Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

TIN
Teoretická informatika

3. domáca úloha

Adrián Tóth (xtotha01)

1. januára 2019

Obsah

1 Príklad číslo 1

1.1 (a)

Pre $f(0)$ je reťazec x prázdny pre ktorý páska 4 obsahuje výslednú hodnotu 1 t.j. $f(0) = 1$.

		$R^4 1^4 L^4$	R^1
1	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$
2	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$
3	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$
4	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$

Pre $f(1)$ je reťazec $x = 1$ pre ktorý páska 4 obsahuje výslednú hodnotu 1 t.j. $f(1) = 1$.

		$R^4 1^4 L^4$	R^1	$CP(3,2)$	L^3_Δ	$CP(4,3)$	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	$CP(2,4)L^4$	
1	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	
2	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	...
3	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	
4	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	

	$CP(3,4)$	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	R^1
	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$
...	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$
	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$
	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$

Pre $f(2)$ je reťazec $x = 11$ pre ktorý páska 4 obsahuje výslednú hodnotu 11 t.j. $f(2) = 2$.

		$R^4 1^4 L^4$	R^1	$CP(3,2)$	L^3_Δ	$CP(4,3)$	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	$CP(2,4)L^4$	
1	$\underline{\Delta}11\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}11\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	
2	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	...
3	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	
4	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	

	$CP(3,4)$	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	R^1	$CP(3,2)$	L^3_Δ	$CP(4,3)$	
	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	
...	$\Delta\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	...
	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	
	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	

	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	$CP(2,4)L^4$	$CP(3,4)$	$L^2_\Delta L^3_\Delta L^4_\Delta$	R^1
	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta11\underline{\Delta}\Delta^\omega$
...	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$
	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta1\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$
	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	$\Delta\underline{1}\Delta^\omega$	$\Delta11\underline{\Delta}\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}11\Delta^\omega$	$\underline{\Delta}11\Delta^\omega$

Hodnoty na páske číslo 4 TS M pre jednotlivé x sú uvedené dole v tabuľke.

x	**unárny zápis** x	**obsah pásky č.** 4 **po zastavení** TS M	**hodnota čísla na páske č.** 4
0	ε	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	1
1	1	$\underline{\Delta}1\Delta^\omega$	1
2	11	$\underline{\Delta}11\Delta^\omega$	2
3	111	$\underline{\Delta}111\Delta^\omega$	3
4	1111	$\underline{\Delta}11111\Delta^\omega$	5
5	11111	$\underline{\Delta}11111111\Delta^\omega$	8

Pre $f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ odpovedá rada čísel $1, 1, 2, 3, 5, 8$. Na základe získaných hodnôt ktoré sú uvedné vyššie v tabuľke a faktu, že sa jedná o veľmi známu radu čísel vyplýva, že funkcia f generuje čísla z Fibonacciho rady.

1.2 (b)

Funkciu f môžeme definovať ako parciálne rekurzívnu funckiu nasledujúcim spôsobom

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi_1^2 \circ h(x) \\ h(x+1) &= (\pi_2^2 \circ h(x), plus(\pi_1^2 \circ h(x), \pi_2^2 \circ h(x))) \\ h(0) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Demonštrácia na príklade pre $f(5)$

$$\begin{aligned} f(5) &= \pi_1^2 \circ h(5) \\ &= \pi_1^2(8, 13) \\ &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(5) &= (\pi_2^2 \circ h(4), plus(\pi_1^2 \circ h(4), \pi_2^2 \circ h(4))) \\ &= (\pi_2^2(5, 8), plus(\pi_1^2(5, 8), \pi_2^2(5, 8))) \\ &= (8, plus(5, 8)) \\ &= (8, 13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(4) &= (\pi_2^2 \circ h(3), plus(\pi_1^2 \circ h(3), \pi_2^2 \circ h(3))) \\ &= (\pi_2^2(3, 5), plus(\pi_1^2(3, 5), \pi_2^2(3, 5))) \\ &= (5, plus(3, 5)) \\ &= (5, 8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(3) &= (\pi_2^2 \circ h(2), plus(\pi_1^2 \circ h(2), \pi_2^2 \circ h(2))) \\ &= (\pi_2^2(2, 3), plus(\pi_1^2(2, 3), \pi_2^2(2, 3))) \\ &= (3, plus(2, 3)) \\ &= (3, 5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(2) &= (\pi_2^2 \circ h(1), plus(\pi_1^2 \circ h(1), \pi_2^2 \circ h(1))) \\ &= (\pi_2^2(1, 2), plus(\pi_1^2(1, 2), \pi_2^2(1, 2))) \\ &= (2, plus(1, 2)) \\ &= (2, 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(1) &= (\pi_2^2 \circ h(0), plus(\pi_1^2 \circ h(0), \pi_2^2 \circ h(0))) \\ &= (\pi_2^2(1, 1), plus(\pi_1^2(1, 1), \pi_2^2(1, 1))) \\ &= (1, plus(1, 1)) \\ &= (1, 2) \end{aligned}$$

$$h(0) = (1, 1)$$

2 Príklad číslo 2

Nevypracované.

