Brownian Motion and Stochastic Calculus[1] 読書記録

最終更新: 2023 年 11 月 19 日

注意: 原著（英語版）を読んでいきます．記述の正確性は保証しません．ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています．？ マークは不明/自信なし/要復習を意味しています．たとえば 1.3+ は項目 1.3 と 1.4 の間の部分を指します．

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
13	19	$t \in F; X_t(\omega) \leq \alpha$	$t \in F; X_t(\omega) < \alpha$
29	14	$\xi_{T_n(\epsilon)^{(n)}+}$	$\xi^{(n)}_{T_n(\epsilon)+}$
36	1	$t \geq 0 : \ \lvert M_t\rvert = n$	$t \geq 0; \ \lvert M_t\rvert = n$
52	12	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \omega(t_i) = x_i$	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \omega(t_i) = x_i$
57	-1	I_n	$I(n)$
68	22	for each i	for each k
72	14	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}(i)}$	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}^{(i)}}$
83	10	X	X
90	2	X	X
90	6	X	X

各章の要約

1.1. Stochastic Process and σ-Fields

X と Y が 2 変数関数として全く同じ (same) というのは強すぎる場合がある．そこで, 3 種類の sameness の概念を導入する．

1. X が Y の modification である．
2. X と Y が同じ finite-dimensional distribution をもつ．
3. X と Y が indistinguishable である．

$3 \implies 1 \implies 2$. X と Y が RC のとき $1 \implies 3$.

X が,

- progressively measurable $\implies$ measurable & adapted.
- measurable & adapted $\implies$ progressively measurable な modification をもつ．
- measurable & adapted & 全 path が RC or LC $\implies$ progressively measurable.

1.2. Stopping Times

$\{\mathscr{F}_t\}$ が usual condition をみたす $\stackrel{\text{def}}{=}$ $\mathscr{F}_t$ RC, $\mathscr{F}_0$ が $\mathscr{F}$ の P-negligible set をすべてふくむ.
random time $\supset$ optional time $\supset$ stopping time.
X prog. msb. $\Longrightarrow$ X_T が $\mathscr{F}_T$-msb.

1.3. Continuous-Time Martingales

A. Fundamental Inequalities

X submartingale RC のとき First submartingale ineq, second submartingale ineq, Doob's maximal ineq, Regularity of the paths.
$\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition みたすとき X が RC modification をもつ $\Longleftrightarrow$ $t \mapsto \mathsf{E}X_t$ RC. もしそうなら, modification を RCLL かつ $\{\mathscr{F}_t\}$ adapted にとれる. つまり $\{\mathscr{F}_t\}$-submartingale にとれる.

B. Convergence Results

submartingale convergence 条件： RC submartingale

C. The Optional Sampling Theorem

optional sampling 条件： RC submartingale 本質の結果: $\mathsf{E}X_T = \mathsf{E}X_0$.

1.4. The Doob-Meyer Decomposition

A increasing $\stackrel{\text{def}}{=}$ (1)a.e. $A_0(\omega) = 0$ (2)a.e. $t \mapsto A_t(\omega)$ nondecreasing RC (3) $\forall t, \mathsf{E}A_t < \infty$.
$\mathsf{E}A_\infty < \infty$ のとき integrable という.
A natural $\stackrel{\text{def}}{=}$ increasing, $\forall$ martingale (RC, bounded) $\mathsf{E}\int_{(0,t]} M_s dA_s = \mathsf{E}\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s$.
uniformly integrable を強めた概念.

- $\mathcal{T}$: $\mathsf{P}[T < \infty] = 1$ となる stopping time T のクラス.
- $\mathcal{T}_a$: $\mathsf{P}[T \le a] = 1$ となる stopping time T のクラス.

を使って D, DL を定義:

- X: class D RC, $\{X_T\}_{T \in \mathcal{T}}$: uniformly integrable.
- X: class DL RC, $0 < \forall a < \infty$, $\{X_T\}_{T \in \mathcal{T}_a}$: uniformly integrable.

