《Walter Rudin: Real and Complex Analysis》読書記録

最終更新: 2023 年 12 月 6 日

注意: 記述の正確性は保証しません．ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています．? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています．

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
62	-13	$f_\Omega f\ d\mu$	$\int_\Omega f\ d\mu$

1. Abstract Integration

The Concept of Measurability

topological space, open set, continuous function の関係は, measurable space, measurable set, measurable function の関係に似ている．このことを強調していく．

■1.2 (位相, 位相空間, 連続写像)

1. $\tau \subset 2^X$ は以下をみたすとき X の位相という．
   (a) $\varnothing \in \tau$.
   (b) τ は有限 $\cap$ について閉じている．
   (c) τ は $\cup$ について閉じている (可算でも, 非可算でも OK).
2. 上の状況で, X を位相空間とよぶ．τ の要素を X の開集合とよぶ．
3. X, Y 位相空間, $f : X \to Y$ 写像のとき, f 連続 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 開集合 $\subset Y$ の逆像が開集合 $\subset X$.

■1.3 (σ-algebra, 可測空間, 可測写像)

1. $\mathfrak{M} \subset 2^X$ は以下をみたすとき X の σ-algebra という.
   (a) $X \in \mathfrak{M}$.
   (b) $\mathfrak{M}$ は補集合 ^{c} について閉じている.
   (c) $\mathfrak{M}$ は可算 $\cup$ について閉じている.
2. 上の状況で, X を可測空間とよぶ. $\mathfrak{M}$ の要素を X の可測集合とよぶ.
3. X 可測空間, Y 位相空間, $f : X \to Y$ 写像のとき, f 可測 $\overset{\text{def}}{\iff}$ 開集合 $\subset Y$ の逆像が可測集合 $\subset X$.

■1.5 Proposition: $f : X \to Y$ 連続 $\iff$ 任意の点 $x \in X$ で f 連続

■1.7 Theorem: 連続関数の連続関数は連続/可測関数の連続関数は可測

■1.8 Theorem: 1.7 の引数 2 次元バージョン　複素関数や, 和/積に関する可測性を示すのに使う.

■1.9 シンプルな関数演算で可測性が保たれること. 基本的な関数の可測性. (e) はじめから $\alpha(x)$ を 4 行目のように定義したいところだが, 可測性が全く見えないので, 見えるような表式を採用している. E の可測性: f の可測性と, $\{0\}$ は Euclid 位相で閉集合ゆえ $E^c = \{x : f(x) \neq 0\}$ は可測. よって E も可測.

■1.10 Theorem: 集合族 $\mathcal{F}$ から生成される σ-algebra

■1.11 Borel Sets　1.10 で $\mathcal{F}$ を top. sp. X の開集合族にとったときのそれを Borel sets という. $X \to Y$ 連続 $\implies$ $X \to Y$ Borel measurable をすぐ納得できないと理解が怪しいよ.

■1.12 Theorem: Borel measurable に関するいろいろ　X が測度空間, Y が位相空間, f が一般の写像. (d) が 1.7(b) の拡張になっていて重要なのだと思う. (b) も measurable function の定義が強くなっている.

■1.14 Theorem: $\sup$, $\limsup$ で可測性が保たれる

■1.16 Definition: **単関数**

■1.17 Theorem: **可測関数は単関数の下からの極限でかける**

■1.18 Definition: **測度**

■1.22 ∞ **の演算規則**　$0 \cdot \infty = 0$ をしておくと主張が統一的にかける.

Integration of Positive Functions

■1.23 Definition: **正の可測関数の積分の定義**　単関数の積分をまず定義し, f の積分を, $f \geq s$ なる単関数 s の積分たちの sup として定義する:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s \ d\mu. \tag{1}$$

■1.25 Proposition: **積分範囲を足算する, 和の積分は積分の和 単関数バージョン**

■1.26 Lebesgue's Monotone Convergence Theorem

■1.27 **和の積分は積分の和, 一般の非負可測関数バージョン**

■1.28 Fatou's Lemma

■1.29 **ちょっとした測度変換**

Integration of Complex Functions

■1.40 **任意の領域で f の平均取って S に入ってるなら、f は a.e. S に入ってる**

2. Positive Borel Measures

Topological Preliminaries

最終目的は Urysohn's Lemma を証明すること. それに用いる道具: 定理 2.7, lower/upper semicontinuous の概念.

The Riesz Representation Theorem

■**定理** 2.14 (Riesz)　X を locally compact Hausdorff space とし, Λ を $C_c(X)$ 上の positive linear functional とする. このとき, X 上に, X の Borel set を全て含む σ-algebra $\mathfrak{M}$ が存在し, 以下のように Λ を表現する唯一の $\mathfrak{M}$ 上の測度 μ が存在する:

(a) $\forall f \in C_c(X)$, $\Lambda f = \int_X f \, d\mu$.

そして μ は以下の性質を満たす:

(b) 任意の compact set $K \subset X$ に対し $\mu(K) < \infty$.

