《Walter Rudin: Real and Complex Analysis》読書記録

最終更新: 2023 年 12 月 17 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
62	-13	$f_\Omega f\ d\mu$	$\int_\Omega f\ d\mu$
87	5	$\alpha \leq b$	$a \leq b$
121	-2	$\lambda'_a - \lambda_\alpha$	$\lambda'_a - \lambda_a$

1. Abstract Integration

The Concept of Measurability

(位相, 位相空間, 連続写像) の関係は, (σ-algebra, 可測空間, 可測写像) の関係に似ている;

$$f \text{ 連続} \overset{\text{def}}{\iff} f^{-1}(\text{開集合}) = \text{開集合}$$
$$f \text{ 可測} \overset{\text{def}}{\iff} f^{-1}(\text{開集合}) = \text{可測集合}$$

■1.2 (位相, 位相空間, 連続写像)

1. $\tau \subset 2^X$ は以下をみたすとき X の **位相** という.
   (a) $\varnothing \in \tau$.
   (b) τ は有限 $\cap$ について閉じている.
   (c) τ は $\cup$ について閉じている (可算でも, 非可算でも OK).
2. 上の状況で, X を **位相空間** とよぶ. τ の要素を X の **開集合** とよぶ.
3. X, Y 位相空間, $f : X \to Y$ 写像のとき, f 連続 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合 $\subset Y$ の逆像が開集合 $\subset X$.

■1.3 (σ-algebra, 可測空間, 可測写像)

1. $\mathfrak{M} \subset 2^X$ は以下をみたすとき X の **σ-algebra** という.
   (a) $X \in \mathfrak{M}$.
   (b) $\mathfrak{M}$ は補集合 ^{c} について閉じている.
   (c) $\mathfrak{M}$ は可算 $\cup$ について閉じている.
2. 上の状況で, X を **可測空間** とよぶ. $\mathfrak{M}$ の要素を X の **可測集合** とよぶ.
3. X 可測空間, Y 位相空間, $f : X \to Y$ 写像のとき, f 可測 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合 $\subset Y$ の逆像が可測集合 $\subset X$.

定義から直ちに得られる可測関数の性質: 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9

■1.5 (**任意の点で連続** $\iff$ **連続**)　両者は別々に定義された. $f : X \to Y$ 連続 $\iff$ 任意の点 $x \in X$ で f 連続

■1.7 (**連続関数の連続関数は連続/可測関数の連続関数は可測**)

■1.8 (1.7 **の引数** 2 **次元バージョン**)　複素関数や, 和/積に関する可測性を示すのに使う.

■1.9 (**シンプルな関数演算で可測性が保たれること, 基本的な関数の可測性**)　(e) はじめから $\alpha(x)$ を 4 行目のように定義したいところだが, 可測性が全く見えないので, 見えるような表式を採用している. E の可測性: f の可測性と, $\{0\}$ は Euclid 位相で閉集合ゆえ $E^c = \{x : f(x) \neq 0\}$ は可測. よって E も可測.

集合族 $\mathscr{F}$ が σ-algebra でなくても, それをもとにして σ-algebra を作ることができる.

■1.10 (**集合族** $\mathscr{F}$ **から生成される** σ-algebra)　$\mathscr{F} \in 2^X$ に対し, $\mathscr{F}$ を含む最小の σ-algebra $\mathfrak{M}^*$ が存在する.

とくに, $\mathscr{F}$ を開集合族にとって生成した σ-algebra $\mathscr{B}$ に属する集合を **Borel sets** という.

■1.11 (Borel Sets)　1.10 で $\mathscr{F}$ を top. sp. X の開集合族にとったときのそれを **Borel sets** という. $X \to Y$ 連続 $\implies$ $X \to Y$ Borel measurable をすぐ納得できないと理解が怪しいよ.

可測関数の定義は, 実は次のように強くすることができる. 普通の教科書はこれが定義になっている;

$$f \text{ 可測} \implies (\text{他の本では } \overset{\text{def}}{\iff}) \; f^{-1}(\text{Borel 集合}) = \text{可測集合}$$

また, 任意の切断が可測であること (任意の α で, $f^{-1}((\alpha,\infty])$ 可測) もいえて, これが定義になっていることもある.

