確率論, 舟木直久 [1] 読書記録

最終更新: 2022 年 10 月 18 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの（2019/7/25 初版第 14 刷）

頁	行	誤	正
141	10	$(\Omega = S^n, \mathcal{F}, P)$	$\Omega = (S^n, \mathcal{F}, P)$
239	-3	**定理 A.5**	**定義 A.5**

■42,5（$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ がなりたつこと） Ito[2], p.65, 定理 10.2 より.

■42,6（$\tilde{X}$ が確率変数であること） $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ をいえばよい.

$$\begin{aligned}\{\tilde{X} \le a\} &= \left(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0\right) \cup \left(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0^c\right) \\ &= \begin{cases} (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \Omega_0^c & a \ge 0 \\ (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \varnothing & a < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

と変形できるが, $\{\lim_n X_n \le a\} \in \mathcal{F}$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ であるから a によらず $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ である. ゆえに $\tilde{X}$ は確率変数.

■45,13（$x = \pm n$ として $n \to \infty$ とすればよいこと） 有界単調数列が収束することと, 収束列の部分列はもとの列と同じ極限をもつことによる.

■46,-6

- $F(x) < w \implies x < Y(w)$: $F(x) < w \implies x \le \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\}$ である. $x = Y(w)$ と仮定すると, $\forall y > x$, $F(y) \ge w$ がなりたつが, F の右連続性より $F(x) = \lim_{y \to x+} F(y) \ge w$ となり矛盾.
- $x < Y(w) \implies F(x) < w$: 明らか. $x < Y(w) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\} \implies F(x) < w$.

■46,11（関数 $Y(w)$） 関数 $Y(w)$ の例.

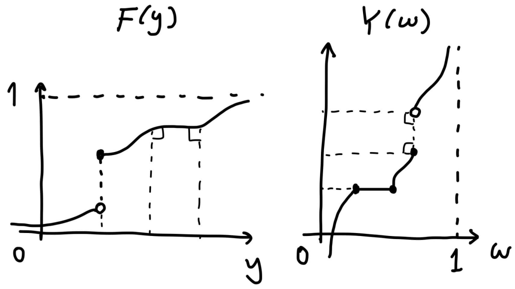

図 1　関数 $Y(w)$.

■46,-4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{w : Y(w) \le x\} = \{w; w \le F(x)\} = (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0,1))$ ゆえ Y は可測.

■47,2　$\mu((-\infty,x]) = m(Y \le x) = m((0,F(x)]) = F(x)$. 2 つ目の等号で (2.3) を用いた.

■47,8（X と Y の分布が一致すること）　47,2 より任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $m_Y((\infty,x]) = F(x) = P_X((-\infty,x])$ がなりたつ. π-λ 定理より $m_Y = P_X$.

■48,4（絶対連続, 特異）　Ito[2], p.130, 18 章.

■61,-2（$X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots$ が）

- p 次平均収束すること: $E[|X_{n,k}|^p] = E[X_{n,k}] = \frac{1}{n}$ ゆえ $\lim E[|X_{n,k}|^p] = 0$ となる.
- 概収束しないこと: $X_{n,k}$ の定義より, 任意の $w \in (0,1)$ に対し, 任意の n について k が存在して $X_{n,k}(w) = 1$ となるから, $\{w \in (0,1); \lim X_{n,k}(w) = 0\} = \varnothing$. ゆえに $P(\lim X_{n,k} = 0) = 0 \neq 1$.

■62,2（$X_n(w) = n1_{(0,\frac{1}{n})}(w)$ が）

- 概収束すること: 任意の $w \in (0,1)$ をとる. $N \ge \frac{1}{w}$ なる自然数 N をとれば, $n \ge N$ で $X_n(w) = 0$ となる. ゆえに $\lim X_n(w) = 0$. w は任意だったから $P(\lim X_n = 0) = 1$.
- p 次平均収束しないこと: $E[|X_n|^p] = \int_0^{\frac{1}{n}} n^p dw = n^{p-1}$ だから $\lim E[|X_n|^p] \neq 0$.

