河澄響矢 著『トポロジーの基礎（上）』読書記録

最終更新: 2022 年 10 月 9 日

注意: ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの（2022/6/15 初版第 1 刷）

頁	行	誤	正
20	1	$f_\sharp := (f_*)_\sharp$	$f_* := (f_*)_\sharp$
32	7	$i \circ r \simeq 1_X; X \to X$	$i \circ r \simeq 1_X : X \to X$
51	4	$\mathbb{R}P^{n-1} \to \mathbb{R}V$	$\mathbb{R}P^{n-1} \to V$
85	5	$\partial_{n-1} : C'_{n-1} \to C'_{n-2}$	$\partial'_{n-1} : C'_{n-1} \to C'_{n-2}$
87	1	$\partial_{n+1}(C''_{n+1})$	$\partial''_{n+1}(C''_{n+1})$
105	2	$\beta_\sigma \mathrm{Sd}_n(\partial_n \sigma)$	$\beta_\sigma \mathrm{Sd}_{n-1}(\partial_n \sigma)$
107	-8	$\partial_{n-1}(\sigma)$	$\partial_n(\sigma)$
118	11	$f \circ p \simeq f \circ p'$	$f \circ p \simeq f' \circ p$
119	8	$p \circ 1_{S^1} = \varphi_1 \circ \varphi_1$	$1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$
121	11	I の閉集合	I の開集合
121	11	$F(x,0) = F'(x,0) = 0$	$F(x,0) = F'(x,0)$
121	-4	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset W_i$	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset \overline{F}^{-1}(W_i)$
133	2	$l_1 = \alpha \circ \lambda_1$ および $l_2 = \alpha \circ \lambda_2$	$l_1 = \beta \circ \lambda_1$ および $l_2 = \beta \circ \lambda_2$
137	-8	準同型定理により	補題 A.3.3 により
144	10	$\mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$	$X_n := \mathbb{C}\backslash\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$
146	4	$1 \leq i \leq n$	$1 \leq i \leq g$
153	-11	$1 - \theta_\sharp \partial_1$	$1 + \theta_\sharp \partial_1$
153	-9	（全体）	0 と 1 を入れ替える.
153	-7	$[u - 0]$	$[u + 0]$
169	4	$(X, A; M)$	(X, A)
169	4	$(X_\lambda, A \cap X_\lambda; M)$	$(X_\lambda, A \cap X_\lambda)$
173	-3	$d_n \circ r$	$r \circ d_n$
174	2	$r \circ d_n$	$d_n \circ r$
176	-8	$H_n(X\backslash\{p\}) \cong \mathbb{Z}$	$H_n(X, X\backslash\{p\}) \cong \mathbb{Z}$
176	-10	$\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i$	$[\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i]$
180	-2	$U_i \subset X$	$U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$

頁	行	誤	正
200	8	(3.2.1)	(4.1.3)
205	-11	$\{z_n = 0\} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$	$\{z_n \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$
207	9	Hausodorff	Hausdorff
208	1	$(\varphi_\lambda(y), t)$	$\varphi_\lambda(y)$
219	-2	$k = 1$ のとき $\mathbb{Z}$	$k = 1$ のとき $\mathbb{Z}^2$
220	4	胞対複体	胞体複体
222	-6	$\gamma(p_-) = p_+$	$\gamma_k(p_-) = p_+$
230	8	$u' := [z]$	$u' := [z']$
231	17	$\widehat{\partial X^0}$	$\widehat{\partial X^\circ}$
232	-8	$H_{n-1}(\mathcal{D}, \mathcal{D}\backslash\{p\})$	$H_n(\mathcal{D}, \mathcal{D}\backslash\{p\})$
233	図式	$r \circ f_*$	$r_* \circ f_*$
239	-1	$X\backslash S_u$	$X^\circ\backslash S_u$
240	16-20（計 8 箇所）	X	$\widehat{X}$
241	2	$H_n(U, \widehat{O})$	$H_n(U, U \cap \widehat{O})$
? 242	-6	$(U \cap \partial X) \times [-1, 2[$	$\widehat{V}$
? 243	1	$(U \cap \partial X) \times [-1, 2[$	$\widehat{V}$
243	12	$\widehat{X} = \widehat{X}_{\alpha_1}$	$\widehat{X} = \widehat{X}_{\alpha_0}$
? 243	-9	$(x, t) \in (U \cap \partial X) \times [-1, 2[$	$(x, t) \in \widehat{V}$
? 243	-7	$x \in U \cap \partial X$	$x \in]-2, 2[^{n-1}$
247	-10	$p' \in X^\circ\backslash K_{\frac{1}{2}}$	$p' \in K_{\frac{1}{2}}$
248	9	胞対チェイン複体	胞体チェイン複体
248	13	同様であるが	同様であるから
249	-3	$(\phi_{p_0})^{-1}\|_{F(U_0 \times [0, \frac{1}{2}[)}$	$(\phi_{p_0})^{-1}\|_{F(U_{p_0} \times [0, \frac{1}{2}[)}$
253	-8	$f'\alpha : U_\alpha \to X$	$f'_\alpha : U_\alpha \to X$
254	13	$f_1 \| N \cup (B\backslash V_2)$	$f_1\|_{N \cup (B\backslash V_2)}$

第 1 章

■4,4（$A_i \cap f^{-1}(C) \overset{\text{close}}{\subset} Y$ であること）　$f|_{A_i}$ の連続性より $A_i \cap f^{-1}(C) \overset{\text{close}}{\subset} A_i$. A_i に入っている相対位相の定義より $f^{-1}(C) \overset{\text{close}}{\subset} Y$. 一方, 仮定より $A_i \overset{\text{close}}{\subset} Y$. 以上より $A_i \cap f^{-1}(C) \overset{\text{close}}{\subset} Y$ がなりたつ.

■9,6（接着空間）　接着空間 $C \cup_g B$ の絵を描いた（図 1）.

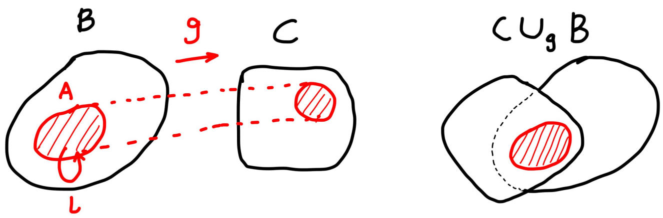

図 1　接着空間 $C \cup_g B$.

■10,3（$\varpi|_{\varpi^{-1}(V)}$ が等化写像であること）　補題 1.1.13 の条件 (a) を示す. $O \subset V$ が $\left(\varpi|_{\varpi^{-1}(V)}\right)^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} \varpi^{-1}(V)$ を充たすと仮定する. $\left(\varpi|_{\varpi^{-1}(V)}\right)^{-1}(O) = \varpi^{-1}(O) \cap \varpi^{-1}(V)$ と $\varpi^{-1}(V)$ に入っている相対位相の定義より $\varpi^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} X$. 商位相の定義より $O \overset{\text{open}}{\subset} X$. V に入っている相対位相の定義より $O \cap V = O \overset{\text{open}}{\subset} V$. 以上で条件 (a) が示された.

■10,6（自然な写像 $\coprod_{i=1}^{n} A_i \to Y$ が等化写像であること）　補題 1.1.13 の条件 (a) を示す. 部分集合 $O \subset Y$ が $p^{-1}(O) = \coprod (O \cap A_i) \overset{\text{close}}{\subset} \coprod A_i$ を満たすと仮定する. 任意の i で $O \cap A_i \overset{\text{close}}{\subset} A_i \overset{\text{close}}{\subset} Y$, つまり $O \cap A_i \overset{\text{close}}{\subset} Y$ が成り立つ. ゆえに $O \cap (\cup A_i) = O \cap Y = O \overset{\text{close}}{\subset} Y$ となり条件 (a) が示された.

■16,13　f_* が誘導する準同型 $(f_*)_\sharp$ も f_* と書いている.

■23,1（定理 1.2.1 証明）　図 2.

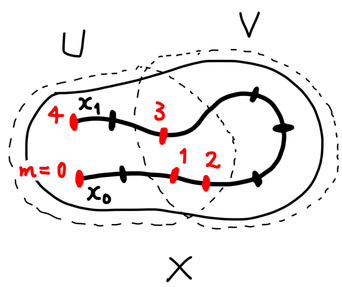

図 2　x_0, x_1 が第一の部分集合から来ている場合. $N = 9, m = 4$.