■1.12 **(Borel set を用いた可測性の書き換え)** X が測度空間, Y が位相空間, f が一般の写像. (d) が 1.7(b) の拡張になっていて重要なのだと思う. (b) も measurable function の定義が強くなっている.

■1.14 **($\sup$, $\limsup$ で可測性が保たれる)** aaa

積分定義の流れ

簡単のためみんな実可測関数とする.

1. 単関数 $s \in (-\infty,\infty)$ で定義 (測度の重みつき有限和).
2. $f \in [0,\infty]$ で定義 (単関数 $0 \le s \le f$ の積分たちの sup).
3. より広い f で定義 ($\int f = \int f^+ - \int f^-$). 「より広い f」とは, 右辺が定義できる f のこと. とくに f が L^1 ならよいし, そうでなくても右辺の片方だけ ∞ の場合も定義できる.

実際にやる.

Simple Functions

　可測関数に対して積分を定義するために, 単関数という簡単な関数で可測関数を近似することを考える.

■1.16 **(単関数)**　有限種類の値しかとらない複素関数 ($\pm\infty$ は禁止!) を simple function という. 可測とは限らない. しかし,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

とかいて, A_i 達が可測のとき, s も可測.

■1.17 **(可測関数 ≥ 0 は単関数 ≥ 0 の下からの極限でかける)**　こんなやつ:

1. $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq f$.
2. 任意の x で $s_n(x) \to f(x)$.

Elementary Properties of Measures

■1.18 **(測度)**　可算加法的. positive measure $\in [0, \infty]$, complex measure は複素数をとる (負実数でも可. $\pm\infty$ はダメ).

■1.22 **(∞ の演算規則)**　$0 \cdot \infty = 0$ をしておくと主張が統一的にかける.

Integration of Positive Functions

　$f \geq 0$ をまず考える.

■1.23 **(単関数の積分, 正可測関数の積分)**　単関数の積分をまず定義:

$$\int_E s \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

し, 正可測関数 f の積分を, $f \geq s$ なる単関数 s の積分たちの sup として定義する:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s \ d\mu. \tag{1}$$

■1.25 (**積分範囲の和**, **和と積分の交換**: **単関数バージョン**)

■1.26 (Lebesgue, MCT) $f_n \geq 0$ が各点で $f \geq 0$ に, 増加しながら収束するとき, 積分と極限は交換できる.

■1.27 (**和と積分の交換**: **正可測関数バージョン**) $f_n \in [0, \infty]$ のとき,

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \ d\mu.$$

■1.28 (Fatou) $f_n \in [0, \infty]$ のとき,

$$\int_X (\liminf_{n\to\infty} f_n) \ d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \ d\mu.$$

■1.29 (**ちょっとした測度変換**) これの逆が Radon-Nikyodým.

Integration of Complex Functions

正可測ならいつでも積分が定義できたが, 一般の複素関数 f は, 可測であっても積分が定義できるとは限らない; 加えて $f \in L^1(\mu)$ でないといけない (例外あり, 下に書いている).

■1.31 (**複素関数の積分**) $f = u + iv$ が可測かつ $f \in L^1(\mu)$ なら, 以下で積分が定義できる:

$$\int_E f \ d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_E u^+ \ d\mu - \int_E u^- \ d\mu + i \int_E v^+ \ d\mu - i \int_E v^- \ d\mu$$

とくに, 実関数のとき,

$$\int_E f \ d\mu = \int_E f^+ \ d\mu - \int_E f^- \ d\mu$$

だが, 例外的に, 右辺の少なくとも片方が有限なら, L^1 でなくても, 積分 $\in [-\infty, \infty]$ が定義できる.

■1.34 (Lebesgue, DCT) 各点で, $|f_n|$ が L^1 関数で n によらずおさえられるなら,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

で, 積分と極限を交換できる.

The Role Played by Sets of Measure Zero

■1.40 任意の領域で f の平均取って S に入ってるなら、 f は a.e. S に入ってる aaa

積分と極限の交換まとめ

- **MCT**: $0 \le f_n \in [0,\infty] \nearrow f \in [0,\infty]$ a.e. $\implies \int \lim f_n = \lim \int f_n$.
- **Fatou**: $f \in [0,\infty]$ a.e. $\implies \int \liminf f_n \le \liminf \int f_n$.
- **DCT**: a.e., $|f_n|$ を n によらず抑える $g \in L^1$ が存在 $\implies \int \lim f_n = \lim \int f_n$.

