確率論, 舟木直久 [1] 読書記録

最終更新: 2022 年 10 月 15 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの（2019/7/25 初版第 14 刷）

頁	行	誤	正
141	10	$(\Omega = S^n, \mathcal{F}, P)$	$\Omega = (S^n, \mathcal{F}, P)$
239	-3	**定理 A.5**	**定義 A.5**

■42,5（$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ がなりたつこと） Ito[2], p.65, 定理 10.2 より.

■42,6（$\tilde{X}$ が確率変数であること） $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ をいえばよい.

$$\begin{aligned}\{\tilde{X} \le a\} &= \Big(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0\Big) \cup \Big(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0^c\Big) \\ &= \begin{cases} (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \Omega_0^c & a \ge 0 \\ (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \varnothing & a < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

と変形できるが, $\{\lim_n X_n \le a\} \in \mathcal{F}$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ であるから a によらず $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ である. ゆえに $\tilde{X}$ は確率変数.

■45,13（$x = \pm n$ として $n \to \infty$ とすればよいこと） 有界単調数列が収束することと, 収束列の部分列はもとの列と同じ極限をもつことによる.

■46,-6

- $F(x) < w \implies x < Y(w)$: $F(x) < w \implies x \le \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\}$ である. $x = Y(w)$ と仮定すると, $\forall y > x$, $F(y) \ge w$ がなりたつが, F の右連続性より $F(x) = \lim_{y \to x+} F(y) \ge w$ となり矛盾.
- $x < Y(w) \implies F(x) < w$: 明らか. $x < Y(w) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\} \implies F(x) < w$.

■46,11（関数 $Y(w)$） 関数 $Y(w)$ の例.

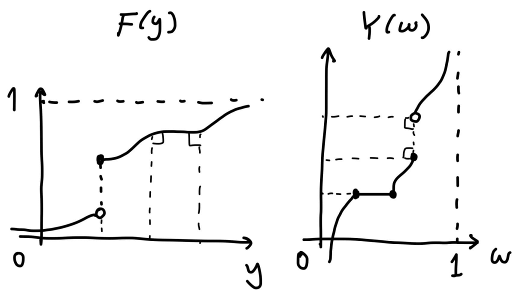

図 1　関数 $Y(w)$.

■46,-4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{w : Y(w) \le x\} = \{w; w \le F(x)\} = (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0,1))$ ゆえ Y は可測.

■47,2　$\mu((-\infty,x])=m(Y\leq x)=m((0,F(x)])=F(x)$. 2 つ目の等号で (2.3) を用いた.

■47,8（X と Y の分布が一致すること）　47,2 より任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し, $m_Y((\infty,x])=F(x)=P_X((-\infty,x])$ がなりたつ. π-λ 定理より $m_Y=P_X$.

■48,4（絶対連続, 特異）　Ito[2], p.130, 18 章.

■61,-2（$X_{1,1},X_{2,1},X_{2,2},\ldots$ が）

- p 次平均収束すること: $E[|X_{n,k}|^p]=E[X_{n,k}]=\frac{1}{n}$ ゆえ $\lim E[|X_{n,k}|^p]=0$ となる.
- 概収束しないこと: $X_{n,k}$ の定義より, 任意の $w\in(0,1)$ に対し, 任意の n について k が存在して $X_{n,k}(w)=1$ となるから, $\{w\in(0,1);\lim X_{n,k}(w)=0\}=\varnothing$. ゆえに $P(\lim X_{n,k}=0)=0\neq 1$.

■62,2（$X_n(w)=n1_{(0,\frac{1}{n})}(w)$ が）

- 概収束すること: 任意の $w\in(0,1)$ をとる. $N\geq\frac{1}{w}$ なる自然数 N をとれば, $n\geq N$ で $X_n(w)=0$ となる. ゆえに $\lim X_n(w)=0$. w は任意だったから $P(\lim X_n=0)=1$.
- p 次平均収束しないこと: $E[|X_n|^p]=\int_0^{\frac{1}{n}}n^p dw=n^{p-1}$ だから $\lim E[|X_n|^p]\neq 0$.