■21,-8（$\varpi_X^{-1}(\ker \varepsilon_{\pi_0(X)})/\ker \varpi_X \cong \ker \varepsilon_{\pi_0(X)}$ がなりたつこと）　一般に $f : X \to Y$ を全射準同型, A を 0 を含む Y の部分集合とする. $f(f^{-1}(A)) = A$（f の全射性より）と準同型定理より $f^{-1}(A)/\ker f \cong A$ がなりたつ.

■44,8（補題 1.4.5）

1. ι が等化写像であることを示すために, ι が補題 1.1.13(a) の条件を満たすことを示す. 部分集合 $O \subset X \vee Y$ をとり, $\iota^{-1}(O) \overset{\text{close}}{\subset} X \coprod Y$ と仮定する. 言い換えると, $\iota^{-1}(O) = U \coprod V$, $U \overset{\text{close}}{\subset} X, V \overset{\text{close}}{\subset} Y$. ι の全射性よ

り, $O = \iota(\iota^{-1}(O)) = \iota(U \coprod V) = (U \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times V) \overset{\text{close}}{\subset} X \vee Y$.

2. $\iota(x_0) = (x_0, y_0) = \iota(y_0) \implies x_0 \sim y_0$ であり, 逆に ι の値が等しい点の組は (x_0, y_0) のみである．よって補題 1.1.13(a) $\implies$ (c) より $X \vee Y$ は $X \coprod Y$ において x_0, y_0 を同一視して得られる空間と同相.
3. $(f \vee g)\,|_{X \times \{y_0\}} = f$ と $(f \vee g)\,|_{\{x_0\} \times Y} = g$ は連続写像．また $X \times \{y_0\} \overset{\text{close}}{\subset} X \vee Y, \{x_0\} \times Y \overset{\text{close}}{\subset} X \vee Y$ かつ $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) = X \vee Y$ であるから貼り合わせの補題が適用できて $f \vee g$ は連続である.

■44,-6　余積のイメージ図を描いた（図 3）.

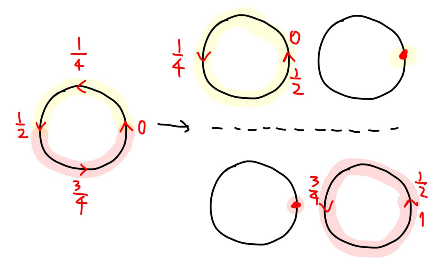

図 3　余積

■44,-10　$g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$ のイメージ図を描いた（図 4）.

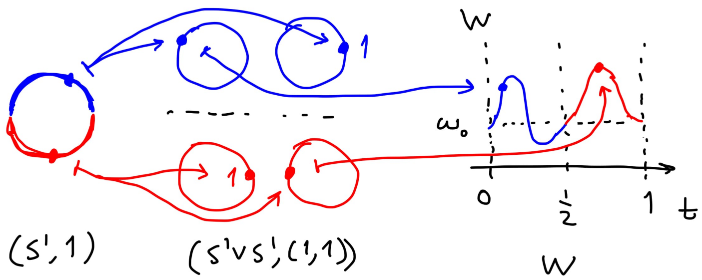

図 4　$g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$ の図示.

■52,6（命題 1.4.13）　? 表現論やってから戻ってくる.

第 2 章

■65,-4（$H_0(X)$ が ∂_1 の余核であること）　p_X が全射であることと, $\ker p_X = B_0(X) = \operatorname{Im} \partial_1$ より.

■66,4（同型写像 φ が定まること）　商加群の普遍性より, 以下の準同型 φ, ψ がただ一つずつ存在する:

$$\exists! \varphi : H_0(X) \to \mathbb{Z}\pi_0(X),\ \varphi p_X = \varpi_X \varphi_{0\sharp}, \quad \exists! \psi : \mathbb{Z}\pi_0(X) \to H_0(X),\ \psi \varpi_X = p_X \varphi_{0\sharp}^{-1}.$$

φ, ψ は互いの逆写像になっている．実際, $\varphi\psi\varpi_X\varphi_{0\sharp} = \varpi_X\varphi_{0\sharp}$ であることと, $\varpi_X\varphi_{0\sharp}$ が全射であることより $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\pi_0(X)}$ である．同様に $\psi\varphi = \mathrm{id}_{H_0(X)}$ がなりたち, φ は同型写像.

■66,9　ϖ_X と p_X が自然変換であることに注意して $\varpi_Y \varphi_{0\sharp} f_* = \varpi_Y f_* \varphi_{0\sharp}$ を変形すると, $\varphi f_* p_X = f_* \varphi p_X$ を得る．p_X は全射なので $\varphi f_* = f_* \varphi$ がなりたつ.

プリズム分解

$\sigma : \Delta^n \to X$ の定義域を $\Delta^n \times [0,1]$ に拡張したい．ところが $\Delta^{n+1} (\approx \Delta^n \times [0,1])$ を定義域にしたほうが扱いやすいから，そうするために $\Delta^n \times [0,1]$ の三角形分割（プリズム分解）を考える．

■75,1（プリズム分解）　$\Delta^1 \times [0,1]$ のプリズム分解のイメージ図を描いた（図 5）．

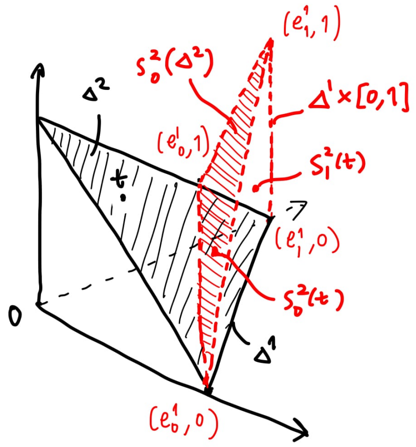

図 5　プリズム分解（$n=1, i=0$）．

■75,-3（補題 2.2.8）　任意の $\sigma \in X^{\Delta^n}$ に対し，$(f\times 1)_* \Phi_n^X(\sigma) = \sum(-1)^i (f\times 1)\circ(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1} = \sum(-1)^i ((f\circ\sigma)\times 1)\circ s_i^{n+1} = \Phi_n^Y f_*(\sigma)$ であるから．

■76,4（補題 2.2.9）

(1) 基底 $e_k^n, 0\le k\le n$ での値が両辺で一致することを確かめればよい．条件 $i<j-1$ を無視して両辺（の e_k^n での値）を別々に計算すると以下のようになる．

	左辺の場合分け	式	右辺の場合分け
(a)	$i\ge k, j>k$	$(e_k^n, 0)$	$i\ge k, j-1>k$
(b)	$i<k, j>k$	$(e_{k-1}^n, 1)$	$i<k, j>k$
(c)	$i\ge k+1, j\le k$	$(e_{k+1}^n, 0)$	$i\ge k, j-1\le k$
(d)	$i<k+1, j\le k$	$(e_k^n, 1)$	$i<k, j\le k$

$i<j-1$ を充たす組 (i,j,k) を含む場合分けは (a), (b), (d) の 3 つである．(a), (d) に関して，それぞれ $j=k+1, i=k$ の場合両辺が異なりうるが，このとき両方とも $i<j-1$ を充たさないので問題ない．よって示された．

(2) (1) と同様に両辺を別々に計算すると

左辺	式	右辺
$j>k$	$(e_k^n, 0)$	$j>k$
$j\le k$	$(e_k^n, 1)$	$j\le k$

となるから示された．

(3) $s_n^{n+1} d_{n+1}^n (e_k^n) = s_n^{n+1} e_k^{n+1} = (e_k^n, 0) = i_0(e_k^n)$.

(4) $s_0^{n+1}d_0^n(e_k^n) = s_0^{n+1}e_{k+1}^{n+1} = (e_k^n, 1) = i_1(e_k^n)$.