Tao に載っている直感的理解

まず, 積分と極限が交換できない古典的な 3 つの例: **移動瘤型**

1. **水平無限遠点への消失** $f_n := 1_{[n,n+1]}$
   $f := 0$ に各点収束するが, $\mathbb{R}$ 上の積分はずっと 1. 質量が無限遠に逃げ去ってしまう.
2. **幅無限大への消失** $f_n := \frac{1}{n}1_{[0,n]}$
   $f := 0$ に各点収束のみならず一様収束するが, $\mathbb{R}$ 上の積分はずっと 1.
3. **垂直無限遠点への消失** $f_n := n1_{[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]}$
   $f := 0$ に各点収束するが, $\mathbb{R}$ 上の積分はずっと 1. 質量が上に逃げてしまう.

ここに挙げたような無限へ消失していく道を塞いでしまうことができたなら, つまり, 各点収束のしかたをある程度制限してズルできないような状況のみ考えれば, 積分が収束するようにできる. これには主に 2 つのやり方がある.

1. 1 つ目は, **単調性**を守らせること. こうすると, f_n が以前の $f_1, \ldots, f_{n-1}$ たちの質量が集まっていた場所を放棄するということができなくなる. → **MCT**
2. 2 つ目は, 考えている関数すべてを絶対収束する関数で**おさえてしまう**というものである. → **DCT**
   移動瘤の例をみれば, おさえこんでいる絶対可積分関数がなければ, この主張は成り立たないことがわかる. たしかに, 移動瘤の例では, おさえこみ関数が存在できないことがわかる.

2. Positive Borel Measures

Topological Preliminaries

最終目的は Urysohn's Lemma を証明すること. それに用いる道具: 定理 2.7, lower/upper semicontinuous の概念.

The Riesz Representation Theorem

■**定理** 2.14 (Riesz)　X を locally compact Hausdorff space とし, Λ を $C_c(X)$ 上の positive linear functional とする. このとき, X 上に, X の Borel set を全て含む σ-algebra $\mathfrak{M}$ が存在し, 以下のように Λ を表現する唯一の $\mathfrak{M}$ 上の測度 μ が存在する:

(a) $\forall f \in C_c(X)$, $\Lambda f = \int_X f\ d\mu$.

そして μ は以下の性質を満たす:

(b) 任意の compact set $K \subset X$ に対し $\mu(K) < \infty$.

(c) 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ open}\}. \tag{2}$$

(d) 任意の open set E と $\mu(E) < \infty$ なる $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compact}\}. \tag{3}$$

(e) もし $E \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, $\mu(E) = 0$ ならば $A \in \mathfrak{M}$ (completeness)

Regularity Properties of Borel Measures

■2.15 (Borel measure)　X: locally compact Hausdorff の上の Borel sets の上の測度を **Borel measure** という.

X 上に regular な μ がほしい. 理由: regular なら, 可測集合 E を外から開集合 V で, 内からコンパクト集合 K で任意の精度で近似でき, そのまま Urysohn の補題が使える. その結果, 任意の精度で E の特性関数に近い連続関数が得られ, さらに, ある程度の誤差 ϵ を許して, 可測関数を連続関数で近似できる.

Riesz thm. より, X 上に outer regular な μ の存在を示せる. inner regularity は, X の仮定を強めないと出ない $\to$ 2.18

■2.17　2.14 の仮定に σ-compact の仮定を足すと μ は regular になる.

■2.18

1. λ が与えられる.
2. $\Lambda f = \int_X f \, d\lambda$ として, Λf から 2.14 の方法で作った μ は 2.17 をみたす.
3. μ は regular だからとくに $\lambda = \mu$ を示せば良い.

疑問: 2.14 の uniqueness を直接適用できないのか? $\to$ 2.14 は, (a) から (e) をすべてみたす μ が一意であるという主張? μ をつくって (a) を最後に証明しているし, どうやらそうっぽい? 証明読まないとわからない

2.14 では X の条件が弱く, 2.14 (a)-(e) をすべてみたす μ の一意性を言った. 2.18 では X の条件をきつくすることで 2.14 (a) をみたすことのみから μ の一意性がいえた. という見方もできるか.

