Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 19 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. **?** マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

確率論の復習 [1]

確率空間を作る

- 抽象空間 Ω[*1] と σ-field[*2] $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ の組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を **可測空間** という.
- 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度[*3]で $P(\Omega) = 1$ をみたすものを **確率測度** という.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を **確率空間** という. $\mathcal{F}$ は確率を測ることができる事象の集まり. 情報量とみなせる.

測度 0 集合に関する用語

- 事象 $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) = 1$ をみたすとき, A が **ほとんど確実に** 起こるといい, A a.s. とかく.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が **完備** とは, 零集合の部分集合がすべて可測のときにいう.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ からその完備な拡張である **完備化** $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ を構成できる.

確率変数

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間, $(S, \mathcal{S})$: 可測空間. $X = X(\omega)$ が **$\mathcal{S}$-値確率変数** であるとは, $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ が可測写像である[*4]ときにいう.
- 写像 X が確率変数であることと同値な条件としては $\forall a \in \mathbb{R}, \{X \leq a\} \in \mathcal{F}$ などがある[*5].
- X が確率変数になるような最小限の $\mathcal{F}$ が作れる: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_X := \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{S}\}$ とすればよい. $\mathcal{F}_X$ を **確率変数 X が生成する σ-field** といい, $\sigma(X)$ とかく.

分布

- 確率変数 X の **分布, distribution** とは $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ によって定義される $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度 P_X のことをいう.[*6]
- μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とするとき, $F(x) := F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$ を μ の **分布関数** という.
- X を確率変数とするとき, その分布 P_X の分布関数 F_X を X **の分布関数** という. つまり $F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$ である.

[*1] ただの集合. なんの構造ももたない.

[*2] 3 条件: (1) $\Omega \in \mathcal{F}$. (2) 補集合で閉じている. (3) 加算和で閉じている.

[*3] σ-additivity: A_n たちが互いに交わらないとき $P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$ をみたす $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ を**測度**というのだった.

[*4] $\mathcal{S}$ に属する集合の逆像が $\mathcal{F}$ に属する.

[*5] $\{X \leq a\}$ は基本的な事象であり, 当然その確率が定義されることが望まれる. 確率が定義できるためには, それは $\mathcal{F}$ に属さねばならない. 確率変数とは, そのような望ましい性質をもつ関数である.

[*6] 確率変数の分布に着目するという立場からいえば, 確率空間のとりかたには任意性がある. Ω 自身がそれほど重要で積極的な意味をもつわけではない: 確率空間 Ω を区間 $(0, 1)$ にとりかえて, 同じ分布をもつように確率変数を再構成することが可能である.

期待値

- **期待値** $E[X] = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$[*7]. 事象 A 上に限るとき $E[X, A] := \int_A X(\omega)P(d\omega) = E[X \cdot 1_A]$.

不等式

- **Chebyshev** $P(|X| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p}E[|X|^p]$.
- **Jensen** $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: 下に凸. $\psi(E[X]) \leq E[\psi(X)]$.
- **Hölder** $1 < p, q < \infty$ が $1/p + 1/q = 1$ をみたすとき, $|E[XY]| \leq E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$.
- **Schwarz** Hölder で $p = q = 2$ とおく.

期待値と極限操作の交換

- **Lebesgue's convergence theorem** $X_n \to X(a.s.)$ かつ非負確率変数 Y で可積分なものが存在し $\forall n, |X_n| \leq Y$ をみたすならば $\lim_n E[X_n] = E[X]$.
- **monotone convergence theorem** $0 \leq X_1 \leq X_2 \cdots$ かつ $X_n \to X(a.s.)$ ならば $\lim_n E[X_n] = E[X]$.
- **Fatou's lemma** $X_n \geq 0$ ならば $E[\liminf_n X_n] \leq \liminf_n E[X_n]$.

