

河澄響矢『トポロジーの基礎（上）』読書記録

最終更新: 2022 年 9 月 21 日

注意: 記述の正確性は保証しません。ややこしいことになりたくないの、本文の引用は最小限にしています。

誤植と思われるもの (2022/6/15 初版第 1 刷)

頁	行	誤	正
20	1	$f_{\#} :=$	$f_* :=$
32	7	$; X \rightarrow X$	$: X \rightarrow X$
51	4	$\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}V$	$\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow V$
85	5	$\partial_{n-1} : C'_{n-1} \rightarrow C'_{n-2}$	$\partial'_{n-1} : C'_{n-1} \rightarrow C'_{n-2}$
87	1	$\partial_{n+1}(C''_{n+1})$	$\partial''_{n+1}(C''_{n+1})$
105	2	$\beta_{\sigma} \text{Sd}_n(\partial_n \sigma)$	$\beta_{\sigma} \text{Sd}_{n-1}(\partial_n \sigma)$
107	-8	$\partial_{n-1}(\sigma)$	$\partial_n(\sigma)$
118	11	$f \circ p \simeq f \circ p'$	$f \circ p \simeq f' \circ p$
119	8	$p \circ 1_{S^1} = \varphi_1 \circ \varphi_1$	$1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$
121	11	I の閉集合	I の開集合
121	11	$F(x, 0) = F'(x, 0) = 0$	$F(x, 0) = F'(x, 0)$
121	-4	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset W_i$	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset \overline{F}^{-1}(W_i)$
133	2	$l_1 = \alpha \circ \lambda_1$ および $l_2 = \alpha \circ \lambda_2$	$l_1 = \beta \circ \lambda_1$ および $l_2 = \beta \circ \lambda_2$
137	-8	準同型定理により	補題 A.3.3 により
144	10	$\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$	$X_n := \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$
146	4	$1 \leq i \leq n$	$1 \leq i \leq g$
153	-11	$1 - \theta_{\#} \partial_1$	$1 + \theta_{\#} \partial_1$
153	-9	(全体)	0 と 1 を入れ替える.
153	-7	$[u - 0]$	$[u + 0]$
169	4	$(X, A; M)$	(X, A)
169	4	$(X_{\lambda}, A \cap X_{\lambda}; M)$	$(X_{\lambda}, A \cap X_{\lambda})$
173	-3	$d_n \circ r$	$r \circ d_n$
174	2	$r \circ d_n$	$d_n \circ r$
176	-8	$H_n(X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$	$H_n(X, X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$
176	-10	$\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i$	$[\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i]$
180	-2	$U_i \subset X$	$U_i^{\text{open}} \subset X$
200	8	(3.2.1)	(4.1.3)
205	-11	$\{z_n = 0\} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$	$\{z_n \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$
207	9	Hausdorff	Hausdorff
208	1	$(\varphi_{\lambda}(y), t)$	$\varphi_{\lambda}(y)$

第1章

■4,4 (A_i に入っている) 相対位相の定義より, $f^{-1}(C)$ は Y の閉集合.

■9,6 接着空間 $C \cup_g B$ の絵を描いた (図1) .

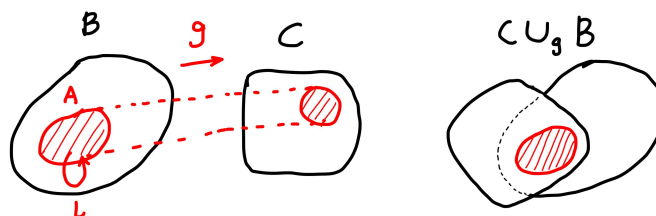


図1 接着空間 $C \cup_g B$.

■10,6 (自然な写像 $\coprod_{i=1}^n A_i \rightarrow Y$ が等化写像であること) 部分集合 $O \subset Y$ が $p^{-1}(O) = \coprod (O \cap A_i) \stackrel{\text{close}}{\subset} \coprod A_i$ を満たすと仮定する. 任意の i で $O \cap A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$, つまり $O \cap A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$ が成り立つ. ゆえに $O \cap (\cup A_i) = O \cap Y = O \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$ となり条件 (a) が示された.

■23,1 (定理 1.2.1 証明) 図2.