■2.19 (空間 R^k と Euclid 位相の基本性質)

■2.20 (Lebesgue measure をつくる)　$f \in C_c(R^k)$ は Riemann 可積分. Λf を f の Riemann 積分を等しくなるようにきめて, Riesz の表現定理をつかって, μ をつくる. コンパクト台の連続関数の積分結果だけから Lebesgue measure が決まってしまうのはおもしろい.

- $\Lambda_N h - \Lambda_N g = \epsilon \Lambda_N 1 \leq \epsilon \mathrm{Vol}(W)$.
- n を大きくすればいくらでも $\Lambda_n f$ の振幅を小さくできる.

■2.24 (Lusin)

1. $0 \leq f < 1$, A compact のときに示す. A compact でないと $A \subset V$ open, $\bar{V}$ compact がとれない.
2. f bdd, A compact のときに示す. 上の証明で $n \leq 0$ を許せばできる.
3. A compact でないときに示す. $\epsilon > 0$ が与えられる. compact な $K \subset A$ があって, $\mu(A-K) < \epsilon/2$. 一方, $f' := f \cdot 1_{\{x \in K\}}$ とおくと $(A-K)^c$ では $f = f'$. f' は compact 台 K をもつから, 上の結果が使えて, 連続関数 g があって $\mu(f' \neq g) < \epsilon/2$. この g に対して,
$$\begin{aligned}\mu(f \neq g) &= \mu(\{f \neq g\} \cap (A-K)) + \mu(\{f \neq g\} \cap (A-K)^c) \\ &< \epsilon/2 + \mu(\{f' \neq g\} \cap (A-K)^c) \\ &\leq \epsilon/2 + \mu(f' \neq g) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$
で OK.
4. f bdd. でないときに示す.

- (2) がなりたつようにできること
g_1 は g の値域を $\pm R$ 内におさめたもの. g が $\pm R$ をはみ出しているところではそもそも $g \neq f$ なので, g を g_1 でおきかえても (1) は保たれる. むしろ評価は改善する.

■2.25 (Vitali-Carathéodory)　$v-u$ の変形, 第 2 項の不等式が成り立たない気がする. なにか勘違いしているか.

Lebesgue 非可測集合の存在. Tao p.41 に, $x \in [0,1]$ においてコインを投げる例がある.

3. L^p-Spaces

解析の最もよくある不等式たちは凸の概念からでてくる.

■3.1 **(凸関数)**　$(a,b), -\infty \leq a < b \leq \infty$ で定義された実関数 φ が凸 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $a<x<b, a<y<b, 0 \leq \lambda \leq 1$ で,

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y). \tag{4}$$

■3.2 **(開区間で凸なら連続)**　もし φ が (a,b) で凸なら (a,b) 上で連続.

区間が open であることが重要. $[0,1)$ 上で $\varphi=0$, $\varphi(1)=1$ なる φ は, $[0,1]$ 上で (4) をみたすが連続ではない.

■3.3 (Jensen)　$(\Omega, \mathfrak{M}, \mu)$, μ: positive measure, $\mu(\Omega)=1$. $f \in L^1(\mu)$ 実関数で, $a<f(x)<b, \forall x \in \Omega$ かつ φ が (a,b) 中で凸なら,

$$\varphi\left(\int_\Omega f d\mu\right) \leq \int_\Omega (\varphi \circ f) d\mu. \tag{5}$$

ごちゃごちゃした条件は, 積分が定義できたり, 関数の定義域がおかしくならないための条件. $\mu(\Omega)=1$ の条件は, 凸関数の定義と見比べると, 重み 1 を分配している感じが, それっぽい.

注意: $a=-\infty, b=\infty$ でも可. このとき $\varphi \circ f$ は L^1 でないことがあるが, 1.31 の拡張された積分の定義で, 積分が定義できる.

