Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

TIN
Teoretická informatika

1. domáca úloha

Adrián Tóth (xtotha01)

28. októbra 2018

Obsah

1 Príklad číslo 1

1.1 (a)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa *Vety 3.23* [1](str. č. 50) platí, že trieda regulárnych jazykov $\mathcal{L}_3$ je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$$

Využitím hore uvedenej *Vety 3.23* a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_3$$

1.2 (b)

Vyjadríme si rozdiel množín ekvivalentným vzťahom pomocou prieniku a doplnku (komplementu), aby sme mohli využiť vetu zo študijného textu.

$$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$$

Podľa *Vety 4.27* [1](str. č. 96) platí, že trieda deterministických bezkontextových jazykov $\mathcal{L}_2^D$ je uzavretá voči prieniku a doplnku (komplementu).

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \cap \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2^D$$

Využitím hore uvedenej *Vety 4.27* a vzťahov môžeme stanoviť, že nasledujúci vzťah je platný.

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2^D$$

1.3 (c)

Predpokladajme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$ je pravdivý vzťah.

Ak berieme v úvahu, že $L_1 = \Sigma^*$ (regulárny jazyk), tak musí platiť:

$$\Sigma^* \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \underline{\textbf{SPOR}}$$

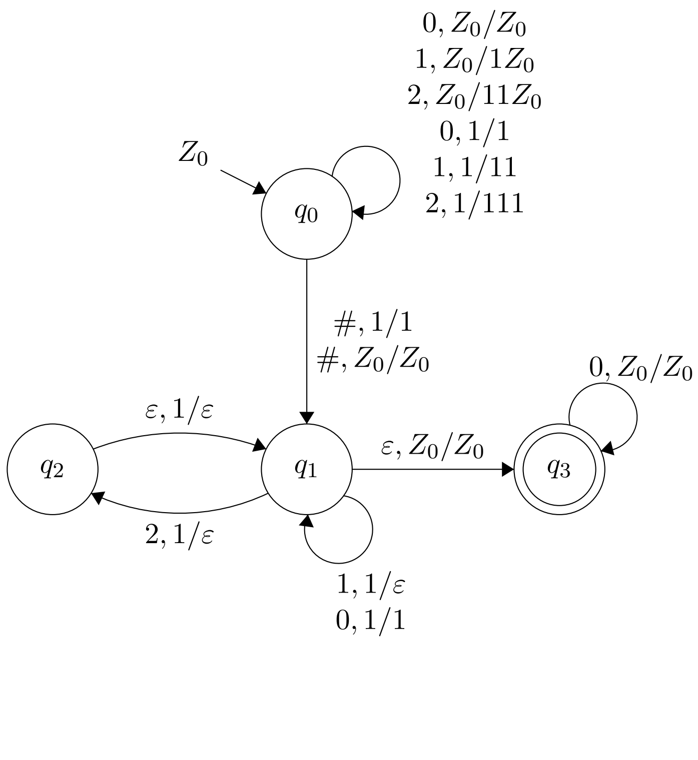
Vznikol nám spor pri $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_2$ z toho dôvodu, že podľa *Vety 4.24* [1](str. č. 95) platí, že bezkontextové jazyky nie sú uzavreté voči prieniku a doplnku.

Takže $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \setminus L_2 \in \mathcal{L}_2$ nie je pravdivý vzťah.

2 Príklad číslo 2

$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$\Sigma = \{\#, 0, 1, 2\}$
$\Gamma = \{Z_0, 1\}$
$F = \{q_3\}$
δ: $\delta(q_0, 0, Z_0) = (q_0, Z_0)$
$\delta(q_0, 1, Z_0) = (q_0, 1Z_0)$
$\delta(q_0, 2, Z_0) = (q_0, 11Z_0)$
$\delta(q_0, 0, 1) = (q_0, 1)$
$\delta(q_0, 1, 1) = (q_0, 11)$
$\delta(q_0, 2, 1) = (q_0, 111)$
$\delta(q_0, \#, 1) = (q_1, 1)$
$\delta(q_0, \#, Z_0) = (q_1, Z_0)$
$\delta(q_1, 0, 1) = (q_1, 1)$
$\delta(q_1, 1, 1) = (q_1, \varepsilon)$
$\delta(q_1, 2, 1) = (q_2, \varepsilon)$
$\delta(q_1, \varepsilon, Z_0) = (q_3, Z_0)$
$\delta(q_2, \varepsilon, 1) = (q_1, \varepsilon)$
$\delta(q_3, 0, Z_0) = (q_3, Z_0)$