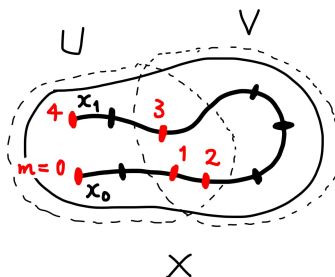


図2 x_0, x_1 が第一の部分集合から来ている場合. $N = 9, m = 4$.

■21,-8 ($\varpi_X^{-1}(\ker \varepsilon_{\pi_0(X)}) / \ker \varpi_X \cong \ker \varepsilon_{\pi_0(X)}$ がなりたつこと) 一般に $f: X \rightarrow Y$ を全射準同形, A を 0 を含む Y の部分集合とする. $f(f^{-1}(A)) = A$ (f の全射性より) と準同形定理より $f^{-1}(A) / \ker f \cong A$ がなりたつ.

■44,8 (補題 1.4.5)

1. ι が等化写像であることを示すために, ι が補題 1.1.13(a) の条件を満たすことを示す. 部分集合 $O \subset X \vee Y$ をとり, $\iota^{-1}(O) \stackrel{\text{close}}{\subset} X \coprod Y$ と仮定する. 言い換えると, $\iota^{-1}(O) = U \coprod V$, $U \stackrel{\text{close}}{\subset} X, V \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$. ι の全射性より, $O = \iota(\iota^{-1}(O)) = \iota(U \coprod V) \stackrel{\text{close}}{\subset} X \vee Y$.
2. $\iota(x_0) = (x_0, y_0) = \iota(y_0) \implies x_0 \sim y_0$ であり, 逆に ι の値が等しい点の組は (x_0, y_0) のみである. よって補題 1.1.13(a) \implies (c) より $X \vee Y$ は $X \coprod Y$ において x_0, y_0 を同一視して得られる空間と同相.
3. $(f \vee g)|_{X \times \{y_0\}} = f$ と $(f \vee g)|_{\{x_0\} \times Y} = g$ は連続写像. また $X \times \{y_0\} \stackrel{\text{close}}{\subset} \{x_0\} \times Y$ かつ $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) = X \vee Y$ であるから貼り合わせの補題が適用できて $f \vee g$ は連続.

■44,-6 余積のイメージ図を描いた (図3) .

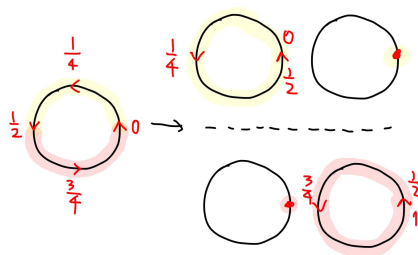


図3 余積

■44,-10 $g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$ のイメージ図を描いた (図4) .

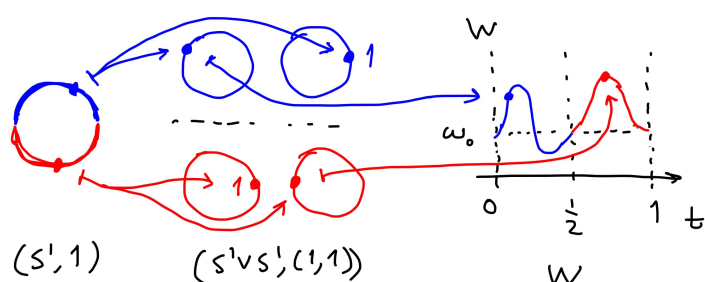


図4 $g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$ の図示.

■52,6 (命題 1.4.13) ? 表現論やってから戻ってくる.

第2章

■65,-4 ($H_0(X)$ が ∂_1 の余核であること) p_X が全射であることと, $\ker p_X = B_0(X) = \text{Im } \partial_1$ より.

■66,4 商加群の普遍性より, 以下の準同形 φ, ψ がただ一つずつ存在する:

$$\exists! \varphi : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(X), \varphi p_X = \varpi_X \varphi_{0\#}, \quad \exists! \psi : \mathbb{Z}\pi_0(X) \rightarrow H_0(X), \psi \varpi_X = p_X \varphi_{0\#}^{-1}.$$

φ, ψ は互いの逆写像になっている. 実際, $\varphi \psi \varpi_X \varphi_{0\#} = \varpi_X \varphi_{0\#}$ であることと, $\varpi_X \varphi_{0\#}$ が全射であることより $\varphi \psi = \text{id}_{\mathbb{Z}\pi_0(X)}$ である. 同様に $\psi \varphi = \text{id}_{H_0(X)}$.