■68,1（$(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であること）　補題 2.55(1)(2) の条件をみたすことを確かめる.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(1) をみたすことと X が可積分であることより, $\sup_n E[|X_n - X|] \le \sup_n E[|X_n|] + E[|X|] < \infty$.
2. $\sup_n E[|X_n - X|, A] \le \sup_n E[|X_n|, A] + E[|X|, A]$ に注意. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) < \delta$ をみたすなら $\sup_n E[|X_n|, A] < \epsilon/2$ かつ $E[|X|, A] < \epsilon/2$ となるような δ を選ぶ*1. このとき $\sup_n E[|X_n - X|, A] < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

■69,14（$||X_n| - |X|| \le |X_n - X|$）　一般の $a, b \in \mathbb{R}$ について $ab \le |a||b| \implies |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \le |a|^2 - 2ab + |b|^2 \implies ||a| - |b||^2 \le |a - b|^2$ であるから.

■69,-5（条件 $P(|X| = \lambda) = 0$ について）　たとえば $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加のとき, $|X| = \lambda$ となる w で

$$|X_n| \cdot 1_{\{|X_n|<\lambda\}}(w) \to \lambda \neq 0 = |X| \cdot 1_{\{|X|<\lambda\}}(w) \tag{1}$$

となるおそれがあるが, $P(|X| = \lambda) = 0$ なら概収束 $|X_n| \cdot 1_{\{|X_n|<\lambda\}} \to |X| \cdot 1_{\{|X|<\lambda\}}$ $a.s.$ に関与しない（ので安心）.

■70,5　$P(|X| = \lambda) > 0$ なる λ が高々可算個しかないから, この後で十分大かつ $P(|X| = \lambda) = 0$ なる λ を選ぶことができている.

■70,10（このことから...）　各 $m = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ についてそれぞれ $E[|X_m|, |X_m| \ge \lambda_m] < 2\epsilon$ をみたす λ_m を選んでおく. $\lambda_0 := \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0-1}, \lambda\}$ とおけば任意の $\lambda \ge \lambda_0$ で $\sup_n E[|X_n|, |X_n| \ge \lambda] < 2\epsilon$ がなりたつ. よって $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分.

---

*1 このような δ は $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(2) をみたすことと, X が可積分であることより存在する.

■80,-5（単調収束定理を用いる．について）

$$
\begin{aligned}
E[X] &= E[\lim_N (X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)})] \\
&= \lim_N E[X_1^{(N)} \cdots X_n^{(N)}] \quad \text{単調収束定理.} \\
&= \lim_N (E[X_1^{(N)}] \cdots E[X_n^{(N)}]) \\
&= \left(\lim_N E[X_1^{(N)}]\right) \cdots \left(\lim_N E[X_n^{(N)}]\right) \quad (X_k)_{1\le k\le n}\text{可積分.} \\
&= E[X_1] \cdots E[X_n] \quad \text{単調収束定理.}
\end{aligned}
$$

■83,7（補題 3.20）

- 原材料: $\underline{n\ \text{個の確率空間}}$ $(S_k, \mathcal{S}_k, \mu_k)$, $1 \le k \le n$ と $\underline{n\ \text{個の確率変数}}$ $X^{(k)} : S_k \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.
- 構成物: $\underline{1\ \text{個の確率空間}}$ $(\prod_k S_k, \mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_n, \mu_1 \times \cdots \times \mu_n)$ と $\underline{n\ \text{個の確率変数}}$ $X_k : \prod_k S_k \to \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) &= P(X_1^{-1}(B_1) \times \cdots \times X_n^{-1}(B_n)) \quad X_k\text{の定義.} \\
&= \prod_k \mu_k(X_k^{-1}(B_k)) \quad \text{直積測度の定義.} \\
&= \prod_k P(X_k \in B_k).
\end{aligned}
$$

■91,-10（(1) 証明）

$$
\begin{aligned}
E[Z, B] &= aE[E[X|\mathcal{G}], B] + bE[E[Y|\mathcal{G}], B] \\
&= aE[X, B] + bE[Y, B] \quad E[X|\mathcal{G}], E[Y|\mathcal{G}]\ \text{の定義.} \\
&= E[aX + bY, B].
\end{aligned}
$$

■91,-7（$Z \ge 0, a.s.$ であること）　$Z \ge 0, a.s.$ でないとすると, $A \in \mathcal{F}$ があって $P(A) > 0, \omega \in A \implies Z(\omega) < 0$ がなりたつ．Z が $\mathcal{G}$-可測なので（適当に A を広げることで）$A \in \mathcal{G}$ となるように取り直せる．すると $E[Z, A] < 0$ となり矛盾.

