

Brownian Motion and Stochastic Calculus[1] 読書記録

最終更新: 2022 年 11 月 13 日

注意: 原著 (英語版) を読んでいきます. 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています. たとえば 1.3+ は項目 1.3 と 1.4 の間の部分を指します.

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
13	19	$t \in F; X_t(\omega) \leq \alpha$	$t \in F; X_t(\omega) < \alpha$
29	14	$\xi_{T_n(\epsilon)^{(n)}+}$	$\xi_{T_n(\epsilon)+}^{(n)}$
36	1	$t \geq 0: M_t = n$	$t \geq 0; M_t = n$

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■1.3+ (def.1.3 \implies def.1.1 \implies def.1.2 がなりたつこと)

- 1.3 \implies 1.1: 任意の $s \in [0, \infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0, \infty)] \leq P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0, \infty)] = 1 \implies \forall t \in [0, \infty), P[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 \implies 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned} |P[X^{(n)} \in A] - P[Y^{(n)} \in A]| &= \left| \int_{\Omega} (1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A}) P(d\omega) \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A}| P(d\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} 1_{X^{(n)}(\omega) \neq Y^{(n)}(\omega)} P(d\omega) \\ &= P[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\ &\leq \sum_{k=1}^n P[X_k \neq Y_k] = 0 \end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

■1.6+ (Fubini の定理を使えと書いてあるところ) X が可測のとき,

1. 各 $\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が Borel 可測であること:
Rudin[2] Theorem 8.5 そのまま. X_t は可積分とは限らない.
2. $t \mapsto E[X_t]$ が (定義されるなら) Borel 可測であること:
 $E[X_t]$ が定義されるから, $\int X_t^+(\omega) d\omega$ と $\int X_t^-(\omega) d\omega$ はどちらも有限で, Rudin[2] Theorem 8.8(a) より Borel 可測. ゆえにその差 $E[X_t] = \int X_t^+(\omega) d\omega - \int X_t^-(\omega) d\omega$ も Borel 可測.

3. X_t の値域が \mathbb{R} で, \mathbb{R} 内の区間 I が $\int_I E|X_t|dt < \infty$ をみたすなら積分の交換などができること:

$\int_I E|X_t|dt < \infty$ ゆえ Tonelli の定理 (Rudin[2] Theorem 8.8(b)) より $X_t(\omega)$ が積空間について可積分であることがいえ, 同定理 (c) が使える.

■1.9+ (Y も $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合していること) X_t は \mathcal{F}_t -可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t, A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\forall t, P[X_t \neq Y_t] = 0$ だから $\{X_t \neq Y_t\} \in \mathcal{F}_t$. $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\}$ であるが, 左辺が \mathcal{F} -可測であることと $P[X_t \neq Y_t] = 0$ から単調性より左辺も測度 0. ゆえに仮定より左辺 $\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$. 結局 $\{Y_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$ でもある.

■1.9+ (This requirement is not same as saying \mathcal{F}_0 is complete について) たとえば, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ は完備だが, 空でない測度 0 集合を 1 つももたない [3].

■1.13

$$\{(s, \omega); X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} ((\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t] \times X_{\frac{(k+1)}{2^n}t}^{-1}(A)) \cup (\{0\} \times X_0^{-1}(A)) \quad (1)$$

に注意 [4].

■2.3 The first statement: $T \equiv t_0 \geq 0$ を定数とすると, 任意の $t \geq 0$ に対し $\{t_0 \leq t\}$ は \emptyset もしくは Ω でありいずれも \mathcal{F}_t に属する.

■2.6 $X_r(\omega) \in \Gamma$ とすると, Γ : open と X : RC より時刻 r の直後も少しの時間 path は Γ に入っている. その時間の中から有理数時刻を取ってくればよい.

■2.9

- The first two assertions:

$$\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\} \text{ および } \{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\} \text{ より.}$$

- $\{0 < T < t, T + S > t\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0, t)} \{t > T > r, S > t - r\}$ がなりたつこと:

$$0 < T < t, T + S > t \iff 0 < T < t, S > t - T \iff \text{ある } r \in \mathbb{Q} \cap (0, t) \text{ があって } \{t > T > r, S > t - r\} \text{ をいえばよい. 2つ目の } \iff \text{ について, 実際}$$

$$- \iff : 0 < r < T < t, S > t - r > t - T.$$

$$- \implies : t > T > t - S \text{ だが, 有理数の稠密性より } t > T > r > t - S \text{ なる } r \in \mathbb{Q} \text{ がとれる. このとき } S > t - r, r < T < t.$$

である.

■4.10 (Doob-Meyer Decomposition) 書きかけ すべての文章に行間がある地獄である. 定理のステートメントは本で見てください.

■一意性 X が 2 通りの分解 $X_t = M'_t + A'_t = M''_t + A''_t$ を許すと仮定する. ここで M', M'' は MG, A', A'' は natural increasing である. このとき

$$\{B_t \stackrel{\text{def}}{=} A'_t - A''_t = M''_t - M'_t, \mathcal{F}_t; 0 \leq t < \infty\} \quad (2)$$

は MG で, 任意の RC MG $\{\xi_t, \mathcal{F}_t\}$ に対し

$$\mathbb{E}[\xi_t(A'_t - A''_t)] = \mathbb{E} \int_{(0,t]} \xi_{s-} dB_s = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} [B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}] \quad (3)$$

である. ここで $\Pi_n = \{t_0^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}\}$, $n \geq 1$ は $[0, t]$ の分割であって, $n \rightarrow \infty$ 極限で $\|\Pi_n\| := \max_{1 \leq j \leq m_n} (t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \rightarrow 0$ となるものとする.

$$E \left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}} \right) \right] = 0, \text{ and thus } E[\xi_t(A'_t - A''_t)] = 0. \quad (4)$$

参考文献

- [1] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.
- [2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.
- [3] <https://math.stackexchange.com/questions/2159241/complete-filtration>.
- [4] <https://www.stat.purdue.edu/~chen418/studynotesmath.html>.