by jeden příklad nestačil, udělejte ještě příklad 7.13 nebo 7.10.

8. cvičení: Pumping lemma pro bezkontextové jazyky, zásobníkové automaty

- Příklad 7.15. Jednu odrážku udělejte pečlivě, v dalších se soustřeďte jen na to podstatné.
- Příklad 8.1. Zmiňte prosím, že byl definován pojem *krok výpočtu*, ale pojem *výpočet* pro PDA definován nebyl. Lze si představit hned několik definic, které kromě zjevných požadavků splňují i tyto:
  1. Musí se přečíst celý vstup. V tom případě by v příkladu existoval jen 1 výpočet.
  2. Musí se číst “dokud to lze”. V tomto případě existují 4 výpočty.
  3. Stačí přečíst libovolnou část vstupu. V tom případě je výpočtů hodně.
- Příklad 8.3. Udělejte pořádně aspoň dvě odrážky včetně c). Zbude-li čas, cvičte další odrážky.

9. cvičení: Nedeterministická syntaktická analýza, uzávěrové vlastnosti bezkontextových, rekursivních a rekursivně spočetných jazyků

- Příklad 8.6. Ukažte, jak lze konstrukci analyzátoru shora dolů použít u příkladů na konstrukci PDA: nejdřív se zkonstruuje CFG a z ní pak lehce PDA. Velmi elegantně tak lze řešit třeba příklad 8.3 c).
- Příklad 9.1.
- Příklad 9.3.
- Příklad 11.3 a) d) e) f) g).
- Zbude-li čas, řešte příklad 11.4.

10. cvičení: Konstrukce TM, redukce a rozhodnutelnost problémů

- Příklad 10.1.
- Příklad 10.2.
- Příklad 12.1.

11. cvičení: Redukce a rozhodnutelnost problémů, P a NP

- Příklad 12.2.
- S využitím příkladu 12.3 připomeňte definici Postova korespondenčního problému.
- Příklad 12.4.
- Příklad 12.5.
- Příklad 13.3.
- Příklad 13.4.

12. cvičení: Složitostní třídy, NP-úplné problémy

- Zopakujte pojem *konjunktivní normální forma (cnf-forma)* formulí, pojem *3cnf-forma* a problém *3SAT*. Ke zopakování můžete využít část příkladu 13.5.
- Příklad 13.6 b) c).
- Příklad 13.7.
- Zbude-li čas, udělejte i příklady 13.6 a) a 13.8.

Řešení některých příkladů

Formální jazyky, regulární gramatiky

1.1 **a)** $\{xy, y, yx, z\}$ **b)** $\{y\}$ **c)** $\{xyy, xyz, yy, yz, yxy, yxz\}$, $\{yxy, yy, yyx, zxy, zy, zyx\}$
d) $\{\varepsilon\}$, $\{y, z\}$, $\{yy, yz, zy, zz\}$, $\{yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz\}$,
$\{\varepsilon, y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z včetně ε,
$\{y, z, yy, yz, zy, zz, yyy, yyz, yzy, yzz, zyy, zyz, zzy, zzz, \ldots\}$ tj. libovolné slovo z písmenek y a z kromě ε
e) $\{x, y, z\}^* \smallsetminus \{y, z\}$ tj. libovolné slovo složené z písmenek x, y a z včetně ε, kromě slov y a z

1.2 **a)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, $\{\varepsilon\}$ **b)** $\{\varepsilon\}$, $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ pokud $\varepsilon \in L$ jinak $\emptyset$ **c)** $\emptyset$, $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$, L

1.3 **a)** $\{a, aa, ba, abc, \varepsilon\}$ **b)** $\{a, ba\}$ **c)** $\{aba, aabc, aa, a, aaba, aaabc, aaa, baba, baabc, baa, ba\}$ **d)** ne, protipříklad baa **e)** jedno slovo z množiny $\{a, aa, ba, aba, aaa, baba, baa\}$ **f)** ano, protože $\varepsilon \in L_2$; ne, protipříklad $L_1 = \{a\}, L_2 = \{b\}$; pro pokročilé: implikace "$\Longrightarrow$" platí, implikace "$\Longleftarrow$" platí pouze v upravené podobě $\varepsilon \in L_2 \Longleftarrow (L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset)$ **g)** ano, ano, ne **h)** všechna slova nad danou abecedou, kromě slov z jazyka L_2, formálně: $\{a, b, c, d\}^* \smallsetminus L_2$

1.4 **a)** Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa, bb\}$, $i = 2$, $L^i = \{aaaa, aabb, bbaa, bbbb\}$, $\{w^i \mid w \in L\} = \{aaaa, bbbb\}$
b) Neplatí. Protipříklad: $L = \{aa\}$, $L^2 = \{aaaa\}$, ale $|aaaa| \neq 2$ **c)** $L = \{a\}$