■66,9 ϖ_X と p_X が自然変換であることに注意して $\varpi_Y \varphi_{0\#} f_* = \varpi_Y f_* \varphi_{0\#}$ を変形すると, $\varphi f_* p_X = f_* \varphi p_X$ を得る. p_X は全射なので $\varphi f_* = f_* \varphi$ を得る.

■75,14 プリズム分解のイメージ図を描いた (図5) .

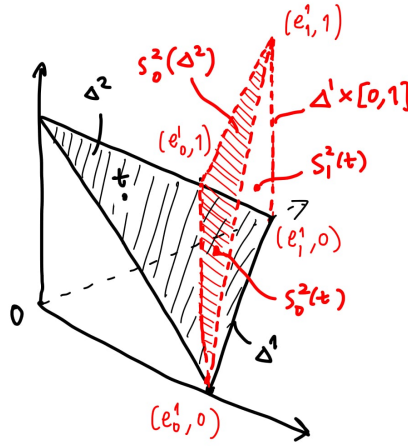


図5 プリズム分解 ($n=1, i=0$) .

■75,-3 (補題 2.2.8) 任意の $\sigma \in X^{\Delta^n}$ に対し, $(f \times 1)_* \Phi_n^X(\sigma) = \sum (-1)^i (f \times 1) \circ (\sigma \times 1) \circ s_i^{n+1} = \sum (-1)^i ((f \circ \sigma) \times 1) \circ s_i^{n+1} = \Phi_n^Y f_*(\sigma)$ であるから.

■77,8 $u \in Z_n(S_*(X))$ とすると, $u = (-1)^{n+1} \partial_{n+1} \Phi_n u + (-1)^n \Phi_{n-1} \partial_n u = \partial_{n+1} ((-1)^{n+1} \Phi_n u) \in \text{Im } \partial_{n+1}$ ゆえ $H_n(X) = 0$.

■79,7 (定理 2.2.11) ?

■99,-8 (定理 2.4.3) 補題 2.1.9 証明と類似の図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}X^{\Delta^1} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}X^{\Delta^0} & \xrightarrow{\partial_0} & \mathbb{Z} \\ \varphi_{1\#} \downarrow \sim & \circ & \varphi_{0\#} \downarrow \sim & \circ & 1_{\mathbb{Z}} \downarrow \sim \\ \mathbb{Z}X^I & \xrightarrow{D_X} & \mathbb{Z}X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{Z} \end{array}$$

より, $\ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \cong \ker \varepsilon_X / \text{Im } D_X$ を得る. 一方, 補題 1.2.10 より $\ker \varepsilon_X / \text{Im } D_X \cong \ker \varepsilon_{\pi_0(X)}$ であるから証明が完了する.

■104,-1 ($\text{mesh}(\partial_n \sigma) \leq \text{mesh}(\sigma)$ がなりたつこと) $\partial_n \sigma = \sum (-1)^i (\sigma \circ d_i^{n-1})$ を思い出す. 任意の i で $(\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1}) \subset \sigma(\Delta^n)$ ゆえ $\delta((\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1})) \leq \delta(\sigma(\Delta^n))$ であることと, mesh の定義より従う.

■105,-3 ? なぜ $(\text{Sd}_n)^m(\sigma) = \sigma_*(\text{Sd}_n)^m(1_n)$?

■107,1 ? なぜ $m(\sigma \circ d_i^{n-1}) \leq m(\sigma)$?