3 Príklad číslo 3

$L = \{w_1\#w_2 \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_1(w_1) + (2 * \#_2(w_1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w_2))\}$

Veta 3.18 [1](str. č. 46): Nechť L je nekonečný regulární jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta $p > 0$ taková, že platí: $w \in L \wedge |w| \geq p \Rightarrow w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^iz \in L$ pro $i \geq 0$

Predpokladáme že jazyk L je regulárny jazyk a tak tento jazyk musí spĺňať hore uvedenú *Vetu 3.18.*

Pre $w \in L : w = 1^p\#1^p$ pre ktoré platí podmienka $|w| \geq p$ pretože platí $2p + 1 > p$, pričom z dôvodu podmienky $|xy| \leq p$ nastane jediný prípad a to:

$x = 1^l \wedge y = 1^m \wedge z = 1^{p-l-m}\#1^p$ kde $l \geq 0$ a $m > 0 \wedge l + m \leq p$ pre $l, m \in N$

$xy^iz = 1^l(1^m)^i1^{p-l-m}\#1^p = 1^{l+(i*m)+p-l-m}\#1^p = 1^{(i*m)+p-m}\#1^p \notin L$ pre všetky $i \geq 0 \wedge i \neq 1 \wedge i \in N$

Z predošlého vzťahu vyplýva, že jazyk L nie je regulárny.

4 Príklad číslo 4

ALGORITMUS

Vstup: Pravá lineárna gramatika $G_P = (N, \Sigma, P, S)$
Výstup: Ľavá lineárna gramatika $G_L = (N', \Sigma', P', S')$ taká, že $L(G_P) = L(G_L)$
Metóda:

1.) $N' = N \cup \{S'\}$ kde $S' \notin N$
2.) $\Sigma' = \Sigma$
3.) P': $\forall A, B, S \in N,\ w \in \Sigma^*$:

$$\begin{array}{r|lcl} I. & (S \to \varepsilon) \in P' & & \\ II. & (B \to Aw) \in P' & \Longleftrightarrow & (A \to wB) \in P \\ III. & (S' \to Aw) \in P' & \Longleftrightarrow & (A \to w) \in P \end{array}$$

DEMONŠTRÁCIA

Vstup: Pravá lineárna gramatika $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$

$$\begin{array}{ll} \text{P:} & S \to abA \mid bS \\ & A \to bB \mid S \mid ab \\ & B \to \varepsilon \mid aA \end{array}$$

Realizácia:

1.) $N' = N \cup \{S'\}$
2.) $\Sigma' = \Sigma$
3.) P':

$S \to abA$	sa transformuje na	$A \to Sab$	podľa	*II.*
$S \to bS$	sa transformuje na	$S \to Sb$	podľa	*II.*
$A \to bB$	sa transformuje na	$B \to Ab$	podľa	*II.*
$A \to S$	sa transformuje na	$S \to A$	podľa	*II.*
$A \to ab$	sa transformuje na	$S' \to Aab$	podľa	*III.*
$B \to \varepsilon$	sa transformuje na	$S' \to B$	podľa	*III.*
$B \to aA$	sa transformuje na	$A \to Ba$	podľa	*II.*
	pridá sa	$S \to \varepsilon$	podľa	*I.*

Výstup: Ľavá lineárna gramatika $G_L = (N', \Sigma', P', S')$ taká, že $L(G) = L(G_L)$

Overenie:
Pravá lineárna gramatika G_P derivuje reťazec *babbaabb*.

$$S \Rightarrow bS \Rightarrow babA \Rightarrow babbB \Rightarrow babbaA \Rightarrow babbaS \Rightarrow babbaabA \Rightarrow babbaabbB \Rightarrow babbaabb$$

Ľavá lineárna gramatika G_L musí tiež derivovať reťazec *babbaabb*, keďže platí $L(G_P) = L(G_L)$.

$$S' \Rightarrow B \Rightarrow Ab \Rightarrow Sabb \Rightarrow Aabb \Rightarrow Baabb \Rightarrow Abaabb \Rightarrow Sabbaabb \Rightarrow Sbabbaabb \Rightarrow babbaabb$$