1.5 $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_2$, $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_3$, $L_1 = L_4 = L_5 \supsetneq L_6$, neporovnatelné: L_2, L_3, L_6
L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$ tvaru $xyzxyzxyz \ldots xyz$
L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
L_4 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x, y\}^* \cup \{z\}^*$
L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x

1.6 $L_1 = L_5 \supsetneq L_2 \supsetneq L_6$, $L_1 = L_5 \supsetneq L_3 \supsetneq L_4$, $L_2 \supsetneq L_4$, neporovnatelné: L_2 a L_3, L_6 a L_3, L_6 a L_4
L_1 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$
L_2 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, kromě ε
L_3 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, ve kterých jsou všechna x před všemi y a z a všechna y před všemi z
L_4 – ty slova z L_3, která mají právě 2 výskyty y
L_5 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$; protože $\{x, y, z\} \subset \{x\}^* \cdot \{y\}^* \cdot \{z\}^*$
L_6 – všechna slova nad $\{x, y, z\}$, která obsahují alespoň jeden výskyt x

1.7 **a)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **b)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*$ **c)** $L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **d)** $L_1 \cup L_2 \cup L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cup L_2 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ a pokud naznáme, že ε také začíná a končí stejným znakem, je třeba k řešení přidat $\cup (L_1^* \cap L_2^*)$ **e)** $(L_1 \cup L_2)^* \cdot L_1 \cdot L_2 \cdot L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^*$ **f)** $(L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^* \cap L_1 \cdot (L_1 \cup L_2)^* \cdot L_2$ **g)** $((L_1 \cdot L_1 \cup L_1 \cdot L_2 \cup L_2 \cdot L_1 \cup L_2 \cdot L_2)^*)^C$

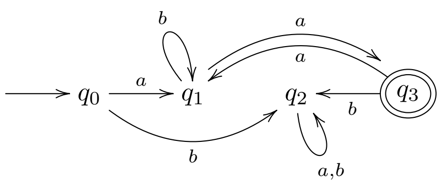
1.8 **a)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **b)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **c)** ne, $L_1 = \{a\}$, $L_2 = \{ab\}$ a $L_3 = \{b, \varepsilon\}$ **d)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **e)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$ **f)** ano, nutno dokázat obě inkluze $\subseteq$ a $\supseteq$ **g)** ne, $L_1 = \{a\}$ a $L_2 = \{b\}$

1.9 **a)** $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$, typu 0 **b)** $\{b, c\}^* \cdot \{a\} \cdot \{a, b, c\}^+$, typu 3 (regulární)

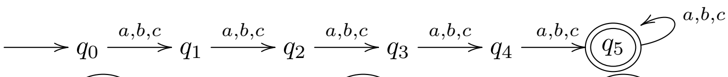
1.10 $\{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = 2k, \#_b(w) = 2j; j, k \in \mathbb{N}_0\}$, dolní indexy u navržených neterminálů představují zbytek po dělení počtu 'a' (resp. 'b') dvěma

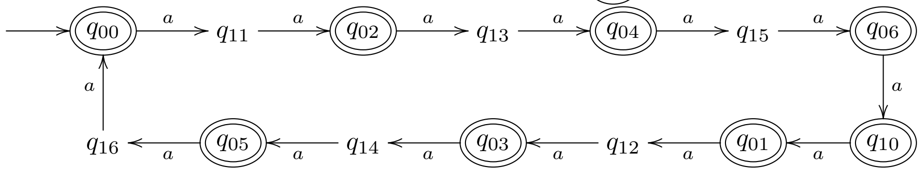
Deterministické konečné automaty, pumping lemma

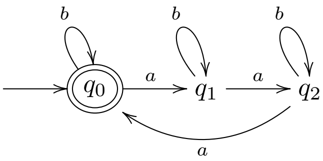
2.1 **a)**

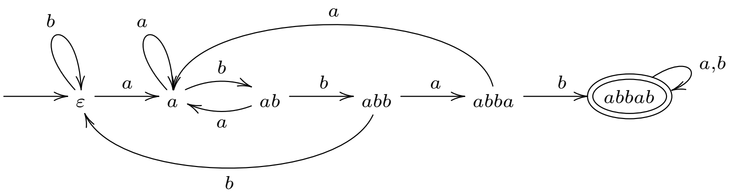


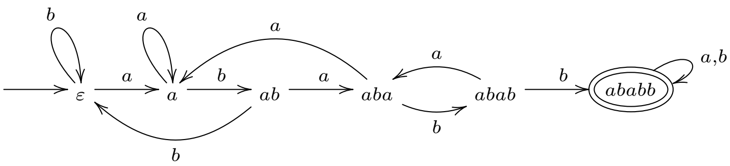
b) $L = \{a\} \cdot \{b, aa\}^* \cdot \{a\}$ **c)** $L = (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot \{aa\})^* \cdot (\{a\} \cdot \{b\}^* \cdot (\{a\} \cup \{ab\} \cdot \{a, b\}^*) \cup \{b\} \cdot \{a, b\}^*)$