■102,-4 (重心細分の計算)

• ω_1 の計算

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \beta_{1_1}((d_0^0)_* \omega_0) - \beta_{1_1}((d_1^0)_* \omega_0) \\ &= \beta_{1_1}(d_0^0) - \beta_{1_1}(d_1^0) \\ &= (e_{01}e_1) - (e_{01}e_0) \quad ((e_0 + e_1)/2 := e_{01}, \text{以下同様}). \end{aligned}$$

• ω_2 の計算

$$\begin{aligned} \omega_2 &:= \beta_{1_2}((d_0^1)_* \omega_1) - \beta_{1_2}((d_1^1)_* \omega_1) + \beta_{1_2}((d_2^1)_* \omega_1) \\ &= \beta_{1_2}((e_{12}e_2) - (e_{12}e_1)) - \beta_{1_2}((e_{20}e_2) - (e_{20}e_0)) + \beta_{1_2}((e_{01}e_1) - (e_{01}e_0)) \\ &= (e_{012}e_{12}e_2) - (e_{012}e_{12}e_1) - (e_{012}e_{20}e_2) + (e_{012}e_{20}e_0) + (e_{012}e_{01}e_1) - (e_{012}e_{01}e_0). \end{aligned}$$

まとめると, 図 6 のようになる.

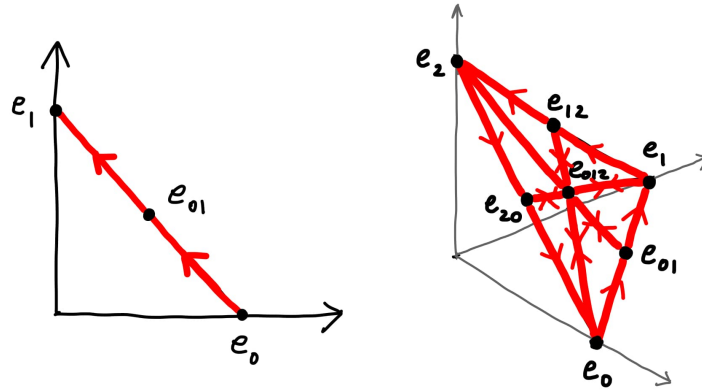


図 6 左: ω_1 のイメージ図, 右: ω_2 のイメージ図.

第 3 章

■118,-2 (回転数 τ の定義) 混乱してしまった. 写像度 \deg の定義域は $(S^1, 1)$ から $(S^1, 1)$ への連続関数の集合であるから, 回転数 τ の定義を標準射影 π を用いて以下のように修正する:

$$\tau : \pi_1(S_1, 1) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} [(S^1, 1), (S^1, 1)] \xrightarrow{\pi^{-1}} (S^1, 1)^{(S^1, 1)} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

写像度のホモトピー不変性により τ は well-defined.

■119,7 (τ が群の準同型であること) $[l_1], [l_0] \in \pi_1(S^1, 1)$ をとると,

$$\begin{aligned} \tau([l_1] \cdot [l_0]) &= \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1}([l_1] \cdot [l_0]) \\ &= \deg([\overline{l_1 \cdot l_0}]) \quad (\overline{l_1 \cdot l_0} \circ p = l_1 \cdot l_0. \text{ cf. 補題 3.1.7}) \\ &= \deg([l_1 \cdot_{(1.4.2)} \text{の意味 } l_0]) \\ &= \deg[l_1] + \deg[l_0] \quad (\text{補題 1.4.4}) \\ &= \tau([l_1]) + \tau([l_0]) \end{aligned}$$

となるから τ は群の準同型. 以下, τ のホモトピー不変性を理由に記号を濫用して $\tau([l])$ を $\tau(l)$ と書いているみたい.

■119,8 ($\tau(l_0) = \deg(\varphi_1) = 1$) 直前の式がよく分からなかったけど, こういうことかな: $l_0 = p = 1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$ ゆえ $[l_0] = p^*[\varphi_1]$ だから, $\tau(l_0) = \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1} \circ p^*([\varphi_1]) = \deg(\varphi_1) = 1$.

■128,-9 ($\alpha^{-1} = (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1}$ がなりたつこと)

$$\begin{aligned} (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] &= (\Pi F \circ (l \times 1_I))([j_0]^{-1} \cdot [j_0]) \\ &= (\Pi F \circ (l \times 1_I))[c_{(0,0)}] \quad (\text{cf. p.125,1.2}) \\ &= [F \circ (l \times 1_I) \circ c_{(0,0)}] \\ &= [c_{x_0}] = e_{x_0}. \end{aligned}$$

同様に $(\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} = e_{x_0}$ も成立する.

van Kampen の定理の証明

■139,-4 (P が l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合していること) l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合している分割 P の例を図 7 に示した.

