Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 29 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10（def.1.3 $\Longrightarrow$ def.1.1 $\Longrightarrow$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] \le P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] = 1 \implies \forall t \in [0,\infty), P[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}
\left| P[X^{(n)} \in A] - P[Y^{(n)} \in A] \right| &= \left| \int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A} \right) P(d\omega) \right| \\
&\le \int_\Omega \left| 1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A} \right| P(d\omega) \\
&\le \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega) \neq Y^{(n)}(\omega)} P(d\omega) \\
&= P[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\
&\le \sum_{k=1}^{n} P[X_k \neq Y_k] = 0
\end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）