■3.5 (Hölder, Minkowski) p, q conjugate exponents $(1 < p < \infty)$ とする. X measure sp., μ measure. f, g を X 上の measurable function $\in [0, \infty]$ とすると, 以下がなりたつ:

Hölder (Cauchy-Schwarz の一般化; $p = q = 2$)

$$\int_X fg\ d\mu \leq \left(\int_X f^p\ d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q\ d\mu\right)^{1/q} \tag{6}$$

Minkowski (三角不等式の一般化, というか $L^p(\mu)$ の三角不等式そのものでもある)

$$\left(\int_X (f+g)^p\ d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_X f^p\ d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\ d\mu\right)^{1/p} \tag{7}$$

The L^p-spaces

■3.6 ($||\cdot||_p, L^p(\mu)$) $0 < p < \infty$, f: complex measurable のとき,

$$||f||_p \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\int_X |f|^p\ d\mu\right\}^{1/p}$$

で, $||f||_p < \infty$ なる f の集合を $L^p(\mu)$ とかく.

■3.7 ($||\cdot||_\infty, L^\infty(\mu)$) $g : X \to [0, \infty]$ measurable. S を,

$$\mu(g^{-1}((\alpha, \infty])) = 0$$

なる実数 α の集合とする. $\beta = \inf S$ を g の **essential supremum** という.

実は $\beta \in S$ である.

$|f|$ の ess. sup. を $||f||_\infty$ とかく. $||f||_\infty < \infty$ なる f の集合を $L^\infty(\mu)$ とかく.

■3.8 (**積の不等式**)

$$||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_q. \tag{8}$$

fg が L^1 であることを示すときに使う.

■**3.9 (和の不等式)**

$$||f+g||_p \le ||f||_p + ||g||_p. \tag{9}$$

■**3.10 ($L^p(\mu)$ はベクトル空間)**

■**3.11 ($L^p(\mu)$ は完備距離空間)** 3.9 より, $||\cdot||_p$ は, $f = g$ **a.e. なものを同一視すれば** 距離の公理をみたす. 完備でもある.

■**3.12 (L^p-収束列の部分列をうまくとると概収束する)** $1 \le p \le \infty$, $\{f_n\}$ が $L^p(\mu)$ 内の Cauchy 列 $\to f$ なら, f に概収束する部分列がとれる.

■**3.13 (狭い台をもつ単関数は $L^p(\mu)$ 内で稠密)** S を, X 上の複素, 可測, 単関数で,

$$\mu(\{x : s(x) \ne 0\}) < \infty \tag{10}$$

なるものの集合とする. $1 \le p < \infty$ のとき, S は $L^p(\mu)$ 内で dense.

Approximation by Continuous Functions

■**3.14 ($C_c(X)$ は $L^p(\mu)$ 内で稠密)** $1 \le p < \infty$ のとき, $C_c(X)$ は $L^p(\mu)$ 内で dense.

2.24 のラストで, $R = ||f(x)||_\infty$ とおけば, (2) を $\sup|g(x)| \le ||f||_\infty$ とできる.

$$\begin{aligned} ||g-s||_p &= ||(g-s)1_{g\ne s}||_p \\ &\le ||2||s||_\infty 1_{g\ne s}||_p \\ &= 2||s||_\infty ||1_{g\ne s}||_p \\ &\le 2||s||_\infty \epsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

■**3.16 ($C_0(X)$)** X: locally compact Hausdorff, f を X 上の複素関数とする. f が **vanish at infinity** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $\epsilon > 0$ に対し, compact $K \subset X$ があって, K 外で $|f| < \epsilon$.

あきらかに $C_c(X) \subset C_0(X)$. X cpt なら一致.

■3.17 ($C_0(X)$ は sup ノルム下で $C_c(X)$ の完備化)

4. Elementary Hilbert Space Theory

ベクトル空間（和とスカラー倍のみ定義）に内積 $(\cdot,\cdot)$ を入れると, $||x|| = \sqrt{(x,x)}$ が距離の公理をみたすから, 距離空間になる.

■4.1 (内積)

1. $(y,x) = \overline{(x,y)}$.
2. $(x+y,z) = (x,z) + (y,z)$.
3. $(\alpha,y) = \alpha(x,y)$
4. $(x,x) \geq 0$.
5. $(x,x) = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみ.

$||x|| = \sqrt{(x,x)}$ を norm という.

内積の公理だけから, Schwarz, triangle がでる.