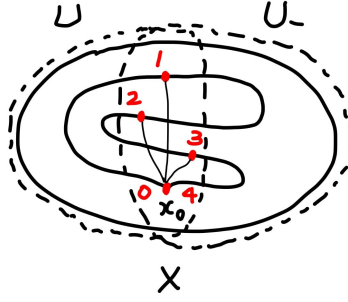


図7 l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合している分割 P の例.

■142,-9 $I \times I$ の開集合 $L^{-1}((U_+)^{\circ})$ と $L^{-1}((U_-)^{\circ})$ を図8に示した.

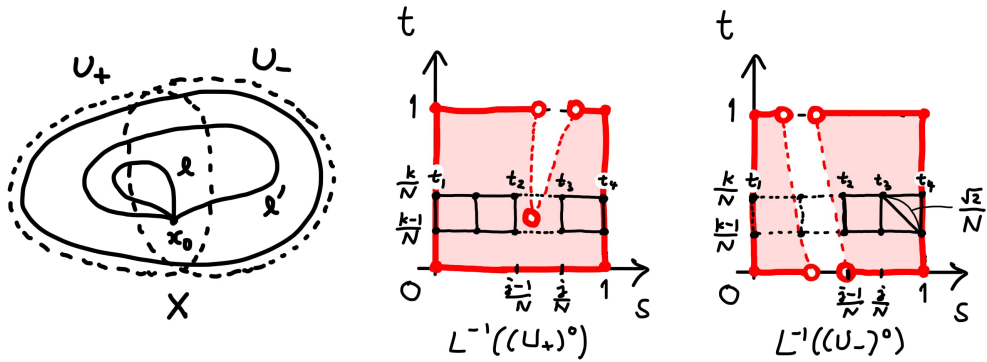


図8 $I \times I$ の開集合 $L^{-1}((U_+)^{\circ})$ と $L^{-1}((U_-)^{\circ})$.

■143,-10 $l_{k-1}^{P_{k,j}} = \alpha_j^{-1} l_k^{P_{k,j}} \alpha_{j-1}$ が成り立つ様子を図9に示した.

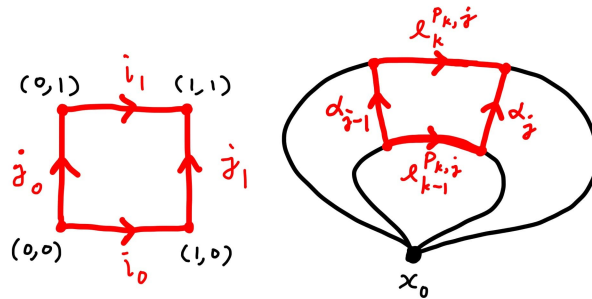


図9 $l_{k-1}^{P_{k,j}} = \alpha_j^{-1} l_k^{P_{k,j}} \alpha_{j-1}$.

■144,-7 ? $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_s\} \simeq U$ を直接示すのは難しいのだろうか. (考えてない)

■145,-8 (曲面群の話) ? 基本群の表示が分かってないので後回しにする.

■148,11 (式 (3.3.1)) 式 (1.4.4) の両辺に $p^*[\cdot]$ を作用した後,

$$\begin{aligned} p^*[f] \cdot p^*[g] &= [f \circ p] \cdot [g \circ p] \\ &= [(f \circ p) \cdot (g \circ p)] \quad (1.4.2) \text{ の積} \cdot \\ &= [(f \cdot g) \circ p] \quad (3.1.2) \text{ の積} \cdot \\ &= p^*[f \cdot g] \end{aligned}$$

を用いる.

■150,1 ($h_\alpha(e_{x_0}) = 0$ であること)

$$\begin{aligned} h_\alpha(e_{x_0}) &= c_{x_0,*}([\tilde{\alpha}]) \quad ([\tilde{\alpha}] := \alpha, \tilde{\alpha} := \sum_l a_l \sigma_l \in Z_q(Z), a_l \in \mathbb{Z}, \sigma_l \in Z^{\Delta^q}) \\ &= [c_{x_0,*}(\tilde{\alpha})] \\ &= \left(\sum_l a_l \right) [\tilde{c}_{x_0}] \quad (\tilde{c}_{x_0} : \Delta^q \rightarrow X, x \mapsto x_0 \text{ (定値写像)}) \\ &= 0 \quad (\tilde{c}_{x_0} \in Z_q(\{x_0\}) \subset B_q(\{x_0\}) \subset B_q(X)). \end{aligned}$$

■151,-10 (ホモロジー類 $[p]$ が定義できること) 上述の同一視 $\Delta^1 \approx I_1, \Delta^0 \approx *$ のもとで, $\partial_1 p = p(1) - p(0) = 1 - 1 = 0$ より従う.