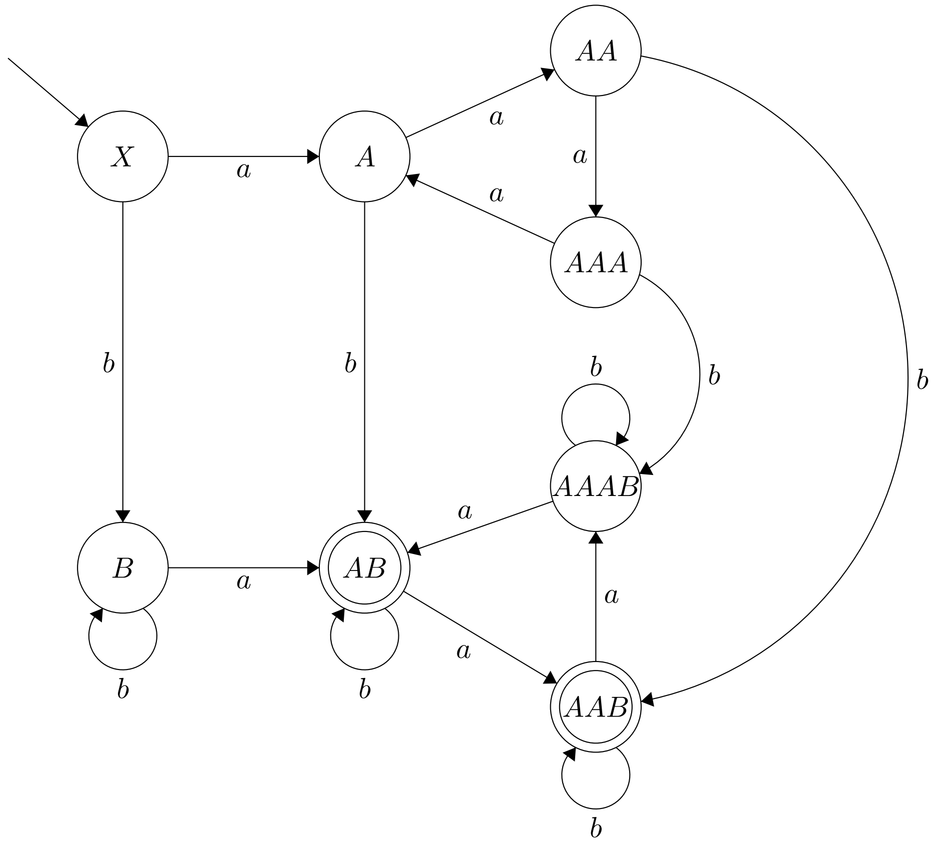
5 Príklad číslo 5

Definícia $\sim_L$ pre jazyk L:

$$u \sim_L v \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} (\#_a(u) mod\ 3 = \#_a(v) mod\ 3 \wedge ((\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0)))$$

Vychádzajme z *Vety 3.21* [1](str. č. 49), že počet stavov ľubovoľného minimálneho DKA prijímajúci jazyk L je rovný indexu $\sim_L$.

Vytvorme si úplne definovaný DKA bez nedosiahnuteľných stavov ktorý prijíma jazyk L:



S využitím *Algoritmu 3.5* [1](str. č. 34) minimalizujme predošlý automat:

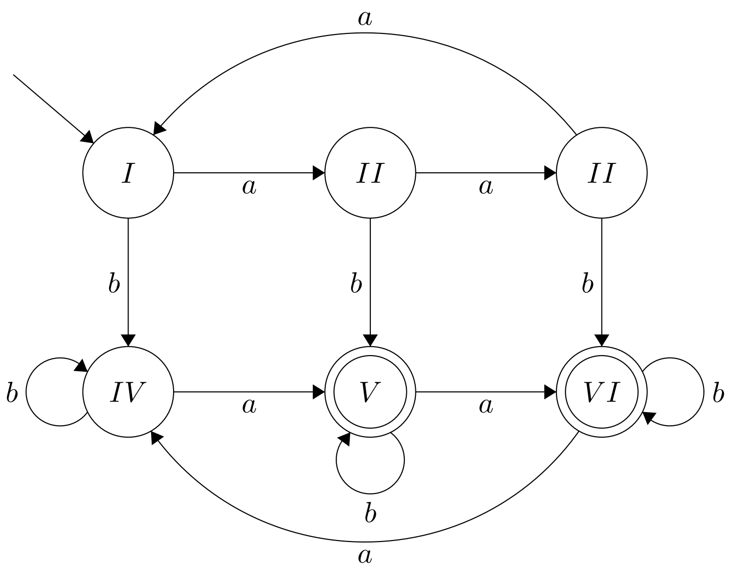
	$\equiv^0$	a	b
I	X	A(I)	B(I)
	A	AA(I)	AB(II)
	AA	AAA(I)	AAB(II)
	AAA	A(I)	AAAB(I)
	B	AB(II)	B(I)
	AAAB	AB(II)	AAAB(I)
II	AB	AAB(II)	AB(II)
	AAB	AAAB(I)	AAB(II)