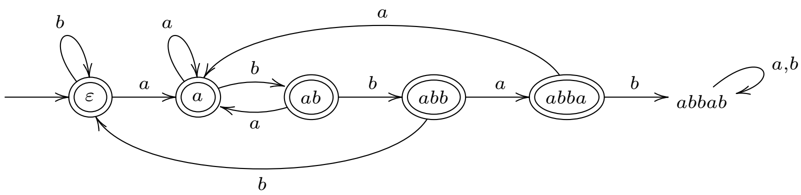
2.2 a) 

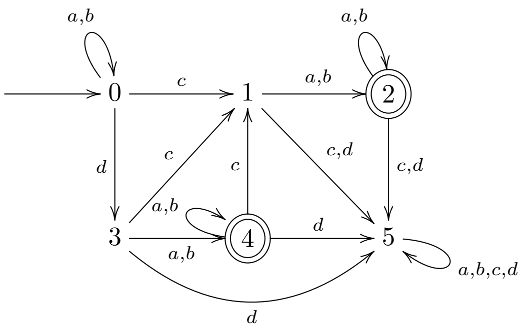
b) 

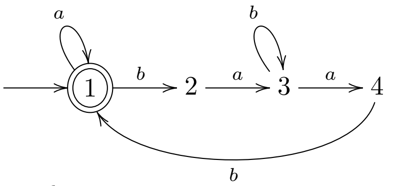
c) 

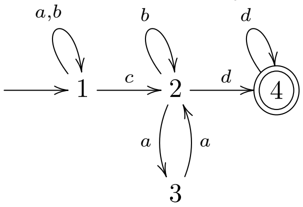
d) 

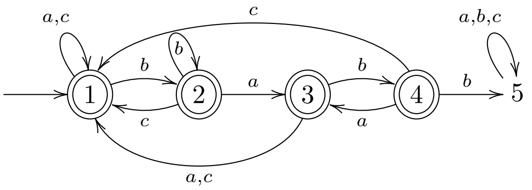
e) 

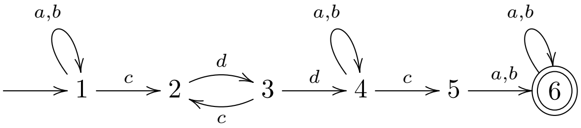
f) 

g) 

h) 

2.3 a) 

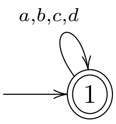
b) 

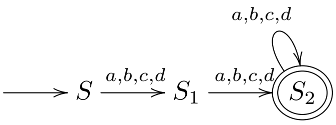
c) 

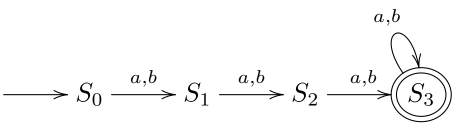
2.4 $L = \{a\}.\{b\}^*.\{a\}.(\{c\}.\{d\})^* \cup \{b\}$

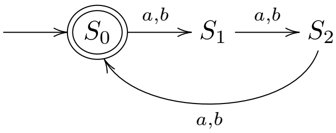
2.5 $L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \land w = u.v \Rightarrow |\#_a(u) - \#_b(u)| \leq 3\}$

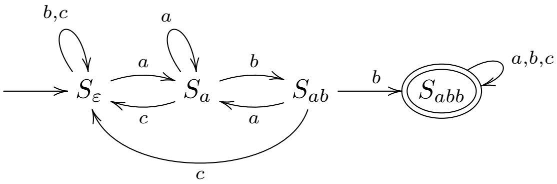
2.6 U příkladu **e)** je třeba volit slovo $a^n b^{n!+n}$.

2.8 **a)** 1.11a 

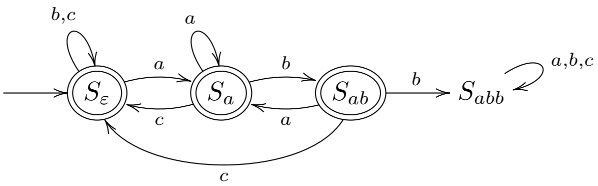
1.11b 

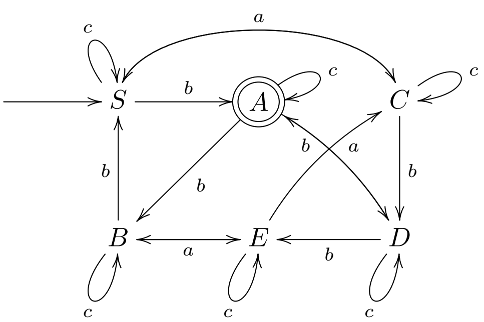
1.11c 

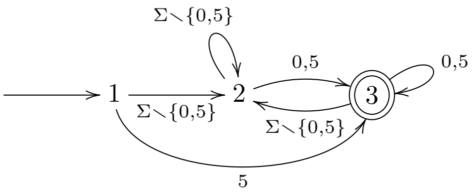
1.11d 

1.11e 

1.11f Není regulární.