RC, $\forall t \ge 0, X_t \ge 0$ a.s. $\Longrightarrow$ D(uniformly integrable のとき), DL RC, Doob-Meyer 分解可能 $\Longrightarrow$ D(uniformly integrable のとき), DL. この逆が重要. 1.4.10
Doob-Meyer Decomposition $\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition, X RC submartingale $\in$ DL $\Longrightarrow$ $X = M + A$, M: RC martingale, A: increasing とくに natural 分解は indistinguishable の意味で unique.
$\in$ D なら, M: unif. integrable, A: integrable にとれる.

submartingale X が regular $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\forall a > 0$, $\forall$ nondecreasing seq. of stopping times $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}_a$ with $T = \lim_{n\to\infty} T_n, \mathsf{E}X_{T_n} = \mathsf{E}X_T$.

4.14 X: RC submartingale, DL, usual condition, A: X の DM 分解の natural increasing process のとき A conti $\iff$ X regular.

1.5. Continuous, Square-Integrable Martingales

この節では $\{\mathscr{F}_t\}$: usual condition みたすとする.

X: RC martingale. X square-integrable $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\mathsf{E}X_t^2 < \infty$. $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}_2$ とかく. とくに conti のとき $X \in \mathcal{M}_2^c$.

$X \in \mathcal{M}_2$ なら X^2 は nonnegative submartingle $\to$ DL で DM 分解できる. : $X^2 = M + A$. このとき $\langle X \rangle_t := A_t =$ quadratic variation つまり $\langle X \rangle_0 = 0, X^2 - \langle X \rangle$ martingale.

quadratic variation という言葉は, $X \in \mathcal{M}_2^c$ のとき, 文字通りの意味になる (5.8).

$X, Y \in \mathcal{M}_2$, $\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle_T - \langle X-Y \rangle_t]$ crossvariation process. $\implies XY - \langle XY \rangle$ martingale. $\langle X, Y \rangle = 0$ iff X, Y orthogonal

X, Y orthogonal と同値な条件: (1)XY martingale, (2)X の増分と Y の増分は conditional independent.

$X \in \mathcal{M}_2$ では 2 次変分まで有限, 3 次以上はゼロ. よって 2 次がしかるべき変分.

X $\exists \{\Gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ nondecreasing stopping time, $\{X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ martingale for each $n \ge 1$ and $\P[\lim T_n = \infty] = 1$ $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ X local martingale

さらに $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ とかく.

martingale $\implies$ loc. martingale, DL のとき逆なりたつ.

2.1. Introduction

2.2. First Construction of Brownian Motion

A. The Consistency Theorem

B. The Kolmogorov-Centsov Theorem

2.3. Second Construction of Brownian Motion

Brown 運動の存在証明を, 実際に Brown 運動を構成することで行う. Brown 運動 $B = \{B_t, \mathscr{F}_t^B; o \le t < \infty$ を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上につくる. このとき, 分布が大事. $\Omega, \mathscr{F}$ とかなんでもいい. 3 つやっている.

1. consistent な有限次元分布を拡張する方法 (Daniell) これは連続である保証がないので Kolmogorov-Centstov を使って連続な modification をつくる手間がかかる.
2. 折れ線をつくる方法. 連続性をたもってできる. 最初に BM を $[0, 1]$ でつくっておいて, 端っこをつないでいく.
3. ランダムウォークの極限としてつくる方法. BM を $C[0, \infty)$ 上につくれる (Wiener measure という). これはなにかと便利らしい.

2.4. The Space $C[0,\infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

A. Weak Convergence

B. Tightness

C. Convergence of Finite-Dimensional Distributions

D. The Invariance Principle and the Wiener Measure

3 つ目を議論するために, いくつか新概念を導入.