(5) (1) と同様である．条件 $i > j$ を無視して両辺を別々に計算すると以下のようになる．左辺の計算は (1) と全く同じである．

	左辺の場合分け	式	右辺の場合分け
(a)	$i \geq k, j > k$	$(e_k^n, 0)$	$i-1 \geq k, j > k$
(b)	$i < k, j > k$	$(e_{k-1}^n, 1)$	$i-1 < k, j > k-1$
(c)	$i \geq k+1, j \leq k$	$(e_{k+1}^n, 0)$	$i-1 \geq k, j \leq k$
(d)	$i < k+1, j \leq k$	$(e_k^n, 1)$	$i-1 < k, j \leq k-1$

$i > j$ を充たす組 (i, j, k) を含む場合分けは (a), (c), (d) の 3 つである．(a), (d) に関して，それぞれ $i = k+1, j = k$ の場合両辺が異なりうるが，このとき両方とも $i > j$ を充たさないので問題ない．よって示された．

■76,13（Φ_n がチェインホモトピーであること） $\sigma : \Delta^n \to X$ について関係式 $\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = -\Phi_{n-1}\partial_n\sigma + i_{1*}\sigma - i_{0*}\sigma$ を示す．

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1}\circ d_j^n \\
&= \sum_{i<j-1}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1}\circ d_j^n + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1}\circ d_j^n \\
&\quad + \sum_{i=j}(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1}\circ d_j^n - \sum_{i=j-1}(\sigma\times 1)\circ s_i^{n+1}\circ d_j^n \\
&= \sum_{i<j-1}(-1)^{i+j}(\sigma\circ d_{j-1}^{n-1}\times 1)\circ s_i^n + \sum_{i>j}(-1)^{i+j}(\sigma\circ d_j^{n-1}\times 1)\circ s_{i-1}^n + (\sigma\times 1)\circ i_1 - (\sigma\times 1)\circ i_0 \\
&= \sum_{i<j}(-1)^{i+j+1}(\sigma\circ d_j^{n-1}\times 1)\circ s_i^n + \sum_{i\geq j}(-1)^{i+1+j}(\sigma\circ d_j^{n-1}\times 1)\circ s_i^n + i_{1*}\sigma - i_{0*}\sigma \\
&= -\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(\sigma\circ d_j^{n-1}\times 1)\circ s_i^n + i_{1*}\sigma - i_{0*}\sigma \\
&= -\Phi_{n-1}\partial_n\sigma + i_{1*}\sigma - i_{0*}\sigma \\
&= (\text{右辺}).
\end{aligned}
$$

■77,6（$\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = \Phi_{n-1}\partial_n\sigma + (-1)^{n+1}\sigma$ がなりたつこと） $\partial_{n+1}(\Phi_n\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i(\Phi_n\sigma)\circ d_i^n = (-1)^{n+1}(\Phi_n\sigma)\circ d_{n+1}^n + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\Phi_n\sigma)\circ d_i^n$, $\Phi_{n-1}(\partial_n\sigma) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\Phi_{n-1}(\sigma\circ d_i^{n-1})$ と変形しておく．以下で 2 つの補題を示す．

1. $(\Phi_n\sigma)\circ d_{n+1}^n = \sigma$.
   <u>証明</u> 補題 2.2.9 の証明と同じ理由により $(\Phi_n\sigma)\circ d_{n+1}^n(e_k^n) = \sigma(e_k^n), 0 \leq k \leq n$ を示せば充分である．
   $$
   \begin{aligned}
   \Phi_n\sigma\circ d_{n+1}^n(e_k^n) &= (\Phi_n\sigma)(e_k^{n+1}) \\
   &= F(\sigma(e_k^n), 1) \quad (\alpha_n(e_k^n, 1) = e_k^{n+1}\text{だから}) \\
   &= \sigma(e_k^n) \quad (F\text{ の性質}).
   \end{aligned}
   $$
2. $(\Phi_n\sigma)\circ d_i^n = \Phi_{n-1}(\sigma\circ d_i^{n-1})$.
   <u>証明</u> $\Phi_n\sigma\circ d_i^n(e_k^n) = \Phi_{n-1}(\sigma\circ d_i^{n-1})(e_k^n)$ を示す．1. と同様の計算により，$i > k$ のとき両辺は $\sigma(e_k^n)$, $i \leq k$ かつ $k < n$ のとき $\sigma(e_{k+1}^n)$, $i \leq k$ かつ $k = n$ のとき x_0 にそれぞれ等しいことが容易に確かめられる．

1., 2. より $\partial_{n+1}\Phi_n\sigma = \Phi_{n-1}\partial_n\sigma + (-1)^{n+1}\sigma$ が示された．

■77,8　$u \in Z_n(S_*(X))$ とすると，$u = (-1)^{n+1}\partial_{n+1}\Phi_n u + (-1)^n \Phi_{n-1}\partial_n u = \partial_{n+1}\big((-1)^{n+1}\Phi_n u\big) \in \operatorname{Im}\partial_{n+1}$ ゆえ $H_n(X) = 0$.

■79,7（定理 2.2.11）　?

■99,-8（定理 2.4.3）　補題 2.1.9 証明と類似の図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}X^{\Delta^1} \arrow[r, "\partial_1"] \arrow[d, "\varphi_{1\sharp}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z}X^{\Delta^0} \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\varphi_{0\sharp}"', "\sim"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "1_{\mathbb{Z}}"', "\sim"] \\
\mathbb{Z}X^I \arrow[r, "D_X"] & \mathbb{Z}X \arrow[r, "\varepsilon_X"] & \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

より，$\ker\partial_0/\operatorname{Im}\partial_1 \cong \ker\varepsilon_X/\operatorname{Im}D_X$ を得る．一方，補題 1.2.10 より $\ker\varepsilon_X/\operatorname{Im}D_X \cong \ker\varepsilon_{\pi_0(X)}$ であるから証明が完了する．

■104,-6（$c = \sigma \in \operatorname{Aff}(\Delta^n, \Delta^q)$ について証明すれば充分であること）　$c = \sigma \in \operatorname{Aff}(\Delta^n, \Delta^q)$ について証明できたとして，一般の $c = \sum_\sigma a_\sigma \sigma \in L_n(\Delta^q)$ について証明する．背理法で示す．$\frac{n}{n+1}\text{mesh } c < \text{mesh } \operatorname{Sd}_n(c)$ が成立すると仮定する．ある $\sigma \in \operatorname{Aff}(\Delta^n, \Delta^q)$ が存在して $\text{mesh } \operatorname{Sd}_n(c) = \text{mesh } \operatorname{Sd}_n(\sigma)$．ゆえに $\frac{n}{n+1}\text{mesh } c < \text{mesh } \operatorname{Sd}_n(c) = \text{mesh } \operatorname{Sd}_n(\sigma) \le \frac{n}{n+1}\text{mesh } \sigma$ がなりたつが，これは $\text{mesh } \sigma \le \text{mesh } c$ に矛盾する．よって示された．

■104,-1（$\text{mesh}(\partial_n\sigma) \le \text{mesh}(\sigma)$ がなりたつこと）　$\partial_n\sigma = \sum(-1)^i(\sigma \circ d_i^{n-1})$ を思い出す．任意の i で $(\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1}) \subset \sigma(\Delta^n)$ ゆえ $\delta((\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1})) \le \delta(\sigma(\Delta^n))$ であることと，mesh の定義より従う．

■107,1（$m(\sigma \circ d_i^{n-1}) \le m(\sigma)$ がなりたつこと）　$(\operatorname{Sd}_{n-1})^m(\sigma \circ d_i^{n-1}) = \sum_{\tau'} b_{\tau'}\tau'$ $(b_{\tau'} \neq 0), (\operatorname{Sd}_n)^m(\sigma) = \sum_\tau a_\tau \tau$ $(a_\tau \neq 0)$ とおく．任意の τ' に対し，ある τ が存在して $\tau'(\Delta^{n-1}) \subset \tau(\Delta^n)$ をみたす（図 6）から，$\lambda \in \Lambda$ に対し $\tau(\Delta^n) \subset X_\lambda$ ならば $\tau'(\Delta^{n-1}) \subset X_\lambda$ でもある．ゆえに $m(\sigma \circ d_i^{n-1}) \le m(\sigma)$ がなりたつ．

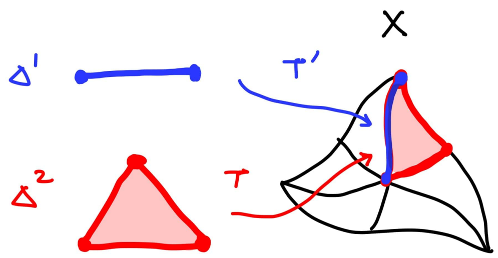

図 6　$m = 1$.