■94,11（コルモゴロフの 0-1 法則の証明）

- $n \in \mathbb{N}$ に対し 1_A と $\mathcal{F}_n$ が独立であること:
- $\mathcal{P}$ が π-系であること:
  1. $\Omega \in \mathcal{F}_1$ ゆえ $\Omega \in \mathcal{P}$.
  2. $A, B \in \mathcal{P}$ とする．$\mathcal{F}_k$ は単調増加だからある n が存在して $A \in \mathcal{F}_n, B \in \mathcal{F}_n$．ゆえに $A \cap B \in \mathcal{P}$.
- $\mathcal{L}$ が λ-系であること:
  1. $E[1_A, \Omega] = E[1_A] = P(A) = P(A)P(\Omega)$ より $\Omega \in \mathcal{L}$.
  2. $A, B \in \mathcal{L}$ で $A \subset B$ とする．$C \in \mathcal{T}$ に対し, $E[1_C, B\backslash A] = E[1_C, B] - E[1_C, A] = P(C)P(B) - P(C)P(A) = P(C)P(B\backslash A)$.
  3. $A_n \in \mathcal{L} \nearrow A$ とする．$C \in \mathcal{T}$ に対し, $E[1_C, A] = E[1_{A\cap C}] = E[\lim_n 1_{A_n \cap C}] = \lim_n E[1_{A_n \cap C}] = \lim_n E[1_C, A_n] = \lim_n P(C)P(A_n) = P(C)\lim_n E[1_A] = P(C)P(A)$. 3 番目と 7 番目の等号で単調収束定理を用いた．ゆえに $A \in \mathcal{L}$.
- π-λ 定理の適用:

  第 1 段より $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$．よって π-λ 定理が適用できて $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.
- $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{F}_n$ であること:

$$\sigma(\mathcal{P}) = \sigma\left(\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n\right) = \sigma\Bigl(\cup_{n=1}^{\infty}\sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr)\Bigr) = \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr) = \mathcal{F}_\infty.$$

3 番目の等号は非自明.

– $\subset$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr) \subset \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j\bigr) &\implies \cup_{n=1}^{\infty}\sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr) \subset \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j\bigr)\\ &\implies \sigma\Bigl(\cup_{n=1}^{\infty}\sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr)\Bigr) \subset \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j\bigr). \quad \sigma\text{の定義}\end{aligned}$$

– $\supset$: $\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j \subset \cup_{n=1}^{\infty}\sigma\bigl(\cup_{j=1}^{n}\mathcal{B}_j\bigr)$ よりわかる.

- $B = A$ とできること:
  $A \in \mathcal{F}_\infty$ つまり $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_\infty$ をいえば, (3.9) に $A \in \mathcal{T}$ を代入することが可能. 実際, 任意の k に対し

$$\mathcal{T} = \cap_{k=1}^{\infty}\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}_k = \sigma\bigl(\cup_{j=k}^{\infty}\mathcal{B}_j\bigr) \subset \sigma\bigl(\cup_{j=1}^{\infty}\mathcal{B}_j\bigr) = \mathcal{F}_\infty$$

  であるからよい.

■補足（末尾加法族の典型例）　各 σ-field が確率変数から生成されている（$\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$）とき,

$$\mathcal{T} = \{\omega \in \Omega;\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)\ \text{が存在する}\ \}$$

のような, $\{X_n\}$ の無限の彼方の性質で決まるような事象は末尾加法族の要素.