- $P_n \to^w P$ weak convergence.
- $X_n \to^{\mathcal{D}} X$ converges to X in distribution.
- S 可測完備なら, relatively compact $\iff$ tight. (Prohorov)

$X^{(n)} \to^{\mathcal{D}} X \iff (X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_d}) \to^{\mathcal{D}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_d}) \implies$ はかんたんで, $\impliedby$ は, $X^{(n)}$ tight のときなりたつ. 以上をふまえて, Donsker

normalized random walk を interpolate したやつ $\to^{\mathcal{D}}$ BM 上の命題を使って示す. つまり, normalized random walk を interpolate したやつの有限次元分布が BM のそれに分布収束することと, normalized random walk を interpolate したやつが tight であることをいえばいい.

2.5. Markov Property

A. Brownian Motion in Several Dimensions

複数次元の BM の作り方 (初期分布 μ) Wiener measure を使ってつくる.

1. μ にしたがい B_0 をだして, 1-dim BM たちから作ったベクトル $(B^{(1)}_t, \ldots, B^{(d)}_t)$ をたす.
2. $x \in \mathbb{R}^d$ スタートの BM 分布 P^x を 0 スタートの BM P^0 を平行移動してつくる. そして, P^x を重み μ で積分する.

multi dimensional BM を Wiener measure 上でつくったが, 一般の $(\Omega, \mathscr{F})$ 上に一般化したのが, d-dim Brownian family. 条件 (i) をゆるめにしたのは, $\mathscr{F}$ を後で少し大きくするため.

B. Markov Process and Markov Families

C. Equivalent Formulations of the Markov Property

2.6. The Strong Markov Property and the Reflection Principle

A. The Reflection Principle

B. Strong Markov Process and Families

C. The Strong Markov Property for Brownian Motion

2.7. Brownian Filtrations

BM を定義する σ-field $\mathscr{F}_t$ として, $\mathscr{F}_t^B$ より真に大きいものを選ぶことを許した. 理由の 1 つは, $\mathscr{F}_t^B$ が左連続であっても右連続でないこと. では $\mathscr{F}_t$ としてどんなものをとるのがいいのか.

一般の $X = \{X_t, \mathscr{F}_t^X; 0 \le t < \infty\}$ に対し, $\mathscr{F}_t^X$ を大きくしたバージョンとして, μ-零集合を適度に追加した completion $\overline{\mathscr{F}}_t^\mu$ および augmentation $\mathscr{F}_t^\mu$ を考える.

A. Right-Continuity of the Augmented Filtration for a Strong Markov Process

実は, この augmented filtration $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ が, 望む性質をもっている（prop.7.7）. 具体的には, X が強マルコフのとき augmented filtration は右連続. X が強マルコフかつ左連続のとき augmented filtration は連続.

$\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ が d-dim BM（初期分布 μ）のとき $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もまた d-dim BM である（つまり, $\mathscr{F}_t^\mu$ は, 拡張しすぎていることはない）. 任意の d-dim BM は strong Markov だったこととあわせて, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ も strong Markov.

ここで素朴な疑問: 一般に, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov なら, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もそうか? 答えは yes（7.11-7.13 で証明）. ただし, この一般化は見かけほどありがたくない. なぜなら, 個別ケースでは, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov の証明と $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ strong Markov の証明は（個別ケース特有ではあるが）同じ手口でできるから.

augmentation 万歳!

B. A "Universal" Filtration

ファミリー向けに augmentation を修正する.

augmentation のうざいところは, 初期分布 μ に依存するところ. とくに, strong Markov family になるとこいつは初期分布の連続体なのでやっかい. こういう場合でも使い物になる filtration をつくる.

d-dim strong Markov Family をとる. 任意の測度 μ に対し, $P^x(F)$ を重み μ で積分して $P^\mu(F)$ を得てから, さっきのように $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ をつくる. そして, $\tilde{\mathscr{F}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_\mu \mathscr{F}_t^\mu$ とする. これはいい. $\mathscr{F}_t^X \subset \tilde{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_t$ で, 左と右を使ったとき X は strong Markov だったので, 真ん中使ったときもそう.