1.11h 

1.11i 

1.11j 

Minimalizace DFA, nedeterministické FA, (Myhill-)Nerodova věta

3.1 **a)**

	a	b
$\rightarrow$ A	B	C
B	D	B
C	C	D
$\leftarrow$ D	C	B

b)

	a	b
$\leftrightarrow$ A	B	C
B	B	C
C	C	D
$\leftarrow$ D	D	C

3.2 **a)**

	a	b
$\rightarrow$ A	B	C
B	C	A
C	C	D
D	C	E
$\leftarrow$ E	F	E
F	D	F

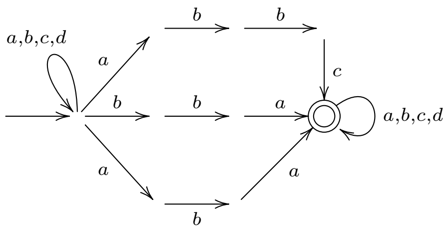
b)

	a	b
$\rightarrow$ A	B	C
B	D	B
$\leftarrow$ C	B	C
$\leftarrow$ D	E	B
E	F	C
F	F	F

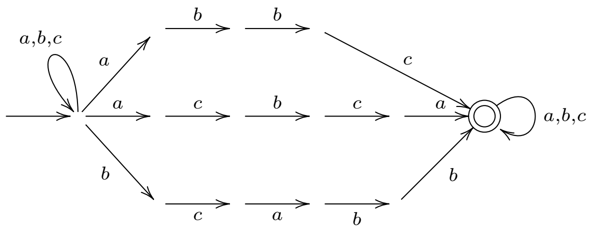
Výsledné automaty v obou případech nejsou ekvivalentní automatům uvedeným v zadání vpravo.

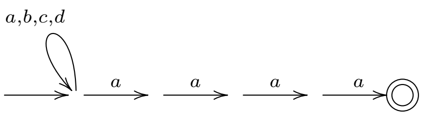
3.3 Není.

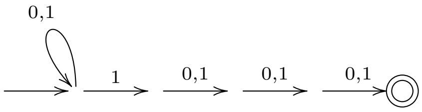
3.4 **a)**

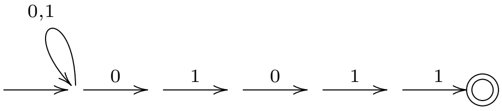


b)

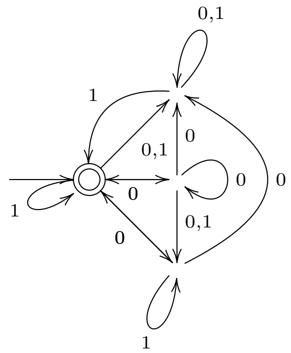


c) 

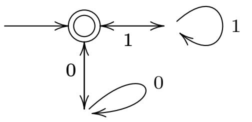
d) 

e) 

f)



g)



3.5 a)

		a	b	c
$\rightarrow$	[1]	[23]	[34]	[1]
$\leftarrow$	[23]	[123]	[14]	[234]
	[34]	[123]	[1]	[34]
$\leftarrow$	[123]	[123]	[134]	[1234]
	[14]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[234]	[123]	[14]	[234]
	[134]	[123]	[134]	[134]
$\leftarrow$	[1234]	[123]	[134]	[1234]

b)

		a	b	c
$\rightarrow$	[1]	[12]	[1]	[1]
$\leftarrow$	[12]	[12]	[13]	[1]
	[13]	[12]	[1]	[14]
	[14]	[125]	[1]	[1]
$\leftarrow$	[125]	[12]	[136]	[1]
	[136]	[127]	[1]	[14]
$\leftarrow$	[127]	[12]	[13]	[1]

3.6 $(\{a,b\}.\{b\} \cup \{a,b\}.\{b\}.\{a,b\})^*.\{a,b\}.\{b\}$

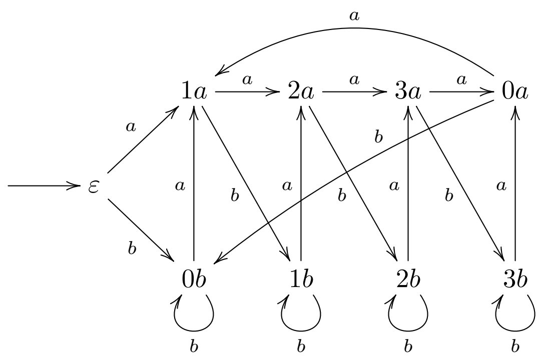
3.8 a) Předpokládejme, že takový automat existuje. Pak ze slov a^0, a^1, a^2, a^3, a^4 musejí dvě nutně padnout do stejné třídy rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$. Označme je a^i, a^j $(i \neq j)$ a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $i < j$. Pak platí
$a^i.a^{4-j} = a^{4+i-j} \notin L$
$a^j.a^{4-j} = a^4 \in L$,
a tedy $a^i \not\sim_L a^j \Rightarrow |\sim_L| \geq 5$.
b) Analogicky jako v a).

