
Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 11 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

確率論の復習 [1]

確率空間を作る

- 抽象空間 Ω[*1] と σ-field[*2] $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ の組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を **可測空間** という.
- 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度[*3]で $P(\Omega) = 1$ をみたすものを **確率測度** という.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を **確率空間** という. $\mathcal{F}$ は確率を測ることができる事象の集まり. 情報量とみなせる.

測度 0 集合に関する用語

- 事象 $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) = 1$ をみたすとき, A が **ほとんど確実に** 起こるといい, A a.s. とかく.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ が **完備** とは, 零集合の部分集合がすべて可測のときにいう.
- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ からその完備な拡張である **完備化** $(\Omega, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{P})$ を構成できる.

確率変数

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$: 確率空間, $(S, \mathcal{S})$: 可測空間. $X = X(\omega)$ が **$\mathcal{S}$-値確率変数** であるとは, $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (S, \mathcal{S})$ が可測写像である[*4]ときにいう.
- 写像 X が確率変数であることと同値な条件としては $\forall a \in \mathbb{R}, \{X \leq a\} \in \mathcal{F}$ などがある[*5].
- X が確率変数になるような最小限の $\mathcal{F}$ が作れる: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_X := \{X^{-1}(A); A \in \mathcal{S}\}$ とすればよい. $\mathcal{F}_X$ を **確率変数 X が生成する σ-field** といい, $\sigma(X)$ とかく.

分布

- 確率変数 X の **分布, distribution** とは $P_X(A) = P(X^{-1}(A))$ によって定義される $(S, \mathcal{S})$ 上の確率測度 P_X のことをいう.[*6]
- μ を $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 上の確率測度とするとき, $F(x) := F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$ を μ の **分布関数** という.
- X を確率変数とするとき, その分布 P_X の分布関数 F_X を **X の分布関数** という. つまり $F_X(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}$ である.

[*1] ただの集合. なんの構造ももたない.

[*2] 3 条件: (1) $\Omega \in \mathcal{F}$. (2) 補集合で閉じている. (3) 加算和で閉じている.

[*3] σ-additivity: A_n たちが互いに交わらないとき $P(\cup_n A_n) = \sum_n P(A_n)$ をみたす $P : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ を**測度**というのだった.

[*4] $\mathcal{S}$ に属する集合の逆像が $\mathcal{F}$ に属する.

[*5] $\{X \leq a\}$ は基本的な事象であり, 当然その確率が定義されることが望まれる. 確率が定義できるためには, それは $\mathcal{F}$ に属さねばならない. 確率変数とは, そのような望ましい性質をもつ関数である.

[*6] 確率変数の分布に着目するという立場からいえば, 確率空間のとりかたには任意性がある. Ω 自身がそれほど重要で積極的な意味をもつわけではない: 確率空間 Ω を区間 $(0, 1)$ にとりかえて, 同じ分布をもつように確率変数を再構成することが可能である.

期待値

- **期待値** $E[X]=\int_\Omega X(\omega)P(d\omega)$[*7]. 事象 A 上に限るとき $E[X,A]:=\int_A X(\omega)P(d\omega)=E[X\cdot 1_A]$.

不等式

- **Chebyshev** $P(|X|>\epsilon)\le \frac{1}{\epsilon^p}E[|X|^p]$.
- **Jensen** $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$: 下に凸. $\psi(E[X])\le E[\psi(X)]$.
- **Hölder** $1<p,q<\infty$ が $1/p+1/q=1$ をみたすとき, $|E[XY]|\le E[|X|^p]^{\frac{1}{p}}E[|Y|^q]^{\frac{1}{q}}$.
- **Schwarz** Hölder で $p=q=2$ とおく.

期待値と極限操作の交換

- **Lebesgue's convergence theorem** $X_n\to X(a.s.)$ かつ非負確率変数 Y で可積分なものが存在し $\forall n, |X_n|\le Y$ をみたすならば $\lim_n E[X_n]=E[X]$.
- **monotone convergence theorem** $0\le X_1\le X_2\cdots$ かつ $X_n\to X(a.s.)$ ならば $\lim_n E[X_n]=E[X]$.
- **Fatou's lemma** $X_n\ge 0$ ならば $E[\liminf_n X_n]\le \liminf_n E[X_n]$.

いろいろな収束

1. **a.s. convergence** $X_n(\omega)\to X(\omega)$ a.s. つまり $P(\lim_n X_n=X)=1$.
2. **convergence in probability** 任意の $\epsilon>0$ に対して $\lim_n P(|X_n-X|>\epsilon)=0$.
3. **convergence in the mean of order** p $p\ge 1$ に対し $\lim_n E[|X_n-X^p|]=0$.
4. **convergence in law/distribution** 任意の $f\in C_b(\mathbb{R})$ に対して $\lim_n E[f(X_n)]=E[f(X)]$[*8].

$1\implies 2, 3\implies 2, 2\implies 4$. **一様可積分** というを導入すると逆向きの矢印が成り立つようになったりする.

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10（def.1.3 $\implies$ def.1.1 $\implies$ def.1.2 **がなりたつこと**）

- 1.3 $\implies$ 1.1: 任意の $s\in[0,\infty)$ に対し明らかに $P[X_t=Y_t;\forall t\in[0,\infty)]\le P[X_s=Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t=Y_t;\forall t\in[0,\infty)]=1\implies \forall t\in[0,\infty), P[X_t=Y_t]=1$, つまり 1.3 $\implies$ 1.1.
- 1.1 $\implies$ 1.2: 不等式 $|P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A]-P[(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in A]|\le 2P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\ne(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})]$ を示す. 1.1 を仮定して不等式を用いれば, $|P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\in A]-P[(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})\in A]|\le 2P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n})\ne(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})]\le\sum_{i=1}^n P(X_{t_i}\ne Y_{t_i})=0$ から 1.2 を得る. では不等式を示す. $\mathbf{X}=(X_{t_1},\dots,X_{t_n}),\mathbf{Y}=(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}|P[\mathbf{X}\in A]-P[\mathbf{Y}\in A]| &= |P[(\mathbf{X}\in A)\cap(\mathbf{X}=\mathbf{Y})]+P[(\mathbf{X}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]\\ &\quad -P[(\mathbf{Y}\in A)\cap(\mathbf{X}=\mathbf{Y})]|-P[(\mathbf{Y}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]|\\ &= |P[(\mathbf{X}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]-P[(\mathbf{Y}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]|\\ &\le P[(\mathbf{X}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]+P[(\mathbf{Y}\in A)\cap(\mathbf{X}\ne\mathbf{Y})]\\ &\le 2P[\mathbf{X}\ne\mathbf{Y}]\end{aligned}$$

[*7] 可積分のとき.
[*8] $(X_n), X$ の分布のみによって定まる概念だから, これらは必ずしも同一の確率空間で定義されている必要はない.

より示された. 他の導出法については [2] を参照.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] https://math.stackexchange.com/questions/1613202/if-one-stochastic-process-is-a-modification-of-anc