いろいろな収束

1. **a.s. convergence** $X_n(\omega) \to X(\omega)$ a.s. つまり $P(\lim_n X_n = X) = 1$.
2. **convergence in probability** 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_n P(|X_n - X| > \epsilon) = 0$.
3. **convergence in the mean of order** p $p \geq 1$ に対し $\lim_n E[|X_n - X^p|] = 0$.
4. **convergence in law/distribution** 任意の $f \in C_b(\mathbb{R})$ に対して $\lim_n E[f(X_n)] = E[f(X)]$[*8].

$1 \implies 2$, $3 \implies 2$, $2 \implies 4$. **一様可積分** というを導入すると逆向きの矢印が成り立つようになったりする.

独立性の定義

- 事象の独立性: 事象の集まり $\{A_k\}_{1\leq k\leq n}$ が **独立** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $1 \leq l \leq n$ と任意の $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_l \leq n$ に対して
$$P\left(\bigcap_{i=1}^{l} A_{k_i} = \prod_{i=1}^{l} P(A_{k_i})\right).$$
- σ-field の独立性: $\mathcal{F}$ の部分 σ-field $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n$ が **独立** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $C_k \in \mathcal{F}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ に対して
$$P(C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_n) = \prod_{k=1}^{n} P(C_k).$$
- 確率変数列の独立性: S_k-値確率変数列 $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ が **独立** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $A_k \in \mathcal{S}_k$ $(1 \leq k \leq n)$ に対して
$$P(X_k \in A_k, k = 1, 2, \ldots, n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \in A_k).$$

[*7] 可積分のとき.

[*8] $(X_n), X$ の分布のみによって定まる概念だから, これらは必ずしも同一の確率空間で定義されている必要はない.

独立性に関する性質

- 確率変数列の独立性は, 可測関数との合成によって保たれる.
- 可積分な独立な確率変数列 (X_k) に対し, $E[X_1X_2\cdots X_n]=E[X_1]E[X_2]\cdots E[X_n]$.
- 組ごとに独立な確率変数列 (X_k) に対し, $\mathrm{Var}(X_k)<\infty$, $1\le k\le n$ ならば, $\mathrm{Var}(\sum_{k=1}^n X_k)=\sum_{k=1}^n \mathrm{Var}(X_k)$.

独立確率変数列の存在

- 直積 σ-field と 直積測度を入れた確率空間に, 独立確率変数列を構成できる. まず有限個でやってから, 柱状集合から Kolmogorov の σ-field を作って無限確率変数列に拡張する.

条件つき期待値

$\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-field とする. X は確率変数. 条件

1. $B\in\mathcal{G} \implies E[X,B]=E[Y,B]$
2. Y は $\mathcal{G}$-可測な確率変数

をみたす確率変数 $Y(\omega)$ を $E[X|\mathcal{G}](\omega)$ とかいて, $\mathcal{G}$ の下での X の **条件つき期待値** という.

条件つき期待値の性質

1. $a,b\in\mathbb{R}$ に対し, $E[aX+bY|\mathcal{G}]=aE[X|\mathcal{G}]+bE[Y|\mathcal{G}],\ a.s.$
2. $X\ge 0,\ a.s. \implies E[X|\mathcal{G}]\ge 0,\ a.s.$
3. X が $\mathcal{G}$-可測で XY が可積分ならば $E[XY|\mathcal{G}]=XE[Y|\mathcal{G}],\ a.s.$
4. $\mathcal{H},\mathcal{G}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-field で $\mathcal{H}\subset\mathcal{G}$ とすれば $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}]=E[X|\mathcal{H}],\ a.s.$
5. X と $\mathcal{G}$ が独立ならば $E[X|\mathcal{G}]=E[X],\ a.s.$ したがって f を $\mathbb{R}$ 上の Borel 可測関数として $f(X)$ が可積分ならば $E[f(X)|\mathcal{G}]=E[f(X)]$.