3.10 a) Důkaz sporem. Předpokládejme, že L je regulární. Pak prefixová ekvivalence $\sim_L$ má konečný index, označme jej n. Pak ovšem ze slov $a, a^2, a^4, \ldots, a^{2^n}$ nutně musí některá dvě slova padnout do stejné třídy rozkladu, označme je a^k, a^l $(k \neq l)$. Po přiřetězení slova a^k dostáváme slovo $a^k a^k \in L$ a slovo $a^l a^k \notin L$. Tím je dosažen spor s předpokladem a L není regulární.
b) $\varepsilon, a, a^2, ..., a^n$ z čehož a^k, a^l (BÚNO $k < l$), která $a^k b^k \in L, a^l b^k \notin L$
c) $abb, a^2bb, ..., a^{n+1}bb$ z čehož a^kbb, a^lbb $(k \neq l)$, která $a^kbba^k \in L, a^lbba^k \notin L$
d) $\varepsilon, a, a^2, ..., a^n$ z čehož a^k, a^l (BÚNO $k < l$), která $a^k b^k \notin L, a^l b^k \in L$

3.11 Definujeme binární relaci $\sim$ takto: $u \sim v \iff \#_a(w) \equiv \#_b(w) \pmod 3$
$\sim$ je ekvivalence, $\sim$ je pravá kongruence, $|\sim| = 3$, tedy má konečný index, $L = \{w \mid \#_a(w) \mod 3 = 0\}$

3.12 a) 4 **b)** nemá konečný index

3.13 a) $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 4. L může být libovolný jazyk, jehož minimální automat odpovídá přímo relaci $\sim$. Takových jazyků je 12, což je vidět po nakreslení automatu (bez akceptujících stavů) podle $\sim$ a zvážení, pro které označení koncových stavů je automat minimální. Jazyky L' jsou právě ty, které lze popsat stejným automatem, ale s takovou množinou koncových stavů, při které automat není minimální. Např. $L' = \{a,b\}^*$.
b) $\sim$ není ekvivalence (není tranzitivní).
c) $\sim$ je ekvivalence i pravá kongruence, index je 9. Lze podle ní sestavit tento automat:



Je vidět, že automat nebude při žádném označení koncových stavů minimální: stavy $\varepsilon, 0a, 0b$ mají stejné přechody a vždy budou alespoň dva z nich označeny jako akceptující nebo neakceptující a tudíž ty dva stavy budou jazykově ekvivalentní. Naopak L' může být jakýkoliv jazyk rozpoznávaný uvedeným automatem s libovolným označením koncových stavů. Takových jazyků L' je tedy celkem 2^9.

Regulární gramatiky a výrazy $\Leftrightarrow$ FA, ε-kroky, Kleeneho věta

4.1

	a	b	c
$\leftrightarrow \overline{S}$	$\{\overline{A}, q_f\}$	$\{\overline{C}\}$	$\emptyset$
$\overline{A}$	$\{\overline{A}\}$	$\{\overline{B}, q_f\}$	$\{q_f\}$
$\overline{B}$	$\{\overline{B}, \overline{C}\}$	$\{\overline{C}\}$	$\{\overline{A}, q_f\}$
$\overline{C}$	$\{\overline{A}, q_f\}$	$\{\overline{B}, q_f\}$	$\emptyset$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.2

	a	b	c
$\rightarrow \overline{S}$	$\{\overline{X}\}$	$\{\overline{Y}\}$	$\{q_f\}$
$\overline{X}$	$\emptyset$	$\{\overline{S}, \overline{X}\}$	$\emptyset$
$\overline{Y}$	$\emptyset$	$\{\overline{S}\}$	$\{\overline{Z}\}$
$\overline{Z}$	$\{\overline{S}\}$	$\{q_f\}$	$\{q_f\}$
$\leftarrow q_f$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

4.5

	a	b	c	d
$\leftrightarrow 0$	$\{0,1,2,3,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3,4\}$
1	$\{0,1,2,3,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{3,4\}$
$\leftarrow 2$	$\{3,4\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{3,4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$
4	$\emptyset$	$\{3,4\}$	$\{2\}$	$\emptyset$

4.7

	a	b	c
$\rightarrow 1$	$\{1,2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\emptyset$
2	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\emptyset$
3	$\emptyset$	$\{2,6\}$	$\emptyset$
4	$\{1,2,5,6\}$	$\{1,2,3,4,5,6\}$	$\{2,3,6\}$
5	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\{2,3,6\}$
$\leftarrow 6$	$\{2,5,6\}$	$\{2,3,5,6\}$	$\{2,3,6\}$