■102,-4（重心細分の計算）

- ω_1 の計算

$$\begin{aligned}
\omega_1 &:= \beta_{1_1}((d_0^0)_*\omega_0) - \beta_{1_1}((d_1^0)_*\omega_0) \\
&= \beta_{1_1}(d_0^0) - \beta_{1_1}(d_1^0) \\
&= (e_{01}e_1) - (e_{01}e_0) \quad ((e_0 + e_1)/2 := e_{01}, \text{以下同様.}).
\end{aligned}$$

- ω_2 の計算

$$\begin{aligned}
\omega_2 &:= \beta_{1_2}((d_0^1)_*\omega_1) - \beta_{1_2}((d_1^1)_*\omega_1) + \beta_{1_2}((d_2^1)_*\omega_1) \\
&= \beta_{1_2}((e_{12}e_2) - (e_{12}e_1)) - \beta_{1_2}((e_{20}e_2) - (e_{20}e_0)) + \beta_{1_2}((e_{01}e_1) - (e_{01}e_0)) \\
&= (e_{012}e_{12}e_2) - (e_{012}e_{12}e_1) - (e_{012}e_{20}e_2) + (e_{012}e_{20}e_0) + (e_{012}e_{01}e_1) - (e_{012}e_{01}e_0).
\end{aligned}$$

まとめると, 図 7 のようになる.

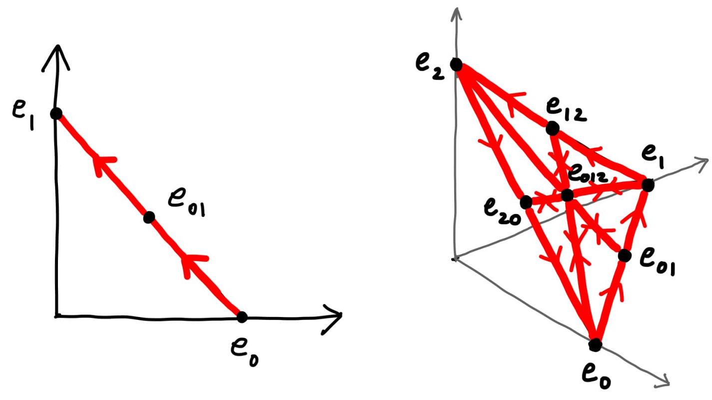

図 7　左: ω_1 のイメージ図, 右: ω_2 のイメージ図.

第 3 章

■118,-2（回転数 τ の定義）　写像度 deg の定義域は $(S^1,1)$ から $(S^1,1)$ への連続関数の集合であるから, 回転数 τ の定義を標準射影 π を用いて以下のように修正する:

$$\tau : \pi_1(S_1,1) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} [(S^1,1),(S^1,1)] \xrightarrow{\pi^{-1}} (S^1,1)^{(S^1,1)} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

写像度のホモトピー不変性により τ は well-defined.

■119,7（τ が群の準同型であること）　$[l_1],[l_0] \in \pi_1(S^1,1)$ をとると,

$$\begin{aligned}
\tau([l_1]\cdot[l_0]) &= \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1}([l_1]\cdot[l_0]) \\
&= \deg([\overline{l_1 \cdot l_0}]) \quad (\overline{l_1 \cdot l_0} \circ p = l_1 \cdot l_0.\ \text{cf. 補題 3.1.7}) \\
&= \deg([l_1 \cdot_{(1.4.2)\ \text{の意味}} l_0]) \\
&= \deg[l_1] + \deg[l_0] \quad (\text{補題 1.4.4}) \\
&= \tau([l_1]) + \tau([l_0])
\end{aligned}$$

となるから τ は群の準同型. 以下, τ のホモトピー不変性を理由に $\tau([l])$ を $\tau(l)$ と書いているようだ.

■119,8（$\tau(l_0) = \deg(\varphi_1) = 1$）　直前の式がよく分からなかったけど, こういうことだろうか: $l_0 = p = 1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$ ゆえ $[l_0] = p^*[\varphi_1]$ だから, $\tau(l_0) = \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1} \circ p^*([\varphi_1]) = \deg(\varphi_1) = 1$.

■128,-9（$\alpha^{-1} = (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1}$ がなりたつこと）

$$\begin{aligned}
(\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] &= (\Pi F \circ (l \times 1_I))([j_0]^{-1} \cdot [j_0]) \\
&= (\Pi F \circ (l \times 1_I))[c_{(0,0)}] \quad (\text{cf. p.125,l.2}) \\
&= [F \circ (l \times 1_I) \circ c_{(0,0)}] \\
&= [c_{x_0}] = e_{x_0}.
\end{aligned}$$

同様に $(\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} = e_{x_0}$ も成立する.

■137,-4（群の表示について）　正規閉包を持ち出す理由などについて, [2] を参考にさせていただいた.

van Kampen の定理の証明

■139,-4（**P が l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合していること**）　l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合している分割 P の例を図 8 に示した.

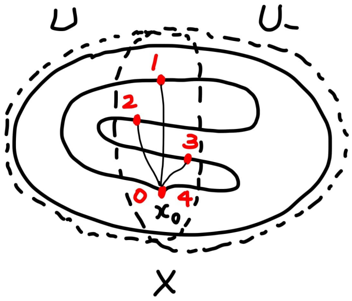

図 8　l に関して開被覆 $\{U_+, U_-\}$ に適合している分割 P の例.

■142,-9　$I \times I$ の開集合 $L^{-1}((U_+)^\circ)$ と $L^{-1}((U_-)^\circ)$ を図 9 に示した.

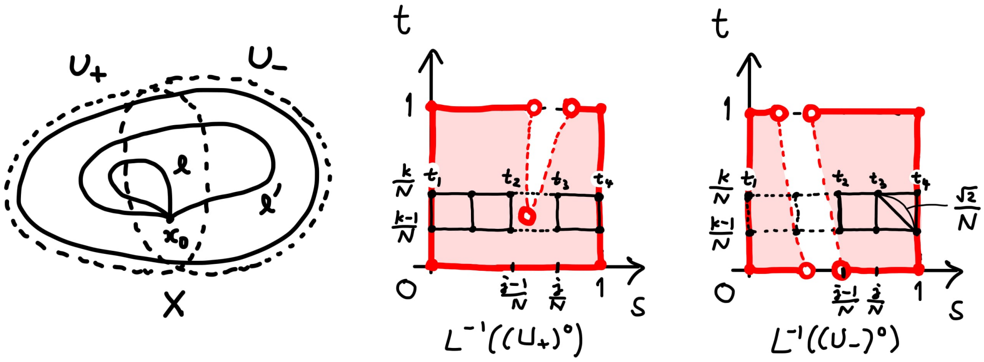

図 9　$I \times I$ の開集合 $L^{-1}((U_+)^\circ)$ と $L^{-1}((U_-)^\circ)$.

■143,-10　$l_{k-1}^{P_k,j} = {\alpha_j}^{-1} l_k^{P_k,j} \alpha_{j-1}$ が成り立つ様子を図 10 に示した.

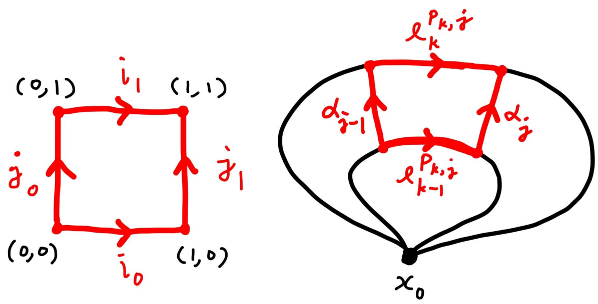

図 10　$l_{k-1}^{P_k,j} = {\alpha_j}^{-1} l_k^{P_k,j} \alpha_{j-1}$.

■145,-8（**T^2 の開被覆**）　正方形の向かい合う辺を貼り合わせて T^2 を作る様子を図 11 に示した.

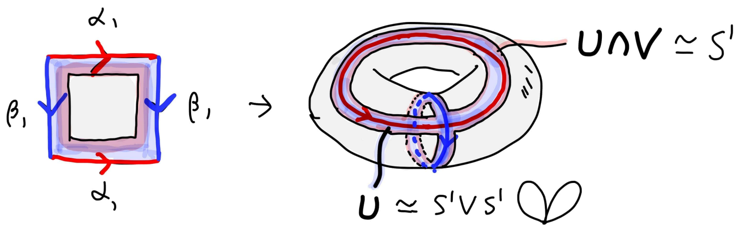

図 11　T^2. $U \cap V \simeq S^1$ がなりたつことは左図（貼り合わせる前の状態）を見れば明らかである.

■146,2（曲面群について）　記号 $[\cdot,\cdot]$ は交換子を意味する. 生成元がなぜ本文のようになるかは理解していない. ?

