Brownian Motion and Stochastic Calculus[1] 読書記録

最終更新: 2024 年 1 月 27 日

注意: 原著（英語版）を読んでいきます. 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています. たとえば 1.3+ は項目 1.3 と 1.4 の間の部分を指します.

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
13	19	$t \in F; X_t(\omega) \le \alpha$	$t \in F; X_t(\omega) < \alpha$
29	14	$\xi_{T_n(\epsilon)^{(n)}+}$	$\xi^{(n)}_{T_n(\epsilon)+}$
57	-1	I_n	$I(n)$
68	22	for each i	for each k
72	14	$\mathcal{F}_t^{\tilde{B}(i)}$	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}^{(i)}}$
83	10	X	X
90	2	X	X
90	6	X	X

各章の要約

1.1. Stochastic Process and σ-Fields

確率過程 X は定義域 $\Omega \times [0, \infty)$ の 2 変数可測関数であって, 実際上は, ある時刻 t や, ある path ω の **section** についての性質をいうことが多い, という感じ.

X と Y が 2 変数関数として全く同じ (same) というのは強すぎる場合がある. そこで, 3 種類の sameness の概念を導入する.

1. X が Y の modification である.
2. X と Y が同じ finite-dimensional distribution をもつ.
3. X と Y が indistinguishable である.

$3 \implies 1 \implies 2$. X と Y が RC のとき $1 \implies 3$.

X が,

- measurable $\overset{\text{def}}{\iff}$ t と ω の 2 変数関数とみたときに measurable.
- progressively measurable $\implies$ measurable & adapted.
- measurable & adapted $\implies$ progressively measurable な modification をもつ.
- adapted & 全 path が RC or LC $\implies$ progressively measurable.

1.2. Stopping Times

$\{\mathscr{F}_t\}$ が usual condition をみたす $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathscr{F}_t$ RC, $\mathscr{F}_0$ が $\mathscr{F}$ の P-negligible set をすべてふくむ.

random time $\supset$ optional time $\supset$ stopping time.

optional time の議論を stopping time の議論に帰着したいとき, "T が $\mathscr{F}_t$-optional $\iff$ T が $\mathscr{F}_{t+}$-stopping" を使う.

stopping time に対して, $\mathscr{F}_T$ を定義.

X prog. msb. $\implies$ X_T が $\mathscr{F}_T$-msb.

optional time に対して, $\mathscr{F}_{T+}$ を定義.

1.3. Continuous-Time Martingales

A. Fundamental Inequalities

X submartingale RC のとき First submartingale ineq, second submartingale ineq, Doob's maximal ineq, Regularity of the paths. 離散バージョンを連続バージョンに拡張するには, パスにいくらかの連続性を課す必要があることは明らか. 基本的に, 自然数 $\to$ 有理数 は σ 性でいけて, 連続性を使って, 実数時間に

拡張する.

$\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition みたすとき X が RC modification をもつ $\iff$ $t \mapsto \mathsf{E}X_t$ RC. もしそうなら, modification を RCLL かつ $\{\mathscr{F}_t\}$ adapted にとれる. つまり $\{\mathscr{F}_t\}$-submartingale にとれる.

B. Convergence Results

submartingale convergence 条件： RC submartingale

C. The Optional Sampling Theorem

optional sampling 条件： RC submartingale 本質の結果: $\mathsf{E}X_T = \mathsf{E}X_0$.

1.4. The Doob-Meyer Decomposition

A increasing $\overset{\text{def}}{\iff}$

1. a.e. $A_0(\omega) = 0$
2. a.e. $t \mapsto A_t(\omega)$ nondecreasing RC
3. $\forall t, \mathsf{E}A_t < \infty$.

$\mathsf{E}A_\infty < \infty$ のとき integrable という.

A natural $\overset{\text{def}}{\iff}$ increasing, $\forall$ martingale (RC, bounded) $\mathsf{E}\int_{(0,t]} M_s dA_s = \mathsf{E}\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s$. natural と predictable は同じこと. predictable は連続バージョンに拡張が難しいので, natural のほうをやっているのだと思う.

Doob-Meyer 分解ができる必要充分条件を探しに行く. そのために D, DL なるクラス（uniformly integrable を強めた概念）を導入:

- $\mathcal{T}$: $\mathsf{P}[T < \infty] = 1$ となる stopping time T のクラス.
- $\mathcal{T}_a$: $\mathsf{P}[T \le a] = 1$ となる stopping time T のクラス.