■4.2 (Schwarz)

$$|(x,y)| \leq ||x||\ ||y||. \tag{11}$$

■4.3 (Triangle)

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y||. \tag{12}$$

■4.4 (内積空間は距離空間になる)　三角不等式から,

$$||x-z|| \leq ||x-y|| + ||y-z|| \tag{13}$$

が出るので, 内積空間は $||x-y||$ を x と y の距離として距離空間になる. 完備な内積空間を **Hilbert 空間** という. 以後, H とかくとき, Hilbert 空間をさす.

■4.6 (内積・ノルムの連続性)　$x \to (x,y)$, $x \to (y,x)$, $x \to ||x||$ は連続.

■4.7 (**部分空間**)　closed subspace: H に入っている内積から導かれる距離位相について閉な部分空間. M が subspace なら, $\overline{M}$ もそう.

■4.8 (**凸集合**)　$E \subset V$ が凸 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $x \in E, y \in E, 0 < t < 1$ のとき

$$z_t = (1-t)x + ty \tag{14}$$

も E に入っている.

■4.9 (**直交性**)　$(x,y) = 0$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ x は y に直交. $x \perp y$ とかく.

$x^\perp$ で, x に直交するやつらの集合.

$M^\perp$ で, $x \in M$ すべてと直交するやつらの集合.

$x^\perp$ は連続関数 $y \to (x,y)$ のゼロ集合なので, 閉. さらに, $M^\perp = \bigcap_{x\in M} x^\perp$ なので $M^\perp$ も閉.

■4.10　任意の非空, 閉, 凸集合 $E \subset H$ は唯一の最小ノルムの要素がある.

つまり norm の inf が E に入っていることと, 同率で最小になるやつがいないことが大事.

■4.11 (**直交射影**)　$M \overset{\text{closed}}{\subset} H$.

1. $x \in H$ が一意に分解される:

$$x = Px + Qx \tag{15}$$

   $Px \in M, Qx \in M^\perp$.
2. Px, Qx はそれぞれ $M, M^\perp$ の中で最も x に近い点.
3. $P : H \to M$, $Q : H \to M^\perp$ は linear.
4. $||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$.

> $x \to (x,y)$ は連続線型汎関数であることをみたが, 逆に, H 上の任意の連続線型汎関数はこの形でかける.

■4.12 **(連続線型汎関数は内積でかける)**　L を H 上の連続線型汎関数とすると, unique な $y \in H$ があって,

$$Lx = (x, y) \quad (x \in H) \tag{16}$$

とかける.

Orthonormal Sets

■4.13 (orthonormal)　ベクトル $u_\alpha \in H$, $\alpha \in A$: 添字集合 の集合が以下をみたすとき orthonormal という:

$$(u_\alpha, u_\beta) = 1_{\{\alpha=\beta\}} \tag{17}$$

$\{u_\alpha\}_{\alpha \in A}$ orthonormal 固定. $x \in H$ に対し, 添字集合 A 上の複素関数 $\hat{x}$ が対応する (Fourier coefficient):

$$\hat{x}(\alpha) = (x, u_\alpha). \tag{18}$$

■4.14

■4.15　ここから, 無限 (非可算でも可) 次元ベクトル空間の話をはじめている.

■4.16 (dense $\to$ dense **連続等長写像は, 空間全体間でもそうである)**

■4.17 **(基底が固定されている. 基底がはる空間上の元を基底の線形結合でかいたとき, 元を指定することは, 線形結合の係数をきめることと同じである. 元のノルムは, 係数の二乗和に等しい)**

■4.18 **(正規直交系が完全であるための必要十分条件)**　基底 u_α の数が充分にあって, $x \in H$ を表現するための力が充分にあるということをいいかえている.

結局, いいたいこと

$\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ が H 中の maximal orthonormal set (完全正規直交系) のとき, $x \mapsto \hat{x}$ は **Hilbert 空間同型** (内積, 和, スカラー倍をたもつ同型) $H \to l^2(A)$ である.

つまり, 特に, 基底で展開したときの係数をきめることと, もとの元をきめることは同じ.

nontrivial な (つまり, $\{0\}$ 以外の) Hilbert 空間は, ある $l^2(A)$ と Hilbert 空間同型である.