$\tilde{\mathscr{F}}_t$ を Markov family の filtration として使っても, family 性をたもつ（BM の場合 Thm.7.15）.

Remark7.16 大事やね. まあ八百長.

C. The Blumenthal Zero-One Law

3.1. Introduction

普通の解析の理論では, 微分と積分をそれぞれ定義して, 微積分学の基本定理で両者を結びつける. いっぽう, 確率解析の理論では, 積分のみ定義し, 微積分学の基本定理を使って, 積分を通して微分を定義する.

3.2. Construction of the Stochastic Integral

A. Simple and Approximations

そういうわけで, 確率積分 $I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega)$ を定義したい. ではどうするか.

まず基本方針として, X と Y が同値関係 $X_t(\omega) = Y_t(\omega);\ \mu_M - \text{a.e.}(t,\omega) \implies \forall T_{>0}, [X-Y]_T = 0$ をみたすなら, 積分 $I(X)$ と $I(Y)$ が indistinguishable になるように確率積分を定義する.

次に, 確率積分を定義できる M と X のクラスについて, 以下のようである. まず, 被積分過程 X の 2 つの同値クラスを考える：

- $\mathcal{L}$ すべての measurable $\{\mathscr{F}_t\}$-adapted process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス
- $\mathcal{L}^*$ すべての progressively measurable process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス

2 つの空間に X と Y の距離 $[X-Y]$ を入れる. このもとで,

1. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to$ $X \in \mathcal{L}$ で確率積分を定義.
2. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to$ $X \in \mathcal{L}^*$ で定義.
3. $M \in \mathcal{M}_2$ $\to$ X predictable で定義.

2 つ目は, この本ではやらない.

本節では後で,

- きつい条件 $M \in \mathcal{M}_2^c$ かつ $[X]_T^2 < \infty$ で最初定義して,
- ゆるい条件 $M \in \mathcal{M}_2^{c,\text{loc}}$ かつ $P[\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty] = 1$

にゆるめる.

B. Construction and Elementary Properties of the Integral

確率積分を定義するクラスを宣言したところで, 定義の具体的方針を書く.

1. simple process (単関数の確率過程バージョン) に対して確率積分を定義する.
2. simple process $X^{(n)}, n = 1, 2, \cdots$ の極限で, より一般の process X を近似する. simple process のクラスを $\mathcal{L}_0$ とかくと, 具体的には以下の結果がある.
3. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to$ $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ 中で dense (距離 $[\cdot]$).
4. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to$ $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^*$ 中で dense.

5. 注意: $\mathcal{L}^*(M) \subset \mathcal{L}(M)$ なので $\mathcal{L}$ のほうが dense にするのがむずい.
6. $\lim_n [X^{(n)} - X] = 0$ のとき $I(X^{(n)})$ も距離 $||\cdot||$ で極限をもつ. これを $I(X)$ とかいて, 確率積分の定義とする.

Lemma 2.7 のきもち $E\int \cdot ds$ の結果を $E\int \cdot dA$ に転用したい. $t \mapsto \langle M\rangle_t$ 絶対連続の時は簡単にできたが, 今回はむずい. ω ごとに A_t の逆関数を使って時刻をずらして $E\int \cdot ds$ と $E\int \cdot dA$ の関係式をつくる. 逆関数必要なので, A_t を狭義単調増加にするため $A_t + t$ にしている.

C. A Characterization of the Integral

cross-variation formula $\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u; t \geq 0, P-\text{a.s.}$ を示す. すでに両辺とも定義自体はすんでいる. simple process のときはすぐできる. これを $X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$ の場合に拡張する. 2.14 から準備をはじめて, prop. 2.17 で証明している.