4.11 **a)** $(a+b)^*ab$ **b)** $b^*(ab^*ab^*)^*$ **c)** $a(a+b)^*a+b(a+b)^*b+a+b$ (pokud ε také začíná a končí na stejným symbolem, přičteme ještě ε) **d)** $((a+b)(a+b))^*$

4.12 **a)** M_1 je třída všech konečných jazyků.

b) Nechť Σ_1 je nějaká abeceda. Pak $C(\Sigma_1)$ definujeme jako množinu všech slov, kde se každé písmeno z abecedy vyskytuje aspoň jednou, tj.

$$C(\Sigma') = \{w \in \Sigma_1^* \mid \forall a \in \Sigma_1 : \#_a(w) > 0\}.$$

Pak M_2 je třída všech jazyků L takových, že pro všechny Σ_1, které jsou podmnožinou abecedy jazyka L, platí: $L \cap C(\Sigma_1)$ je konečný nebo $C(\Sigma_1) \smallsetminus L$ je konečný.

Poměrně snadno se ukáže, že M_2 všechny takové jazyky musí obsahovat a že je tato třída zároveň uzavřená na sjednocení, průnik a komplement.

c) M_3 je třída všech konečných jazyků.

Uzávěrové vlastnosti $\mathcal{R}$

5.1 Neplatí. Jazyky $L_i = \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$ jsou konečné a tudíž regulární, ale $\bigcup_{i=1}^{\infty} L_i = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární.

5.2 $L_i = \{a, b\}^* \smallsetminus \{a^i b^i\}$ pro každé $i > 0$. Pak $\bigcap_{i=1}^{\infty} L_i = \{a, b\}^* \smallsetminus \{a^n b^n \mid n > 0\}$, což není regulární jazyk, protože $\{a^n b^n \mid n > 0\}$ není regulární jazyk a regulární jazyky jsou uzavřené na doplněk.

5.3 Neregulární jazyky jsou uzavřené na komplement. U všech ostatních operací lze najít jazyky takové, že výsledkem je neregulární jazyk, i takové, že výsledek je regulární. Nechť $R = \{a^n b^n \mid n > 0\}$ je jazyk nad $\Sigma = \{a, b\}$. R jistě není regulární.

operace	regulární výsledek	neregulární výsledek
$L_1 \cap L_2$	$R \cap co{-}R = \emptyset$	$R \cap R = R$
$L_1 \cup L_2$	$R \cup co{-}R = \Sigma^*$	$R \cup R = R$
$L_1 \smallsetminus L_2$	$R \smallsetminus R = \emptyset$	$R \smallsetminus co{-}R = R$
$L_1 \cdot L_2$	$(R \cup \{\varepsilon\}) \cdot co{-}R = \Sigma^*$	$R \cdot R$
L_1^*	$(co{-}R)^* = \Sigma^*$	R^*

5.4 Platí.

5.5 Ani jedna implikace neplatí.

5.6 Stačí zvolit L_1 jako libovolný neregulární jazyk a L_2 jako doplněk L_1.

Bezkontextové gramatiky

6.1 **a)** $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$ **b)** Jazyk se nedá moc rozumně popsat.

6.4 Ano, každý regulární jazyk je jednoznačný CFL.

Normální formy CFG, pumping lemma pro CFL

7.9 Minimální i maximální délka odvození je $2n - 1$.

Zásobníkové automaty

8.2 **a)** $\{a^i b^j \mid i > j > 0\}$

Uzávěrové vlastnosti CFL

9.3 **a)** ano **b)** ne **c)** ano **d)** třída bezkontextových jazyků bez vlastnosti sebevložení se rovná třídě regulárních jazyků

Konstrukce Turingových strojů

10.2 Návod: TS bude donekonečna číst vstupní pásku a posouvat se vpravo, nebo bude ve dvou krocích opakovaně posunovat hlavu vlevo a vpravo.

Vztah TS a gramatik typu 0, uzávěrové vlastnosti

11.3 **a)** Neplatí. Stačí vzít libovolný neregulární rekurzivně spočetný L nad abecedou Σ a $R = \Sigma^*$. **b)** Platí (viz. skripta). **c)** Platí (viz. skripta). **d)** Platí. **e)** Platí. **f)** Neplatí. Stačí vzít $R \supseteq L$. **g)** Platí. Plyne z uzavřenosti rekurzivních jazyků na sjednocení.

11.6 $L = \{w \mid w$ je kód dvojice (A, v) takové, že TS A nezastaví svůj výpočet nad slovem $v\}$

Redukce

12.1 **a)** Platí (přímo z definičního vztahu). **b)** Neplatí. $A = \{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$, $B = \{0\}$, $f(x) = 0$ pokud x je tvaru ww, $f(x) = 1$ jinak. **c)** Platí. **d)** Platí (připomeňme, že $A \leq_m B$ implikuje $co{-}A \leq_m co{-}B$). **e)** Neplatí. $A = \emptyset$, B je problém zastavení. $f(x) = y$, kde y je libovolné slovo nad $\{0, 1, \#\}$, které neleží v B. **f)** Platí. $f(w) = \langle M', w\rangle$, kde M' je TM akceptující A takový, že místo do zamítajícího stavu začne cyklit. Tedy M' akceptuje w právě když zastaví. Funkce $f(w) = \langle M, w\rangle$, kde M je libovolný zvolený TM akceptující A naopak redukcí být nemusí (např. pokud je A rekurzivní a M je úplný).