■152,11 x_0 を基点とするループ $\theta(l(1)) \cdot (l \cdot \theta(l(0))^{-1})$ の例を図 10 に示した.

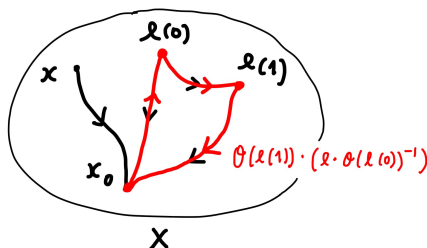


図 10 x_0 を基点とするループ $\theta(l(1)) \cdot (l \cdot \theta(l(0))^{-1})$.

■152,-3 $(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \rightarrow X \text{ rel } \partial$ が成り立つ様子を図 11 に示した.

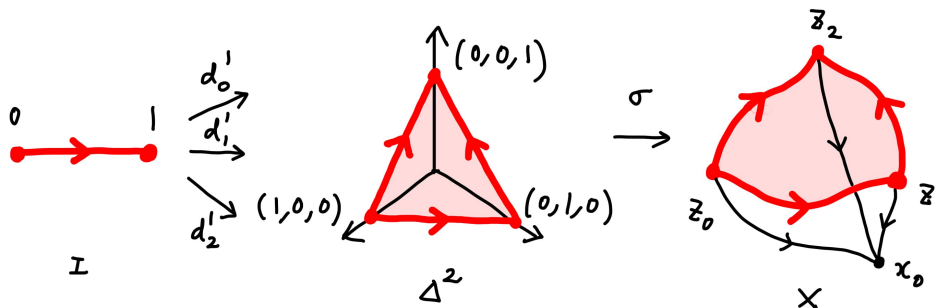


図 11 $(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \rightarrow X \text{ rel } \partial$.

■153.-9 ?

■154,-9 ?

第 4 章

■159,-11 (j_* がチェイン写像であること) $\partial_n j_*(u) = \partial_n(u + i_* S_n(A)) = \partial_n u + i_* S_{n-1}(A) = j_* \partial_n(u)$.

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{j_*} & S_n(X, A) \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & S_{n-1}(X, A) \end{array}$$

■160,-8 ($H_0(X, A) = 0$ であること) 完全性と i_* の全射性より $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_0(X)$ であるから j_* は零写像. j_* の全射性 $\text{Im } j_* = H_0(X, A)$ とあわせて $0 = \text{Im } j_* = H_0(X, A)$.

■160,-2 ? 最後の i_* はどういう写像?

■166,3 (\bar{F} が連続であること) $\bar{F} \circ (p|_U \times 1_{[0,1]}) = p \circ F$ である. 右辺が連続写像であることと $p|_U \times 1_{[0,1]}$ が等化写像であることより補題 1.1.13(b) が使えて \bar{F} は連続写像.

■167-1 $p \in X$ のまわりで定義された X の座標近傍 (U, φ, V) のイメージ図を描いた (図 12) .

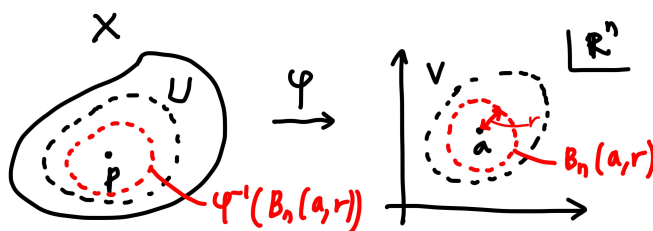


図 12 $p \in X$ のまわりで定義された X の座標近傍 (U, φ, V) .

■167,4 (集合の包含関係について)

1. $B_n(a, r) \subset \overline{B_n(a, r)}$ より $X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_n(a, r)}) \subset X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r))$. $X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r)) \overset{\text{close}}{\subset} X$ であるから $X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_n(a, r)}) \subset X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r))$.
2. $\varphi^{-1}(B_n(a, r)) \ni p$.
3. X は Hausdorff なので $\{p\} \overset{\text{close}}{\subset} X$.