そして, 確率積分の特徴づけを最後にしている (prop. 2.19). 特徴付け: $I^M(X)$ は以下をみたす唯一の martingale $\Phi \in \mathcal{M}_2^c$ である:

$$\forall N \in \mathcal{M}_2^c, \langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u;\ 0 \leq t < 0, a.s.P. \tag{1}$$

右辺には Lebesgue-Stieltjes 積分しか出てこないから, この特徴付けはとても便利らしい.

D. Integration with Respect to Continuous, Local Martingales

確率積分の被積分過程の定義域を $X \in \mathcal{M}_2^c$ を $\in \mathcal{M}_2^{c,\text{loc}}$ に拡張する.

3.3. The Change-of-Variable Formula

確率積分の定義と存在証明はしたが、実際に計算する技術がない。そこで ito rule を証明して使う。
continuous semimartingale とかいう謎概念

A. The Ito Rule

continuous semimartingale X の滑らかな関数 $f(X)$ もまた conti semimartingale であるこれを近似するのが Ito Rule.

B. Martingale Characterization of Brownian Motion

C. Bessel Processes, Questions of Recurrence

D. Martingale Moment Inequalities

5.1. Introduction

5.2. Strong Solutions

stochastic differential equation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2}$$

A. Definitions

strong solution の定義. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と initial condition ξ がはじめから与えられていて, その上の解が strong solution. 解 X が $\{\mathscr{F}_t\}$-adapted であると定義していることが重要. これは因果律からきている (自然科学からの要請).

strong uniqueness の概念. 2 つの解が, ずっと一緒である確率が 1 なら unique.

B. The Ito Theory

dW 項がない簡単な場合は, $b(t,x)$ が x について locally Lipschitz 連続なら, 解が一意. これを一般の SDE に拡張したのが, Ito の仕事 (Thm. 5.2.5). 5.2.5 は解の大域的な存在を保証するものではない (Rem. 5.2.8).

では, strong solution の大域的な存在を保証する条件はなにか? → Thm. 5.2.9

C. Comparison Results and Other Refinements

1 次元のときは, Lipschitz 条件はゆるめられる (Prop. 5.2.13).

D. Approximations of Stochastic Differential Equations

1.1. Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■1.3+ (def.1.3 $\implies$ def.1.1 $\implies$ def.1.2 がなりたつこと)

- 1.3 $\implies$ 1.1: 任意の $s \in [0, \infty)$ に対し明らかに $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] \leq \mathsf{P}[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] = 1 \implies \forall t \in [0,\infty), \mathsf{P}[X_t = Y_t] = 1$.

- 1.1 $\implies$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{P}[X^{(n)} \in A] - \mathsf{P}[Y^{(n)} \in A]\right| &= \left|\int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right)\mathsf{P}(d\omega)\right| \\ &\le \int_\Omega \left|1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right|\mathsf{P}(d\omega) \\ &\le \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega)\neq Y^{(n)}(\omega)}\mathsf{P}(d\omega) \\ &= \mathsf{P}[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\ &\le \sum_{k=1}^n \mathsf{P}[X_k \neq Y_k] = 0\end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

■1.6+（Fubini の定理を使えと書いてあるところ）　X が可測のとき,

1. 各 $\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が Borel 可測であること:
   Rudin[2] Theorem 8.5 そのまま. X_t は可積分とは限らない.
2. $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ が（定義されるなら） Borel 可測であること:
   $\mathsf{E}[X_t]$ が定義されるから, $\int X_t^+(\omega)d\omega$ と $\int X_t^-(\omega)d\omega$ はどちらも有限で, Rudin[2] Theorem 8.8(a) より Borel 可測. ゆえにその差 $\mathsf{E}[X_t] = \int X_t^+(\omega)d\omega - \int X_t^-(\omega)d\omega$ も Borel 可測.
3. X_t の値域が $\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 内の区間 I が $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ をみたすなら積分の交換などができること:
   $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ ゆえ Tonelli の定理（Rudin[2] Theorem 8.8(b)）より $X_t(\omega)$ が積空間について可積分であることがいえ, 同定理 (c) が使える.