	$\equiv^1$	a	b
I	X	A(II)	B(III)
	AAA	A(II)	AAAB(III)
II	A	AA(II)	AB(IV)
	AA	AAA(I)	AAB(V)
III	B	AB(IV)	B(III)
	AAAB	AB(IV)	AAAB(III)
IV	AB	AAB(V)	AB(IV)
V	AAB	AAAB(I)	AAB(V)

	$\equiv^2$	a	b
I	X	A(II)	B(IV)
	AAA	A(II)	AAAB(IV)
II	A	AA(III)	AB(V)
III	AA	AAA(I)	AAB(VI)
IV	B	AB(V)	B(IV)
	AAAB	AB(V)	AAAB(IV)
V	AB	AAB(VI)	AB(V)
VI	AAB	AAAB(IV)	AAB(VI)

$$\equiv^2 = \equiv^3 = \equiv$$

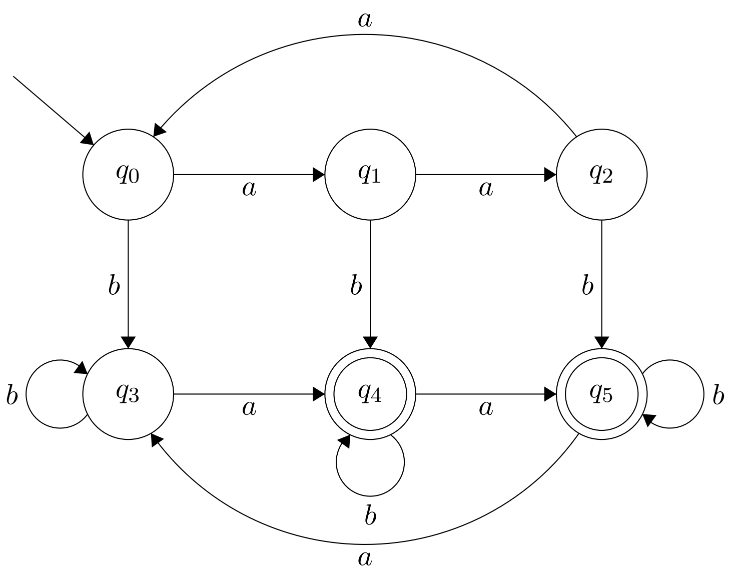
Zakreslíme si náš minimalizovaný DKA:



Premenujeme si jednotlivé stavy automatu ktoré znázorňujú jednotlivé ekvivalenčné triedy:

$$\begin{aligned} \text{I} &\to q_0 \\ \text{II} &\to q_1 \\ \text{III} &\to q_2 \\ \text{IV} &\to q_3 \\ \text{V} &\to q_4 \\ \text{VI} &\to q_5 \end{aligned}$$

Znovu zakreslíme automat s premenovanými stavmi:



Rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ je tvorený nasledujúcimi šiestimi triedami:

$$\begin{aligned} L^{-1}(q_0) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \\ L^{-1}(q_1) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} \\ L^{-1}(q_2) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 2 \wedge \#_b(w) = 0\} \\ L^{-1}(q_3) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 0 \wedge \#_b(w) > 0\} \\ L^{-1}(q_4) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 1 \wedge \#_b(w) > 0\} \\ L^{-1}(q_5) &= \{w \mid \#_a(w) mod\ 3 = 2 \wedge \#_b(w) > 0\} \end{aligned}$$

Rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ má tak konečný počet tried (šesť tried t.j. relácia $\sim_L$ má index 6) z čoho vyplýva podľa *Vety 3.20* [1](str. č. 48), že sa jedná o regulárny jazyk t.j. platí *Veta 3.21* [1](str. č. 48), keďže sme vedeli zostrojiť minimálny konečný automat.

Jazyk L je tvorený zjednotením dvoch predošlých tried:

$$L = L^{-1}(q_4) \cup L^{-1}(q_5)$$

6 Literatúra

[1] M. Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Studijní text.* 2018-08-23, [Online; Accessed: 2018-10-15].
URL: `http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`