

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないのので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの (2019/7/25 初版第 14 刷)

頁	行	誤	正
141	10	$(\Omega = S^n, \mathcal{F}, P)$	$\Omega = (S^n, \mathcal{F}, P)$
239	-3	定理 A.5	定義 A.5

■42,5 ($\Omega_0 \in \mathcal{F}$ がなりたつこと) Ito[2], p.65, 定理 10.2 より.

■42,6 (\tilde{X} が確率変数であること) $\{\tilde{X} \leq a\} \in \mathcal{F}$ をいえばよい.

$$\begin{aligned} \{\tilde{X} \leq a\} &= \left(\{\tilde{X} \leq a\} \cap \Omega_0 \right) \cup \left(\{\tilde{X} \leq a\} \cap \Omega_0^c \right) \\ &= \begin{cases} (\{\lim_n X_n \leq a\} \cap \Omega_0) \cup \Omega_0^c & a \geq 0 \\ (\{\lim_n X_n \leq a\} \cap \Omega_0) \cup \emptyset & a < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

と変形できるが, $\{\lim_n X_n \leq a\} \in \mathcal{F}$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ であるから a によらず $\{\tilde{X} \leq a\} \in \mathcal{F}$ である. ゆえに \tilde{X} は確率変数.

■45,13 ($x = \pm n$ として $n \rightarrow \infty$ とすればよいこと) 有界単調数列が収束することと, 収束列の部分列はもとの列と同じ極限をもつことによる.

■46,-6

- $F(x) < w \implies x < Y(w)$: $F(x) < w \implies x \leq \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\}$ である. $x = Y(w)$ と仮定すると, $\forall y > x, F(y) \geq w$ がなりたつが, F の右連続性より $F(x) = \lim_{y \rightarrow x+} F(y) \geq w$ となり矛盾.
- $x < Y(w) \implies F(x) < w$: 明らか. $x < Y(w) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\} \implies F(x) < w$.

■46,11 (関数 $Y(w)$) 関数 $Y(w)$ の例.

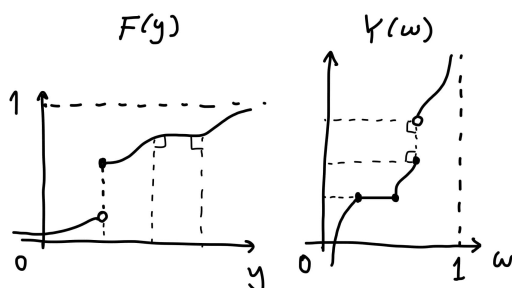


図 1 関数 $Y(w)$.

■46,-4 $\forall x \in \mathbb{R}, \{w : Y(w) \leq x\} = \{w : w \leq F(x)\} = (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0, 1))$ ゆえ Y は可測.

■47,2 $\mu((-\infty, x]) = m(Y \leq x) = m((0, F(x)]) = F(x)$. 2 回目の等号で (2.3) を用いた.

■47,8 (X と Y の分布が一致すること) 47,2 より任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $m_Y((-\infty, x]) = F(x) = P_X((-\infty, x])$ がなりたつ. π - λ 定理より $m_Y = P_X$.

■48,4 (絶対連続, 特異) Ito[2], p.130, 18 章.

■61,-2 ($X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, \dots$ が)

- p 次平均収束すること: $E[|X_{n,k}|^p] = E[|X_{n,k}|] = \frac{1}{n}$ ゆえ $\lim E[|X_{n,k}|^p] = 0$ となる.
- 概収束しないこと: $X_{n,k}$ の定義より, 任意の $w \in (0, 1)$ に対し, 任意の n について k が存在して $X_{n,k}(w) = 1$ となるから, $\{w \in (0, 1); \lim X_{n,k}(w) = 0\} = \emptyset$. ゆえに $P(\lim X_{n,k} = 0) = 0 \neq 1$.

■62,2 ($X_n(w) = n1_{(0, \frac{1}{n})}(w)$ が)

- 概収束すること: 任意の $w \in (0, 1)$ をとる. $N \geq \frac{1}{w}$ なる自然数 N をとれば, $n \geq N$ で $X_n(w) = 0$ となる. ゆえに $\lim X_n(w) = 0$. w は任意だったから $P(\lim X_n = 0) = 1$.
- p 次平均収束しないこと: $E[|X_n|^p] = \int_0^{\frac{1}{n}} n^p dw = n^{p-1}$ だから $\lim E[|X_n|^p] \neq 0$.