おもろい結果だなあ. 証明には Zorn を使う.

証明の流れ:

1. nontrivial な Hilbert 空間には, orthonormal set がある.
2. それを含む maximal orthonormal set $\{u_\alpha : \alpha \in A\}$ がある (Zorn を使う, 4.22).
3. それから作った $l^2(A)$ は H と Hilbert isom (4.18).

Trigonometric Series

Trigonometric: 三角法の

前節であげた完全正規直交系の具体例を挙げる. 単位円上 L^2 な複素関数 $f(t)$ たち $L^2(T)$ の完全正規直交系が $e^{int}, n \in \mathbb{Z}$ であることをいう.

■4.23 (単位円 T 上の関数)

$$f(t) = F(e^{it}) \tag{19}$$

これをもって T 上の関数と, 2π 周期の R^1 上の関数を同一視する.

- $L^p(T), 1 \leq p < \infty$ を, R^1 上の複素, Lebesgue measurable, 2π 周期関数で, norm

$$||f||_p \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty \tag{20}$$

なるものの集合とする．いいかえれば, $L^p(\mu)$, μ: Lebesgue measure on $[0, 2\pi]$ を 2π で割ったもの, を考えることになる．

- $L^\infty(T)$ は $L^\infty(R^1)$ の 2π 周期のやつを集めたもの, ノルムは supremum norm.
- $C(T)$ は T 上連続な複素関数, ノルムは $||f||_\infty = \sup_t |f(t)|$.

trigonometric polynomial:

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \tag{21}$$

なる関数.

$$u_n(t) = e^{int}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{22}$$

とおく．$L^2(T)$ の内積を

$$(f, g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} dt \tag{23}$$

とおくと, $\{u_n : n \in \mathbb{Z}\}$ は $L^2(T)$ の orthonormal set になっている．これは **trigonometric system** とよばれる．

orthonormal set である trigonometric system が実は maximal であることをいう．$\rightarrow$ 4.18 より完全正規直交系.

■4.24 (trigonometric system **の完全性**)

■4.25 trigonometric polynomial **が** T **上の連続関数を任意の精度で (一様に) 近似できる**　$f \in C(T)$, $\epsilon > 0$ のとき, trigonometric polynomial P があって, 任意の $t \in \mathbb{R}$ で,

$$|f(t) - P(t)| < \epsilon. \tag{24}$$

得た e^{int} の完全性を使って, Fourier 級数の議論をする.

■4.26 (Fourier Series) $f \in L^1(T)$, f の **Fourier coefficients**

$$\hat{f}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt, \quad b \in \mathbb{Z} \tag{25}$$

f の **Fourier Series**:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{26}$$

部分和:

$$s_N(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{int}. \tag{27}$$

$L^2(T) \subset L^1(T)$ なので, 前節の結果が使える.

$f \in L^2(T)$ の Fourier series の部分和は, f に L^2 収束する:

$$\lim_{N\to\infty} ||f - s_N||_2 = 0. \tag{28}$$

L^1 収束や, 概収束がいえるかという問題は, L^2 よりもだいぶむずいらしい.

6. Complex Measures

complex measure μ を考える.

complex measure μ から, positive measure $|\mu|$ をつくる. (実数の絶対値に対応) $|\mu|(E) = |\mu(E)|, E \in \mathfrak{M}$ とするのが最初に思いつくが, これでは $|\mu|$ が測度にならない. なので, μ を dominate ($|\mu|(E) \geq \mu(E)$) する positive measure で 1 番小さいものを探す.

countable partition を考えると, 任意の partition で $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_i)$. 測度は和の順番によらないので, この和は絶対収束する. μ を dominate する positive measure で 1 番小さいものを探す. これは $|\mu|$ である. これを total variation という. 任意の分割で, パーツごとに絶対値取って足したものを考えているから, 関数の全変動っぽい.

■6.2 ($|\mu|$ は測度)

■6.4 ($|\mu|(X) < \infty$)

■6.6 (Positive and Negative Variations)

Absolute Continuity

■6.7 (Absolute Continuity)

■6.8 (基本性質)

■6.10 (Lebesgue-Radon-Nikodým) μ: positive σ-finite measure, λ: complex measure.