(c) 任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ open}\}. \tag{2}$$

(d) 任意の open set E と $\mu(E) < \infty$ なる $E \in \mathfrak{M}$ に対し,

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ compact}\}. \tag{3}$$

(e) もし $E \in \mathfrak{M}$, $A \subset E$, $\mu(E) = 0$ ならば $A \in \mathfrak{M}$ (completeness)

Regularity Properties of Borel Measures

■2.15 Borel measure　X: locally compact Hausdorff の上の Borel sets の上の測度を Borel measure という.

X 上に regular な μ がほしい. 理由: regular なら, 可測集合 E を外から開集合 V で, 内からコンパクト集合 K で任意の精度で近似でき, そのまま Urysohn の補題が使える. その結果, 任意の精度で E の特性関数に近い連続関数が得られ, さらに, ある程度の誤差 ϵ を許して, 可測関数を連続関数で近似できる.

Riesz thm. より, X 上に outer regular な μ の存在を示せる. inner regularity は, X の仮定を強めないと出ない $\to$ 2.18

■2.17　2.14 の仮定に σ-compact の仮定を足すと μ は regular になる.

■2.18

1. λ が与えられる.
2. $\Lambda f = \int_X f\ d\lambda$ として, Λf から 2.14 の方法で作った μ は 2.17 をみたす.
3. μ は regular だからとくに $\lambda = \mu$ を示せば良い.

疑問: 2.14 の uniqueness を直接適用できないのか? $\to$ 2.14 は, (a) から (e) をすべてみたす μ が一意であるという主張? μ をつくって (a) を最後に証明しているし, どうやらそうっぽい? 証明読まないとわからない

2.14 では X の条件が弱く, 2.14 (a)-(e) をすべてみたす μ の一意性を言った. 2.18 では X の条件をきつくすることで 2.14 (a) をみたすことのみから μ の一意性がいえた. という見方もできるか.

■2.19 (**空間** R^k **と** Euclid **位相の基本性質**)

■2.20 (Lebesgue measure **をつくる**) $f \in C_c(R^k)$ は Riemann 可積分. Λf を f の Riemann 積分を等しくなるようにきめて, Riesz の表現定理をつかって, μ をつくる. コンパクト台の連続関数の積分結果だけから Lebesgue measure が決まってしまうのはおもしろい.

- $\Lambda_N h - \Lambda_N g = \epsilon \Lambda_N 1 \le \epsilon \mathrm{Vol}(W)$.
- n を大きくすればいくらでも $\Lambda_n f$ の振幅を小さくできる.

■2.24 (Lusin)

1. $0 \le f < 1$, A compact のときに示す. A compact でないと $A \subset V$ open, $\bar{V}$ compact がとれない.
2. f bdd, A compact のときに示す. 上の証明で $n \le 0$ を許せばできる.
3. A compact でないときに示す. $\epsilon > 0$ が与えられる. compact な $K \subset A$ があって, $\mu(A - K) < \epsilon/2$. 一方, $f' := f \cdot 1_{\{x \in K\}}$ とおくと $(A-K)^c$ では $f = f'$. f' は compact 台 K をもつから, 上の結果が使えて, 連続関数

g があって $\mu(f' \neq g) < \epsilon/2$. この g に対して,

$$\begin{aligned}\mu(f \neq g) &= \mu(\{f \neq g\} \cap (A-K)) + \mu(\{f \neq g\} \cap (A-K)^c) \\ &< \epsilon/2 + \mu(\{f' \neq g\} \cap (A-K)^c) \\ &\leq \epsilon/2 + \mu(f' \neq g) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

で OK.

4. f bdd. でないときに示す.

- (2) がなりたつようにできること
  g_1 は g の値域を $\pm R$ 内におさめたもの. g が $\pm R$ をはみ出しているところではそもそも $g \neq f$ なので, g を g_1 でおきかえても (1) は保たれる. むしろ評価は改善する.

■2.25 (Vitali-Carathéodory)　$v - u$ の変形, 第 2 項の不等式が成り立たない気がする. なにか勘違いしているか.

3. L^p-Spaces

■3.1 凸関数

■3.2 開区間で凸なら連続

■3.3 Jensen

■3.5 Hölder, Minkowski

The L^p-spaces

■3.6 $||\cdot||_p, L^p(\mu)$

■3.7 $||\cdot||_\infty, L^\infty(\mu)$

■3.8 積の不等式

■3.9 和の不等式

■3.10 $L^p(\mu)$ はベクトル空間

■3.11 $L^p(\mu)$ は完備距離空間

■3.12 L^p-収束列の部分列をうまくとると概収束する

■3.13 狭い台をもつ単関数は $L^p(\mu)$ 内で稠密

■3.14 $C_c(X)$ は $L^p(\mu)$ 内で稠密　2.24 のラストで, $R = ||f(x)||_\infty$ とおけば, (2) を $\sup|g(x)| \leq ||f||_\infty$ とできる.

$$\begin{aligned} ||g-s||_p &= ||(g-s)1_{g\neq s}||_p \\ &\leq ||2||s||_\infty 1_{g\neq s}||_p \\ &= 2||s||_\infty ||1_{g\neq s}||_p \\ &\leq 2||s||_\infty \epsilon^{1/p}. \end{aligned}$$

■3.16 $C_0(X)$

■3.17 $C_0(X)$ は sup ノルム下で $C_c(X)$ の完備化

参考文献

[1] a