12.2 A není rekurzivní, protože na něj lze redukovat problém zastavení. A je rekurzivně spočetný (lze ukázat přímo nebo redukcí na problém akceptování). $co{-}A$ není rekurzivně spočetný (A by pak byl rekurzivní).

12.3 Řešením je posloupnost $2, 2, 4, 3, 3, 1, 1$.

12.4 Lze ukázat redukcí běžného PCP na problém ze zadání.

12.5 Lze ukázat redukcí $co{-}NONEMPTY$ na EQ. $NONEMPTY = \{\langle\mathcal{M}\rangle \mid \mathcal{M}$ je TM a $L(\mathcal{M}) \neq \emptyset\}$ je problém neprázdnosti, který je nerozhodnutelný a tudíž i jeho doplňek je nerozhodnutelný.

Složitost

13.1 Postupujeme podle definice $\mathcal{O}$. Buď najdeme konstanty n_0 a c tak, že pro všechna $n \geq n_0$ platí definiční nerovnost, nebo ukážeme (většinou sporem), že takové konstanty neexistují. **a)** Volíme například $n_0 = 1$, $c = 3$. Pro všechna $n \geq n_0$ platí $2n \leq 3n = cn$ a proto $2n \in \mathcal{O}(n)$. **b)** Předpokládejme, že existují n_0 a c takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $n^2 \leq cn$. Položme $m = \max\{c, n_0\} + 1$. Zjevně $m \geq n_0$, ale $m^2 > cm$. To je spor a proto $n^2 \notin \mathcal{O}(n)$. **c)** Platí. **d)** Neplatí. **e)** Nejprve připomeňme definici. Píšeme $f(n) \in 2^{\mathcal{O}(g(n))}$, pokud existují $n_0, c \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $f(n) \leq 2^{c \cdot g(n)}$. Analogicky se definuje i význam dalších aritmetických výrazů obsahujících $\mathcal{O}(g(n))$, jako například $2^{2^{\mathcal{O}(g(n))}}$.

Vztah $3^n \in 2^{\mathcal{O}(n)}$ samozřejmě platí. Stačí zvolit $n_0 = 1$ a $c = 2$. **f)** Platí. Stačí zvolit $c = 4$ a dopočítat dostatečně velké n_0. **g)** Neplatí. V důkazu sporem stačí zvolit $m = \max\{1, c, n_0\}$.

13.2 Tento vztah obecně neplatí. Protipříkladem jsou například funkce $f(n) = 1$ a

$$g(n) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } n \text{ je sudé,} \\ n & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zjevně $g(n) \notin \mathcal{O}(f(n))$, protože funkce g není shora omezená a tudíž pro každé $n_0, c \in \mathbb{N}$ existuje $n > n_0$ splňující $g(n) > c \cdot f(n) = c$. Vztah $f(n) \in o(g(n))$ ovšem neplatí, protože funkce $\frac{f(n)}{g(n)}$ nemá pro n jdoucí do nekonečna limitu.

13.3 Nechť M_A, M_B jsou jednopáskové deterministické Turingovy stroje pracující s časovou složitostí $\mathcal{O}(p_A), \mathcal{O}(p_B)$ (kde p_A a p_B jsou polynomy), které akceptují jazyky A, B. Nejprve ukážeme, že třída P je uzavřená na všechny tři operace.

Popíšeme dvoupáskový deterministický Turingův stroj M akceptující jazyk $A \cup B$. Stroj M pro vstup x nejprve zkopíruje vstup na druhou pásku (v čase $\mathcal{O}(n)$), pak na druhé pásce simuluje výpočet stroje M_A. Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje M_A, pak i stroj M akceptuje. V opačném případě stroj M simuluje na první pásce výpočet stroje M_B. Je-li v této simulaci dosažen akceptující stav stroje M_B, pak i stroj M akceptuje, jinak zamítá. Je zřejmé, že stroj M akceptuje jazyk $A \cup B$ a že pracuje v čase $\mathcal{O}(n + p_A(n) + p_B(n))$, tedy v polynomiálním čase.

Stroj akceptující komplement jazyka A získáme ze stroje M_A záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu. Takto získaný stroj pracuje se stejnou časovou složitostí jako M_A.

