

問題 1

(1)

赤玉のほうが多く取り出されたので、赤玉が多く入っているほうの箱を選んで取り出した可能性が高いことが直感的にわかります。よって答は $1/2$ より大きいはずですが、選択肢は全て $1/2$ より大きい数でした... 真面目に計算しましょう。

(3)

共分散は負になるはずですが、なぜなら、 $X_1 + X_2 + X_3 = 10$ という制約のもとでは X_2 が大きいほど X_3 は小さくなりやすいからです。逆も然りです。

(4)

平均と分散は計算不要です。本番ではここを 3 分程度で突破でき、合格に大きく近づいたと思います。

平均: まず次元を見ると (たとえば X と Y の単位が cm だとすると平均値の次元は cm だから) 答えは (A)(C)(D) に絞られます。 ρ は (空気を読むと) X と Y の相関係数です。相関係数の意味を考えると、 $\rho = 0$ のとき平均は x によらず μ_2 となるはずだから、(A) は消えます。いっぽう、 $\rho > 0$ のとき X が大きいほど Y も大きくなりやすいはずですが (正の相関)。ゆえに $\rho > 0$ のときは x が増えると Y の平均値は大きい側にシフトするはずですが、以上より答えは (C) です。

分散: $\rho = 0$ のとき分散は σ_2^2 のはずだから、答えは (D) です。

(9)

ここも計算不要です。問題文の $N > n$ は誤答選択肢がバレないための形式的なものなので、 $N = n$ を許して考えるとよいです。

1. $N = n = 2$ であきらかに X_1 と X_2 の相関係数は -1 なので、答えは (G) です。
2. $N = n$ は壺の中身をすべて取り出すという意味なので、このとき \bar{X} の分散はゼロです。以上より答えが (A)(C) に絞られますが、 $n = 1$ のとき \bar{X} の分散は母分散と一致するので (そもそもこれが母分散の定義)、答えは (A) になります。
3. $N = n$ のとき S^2 が確率 1 で母分散に等しくなることより答えは (D) です。 $n = 1$ のとき $X_1 - \bar{X} = 0$ ゆえ S^2 の期待値が 0 になることも矛盾しません。

参考文献

[1] 問題 <https://www.actuaries.jp/lib/collection/>