1. **Lebesgue decomposition**: unique pair λ_a, λ_s があって,
$$\lambda = \lambda_a + \lambda_s, \quad \lambda_a \ll \mu, \quad \lambda_s \perp \mu. \tag{29}$$
λ positive, finite のとき, λ_a, λ_s もそう.
2. **Radon-Nikodým**: $\exists! h \in L^1(\mu)$,
$$\lambda_a(E) = \int_E h \; d\mu \tag{30}$$
for every set $E \in \mathfrak{M}$.

■6.11 (なぜ絶対連続というか)

Consequences of the Radon-Nikodým Theorem

■6.12 (測度の polar representation)

■6.14 (Hahn Decomposition)

Bounded Linear Functionals on L^p

■6.16 ()

The Riesz Representation Theorem

■6.19 (Riesz)

8. Integration on product spaces

Measurability on Cartesian Products

■8.1 (rectangle, measurable rectangle, elementary sets, monotone class)　X, Y 集合, $A \subset X, B \subset Y$ のとき $A \times B \subset X \times Y$ の形の集合を $X \times Y$ 中の **rectangle** という.

$(X, \mathscr{S}), (Y, \mathscr{T})$ 可測空間, $A \in \mathscr{S}, B \in \mathscr{T}$ のとき $A \times B$ を **measurable rectangle** という.

$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ を, $X \times Y$ 中の全ての measurable rectangle を含む最小の σ-algebra で定義する.

measurable rectangle の有限・非交差和を **elementary set** といい, それ全体を $\mathscr{E}$ とかく.

monotone class $\mathfrak{M}$ は以下の性質をみたす集合の集まり: 単調増加列, 単調減少列について閉じている.

■8.2　$E \in \mathscr{S} \times \mathscr{T}$ のとき, $E_x \in \mathscr{T}$ かつ $E^y \in \mathscr{S}$ (任意の x, y で).

■8.3　$\mathscr{S} \times \mathscr{T}$ は全ての elementary sets を含む最小の monotone class である.

Product Measures

■8.6　空間が σ-finite なら測度について Fubini がなりたつ.

■8.7 (product measure)

$$(\mu \times \lambda)(Q) \overset{\text{def}}{=} \int_X \lambda(Q_x)\ d\mu(x) = \int_Y \lambda(Q^y)\ d\lambda(y). \tag{31}$$

The Fubini Theorem

■8.8 (Fubini) $(X, \mathscr{S}), (Y, \mathscr{T})$: σ-finite 可測空間, f: $X \times Y$ 上の $(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-measurable function とする.

1. $0 \le f \le \infty$ のとき,
$$\phi(x) = \int_Y f_x\ d\lambda,\ \psi(y) = \int_X f^y\ d\mu\ (x \in X, y \in Y) \tag{32}$$
とかけば, ϕ は $\mathscr{S}$-measurable, ψ は $\mathscr{T}$-measurable で, さらに,
$$\int_X \phi\ d\mu = \int_{X \times Y} f\ d(\mu \times \lambda) = \int_Y \psi\ d\lambda.$$
2. f complex かつ
$$\phi^*(x) = \int_Y |f|_x\ d\lambda,\ \int_X \phi^*\ d\mu < \infty \tag{33}$$
ならば, $f \in L^1(\mu \times \lambda)$.
3. もし $f \in L^1(\mu \times \lambda)$ なら, $f_x \in L^1(\lambda)$ a.e. $x \in X$, $f^y \in L^1(\mu)$ a.e. $y \in Y$. さらに, a.e. 定義された ϕ, ψ は $L^1(\mu), L^1(\lambda)$ にそれぞれ属し, (33) がなりたつ.

Fubini まとめ

$(\mathscr{S} \times \mathscr{T})$-measurable function f の積分の順番は,

- $f \ge 0$ か,
- $|f|$ の iterated integral $< \infty$

のとき入れ替えてよい.

Completion of Product Measures

■8.12 (Fubini, **完備空間への拡張** ver.) `https://math.stackexchange.com/questions/3470800/proving-the-lebesgue-measure-space-completes-the-borel-measure-space`

Borel space に Lebesgue measure を制限したものを完備化すると, Lebesgue measurable space になる.

参考文献

[1] a