大数の法則

- (X_k) の **標本平均** Y_n

$$Y_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k,\quad \overline{m}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n m_k \tag{1}$$

- **規格化された標本平均** $\tilde{Y}_n := Y_n-\overline{m}_n$.
- **(大数の弱法則)** ある条件[*9] のもとで, $\tilde{Y}_n\to 0$, 確率収束
- **(大数の強法則 1,2)** ある条件[*10][*11]のもとで, $\tilde{Y}_n\to 0$, 概収束.

大数の強法則の証明に用いる道具

- **(Borel-Cantelli の補題)**

[*9] 1. (X_n) が組ごとに独立. 2. $\sup_n \mathrm{Var}(X_n)<\infty$.
[*10] 1. (X_n) が独立. 2. $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(X_n)<\infty$. (**Kolmogorov の第 1 定理**)
[*11] 1. (X_n) は i.i.d. 2. $m=E[X_n]<\infty$. (**Kolmogorov の第 2 定理**)

- **（Kolmogorov の不等式）**

中心極限定理

大数の法則は標本平均 Y_n の収束極限 $E[X]$ についてのべたものである．しかし，このような結果を現実に応用しようとする場合，「n を実際にどの程度大きくとれば Y_n が $E[X]$ に十分近いといえるのか」が重要．中心極限定理 (CLT) は大数の法則の誤差項 $Y_n - E[X]$ の挙動を調べるものであり，雑にいうと，この項は $n \to \infty$ のとき $O(1/\sqrt{n})$ で減衰し，

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = E[X] + \frac{1}{\sqrt{n}}Z + \cdots$$

となるような Z が求まることを主張している．具体的には $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ である．

$$Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - E[X]\right), \quad Z_n \to Z.$$

しかし，収束の意味は（概収束や確率収束よりも弱い）法則収束（弱収束，分布収束）である．つまり，$P(a \le Z_n \le b)$ が $n \to \infty$ のときに Z の対応する確率 $P(a \le Z \le b)$ に収束することが期待できる．

CLT の証明に向かって

- **（弱収束と同値な条件）**
- **（Prokhorov の定理）** (μ_α) は相対コンパクト $\iff$ (μ_α) は緊密 (tight).

  証明の概略

  1. **Helly の選出定理**を用いる．

特性関数

- 確率測度 μ の **特性関数** $\varphi(\xi) := \varphi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\mu(dx), \quad \xi \in \mathbb{R}.$
- 確率変数 X の **特性関数** とは，X の分布 P_X の特性関数のこと．つまり $\varphi(\xi) := \varphi_X(\xi) = E[e^{i\xi X}]$.
- **(一意性定理)** $\forall\xi \in \mathbb{R}, \varphi_\mu(\xi) = \varphi_{\tilde{\mu}}(\xi) \implies \mu = \tilde{\mu}$.
- <u>特性関数の各点収束は分布の弱収束と同値である．</u>
- **（Bochner の定理）** 特性関数の特徴づけ: $\varphi(\xi)$ が
  1. $\xi = 0$ で連続
  2. $\varphi(0) = 1$
  3. 正定値

  をみたすなら φ はある $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ の特性関数.

CLT の証明

- **（中心極限定理，CLT）** (X_n) は i.i.d. 確率変数列で，$E[X_n] = m, \mathrm{Var}(X_n) = v$. このとき $Z_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - m\right)$ は $Z_n \to Z$, 法則収束. $(Z \sim \mathcal{N}(0, v))$

離散時間 Martingale

- $\mathcal{F}$ の部分 σ-field の増加列 $(\mathcal{F}_n)$ を**情報系 (filtration)** という．

- (X_n) が filtration $(\mathcal{F}_n)$ に関して **martingale** $\overset{\text{def}}{\iff}$
  1. $(\mathcal{F}_n)$-adapted: 各 n に対し X_n は $\mathcal{F}_n$-可測.
  2. 各 X_n は可積分.
  3. $E[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n, a.s.$ $\geq$ なら **submartingale**, $\leq$ なら **supermartingale**.
- $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ から定まる $(\mathcal{F}_n)$ を (X_n) の **自然な filtration** という.
- 下に凸な関数 ψ による変換 $X_n \mapsto \psi(X_n)$ で martingale $\to$ submartingale, submartingale $\to$ submartingale.