■68,1（$(X_n-X)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であること）　補題 2.55(1)(2) の条件をみたすことを確かめる.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(1) をみたすことと X が可積分であることより, $\sup_n E[|X_n-X|]\leq\sup_n E[|X_n|]+E[|X|]<\infty$.
2. $\sup_n E[|X_n-X|,A]\leq\sup_n E[|X_n|,A]+E[|X|,A]$ に注意. 任意の $\epsilon>0$ に対し, $A\in\mathcal{F}$ が $P(A)<\delta$ をみたすなら $\sup_n E[|X_n|,A]<\epsilon/2$ かつ $E[|X|,A]<\epsilon/2$ となるような δ を選ぶ[*1]. このとき $\sup_n E[|X_n-X|,A]<\epsilon/2+\epsilon/2=\epsilon$.

■69,14（$||X_n|-|X||\leq|X_n-X|$）　一般の $a,b\in\mathbb{R}$ について $ab\leq|a||b|\implies|a|^2-2|a||b|+|b|^2\leq|a|^2-2ab+|b|^2\implies||a|-|b||^2\leq|a-b|^2$ であるから.

■69,-5（条件 $P(|X|=\lambda)=0$ について）　たとえば $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加のとき, $|X|=\lambda$ となる w で

$$|X_n|\cdot 1_{\{|X_n|<\lambda\}}(w)\to\lambda\neq 0=|X|\cdot 1_{\{|X|<\lambda\}}(w)\tag{1}$$

となるおそれがあるが, $P(|X|=\lambda)=0$ なら概収束 $|X_n|\cdot 1_{\{|X_n|<\lambda\}}\to|X|\cdot 1_{\{|X|<\lambda\}}$ $a.s.$ に関与しない（ので安心）.

■70,5　$P(|X|=\lambda)>0$ なる λ が高々可算個しかないから, この後で十分大かつ $P(|X|=\lambda)=0$ なる λ を選ぶことができている.

■70,10（このことから...）　各 $m=1,2,\ldots,n_0-1$ についてそれぞれ $E[|X_m|,|X_m|\geq\lambda_m]<2\epsilon$ をみたす λ_m を選んでおく. $\lambda_0:=\max\{\lambda_1,\ldots,\lambda_{n_0-1},\lambda\}$ とおけば任意の $\lambda\geq\lambda_0$ で $\sup_n E[|X_n|,|X_n|\geq\lambda]<2\epsilon$ がなりたつ. よって $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分.

[*1] このような δ は $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(2) をみたすことと, X が可積分であることより存在する.

■80,-5（単調収束定理を用いる．について）

$$\begin{aligned} E[X] &= E[\lim_N (X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)})] \\ &= \lim_N E[X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)}] \quad \text{単調収束定理.} \\ &= \lim_N (E[X_1^{(N)}] \cdots E[X_n^{(N)}]) \\ &= \left(\lim_N E[X_1^{(N)}]\right) \cdots \left(\lim_N E[X_n^{(N)}]\right) \quad (X_k)_{1\le k\le n}\text{可積分.} \\ &= E[X_1] \cdots E[X_n] \quad \text{単調収束定理.} \end{aligned}$$

■83,7（補題 3.20）

- 原材料: $\underline{n \text{ 個の確率空間}}$ $(S_k, \mathcal{S}_k, \mu_k)$, $1 \le k \le n$ と $\underline{n \text{ 個の確率変数}}$ $X^{(k)} : S_k \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.
- 構成物: $\underline{1 \text{ 個の確率空間}}$ $(\prod_k S_k, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ と $\underline{n \text{ 個の確率変数}}$ $X_k : \prod_k S_k \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

$$\begin{aligned} P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) &= P(X_1^{-1}(B_1) \times \cdots \times X_n^{-1}(B_n)) \quad X_k\text{の定義.} \\ &= \prod_k \mu_k(X_k^{-1}(B_k)) \quad \text{直積測度の定義.} \\ &= \prod_k P(X_k \in B_k). \end{aligned}$$

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] ルベーグ積分入門, 伊藤清三（裳華房）