■122,-1（Helly の選出定理）

- $\{n_k^{(j)}\}_{k=1,2,\dots}$ がとれることと $\tilde{F}(y)$ の構成: 有界実数列は収束部分列をもつ（Bolzano-Weierstrass の定理）ことより, 有界実数列 $F_1(y_1), F_2(y_1), \dots$ の収束部分列 $F_{n_1^{(1)}}(y_1), F_{n_2^{(1)}}(y_1), \dots$ がとれる. この部分列の極限を $\tilde{F}(y_1)$ と定義する. 次に, 有界実数列 $F_{n_1^{(1)}}(y_2), F_{n_2^{(1)}}(y_2), \dots$ の収束部分列 $F_{n_1^{(2)}}(y_2), F_{n_2^{(2)}}(y_2), \dots$ をとる. この部分列の極限を $\tilde{F}(y_2)$ と定義する. 以上を繰り返して, $y \in \mathbb{Q}$ について定義された関数 $\tilde{F}(y)$ を得る.
- (5.9) がなりたつこと: $\{n_k\}_{k=j,j+1,\dots} \overset{\text{def}}{=} \{n_k^{(k)}\}_{k=j,j+1,\dots} = \{n_k^{(j)}\}_{k=j,j+1,\dots}$ である. 任意の $y_j \in \mathbb{Q}$ に対し, 部分列をとっても極限が変わらないことより $\tilde{F}(y_j) \overset{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} F_{n_k^{(j)}}(y_j) = \lim_{k\to\infty} F_{n_k}(y_j)$.

■124,-7（$\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(-x)) = 1$ がなりたつこと）　F の任意の連続点 $M > 0$ に対し以下の不等式がなりたつ:

$$\begin{aligned}\inf_{\alpha}\mu_\alpha(|x| \le M) &\le \inf_{\alpha_{n_k}}\mu_{\alpha_{n_k}}(|x| \le M)\\ &= \inf_{\alpha_{n_k}}\Bigl(F_{\alpha_{n_k}}(M) - F_{\alpha_{n_k}}(-M)\Bigr)\\ &\le \lim_{k\to\infty}\Bigl(F_{\alpha_{n_k}}(M) - F_{\alpha_{n_k}}(-M)\Bigr)\\ &= F(M) - F(-M).\end{aligned}$$

任意の $\epsilon > 0$ をとる. 十分大きな連続点 M が選べて（F の不連続点は高々可算個だから可能）, 上述の不等式より $1 - \epsilon \le \inf_\alpha \mu_\alpha(|x| \le M) \le F(M) - F(-M)$ となるから $\lim_{x\to\infty}(F(x) - F(-x)) = 1$.

■128,11（$F_\mu = F_{\tilde{\mu}}$ がなりたつこと）　F_μ と $F_{\tilde{\mu}}$ の両方の連続点の集合を C とおく. 任意の $x \in \mathbb{R}$ をとる. 分布関数の不連続点は高々可算個だから, $\mathbb{R}\backslash C$ は高々可算, つまり C は $\mathbb{R}$ 上稠密. F の右連続性とあわせて, x に右から近づく C の元からなる列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ があって $F_\mu(x) = \lim_{n\to\infty} F_\mu(c_n) = \lim_{n\to\infty} F_{\tilde{\mu}}(c_n) = F_{\tilde{\mu}}(x)$.

■133,8（H がエルミートであること）　$(Hz, z) \ge 0$ 特に (Hz, z) は実だから $(Hz, z) = \overline{(Hz, z)} = (z, Hz)$.

■134,6（$f(x)$ の式変形）

- 1 つ目の等号:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(\xi)d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(\xi)\lim_{R\to\infty}1_{(-R,R)}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)d\xi \\
&= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x}\varphi(\xi)1_{(-R,R)}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)d\xi \quad \text{Lebesgue の収束定理.}
\end{aligned}
$$

- 2 つ目の等号: 変数変換 $\xi \to \xi + \eta$ と Fubini の定理を用いる.
- $f(x) \geq 0$ となること: 千葉大, 種村氏のノート参照.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] ルベーグ積分入門, 伊藤清三（裳華房）