■68,1 ($(X_n - X)_{n \in \mathbb{N}}$ が一様可積分であること) 補題 2.55(1)(2) の条件をみたすことを確かめる.

1. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が補題 2.55(1) をみたすことと X が可積分であることより, $\sup_n E[|X_n - X|] \leq \sup_n E[|X_n|] + E[|X|] < \infty$.
2. $\sup_n E[|X_n - X|, A] \leq \sup_n E[|X_n|, A] + E[|X|, A]$ に注意. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) < \delta$ をみたすなら $\sup_n E[|X_n|, A] < \epsilon/2$ かつ $E[|X|, A] < \epsilon/2$ となるような δ を選ぶ*1. このとき $\sup_n E[|X_n - X|, A] < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

■69,14 ($||X_n| - |X|| \leq |X_n - X|$) 一般の $a, b \in \mathbb{R}$ について $ab \leq |a||b| \implies |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \leq |a|^2 - 2ab + |b|^2 \implies ||a| - |b||^2 \leq |a - b|^2$ であるから.

■69,-5 (条件 $P(|X| = \lambda) = 0$ について) たとえば $(|X_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ が単調増加のとき, $|X| = \lambda$ となる w で

$$|X_n| \cdot 1_{\{|X_n| < \lambda\}}(w) \rightarrow \lambda \neq 0 = |X| \cdot 1_{\{|X| < \lambda\}}(w) \quad (1)$$

となるおそれがあるが, $P(|X| = \lambda) = 0$ なら概収束 $|X_n| \cdot 1_{\{|X_n| < \lambda\}} \rightarrow |X| \cdot 1_{\{|X| < \lambda\}}$ a.s. に関与しない (ので安心) .

■70,5 $P(|X| = \lambda) > 0$ なる λ が高々可算個しかないから, この後で十分大かつ $P(|X| = \lambda) = 0$ なる λ を選ぶことができる.

■70,10 (このことから...) 各 $m = 1, 2, \dots, n_0 - 1$ についてそれぞれ $E[|X_m|, |X_m| \geq \lambda_m] < 2\epsilon$ をみたす λ_m を選んでおく. $\lambda_0 := \max\{\lambda_1, \dots, \lambda_{n_0-1}, \lambda\}$ とおけば任意の $\lambda \geq \lambda_0$ で $\sup_n E[|X_n|, |X_n| \geq \lambda] < 2\epsilon$ がなりたつ. よって $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は一様可積分.

*1 このような δ は $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が補題 2.55(2) をみたすことと, X が可積分であることより存在する.

■80,-5 (単調収束定理を用いる. について)

$$\begin{aligned}
 E[X] &= E[\lim_N (X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)})] \\
 &= \lim_N E[X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)}] \quad \text{単調収束定理.} \\
 &= \lim_N (E[X_1^{(N)}] \cdots E[X_n^{(N)}]) \\
 &= \left(\lim_N E[X_1^{(N)}] \right) \cdots \left(\lim_N E[X_n^{(N)}] \right) \quad (X_k)_{1 \leq k \leq n} \text{可積分.} \\
 &= E[X_1] \cdots E[X_n] \quad \text{単調収束定理.}
 \end{aligned}$$

■83,7 (補題 3.20)

- 原材料: n 個の確率空間 $(S_k, \mathcal{S}_k, \mu_k)$, $1 \leq k \leq n$ と n 個の確率変数 $X^{(k)} : S_k \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$.
- 構成物: 1 個の確率空間 $(\prod_k S_k, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ と n 個の確率変数 $X_k : \prod_k S_k \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned}
 P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) &= P(X_1^{-1}(B_1) \times \cdots \times X_n^{-1}(B_n)) \quad X_k \text{の定義.} \\
 &= \prod_k \mu_k(X_k^{-1}(B_k)) \quad \text{直積測度の定義.} \\
 &= \prod_k P(X_k \in B_k).
 \end{aligned}$$

