《Walter Rudin: Real and Complex Analysis》読書記録

最終更新: 2023 年 12 月 3 日

注意: 記述の正確性は保証しません．ややこしいことになりたくないので，本文の引用は最小限にしています．? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています．

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
1	1	a	a

1. Abstract Integration

The Concept of Measurability

topological space, open set, continuous function の関係は, measurable space, measurable set, measurable function の関係に似ている．このことを強調していくらしい．

■1.3 Definition: measurable space/measurable set/measurable function

■1.5 Proposition: $f : X \to Y$ **連続** $\iff$ **任意の点** $x \in X$ **で** f **連続**

■1.7 Theorem: **連続関数の連続関数は連続/可測関数の連続関数は可測**

■1.8 Theorem: **1.7 の引数 2 次元バージョン**　複素関数や, 和/積に関する可測性を示すのに使う．

■1.9 **シンプルな関数演算で可測性が保たれること．基本的な関数の可測性．** (e) はじめから $\alpha(x)$ を 4 行目のように定義したいところだが, 可測性が全く見えな

いので, 見えるような表式を採用している. E の可測性: f の可測性と, $\{0\}$ は Euclid 位相で閉集合ゆえ $E^c = \{x : f(x) \neq 0\}$ は可測. よって E も可測.

■1.10 Theorem: **集合族 $\mathcal{F}$ から生成される** σ-algebra

■1.11 Borel Sets　1.10 で $\mathcal{F}$ を top. sp. X の開集合族にとったときのそれを Borel sets という. $X \to Y$ 連続 $\Longrightarrow$ $X \to Y$ Borel measurable をすぐ納得できないと理解が怪しいよ.

■1.12 Theorem: Borel measurable **に関するいろいろ**　X が測度空間, Y が位相空間, f が一般の写像. (d) が 1.7(b) の拡張になっていて重要なのだと思う. (b) も measurable function の定義が強くなっている.

■1.14 Theorem: $\sup$, $\limsup$ **で可測性が保たれる**

■1.16 Definition: **単関数**

■1.17 Theorem: **可測関数は単関数の下からの極限でかける**

■1.18 Definition: **測度**

■1.22 ∞ **の演算規則**　$0 \cdot \infty = 0$ をしておくと主張が統一的にかける.

Integration of Positive Functions

■1.23 Definition: **正の可測関数の積分の定義**　単関数の積分をまず定義し, f の積分を, $f \geq s$ なる単関数 s の積分たちの sup として定義する:

$$\int_E f d\mu = \sup \int_E s \ d\mu. \tag{1}$$

■1.25 Proposition: **積分範囲を足算する, 和の積分は積分の和 単関数バージョン**

■1.26 Lebesgue's Monotone Convergence Theorem

■1.27 **和の積分は積分の和, 一般の非負可測関数バージョン**

■1.28 Fatou's Lemma

■1.29 ちょっとした測度変換

Integration of Complex Functions

■1.40 任意の領域で f の平均取って S に入ってるなら、f は a.e. S に入ってる

2. Positive Borel Measures

Topological Preliminaries

最終目的は Urysohn's Lemma を証明すること．それに用いる道具: 定理 2.7, lower/upper semicontinuous の概念.

The Riesz Representation Theorem

■定理 2.14 The Riesz Representation Theorem

Regularity Properties of Borel Measures

■2.15 Borel measure

参考文献

[1] a