■148,11（式 (3.3.1)）　式 (1.4.4) の両辺に $p^*[\cdot]$ を作用した後,

$$\begin{aligned} p^*[f]\cdot p^*[g] &= [f\circ p]\cdot[g\circ p] \\ &= [(f\circ p)\cdot(g\circ p)] \quad (1.4.2) \text{ の積}\cdot \\ &= [(f\cdot g)\circ p] \quad (3.1.2) \text{ の積}\cdot \\ &= p^*[f\cdot g] \end{aligned}$$

を用いる.

■150,1（$h_\alpha(e_{x_0})=0$ であること）

$$\begin{aligned} h_\alpha(e_{x_0}) &= c_{x_0,*}([\tilde\alpha]) \quad ([\tilde\alpha]:=\alpha, \tilde\alpha := \Sigma_l a_l\sigma_l \in Z_q(Z), a_l\in\mathbb{Z}, \sigma_l \in Z^{\Delta^q}) \\ &= [c_{x_0,*}(\tilde\alpha)] \\ &= \left(\sum_l a_l\right)[\tilde c_{x_0}] \quad (\tilde c_{x_0}:\Delta^q\to X, x\mapsto x_0 \text{（定値写像）}) \\ &= 0 \quad (\tilde c_{x_0}\in Z_q(\{x_0\})\subset B_q(\{x_0\})\subset B_q(X)). \end{aligned}$$

■151,-11 (p^* の自然性)　$g:(X,x_0)\to(Y,y_0)$ とおく. $[f]\in[(S^1,1),(X,x_0)]$ に対し $p^*g_*[f]=[g\circ f\circ p]=g_*p*[f]$ がなりたつから, 図式

$$\begin{array}{ccc} [(S^1,1),(X,x_0)] & \xrightarrow{g_*} & [(S^1,1),(Y,y_0)] \\ \downarrow{\scriptstyle p^*} & & \downarrow{\scriptstyle p^*} \\ \pi_1(X,x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_1(Y,y_0) \end{array}$$

は可換である. ゆえに p^* は (X,x_0) について自然.

■151,-10（ホモロジー類 $[p]$ が定義できること）　上述の同一視 $\Delta^1\approx I_1, \Delta^0\approx *$ のもとで, $\partial_1 p = p(1)-p(0) = 1-1=0$ より従う.

■152,11　x_0 を基点とするループ $\theta(l(1))\cdot(l\cdot\theta(l(0))^{-1})$ の例を図 12 に示した.

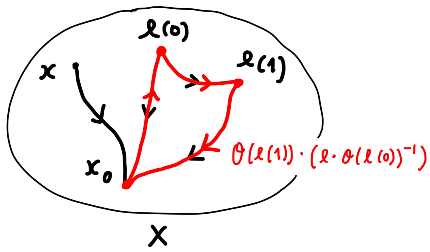

図 12　x_0 を基点とするループ $\theta(l(1)) \cdot (l \cdot \theta(l(0))^{-1})$.

■152,-3　$(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \to X \text{ rel } \partial$ が成り立つ様子を図 13 に示した.

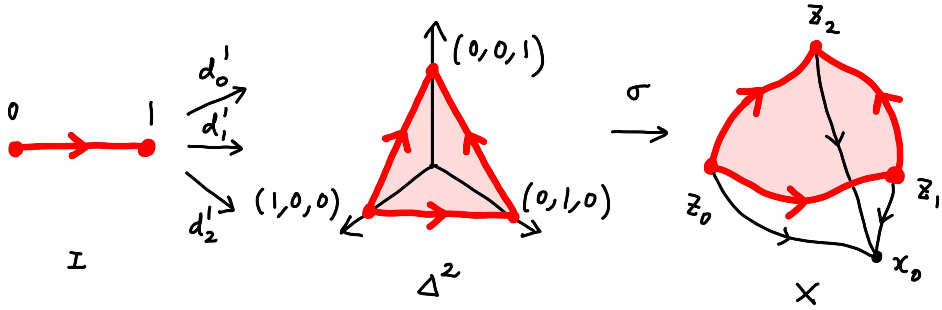

図 13　$(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \to X \text{ rel } \partial$.

■153.-9（$\varphi(\theta(l(1)) \cdot l \cdot \theta(l(0))^{-1}) = \theta(l(1)) + l - \theta(l(0))$ **がなりたつこと）**　$\varphi(\theta(l(1)) \cdot l \cdot \theta(l(0))^{-1}) = [\theta(l(1)) \cdot l \cdot \theta(l(0))^{-1}]$ は成立する．カッコ内の 3 つの道はループではないから φ が準同型であることを用いて直ちに和の形に変形することはできないと思う．ではどうすればよいのか．？

■154,-9（(3.3.8) **式がなりたつこと）**　$(Z,e)^{(I,\partial I)}$ にコンパクト開位相を入れて点つき空間 $\left((Z,e)^{(I,\partial I)}, c_e\right)$ とみなしていることに注意（cf. p.71）．この点つき空間を X とおく．$l, l' \in X$ をとる．

1. 左側の $\simeq$: l を $l \cdot c_e$ につなぐホモトピーを F, l' を $c_e \cdot l'$ につなぐホモトピーを F' とする（cf. 補題 3.1.4(2)）．F と F' を用いて $m(l,l')$ を $m(l \cdot c_e, c_e \cdot l')$ につなぐホモトピー G を作る．具体的には,
$$G : (Z,e) \times [0,1] \to (Z,e), \quad (x,t) \mapsto m(F(x,t), F'(x,t))$$
とすればよい．m, F, F' が連続であるから G も連続．ゆえに $m(l,l') \simeq m(l \cdot c_e, c_e \cdot l')$ がなりたつ．
2. 中央の $=$: m の連続性より, $t \in [0,1]$ に対し
$$\begin{aligned} m(l \cdot c_e, c_e \cdot l')(t) &= m((l \cdot c_e)(t), (c_e \cdot l')(t)) \\ &= \begin{cases} m(c_e(2t), l'(2t)) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ m(l(2t-1), c_e(2t-1)) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} m(c_e, l')(2t) & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ m(l, c_e)(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} \\ &= (m(l, c_e) \cdot m(c_e, l'))(t) \end{aligned}$$
がなりたつ.

3. 右側の $\simeq$: ホモトピー可換図式から $m(l, c_e) \simeq l$ および $m(c_e, l') \simeq l'$ がなりたつことよりしたがう．（写像 $f \simeq g : X \to Y$ と点 $x \in X$ に対し $f(x)$ を $g(x)$ につなぐ道が存在することと, p.71 の記述を思い出す.）

第 4 章

■159,-11（j_* がチェイン写像であること）　$\partial_n j_*(u) = \partial_n(u + i_* S_n(A)) = \partial_n u + i_* S_{n-1}(A) = j_* \partial_n(u)$.

$$\begin{tikzcd} S_n(X) \arrow[r, two heads, "j_*"] \arrow[d, "\partial_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & S_n(X,A) \arrow[d, "\partial_n"] \\ S_{n-1}(X) \arrow[r, two heads, "j_*"] & S_{n-1}(X,A) \end{tikzcd}$$

■160,-8（$H_0(X, A) = 0$ であること）　完全性と i_* の全射性より $\ker j_* = \operatorname{Im} i_* = H_0(X)$ であるから j_* は零写像. j_* の全射性 $\operatorname{Im} j_* = H_0(X, A)$ とあわせて $0 = \operatorname{Im} j_* = H_0(X, A)$.

■166,3（$\overline{F}$ が連続であること）　$\overline{F} \circ (p\,|_U \times 1_{[0,1]}) = p \circ F$ である．右辺が連続写像であることと $p\,|_U \times 1_{[0,1]}$ が等化写像であることより補題 1.1.13(b) が使えて $\overline{F}$ は連続写像.

■167-1　$p \in X$ のまわりで定義された X の座標近傍 (U, φ, V) のイメージ図を描いた（図 14）.

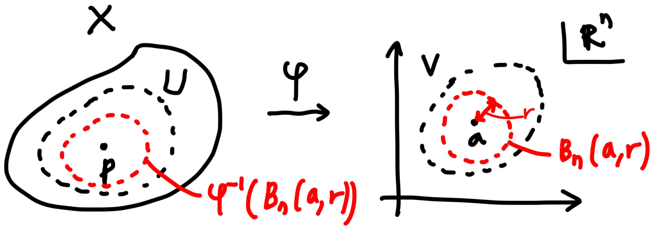

図 14　$p \in X$ のまわりで定義された X の座標近傍 (U, φ, V).