■172,10 (空間の三対 (X, A, A') の連結準同型の自然性) 4.4.1 節で用いる. 以下のように定式化しておく. 連続写像 $f: (X, A, A') \rightarrow (Y, B, B')$ について図式

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A, A') \\ f_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B, B') \end{array}$$

は可換.

■172,-3 (系 4.1.11) 補題 4.1.1 と同相 $D^n \approx \Delta^n$, $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$ より

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial \Delta^{n+1}) \overset{\partial_*}{\cong} H_n(\partial \Delta^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$$

であるから, $H_n(\partial\Delta^{n+1})$ の生成元は $H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1})$ の生成元 $[1_{n+1}]$ を ∂_* で写した $[\partial 1_{n+1}]$ である. (cf. p.160, 1.4)

■180,-5 ($f^{-1}(q)$ が有限集合であること)

1. Y の Hausdorff 性より $\{q\} \overset{\text{close}}{\subset} Y$.
2. f の連続性と 1. より $f^{-1}(q) \overset{\text{close}}{\subset} X$.
3. f の局所同相性より $f^{-1}(q)$ は離散的.
4. X のコンパクト性と 2. より補題 A.1.7 が使えて $f^{-1}(q) \subset X$ はコンパクト.
5. p.268, 1.12 と 3., 4. より $f^{-1}(q)$ は有限集合.

■181,2 (ι_* が同型であること) 定理 4.1.9 (5) より

$$\bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus \{p_i\}) = H_n\left(\bigcup_{i=1}^m U_i, \bigcup_{i=1}^m U_i \setminus f^{-1}(q)\right).$$

ここで

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) = \overline{X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right)} \subset (X \setminus f^{-1}(q))^\circ = X \setminus f^{-1}(q)$$

が成り立つから切除定理が使える. よって ι_* は同型.

■184,5 ($B_n(x, r)$ の上で $\deg_x f$ が一定であること) ?

■185,14 (可換図式がなりたつこと, $S_{c*}\mu_x = \mu_{x+c}$ がなりたつこと) ? そうっぽい感じはするけど厳密にできてない. 所々で同一視が行われていて混乱している.

■187,2 (補題 4.2.11 証明)

- 線形同型 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を $A = (g(e_1), \dots, g(e_n))$ とすればよい.
- p.186, 1.-12 と g の定義より

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) &= (\text{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(e_0), \dots, f(e_n) - f(e_0)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(b), \dots, f(e_n) - f(b)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(b), \dots, g(e_n) - g(b)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(e_0), \dots, g(e_n) - g(e_0)) \\ &= \varepsilon(g). \end{aligned}$$

- $g(b) = 0$ だから, $0 = g(b) = \frac{1}{n+1}g(e_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n g(e_k)$ すなわち $g(e_0) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$. いっぽう, $\iota_n(e_0) = (-1, \dots, -1)^\top \in \mathbb{R}^n$ だから $A(\iota_n(e_0)) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$. 以上より, $A(\iota_n(e_0)) = g(e_0)$.

■188,8 $\overline{f_z} = \overline{f_z}, \overline{f_{\bar{z}}} = \overline{f_z}$ に注意.

■196,10 (補題 4.3.1(0))

- N' の生成系を $\{x'_1, \dots, x'_{n'}\}$, N'' の生成系を $\{x''_1, \dots, x''_{n''}\}$ とおく.
- g が全射の場合: N の有限部分集合であって, その g による像が N'' の生成系となるものを \tilde{N} とおく. 任意の $x \in N$ をとる. $g(x) = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x''_i$ とかけることと, 各 $1 \leq i \leq n''$ に対し $x_i \in \tilde{N}$ があって $g(x_i) = x''_i$ となることより $g(x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i) = 0$ すなわち $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i \in \ker g = \text{Im } f$ がなりたつ. ゆえに $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i = f\left(\sum_{j=1}^{n'} a'_j x'_j\right) = \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$ となり結局 $x = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i + \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$ を得る. これは N が有限生成であることを示している.