Doob 分解

- submartingale は martingale と増加過程の和に分解できる.

Markov time, stopping time

- ランダムな時刻 τ が時刻 n あるいはそれ以前におこるかどうかが時刻 n までの情報 $(\mathcal{F}_n)$ から判断可能なものを $(\mathcal{F}_n)$**-Markov time** という.
  - A への **到達時刻** τ_A は Markov time
  - A からの **最終脱出時刻** σ_A は Markov time ではない.
- $(\mathcal{F}_n)$-Markov time τ に対し, τ 時以降は区別不能な σ-field $\mathcal{F}_\tau$ を τ **時までの情報量** という.

optional sampling theorem

- ある種のランダムな時間変更について martingale 性が保存される, つまり
- (X_n): $(\mathcal{F}_n)$-submartingale, (τ_k): 有界な $(\mathcal{F}_n)$-Markov time の増加列のとき, $(Y_k) := (X_{\tau_k})$ は $(\mathcal{F}_{\tau_k})$-submartingale.

Doob の不等式

- ある時間区間における martingale の最大値は最後の時刻における情報のみによって評価できる:

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} X_k \geq a\right) \leq \frac{1}{a}E[X_n^+].$$

submartingale の収束定理

- 単調増加実数列 (a_n) が上に有界なら $\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する. この事実の確率バージョン.
- **(submartingale の収束定理)** submartingle (X_n) が 有界性 $\sup_n E[X_n^+] < \infty$ をみたすとき, ある可積分な確率変数 X があって $X_n \to X, a.s.$ となる.

  証明の概略

  1. 上向き横断回数が無限回にならないことを示す.

p 次変動

- $[M]_n := \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1})^2$ を (M_n) の **2 次変動** という.
- $p \geq 1$ に対し $\sum_{k=1}^n |M_k - M_{k-1}|^p$ を (M_n) の p **次変動** という. $p = 1$ のとき **全変動** という.

連続時間 martingale の導入にともなう定義

- filtration $(\mathcal{F}_t)$, $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ が **右連続** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $t \geq 0$ に対して $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ がなりたつ. ($\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$)
- $(X_t)_{t\geq 0}$ が **右連続 (càdlàg)** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\omega \in \Omega$ に対し $X_t(\omega)$ が t について右連続**かつ左極限をもつ**.

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10（def.1.3 $\implies$ def.1.1 $\implies$ def.1.2 **がなりたつこと**）

- 1.3 $\implies$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0,\infty)] \leq P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0,\infty)] = 1 \implies \forall t \in [0,\infty), P[X_t = Y_t] = 1$, つまり 1.3 $\implies$ 1.1.
- 1.1 $\implies$ 1.2: 不等式 $|P[(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}) \in A]| \leq 2P[(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \neq (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})]$ を示す. 1.1 を仮定して不等式を用いれば, $|P[(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}) \in A]| \leq 2P[(X_{t_1},\ldots,X_{t_n}) \neq (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})] \leq \sum_{i=1}^{n} P(X_{t_i} \neq Y_{t_i}) = 0$ から 1.2 を得る. では不等式を示す. $\mathbf{X} = (X_{t_1},\ldots,X_{t_n}), \mathbf{Y} = (Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n})$ とおく.

$$
\begin{aligned}
|P[\mathbf{X} \in A] - P[\mathbf{Y} \in A]| &= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] \\
&\quad - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})]| - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})]| \\
&= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})]| \\
&\leq P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] \\
&\leq 2P[\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}]
\end{aligned}
$$

より示された. 他の導出法については [2] を参照.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] https://math.stackexchange.com/questions/1613202/if-one-stochastic-process-is-a-modification-of-anc