■167,4（集合の包含関係について）

1. $B_n(a,r) \subset \overline{B_n(a,r)}$ より $X \backslash \varphi^{-1}(\overline{B_n(a,r)}) \subset X \backslash \varphi^{-1}(B_n(a,r))$. $X \backslash \varphi^{-1}(B_n(a,r)) \overset{\text{close}}{\subset} X$ であるから $\overline{X \backslash \varphi^{-1}(\overline{B_n(a,r)})} \subset X \backslash \varphi^{-1}(B_n(a,r))$.
2. $\varphi^{-1}(B_n(a,r)) \ni p$.
3. X は Hausdorff なので $\{p\} \overset{\text{close}}{\subset} X$.

■172,10（空間の三対 (X, A, A') の連結準同型の自然性）　4.4.1 節で用いる．以下のように定式化しておく．連続写像 $f : (X, A, A') \to (Y, B, B')$ について図式

$$\begin{tikzcd} H_n(X,A) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[d, "f_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H_{n-1}(A,A') \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(Y,B) \arrow[r, "\partial_*"] & H_{n-1}(B,B') \end{tikzcd}$$

は可換.

■172,-3（系 4.1.11）　補題 4.1.1 と同相 $D^n \approx \Delta^n$, $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$ より

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial \Delta^{n+1}) \overset{\partial_*}{\cong} H_n(\partial \Delta^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$$

であるから, $H_n(\partial\Delta^{n+1})$ の生成元は $H_{n+1}(\Delta^{n+1},\partial\Delta^{n+1})$ の生成元 $[1_{n+1}]$ を ∂_* で写した $[\partial 1_{n+1}]$ である. (cf. p.160, l.4)

■180,-5（$f^{-1}(q)$ が有限集合であること）

1. Y の Hausdorff 性より $\{q\} \overset{\text{close}}{\subset} Y$.
2. f の連続性と 1. より $f^{-1}(q) \overset{\text{close}}{\subset} X$.
3. f の局所同相性より $f^{-1}(q)$ は離散的.
4. X のコンパクト性と 2. より補題 A.1.7 が使えて $f^{-1}(q) \subset X$ はコンパクト.
5. p.268, l.12 と 3., 4. より $f^{-1}(q)$ は有限集合.

■181,2（ι_* が同型であること） 定理 4.1.9 (5) より

$$\bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i\backslash\{p_i\}) = H_n\left(\bigcup_{i=1}^m U_i, \bigcup_{i=1}^m U_i\backslash\ f^{-1}(q)\right).$$

ここで

$$X\backslash\left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) = \overline{X\backslash\left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right)} \subset \left(X\backslash f^{-1}(q)\right)^\circ = X\backslash f^{-1}(q)$$

が成り立つから切除定理が使える. よって ι_* は同型.

■184,5（$B_n(x,r)$ の上で $\deg_x f$ が一定であること） 同相 $f: U_1 \to U_2$ に対し自然な同相 f_x を $f_x: (U_1, U_1\backslash\{x\}) \to (U_2, U_2\backslash\{f(x)\})$ と定義する. 任意の $x' \in B_n(x,r)$ をとる. p.183 の μ_x を $\mu_{x'}$ に写す同型を s_*, $\mu_{f(x)}$ を $\mu_{f(x')}$ に写す同型を t_* とおくと, 可換図式

$$\begin{tikzcd}
H_n(U_1, U_1\backslash\{x\}) \arrow[r, "s_*"] \arrow[d, "f_{x*}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H_n(U_1, U_1\backslash\{x'\}) \arrow[d, "f_{x'*}"] \\
H_n(U_2, U_2\backslash\{f(x)\}) \arrow[r, "t_*"] & H_n(U_2, U_2\backslash\{f(x')\})
\end{tikzcd}$$

より $f_{x'*}\mu_{x'} = t_*(f_{x*}\mu_x) = (\deg_x f)t_*\mu_{f(x)} = (\deg_x f)\mu_{f(x')}$ がなりたつから, $\deg_x f = \deg_{x'} f$.

■185,14（可換図式がなりたつこと, $S_{c*}\mu_x = \mu_{x+c}$ がなりたつこと） 可換性が不明. ? 可換であることが示されたとする. $j_{x+c*}j_{L*}j_{x*}^{-1}(\mu_x) = \mu_{x+c}$ と図式の可換性より $S_{c*}\mu_x = \mu_{x+c}$ がなりたつ.

■187,2（補題 4.2.11 証明）

- 線形同型 $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $A = (g(e_1), \ldots, g(e_n))$ とすればよい.
- p.186, l.-12 と g の定義より

$$\begin{aligned}
\varepsilon(f) &= (\mathrm{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(e_0), \ldots, f(e_n) - f(e_0)) \\
&= (\mathrm{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(b), \ldots, f(e_n) - f(b)) \\
&= (\mathrm{sgn} \circ \det)(g(e_1), \ldots, g(e_n)) \\
&= (\mathrm{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(b), \ldots, g(e_n) - g(b)) \\
&= (\mathrm{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(e_0), \ldots, g(e_n) - g(e_0)) \\
&= \varepsilon(g).
\end{aligned}$$

- $g(b) = 0$ だから, $0 = g(b) = \frac{1}{n+1}g(e_0) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^n g(e_k)$ すなわち $g(e_0) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$. いっぽう, $\iota_n(e_0) = (-1, \ldots, -1)^\top \in \mathbb{R}^n$ だから $A(\iota_n(e_0)) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$. 以上より, $A(\iota_n(e_0)) = g(e_0)$.

■188,8 $\overline{f}_z = \overline{f_{\overline{z}}}, \overline{f}_{\overline{z}} = \overline{f_z}$ に注意.

■189,13（$U \approx V$ が連結であるような座標近傍 (U, φ, V) は必ず正の座標近傍か負の座標近傍のどちらかになること）　?

■196,10（補題 4.3.1(0)）

- N' の生成系を $\{x'_1, \ldots, x'_{n'}\}$, N'' の生成系を $\{x''_1, \ldots, x''_{n''}\}$ とおく.
- g が全射の場合: N の有限部分集合であって, その g による像が N'' の生成系となるものを $\tilde{N}$ とおく. 任意の $x \in N$ をとる. $g(x) = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x''_i$ とかけることと, 各 $1 \leq i \leq n''$ に対し $x_i \in \tilde{N}$ があって $g(x_i) = x''_i$ となることより $g(x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i) = 0$ すなわち $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i \in \ker g = \operatorname{Im} f$ がなりたつ. ゆえに $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i = f\left(\sum_{j=1}^{n'} a'_j x'_j\right) = \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$ となり結局 $x = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i + \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$ を得る. これは N が有限生成であることを示している.
- g が一般の場合:
  - 部分加群 $g(N) \subset N''$ が有限生成であることを示せばよいこと: 任意の $x \in N$ をとる. $g(N)$ が有限生成であるから $x_i \in N, 1 \leq i \leq n_{g(N)}$ を用いて $g(x) = \sum_{i=1}^{n_{g(N)}} a''_i g(x_i)$ とかける. $x - \sum a''_i x_i \in \ker g$ と $\operatorname{Im} f = \ker g$ より $f\left(\sum_{j=1}^{n'} a'_j x'_j\right) = x - \sum a''_i x_i$ つまり $x = \sum a''_i x_i + \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$. これは N が有限生成であることを示している.
- ?　これ以降わからない.

■202,3（$\chi(P) = -1$ となること）

1. $P \simeq P \backslash \partial P$ より $\chi(P) = \chi(P \backslash \partial P)$.
2. S^2 から取り除いた 3 つの 2 次元閉円板を $D_i^2, i = 1, 2, 3$ とおくと, $\chi(S^2) \overset{(4.2.5)}{=} \chi\left(S^2 \backslash \cup_{i=1}^3 \partial D_i^2\right) = \chi(P \backslash \partial P) + 3\chi(*)$.

1., 2. より $\chi(P) = \chi(P \backslash \partial P) = \chi(S^2) - 3\chi(*) = 2 - 3 = -1$ がなりたつ.

■203,12（$\varphi(D^m) = \overline{e}$ がなりたつこと）　一般に $\varphi\varphi^{-1}(\overline{e}) \subset \overline{e}$. すでに示した $\varphi(D^m) \supset \overline{e}$ と $D^m = \varphi^{-1}(\overline{e})$ を用いると, $\varphi(D^m) = \varphi\varphi^{-1}(\overline{e}) \supset \overline{e}$. あわせて $\varphi\varphi^{-1}(\overline{e}) = \overline{e}$. ゆえに $\varphi(D^m) = \overline{e}$ がなりたつ.

