
Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 10 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10 (def.1.3 \implies def.1.1 \implies def.1.2 がなりたつこと)

- 1.3 \implies 1.1: 任意の $s \in [0, \infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0, \infty)] \leq P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0, \infty)] = 1 \implies \forall t \in [0, \infty), P[X_t = Y_t] = 1$, つまり 1.3 \implies 1.1.
- 1.1 \implies 1.2: 不等式 $|P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A]| \leq 2P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \neq (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})]$ を示す. 1.1 を仮定して不等式を用いれば, $|P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}) \in A]| \leq 2P[(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \neq (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})] \leq \sum_{i=1}^n P[X_{t_i} \neq Y_{t_i}] = 0$ から 1.2 を得る. では不等式を示す. $\mathbf{X} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), \mathbf{Y} = (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned} |P[\mathbf{X} \in A] - P[\mathbf{Y} \in A]| &= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] \\ &\quad - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})] - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})]| \\ &= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})]| \\ &\leq P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \neq \mathbf{Y})] \\ &\leq 2P[\mathbf{X} \neq \mathbf{Y}] \end{aligned}$$

より示された. 他の導出法については [1] を参照.

参考文献

[1] <https://math.stackexchange.com/questions/1613202/if-one-stochastic-process-is-a-modification-of-another>