■91,-10 ((1) 証明)

$$\begin{aligned}
 E[Z, B] &= aE[E[X|\mathcal{G}], B] + bE[E[Y|\mathcal{G}], B] \\
 &= aE[X, B] + bE[Y, B] \quad E[X|\mathcal{G}], E[Y|\mathcal{G}] \text{の定義.} \\
 &= E[aX + bY, B].
 \end{aligned}$$

■91,-7 ($Z \geq 0, a.s.$ であること) $Z \geq 0, a.s.$ でないとすると, $A \in \mathcal{F}$ があって $P(A) > 0, \omega \in A \implies Z(\omega) < 0$ になりたつ. Z が \mathcal{G} -可測なので (適当に A を広げることで) $A \in \mathcal{G}$ となるように取り直せる. すると $E[Z, A] < 0$ となり矛盾.

■94,11 (コルモゴロフの 0-1 法則の証明)

- $n \in \mathbb{N}$ に対し 1_A と \mathcal{F}_n が独立であること:
- \mathcal{P} が π -系であること:
 1. $\Omega \in \mathcal{F}_1$ ゆえ $\Omega \in \mathcal{P}$.
 2. $A, B \in \mathcal{P}$ とする. \mathcal{F}_k は単調増加だからある n が存在して $A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{F}_n$. ゆえに $A \cap B \in \mathcal{P}$.
- \mathcal{L} が λ -系であること:
 1. $E[1_A, \Omega] = E[1_A] = P(A) = P(A)P(\Omega)$ より $\Omega \in \mathcal{L}$.
 2. $A, B \in \mathcal{L}$ で $A \subset B$ とする. $C \in \mathcal{T}$ に対し, $E[1_C, B \setminus A] = E[1_C, B] - E[1_C, A] = P(C)P(B) - P(C)P(A) = P(C)P(B \setminus A)$.
 3. $A_n \in \mathcal{L} \nearrow A$ とする. $C \in \mathcal{T}$ に対し, $E[1_C, A] = E[1_{A \cap C}] = E[\lim_n 1_{A_n \cap C}] = \lim_n E[1_{A_n \cap C}] = \lim_n E[1_C, A_n] = \lim_n P(C)P(A_n) = P(C) \lim_n E[1_A] = P(C)P(A)$. 3 番目と 7 番目の等号で単調収束定理を用いた. ゆえに $A \in \mathcal{L}$.
- π - λ 定理の適用:

第 1 段より $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. よって π - λ 定理が適用できて $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.
- $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_n$ であること:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n) = \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\cup_{j=1}^n \mathcal{B}_j)) = \sigma(\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j) = \mathcal{F}_{\infty}.$$

3 番目の等号は非自明.

– \subset :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \sigma(\cup_{j=1}^n \mathcal{B}_j) \subset \sigma(\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j) &\implies \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\cup_{j=1}^n \mathcal{B}_j) \subset \sigma(\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j) \\ &\implies \sigma(\cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\cup_{j=1}^n \mathcal{B}_j)) \subset \sigma(\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j). \quad \sigma \text{ の定義} \end{aligned}$$

– \supset : $\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j \subset \cup_{n=1}^{\infty} \sigma(\cup_{j=1}^n \mathcal{B}_j)$ よりわかる.

• $B = A$ とできること:

$A \in \mathcal{F}_{\infty}$ つまり $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_{\infty}$ をいえば, (3.9) に $A \in \mathcal{T}$ を代入することが可能. 実際, 任意の k に対し

$$\mathcal{T} = \cap_{k=1}^{\infty} \mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_k = \sigma(\cup_{j=k}^{\infty} \mathcal{B}_j) \subset \sigma(\cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{B}_j) = \mathcal{F}_{\infty}$$

であるからよい.

■補足 (末尾加法族の典型例) 各 σ -field が確率変数から生成されている ($\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$) とき,

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) \text{ が存在する} \}$$

のような, $\{X_n\}$ の無限の彼方の性質で決まるような事象は末尾加法族の要素.

参考文献

- [1] 確率論, 舟木直久 (朝倉書店, 2004)
- [2] ルベーク積分入門, 伊藤清三 (裳華房)