■204,-3（$\varphi_\lambda^{-1}(C)$ の φ_λ による像が $C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$ となること）　$\varphi_\lambda(D^{n_\lambda}) \overset{(203,12)}{=} \overline{e_\lambda}$ ゆえ $\varphi_\lambda^{-1}(C) = \varphi_\lambda^{-1}(C \cap \overline{e_\lambda})$ であるから, $\varphi_\lambda\varphi_\lambda^{-1}(C) = C \cap \overline{e_\lambda} = C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$ がなりたつ.

■207,-10　変位レトラクト F の図を描いた（図）.

■207,-3（F の連続性が $F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]})$ の連続性からしたがうこと）

$$\begin{aligned} F \text{ が連続} &\iff \forall O \overset{\text{open}}{\subset} X^{(k)} \backslash \Phi(S), F^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} \left(X^{(k)} \backslash \Phi(S)\right) \times [0,1]. \\ &\iff \forall O \overset{\text{open}}{\subset} X^{(k)} \backslash \Phi(S), \forall \lambda \in \Lambda, \left(\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]}\right)^{-1} \circ F^{-1}(O) \overset{\text{open}}{\subset} D^{n_\lambda}. \quad \text{（補題 4.3.6(4) より）} \\ &\iff \forall \lambda \in \Lambda, F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]}) \text{ が連続}. \end{aligned}$$

■211,14（$|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ となること）　$|K|$ の定義より $|K| = \cup_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ である. さらに $\sigma \neq \sigma'$ のとき $\sigma(x) = \sigma$ と $\sigma(x) = \sigma'$ が同時になりたつことはないから $e_\sigma \cap e_{\sigma'} = \varnothing$. ゆえに $|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$ がなりたつ.

■212,8（$\varphi_\sigma \circ d_i$ は $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$ の定める胞体の特性写像であること）　$(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$ の定める特性写像 φ は

$$\varphi : \Delta^{n-1} \to \Delta^N, \ (t_0, \ldots, t_{n-1}) \mapsto t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$$

で定義される. 一方, $\varphi_\sigma \circ d_i(t_0, \ldots, t_{n-1}) = \varphi_\sigma(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{n-1}) = t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$ であるから φ は $\varphi_\sigma \circ d_i$ に等しい.

■**216,5 周辺**　$\ker\partial_q \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)})$, $\operatorname{Im}\partial_* \cong \operatorname{Im}\partial_{q+1}$ により，

$$H_q(X) \cong H_q\left(X^{(q+1)}, X^{(q-2)}\right) \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)})/\operatorname{Im}\partial_* \cong \ker\partial_q/\operatorname{Im}\partial_{q+1} = H_q(C_*(X))$$

がなりたつ.

■**217,1（$\pi_\lambda := \overline{\varphi_\lambda}^{-1} \circ \hat{\pi}_\lambda$ のイメージ図）**　図 15.

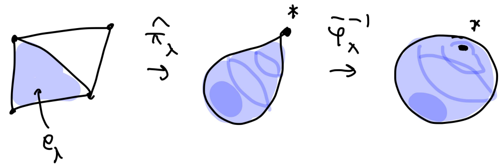

図 15　$\pi_\lambda := \overline{\varphi_\lambda}^{-1} \circ \hat{\pi}_\lambda$.

■**217,-10（命題 4.4.3）**　可換図式より $i_*\varphi_{\lambda*}\partial_*[D^k] = \partial_*\varphi_{\lambda*}[D^k]$. 両辺に $\pi_{\mu*}$ を作用したものを変形する:（左辺）$= \deg(\pi_\mu \circ (\varphi_\lambda|_{S^{k-1}}))\partial_*[D^k] = \deg(\pi_\mu \circ (\varphi_\lambda|_{S^{k-1}}))[S^{k-1}]$.（右辺）$= \pi_{\mu*}\partial_k e_\lambda = \pi_{\mu*}\left(\sum_{\nu\in\Lambda_{k-1}}[e_\lambda : e_\nu]e_\nu\right) = [e_\lambda : e_\nu][S^{k-1}]$. ゆえに命題 4.4.3 がなりたつ.

■**219,11（T^2 の胞体分割）**　図 16.

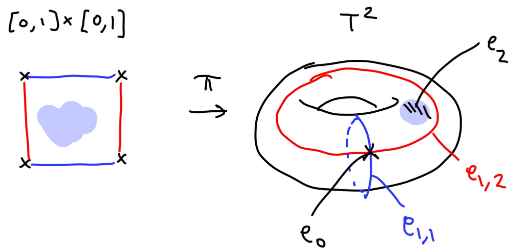

図 16　T^2 の胞体分割.

■**219,-8（$\pi_{1,1} \circ \left(\varphi_2|_{\partial([0,1]\times[0,1])}\right)$ のイメージ図）**　図 17.

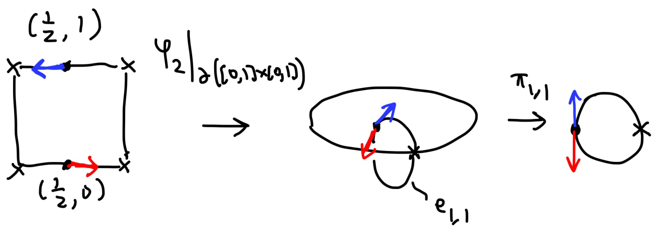

図 17　$\pi_{1,1} \circ \left(\varphi_2|_{\partial([0,1]\times[0,1])}\right)$ のイメージ図.

■**222,4（$\mathbb{R}P^2$ の胞体分割）**　図 18.

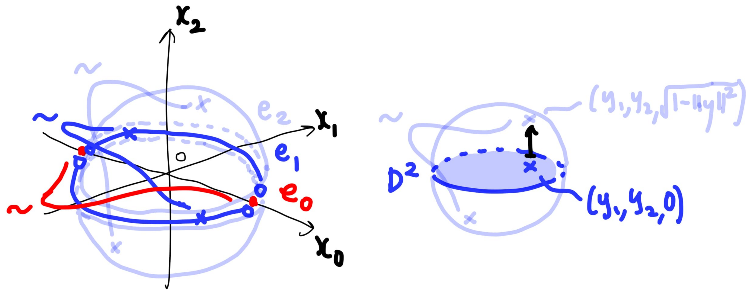

図 18　$\mathbb{R}P^2$ の胞体分割.

■222,-12　$[e_\lambda : e_\mu] = \deg(\pi_\mu \circ (\varphi_\lambda|_{S^{k-1}})) = \deg(\pi_\mu \circ (\varpi_n|_{S^{k-1}})) = \deg(\pi_\mu \circ \varpi_{k-1}) = ?$

■223,2（**定理 4.4.6**）　?

■226,9　分類空間をとる操作は有限半順序集合と順序を保つ写像の圏から位相空間と連続写像の圏への共変関手であることを思い出す．$F : P \times [1] \to Q$ は順序を保つから，$|F| : |K(P)| \times [0,1] \to |K(Q)|$ は連続．また関手性より $|F| \circ |i_0| = |F \circ i_0| = |f|$, $|F| \circ |i_1| = |F \circ i_1| = |g|$．よって $|F|$ はホモトピー $|f| \simeq |g|$ を与える．

■226,15　$f(x) \leq f(x) \implies x \leq gf(x)$, $g(y) \leq g(y) \implies fg(y) \leq y$ に注意する．

■231,8（**空間** $\hat{X}$）　図 19.

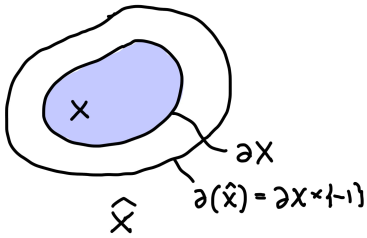

図 19　空間 $\hat{X}$

■232,2　定義されている部分で $\deg(\varphi_\alpha \circ \varphi''^{-1}) = \deg(\varphi_\alpha \circ \varphi'^{-1} \circ \varphi' \circ \varphi''^{-1}) = \deg(\varphi_\alpha \circ \varphi'^{-1})\deg(\varphi' \circ \varphi''^{-1}) = (\pm 1) \cdot 1 = \pm 1$ がなりたつ．

■232,-10（**写像** h_n, ι_n）　図 20.