3 Príklad číslo 3

Dôkaz:

1.) Dôkaz sporom pre '$\subseteq$'

Predpokladajme, že platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \subseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

Potom

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : 3^{2n} \leq c\,2^{3n}$$

Môžeme krátiť vzhľadom ku tomu, že $3^{2n} \neq 0$ pre žiadne n

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \tfrac{c2^{3n}}{3^{2n}} \geq 1$$

Uvážme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c2^{3n}}{3^{2n}}$$

Vypočítame hore uvedenú limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c2^{3n}}{3^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(2^3\right)^n}{\left(3^2\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} c\frac{8^n}{9^n} = \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{8}{9}\right)^n = c0 = 0$$

Nemôže súčastne platiť, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c2^{3n}}{3^{2n}} = 0$$

a

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \tfrac{c2^{3n}}{3^{2n}} \geq 1$$

z čoho vyplýva, že sa jedná o spor z čoho vyplýva, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \nsubseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

2.) Dôkaz sporom pre '$\supseteq$'

Predpokladajme, že platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

Potom

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : c\,3^{2n} \geq 2^{3n}$$

Môžeme krátiť vzhľadom ku tomu, že $2^{3n} \neq 0$ pre žiadne n

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \tfrac{c3^{2n}}{2^{3n}} \geq 1$$

Uvážme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c3^{2n}}{2^{3n}}$$

Vypočítame hore uvedenú limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c3^{2n}}{2^{3n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{c\left(3^2\right)^n}{\left(2^3\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{c9^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} c\frac{9^n}{8^n} = \lim_{n\to\infty} c\left(\frac{9}{8}\right)^n = c(+\infty) = +\infty$$

Keďže platí, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c3^{2n}}{2^{3n}} = +\infty$$

a

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : \tfrac{c3^{2n}}{2^{3n}} \geq 1$$

tak z toho vyplýva, že predpokladaný vzťah platí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

3.) Priamy dôkaz pre '='

Keďže z hore uvedených dôkazov platí, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \nsubseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

a

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$$

tak z toho vyplýva, že nasledujúci vzťah neplatí

$$\mathcal{O}(3^{2n}) = \mathcal{O}(2^{3n})$$

teda musí platiť, že

$$\mathcal{O}(3^{2n}) \neq \mathcal{O}(2^{3n})$$

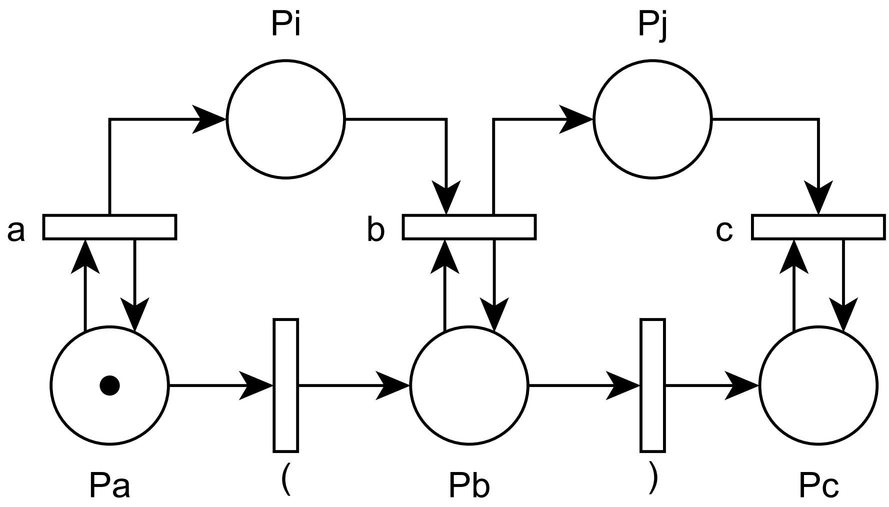
4 Príklad číslo 4

Nevypracované.

5 Príklad číslo 5

Na obrázku 1 je nakreslená petriho sieť ktorá akceptuje jazyk

$$L = \{a^i(b^j)c^k \in \{a, b, c, (,)\}^* \mid i \geq j = k\}$$



Obr. 1: Petriho sieť.

6 Literatúra

[1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text.* 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].
URL: `http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`