■1.9+（Y も $\{\mathscr{F}_t\}$ に適合していること）　X_t は $\mathscr{F}_t$-可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\forall t$, $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ だから $\{X_t \neq Y_t\} \in \mathscr{F}_t$. $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\}$ であるが, 左辺が $\mathscr{F}$-可測であることと $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ から単調性より左辺も測度 0. ゆえに仮定より左辺 $\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t$. 結局 $\{Y_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$ でもある.

■1.9+（This requirement is not same as saying $\mathscr{F}_0$ is complete について）　たとえば, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ は完備だが, 空でない測度 0 集合を 1 つももたない [3].

■1.13

$$\{(s,\omega);\ X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} ((\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t] \times X^{-1}_{\frac{(k+1)}{2^n}t}(A)) \bigcup \left(\{0\} \times X_0^{-1}(A)\right) \tag{3}$$

に注意 [4].

■2.3　The first statement: $T \equiv t_0 \ge 0$ を定数とすると, 任意の $t \ge 0$ に対し $\{t_0 \le t\}$ は $\varnothing$ もしくは Ω でありいずれも $\mathscr{F}_t$ に属する.

■2.6　$X_r(\omega) \in \Gamma$ とすると, Γ: open と X: RC より時刻 r の直後も少しの時間 path は Γ に入っている. その時間の中から有理数時刻を取ってくればよい.

■2.9

- The first two assertions:
  $\{T \wedge S \le t\} = \{T \le t\} \cup \{S \le t\}$ および $\{T \vee S \le t\} = \{T \le t\} \cap \{S \le t\}$ より.
- $\{0 < T < t, T + S > t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)} \{t > T > r, S > t - r\}$ がなりたつこと:
  $0 < T < t,\ T + S > t \iff 0 < T < t,\ S > t - T \iff$ ある $r \in \mathbb{Q} \cap (0, t)$ があって $\{t > T > r, S > t - r\}$ をいえばよい. 2 つ目の $\iff$ について, 実際
  - $\Longleftarrow$: $0 < r < T < t$, $S > t - r > t - T$.
  - $\Longrightarrow$: $t > T > t - S$ だが, 有理数の稠密性より $t > T > r > t - S$ なる $r \in \mathbb{Q}$ がとれる. このとき $S > t - r$, $r < T < t$.

  である.

■4.10（Doob-Meyer Decomposition）書きかけ　すべての文章に行間がある地獄である. 定理のステートメントは本で見てください.

■一意性　X が 2 通りの分解 $X_t = M'_t + A'_t = M''_t + A''_t$ を許すと仮定する. ここで M', M'' は MG, A', A'' は natural increasing である. このとき

$$\{B_t \overset{\text{def}}{=} A'_t - A''_t = M''_t - M'_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\} \tag{4}$$

は MG で, 任意の RC MG $\{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$ に対し

$$\mathsf{E}[\xi_t(A'_t - A''_t)] = \mathsf{E}\int_{(0,t]} \xi_{s-} dB_s = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t^{(n)}_{j-1}} \left[B_{t^{(n)}_j} - B_{t_{j-1}(n)}\right] \tag{5}$$

である. ここで $\Pi_n = \{t^{(n)}_0, \ldots, t^{(n)}_{m_n}\}$, $n \ge 1$ は $[0, t]$ の分割であって, $n \to \infty$ 極限で $||\Pi_n|| := \max_{1 \le j \le m_n}(t^{(n)}_j - t^{(n)}_{j-1}) \to 0$ となるものとする.

$$E\left[\xi_{t^{(n)}_{j-1}}\left(B_{t^{(n)}_j} - B_{t^{(n)}_{j-1}}\right)\right] = 0, \text{ and thus} \quad E\left[\xi_t\left(A'_t - A''_t\right)\right] = 0. \tag{6}$$

参考文献

[1] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/2159241/complete-filtration`.

[4] `https://www.stat.purdue.edu/~chen418/studynotesmath.html`.