- g が一般の場合:

– 部分加群 $g(N) \subset N''$ が有限生成であることを示せばよいこと: 任意の $x \in N$ をとる. $g(N)$ が有限生成であるから $x_i \in N, 1 \leq i \leq n_{g(N)}$ を用いて $g(x) = \sum_{i=1}^{n_{g(N)}} a_i'' g(x_i)$ とかける. $x - \sum a_i'' x_i \in \ker g$ と $\text{Im } f = \ker g$ より $f\left(\sum_{j=1}^{n'} a_j' x_j'\right) = x - \sum a_i'' x_i$ つまり $x = \sum a_i'' x_i + \sum_{j=1}^{n'} a_j' f(x_j')$. これは N が有限生成であることを示している.

- ? これ以降わからない. 行間広すぎ~

■202,3 ($\chi(P) = -1$ となること)

1. $P \simeq P \setminus \partial P$ より $\chi(P) = \chi(P \setminus \partial P)$.
2. S^2 から取り除いた 3 つの 2 次元閉円板を $D_i^2, i = 1, 2, 3$ とおくと, $\chi(S^2) \stackrel{(4.2.5)}{=} \chi(S^2 \setminus \cup_{i=1}^3 \partial D_i^2) = \chi(P \setminus \partial P) + 3\chi(*)$.

1., 2. より $\chi(P) = \chi(P \setminus \partial P) = \chi(S^2) - 3\chi(*) = 2 - 3 = -1$ がなりたつ.

■203,12 ($\varphi(D^m) = \bar{e}$ がなりたつこと) 一般に $\varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) \subset \bar{e}$. すでに示した $\varphi(D^m) \supset \bar{e}$ と $D^m = \varphi^{-1}(\bar{e})$ を用いると, $\varphi(D^m) = \varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) \supset \bar{e}$. あわせて $\varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) = \bar{e}$. ゆえに $\varphi(D^m) = \bar{e}$ がなりたつ.

■204,-3 ($\varphi_\lambda^{-1}(C)$ の φ_λ による像が $C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$ となること) $\varphi_\lambda(D^{n_\lambda}) \stackrel{(203,12)}{=} \overline{e_\lambda}$ ゆえ $\varphi_\lambda^{-1}(C) = \varphi_\lambda^{-1}(C \cap \overline{e_\lambda})$ であるから, $\varphi_\lambda\varphi_\lambda^{-1}(C) = C \cap \overline{e_\lambda} = C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$ がなりたつ.

■207,-10 変位レトラクト F の図を描いた (図) .

■207,-3 (F の連続性が $F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]})$ の連続性からしたがうこと)

$$\begin{aligned} F \text{ が連続} &\iff \forall O \subset^{\text{open}} X^{(k)} \setminus \Phi(S), F^{-1}(O) \subset^{\text{open}} \left(X^{(k)} \setminus \Phi(S) \right) \times [0, 1]. \\ &\iff \forall O \subset^{\text{open}} X^{(k)} \setminus \Phi(S), \forall \lambda \in \Lambda, (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]})^{-1} \circ F^{-1}(O) \subset^{\text{open}} D^{n_\lambda}. \quad (\text{補題 4.3.6(4) より}) \\ &\iff \forall \lambda \in \Lambda, F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]}) \text{ が連続.} \end{aligned}$$

■211,14 ($|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ となること) $|K|$ の定義より $|K| = \cup_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ である. さらに $\sigma \neq \sigma'$ のとき $\sigma(x) = \sigma$ と $\sigma(x) = \sigma'$ が同時になりたつことはないから $e_\sigma \cap e_{\sigma'} = \emptyset$. ゆえに $|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ がなりたつ.

■212,8 ($\varphi_\sigma \circ d_i$ は $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$ の定める胞体の特性写像であること) $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$ の定める特性写像 φ は

$$\varphi: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^N, (t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$$

で定義される. 一方, $\varphi_\sigma \circ d_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = \varphi_\sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) = t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$ であるから φ は $\varphi_\sigma \circ d_i$ に等しい.

■216,5 周辺 $\ker \partial_q \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)}), \text{Im } \partial_* \cong \text{Im } \partial_{q+1}$ により,

$$H_q(X) \cong H_q(X^{(q+1)}, X^{(q-2)}) \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)}) / \text{Im } \partial_* \cong \ker \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1} = H_q(C_*(X))$$

がなりたつ.

参考文献

- [1] 河澄響矢『トポロジーの基礎 (上)』第 1 刷