を使って D, DL を定義:

- X: class D RC, $\{X_T\}_{T\in\mathcal{T}}$: uniformly integrable.

- X: class DL RC, $0 < \forall a < \infty$, $\{X_T\}_{T \in \mathcal{T}_a}$: uniformly integrable.

RC, $\forall t \geq 0, X_t \geq 0$ a.s. $\implies$ D(uniformly integrable のとき), DL RC, Doob-Meyer 分解可能 $\implies$ D(uniformly integrable のとき), DL. この逆が重要. 1.4.10

Doob-Meyer Decomposition $\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition, X RC submartingale $\in$ DL $\implies$ $X = M + A$, M: RC martingale, A: increasing とくに natural 分解は indistinguishable の意味で unique.

$\in$ D なら, M: unif. integrable, A: integrable にとれる.

submartingale X が regular $\overset{\text{def}}{=} \forall a > 0$, $\forall$ nondecreasing seq. of stopping times $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{T}_a$ with $T = \lim_{n\to\infty} T_n, \mathsf{E}X_{T_n} = \mathsf{E}X_T$.

4.14 X: RC submartingale, DL, usual condition, A: X の DM 分解の natural increasing process のとき A conti $\iff$ X regular.

1.5. Continuous, Square-Integrable Martingales

この節では $\{\mathscr{F}_t\}$: usual condition みたすとする.

X: RC martingale. X square-integrable $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathsf{E}X_t^2 < \infty$. $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}_2$ とかく. とくに conti のとき $X \in \mathcal{M}_2^c$.

$X \in \mathcal{M}_2$ なら X^2 は nonnegative submartingle $\to$ DL で DM 分解できる. : $X^2 = M + A$. このとき $\langle X \rangle_t := A_t =$ quadratic variation つまり $\langle X \rangle_0 = 0, X^2 - \langle X \rangle$ martingale.

quadratic variation という言葉は, $X \in \mathcal{M}_2^c$ のとき, 文字通りの意味になる (5.8).

$X, Y \in \mathcal{M}_2$, $\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X + Y \rangle_T - \langle X - Y \rangle_t]$ crossvariation process. $\implies$ $XY - \langle XY \rangle$ martingale. $\langle X, Y \rangle = 0$ iff X, Y orthogonal

X, Y orthogonal と同値な条件:

1. XY martingale,
2. X の増分と Y の増分は conditional independent.

$X \in \mathcal{M}_2$ では 2 次変分まで有限, 3 次以上はゼロ. よって 2 次がしかるべき

変分.

X: $\exists\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ nondecreasing stopping time, $\{X_t^{(n)} := X_{t\wedge T_n}, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\}$ martingale for each $n \ge 1$ and $\mathsf{P}[\lim T_n = \infty] = 1 \overset{\text{def}}{\iff} X$ local martingale

さらに $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ とかく.

martingale $\implies$ loc. martingale, DL のとき逆なりたつ.

2.1. Introduction

Brown 運動の存在証明を, 実際に Brown 運動を構成することで行う. Brown 運動 $B = \{B_t, \mathscr{F}_t^B; 0 \le t < \infty\}$ を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上につくる. このとき, 有限次元分布が大事. $\Omega, \mathscr{F}$ とかなんでもいい. この本では 3 通りやっている.

1. consistent な有限次元分布を拡張する方法 (Daniell, Kolmogorov).
   これは連続である保証がないので Kolmogorov-Čentsov を使って連続な modification をつくる手間がかかる.
2. 折れ線をつくる方法. 連続性をたもってできる. 最初に BM を $[0,1]$ でつくっておいて, 端っこをつないでいく.
3. ランダムウォークの極限としてつくる方法. BM を $C[0,\infty)$ 上につくれる (Wiener measure という). これはなにかと便利らしい.

2.2. First Construction of Brownian Motion

A. The Consistency Theorem

分布と測度

確率変数 $(\omega \mapsto X(\omega))$ の分布については根も葉もなく好き勝手いえるが, 実際にその分布を実現する Ω 上の測度が存在するとはかぎらない. (2.2) 式は,

左辺 = 実現してほしい分布,

右辺 = 左辺を実現させる Ω 上の測度がみたすべき条件

という構図になっている.