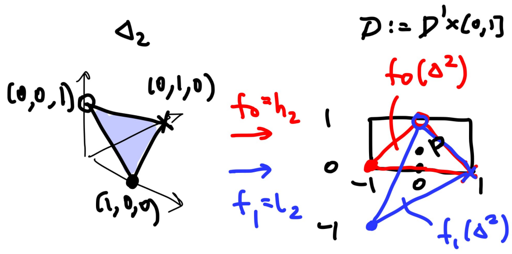

図 20　写像 h_n, ι_n

■232,-2（$r \circ h_n \circ d_i^{n-1}(\Delta^{n-1}) \subset \partial\mathcal{D} \backslash \{(q, 0)\}$, $i < n$ **となること**）　図 21.

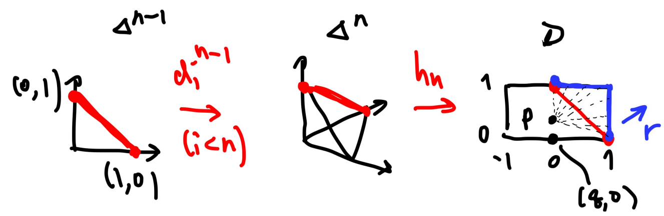

図 21　$r \circ h_n \circ d_i^{n-1}(\Delta^{n-1}) \subset \partial\mathcal{D}\backslash\{(q,0)\}$, $i < n$.

■233,5（補題 4.5.3）　図 22.

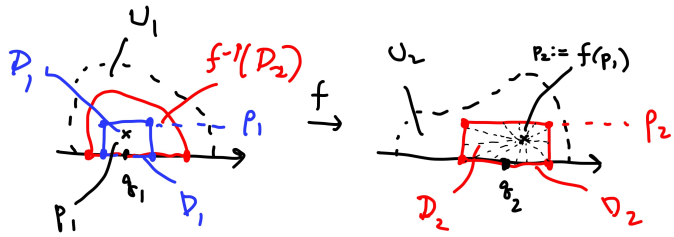

図 22　補題 4.5.3

■233,5（補題 4.5.3）　μ_{p_1} を可換図式の右 $\to$ 下の順に送って $\mu_{p_1} \mapsto (-1)^n \mu_{q_1} \mapsto (-1)^n f_* \mu_{q_1}$. 下 $\to$ 右の順に送って $\mu_{p_1} \mapsto \mu_{q_2} \mapsto (-1)^n \mu_{q_2}$. ゆえに $f_*\mu_{q_1} = \mu_{q_2}$ がなりたつ.

■237,-2　各 i についてコンパクト部分集合 K_i が存在して $K_i \subset U_i$ および $K = \cup_{i=1}^N K_i$ を充たすことを示す. ?

■238,-6（切除同型 $H_q(X\backslash\partial U, X\backslash\overline{U}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q(U)$）　$H_q(X\backslash\partial U, X\backslash\overline{U}) \underset{\text{exc}}{\cong} H_q((X\backslash\partial U)\backslash(X\backslash\overline{U}), (X\backslash\overline{U})\backslash(X\backslash\overline{U})) = H_q(U, \varnothing) = H_q(U)$.

■239,1（補題 4.5.6）　図 23.

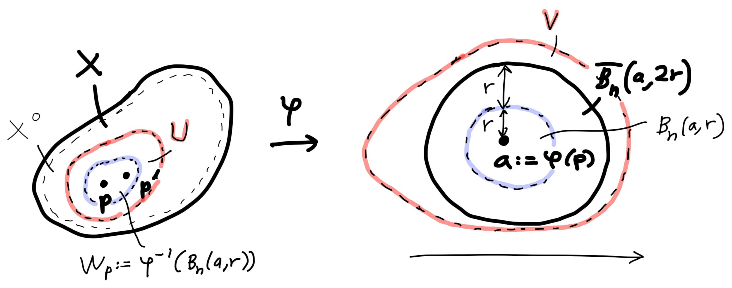

図 23　補題 4.5.6

■240,7（$H_n(X,\partial X) = 0$ を示せば充分であること）　$\partial X = \varnothing$ の場合は本文参照. $\partial X \neq \varnothing$ の場合, $H_n(X,\partial X) = 0$ と $H_n(X) = 0$ を別々に示すことを考えるが, $H_n(X) \cong H_n(\widehat{X^\circ}) = H_n(\widehat{X^\circ}, \partial(\widehat{X^\circ}))$ により $H_n(X) = 0$ を示すことは X の境界が空の場合の $H_n(X,\partial X) = 0$ を示すことに帰着する.

■240,-2（$p' \in X\backslash\overline{U}$ がとれること）

- $\widehat{X^\circ} = \widehat{\partial X^\circ} \cup X$（非交和）, p.231 より $\widehat{\partial X^\circ} \overset{\text{open}}{\subset} \widehat{X^\circ}$ がなりたつから $X \overset{\text{close}}{\subset} \widehat{X^\circ}$.

- $\overline{U} \subset X$ と仮定すると補題 A.1.7 より X はコンパクトとなり矛盾. ゆえに $X \backslash \overline{U} \neq \emptyset$.

■241,9（$\iota_* u = 0$ **となること**）　$\forall p \in \overline{U} \backslash \widehat{O}, j_{p*} u' = 0 \implies u' = 0 \implies i_* u = 0 \implies \iota_* u = 0$.

■242,6（i_0, i_1, i_α **の定義**）　i_0, i_1, i_α の定義を見つけられなかった（どこかにあるかしれない）ので書いておく.

- $\underline{i_0, i_1}$: $\epsilon = 0, 1$ に対し,

$$i_\epsilon : \partial X \to (\partial X) \times [-1, 0] = \widehat{X},\ x \mapsto (x, -\epsilon).$$

- $\underline{i_\alpha}$:

$$i_\alpha : \partial X \to (\partial X) \times [-1, 0] = \widehat{X},\ x \mapsto (x, -\alpha(x)).$$

本文のように作った写像 F は確かに $F(x, 0) = f(x, -1) = (x, 0) \sim x$ をみたしている.

■242,10（**集合** $\widehat{X}_\alpha$）　図 24.

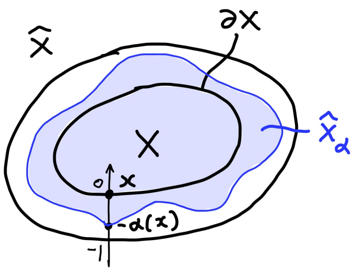

図 24　集合 $\widehat{X}_\alpha$.

■242,15（**補題 4.5.10**）　図 25.

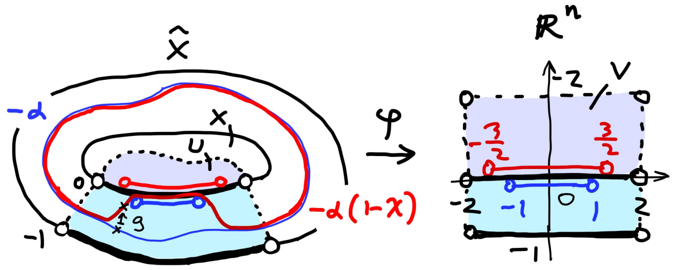

図 25　補題 4.5.10.

■247,-10　書き直す. 任意の $p' \in X^\circ$ に対し $j_{p'*} u = 0$. とくに, 任意の $p' \in K_{\frac{1}{2}}$ に対し $j_{p'*} u = 0$. u を同型によって $H_n(X^\circ, X^\circ \backslash K_{\frac{1}{2}})$ の元とみなすと 補題 4.5.4 が使えて $u = 0$.

■248,9（$[X]$ **を表す** n**-サイクルが** $\sum_{\lambda \in \Lambda_n} (\deg_0 \varphi_\lambda) e_\lambda$ **によって与えられること**）　?

■248,15（**定理 4.5.15**）　?　読んでない.

■250（**補題 4.5.16, 定理 4.5.17**）　?　読んでない.

■252,-15（**完全列が得られること**）　?　$\tilde{H}_*(S^{n-1}) = 0$ になるのだろうか.

■255,13（**補題** 4.5.22）　多様体を復習してから読む.

- 条件 (ii) によりはめ込みであるのはなぜか. ?
- X はコンパクトだから h は埋め込みであるのはなぜか. ?

■255,-6（**系** 4.5.23）　? 多様体を復習してから読む.

参考文献

[1] 河澄響矢, トポロジーの基礎（上）, 第 1 刷

[2] y., 有限生成無限単純群の構成 (`http://iso.2022.jp/math/tsudoi/online1/slide.pdf`)

[3] Nicholas Holfester, Higher Homotopy Groups: Why $\pi_n(X, x_0), n > 1$ is Abelian (`http://math.columbia.edu/~mmiller/TProjects/NHolfester20s.pdf`)