Popíšeme třípáskový Turingův stroj M akceptující jazyk $A.B$. Stroj postupně zkouší rozdělit vstupní slovo $x = x_1x_2 \ldots x_n$ na všechny možné dvojice podslov (nejprve ε a x, pak x_1 a $x_2 \ldots x_n$, pak x_1x_2 a $x_3 \ldots x_n$, ..., nakonec x a ε). První podslovo vždy zkopíruje na druhou pásku a simuluje na něm výpočet stroje M_A. Druhé podslovo zkopíruje na třetí pásku a simuluje na něm výpočet stroje M_B. Pokud obě simulace dospějí do akceptujícího stavu, stroj M akceptuje. V opačné situaci postup opakujeme pro další dvojici podslov. Pokud už byly vyzkoušeny všechny dvojice, stroj M zamítne. Stroj M pracuje v čase $\mathcal{O}(n \cdot (n + p_A(n) + p_B(n)))$, tedy v polynomiálním čase.

Třída NP je uzavřená na sjednocení i na zřetězení. V obou případech lze použít stejnou argumentaci jako u třídy P. V případě zřetězení lze algoritmus stroje M vylepšit tak, že neprochází všechny dvojice podslov, ale nedeterministicky uhodne správné rozdělení na podslova.

Uzavřenost třídy NP na komplement je otevřený problém (známý jako $\mathsf{NP} = \mathsf{coNP}$?). Výše uvedená argumentace pro P v tomto případě nefunguje: záměnou akceptujícího a zamítajícího stavu u nedeterministického stroje získáme stroj, který akceptuje slovo w pokud existuje zamítající výpočet původního stroje nad tímto slovem. Žádoucí by ovšem bylo, aby zkonstruovaný stroj akceptoval slovo w pokud jsou *všechny* výpočty původního stroje nad tímto slovem zamítající.

13.4 **a)** Neplatí. Stačí uvážit libovolný jazyk $L \in \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Jelikož třída P je uzavřená na doplněk, tak i $co{-}L \in \mathsf{P} \subseteq \mathsf{NP}$. Tedy $co{-}L \notin co{-}\mathsf{NP}$, ale přitom $co{-}L \in \mathsf{coNP}$. **b)** Platí. Jelikož $co{-}L_1, co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$ a NP je uzavřené na sjednocení, tak $co{-}L_1 \cup co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$. Tedy $L_1 \cap L_2 \in \mathsf{coNP}$. **c)** Platí. Jelikož $co{-}L_2 \in \mathsf{NP}$ a NP je uzavřené na průnik (lze lehce dokázat), tak $L_1 \cap co{-}L_2 = L_1 \smallsetminus L_2 \in \mathsf{NP}$.

13.6 Příslušnost do NP lze dokázat snadno. NP-těžkost lze dokázat redukcí: **a)** z problému *3SAT* (viz Sipser: Theorem 7.35 v 1. vydání, Theorem 7.46 ve 3. vydání) **b)** z problému *3SAT* (viz Sipser: Theorem 7.26 v 1. vydání, Theorem 7.32 ve 3. vydání) **c)** z problému *CLIQUE*. pro danou instanci $\langle G, k\rangle$ problému *CLIQUE* lze v polynomiálním čase vytvořit dvojici $\langle H_k, G\rangle$, kde H_k je úplný graf s k vrcholy. Je zřejmé, že $\langle G, k\rangle \in \mathit{CLIQUE}$ právě tehdy, když $\langle H_k, G\rangle \in \mathit{SGI}$.

Abychom se ujistili, že redukce $\mathit{CLIQUE} \leq_p \mathit{SGI}$ je polynomiální i při binárním zakódování k, můžeme ji vylepšit tak, že nejprve ověříme, zda graf G má alespoň k vrcholů. V případě kladné odpovědi pokračujeme jako v předchozím případě (dvojici $\langle H_k, G\rangle$ lze jistě zkonstruovat v čase kvadratickém vzhledem k počtu vrcholů grafu G). V opačném případě jistě platí, že $\langle G, k\rangle \notin \mathit{CLIQUE}$ a tudíž stačí vygenerovat libovolnou dvojici grafů, která nepatří do *SGI* (například $\langle H, G'\rangle$, kde H je graf s jedním vrcholem v a hranou (v, v) a G' je graf s jedním vrcholem, ale bez hrany).

13.7 **a)** $\mathsf{TIME}(n^2) \subseteq \mathsf{TIME}(n^3)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $\mathsf{TIME}(n^2) \subsetneq \mathsf{TIME}(n^3)$) **b)** $\mathsf{SPACE}(2n^2) = \mathsf{SPACE}(100n^2)$ **c)** $\mathsf{SPACE}(n^2) \supseteq \mathsf{TIME}(n^2)$ **d)** $\mathsf{NSPACE}(n^2) \subseteq \mathsf{SPACE}(n^5)$ (ve skutečnosti lze dokázat i $\mathsf{NSPACE}(n^2) \subsetneq \mathsf{SPACE}(n^5)$) **e)** $\mathsf{P} \subseteq \mathsf{TIME}(2^n)$, protože $n^k \in \mathcal{O}(2^n)$ pro každé k

13.8 viz Sipser, za Definition 7.7.