B. The Kolmogorov-Čentsov Theorem

1. $\mathbb{R}^{[0,\infty)}$ から ω を sampling する.
2. $B_t(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(t)$ をえる.
3. $B_t(\omega)$ から $W_t(\omega)$（連続）をえる.
4. $W_t(\omega)$ は Brownian motion である（$B_t(\omega)$ の modification かつ, modification $\implies$ 同一有限次元分布をもつ ことより）.

上の 4 ステップをひっくるめて W を $(\mathbb{R}^{[0,\infty)}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{[0,\infty)}))$ 上の process といっている.

2.3. Second Construction of Brownian Motion

2.4. The Space $C[0,\infty)$, Weak Convergence, and the Wiener Measure

A. Weak Convergence

B. Tightness

C. Convergence of Finite-Dimensional Distributions

D. The Invariance Principle and the Wiener Measure

3 つ目を議論するために, いくつか新概念を導入.

- $P_n \to^w P$ weak convergence.
- $X_n \to^{\mathcal{D}} X$ converges to X in distribution.
- S 可測完備なら, relatively compact $\iff$ tight. (Prohorov)

$X^{(n)} \to^{\mathcal{D}} X \iff (X^{(n)}_{t_1}, \ldots, X^{(n)}_{t_d}) \to^{\mathcal{D}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_d})$ $\implies$ はかんたんで, $\impliedby$ は, $X^{(n)}$ tight のときなりたつ. 以上をふまえて, Donsker

normalized random walk を interpolate したやつ $\to^{\mathcal{D}}$ BM 上の命題を使って

示す. つまり, normalized random walk を interpolate したやつの有限次元分布が BM のそれに分布収束することと, normalized random walk を interpolate したやつが tight であることをいえばいい.

2.5. Markov Property

A. Brownian Motion in Several Dimensions

複数次元の BM の作り方 (初期分布 μ) Wiener measure を使ってつくる.

1. μ にしたがい B_0 をだして, 1-dim BM たちから作ったベクトル $(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ をたす.
2. $x \in \mathbb{R}^d$ スタートの BM 分布 P^x を 0 スタートの BM P^0 を平行移動してつくる. そして, P^x を重み μ で積分する.

multi dimensional BM を Wiener measure 上でつくったが, 一般の $(\Omega, \mathscr{F})$ 上に一般化したのが, d-dim Brownian family. 条件 (i) をゆるめにしたのは, $\mathscr{F}$ を後で少し大きくするため.

B. Markov Process and Markov Families

They define the Markov family as follows:

Let d be a positive integer. A d-dimensional Markov family is an adapted process $X = \{X_t, \mathfrak{F}_t; t \geq 0\}$ on some $(\Omega, \mathfrak{F})$, together with a family of probability measures $\{P^x\}$ on $(\Omega, \mathfrak{F})$, such that

(a) for each $F \in \mathfrak{F}$, the mapping $x \mapsto P^x(F)$ is universally measurable;

(b) $P^x[X_0 = x] = 1$ for all x;

(c) for $x \in \mathbb{R}^d, s, t \geq 0$ and $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$P^x[X_{t+s} \in \Gamma | \mathfrak{F}_s] = P^x[X_{t+s} \in \Gamma | X_s], P^x \ a.s.$$

(d) for $x \in \mathbb{R}^d, s, t \geq 0$ and $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$P^x[X_{t+s} \in \Gamma | X\_s = y] = P^y[X\_t \in \Gamma], P^x X_s^{-1} \ a.e.y$$

I am trying to show that Markov family X satisfies the following condition: (e) for $x \in \mathbb{R}^d, s, t \geq 0$ and $\Gamma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$P^x[X_{t+s} \in \Gamma | \mathfrak{F}_s] = P^{X_s}[X_t \in \Gamma].$$

C. Equivalent Formulations of the Markov Property

2.6. The Strong Markov Property and the Reflection Principle

A. The Reflection Principle

B. Strong Markov Process and Families

C. The Strong Markov Property for Brownian Motion

2.7. Brownian Filtrations

BM を定義する σ-field $\mathscr{F}_t$ として, $\mathscr{F}_t^B$ より真に大きいものを選ぶことを許した．理由の 1 つは, $\mathscr{F}_t^B$ が左連続であっても右連続でないこと．では $\mathscr{F}_t$ としてどんなものをとるのがいいのか.

一般の $X = \{X_t, \mathscr{F}_t^X; 0 \leq t < \infty\}$ に対し, $\mathscr{F}_t^X$ を大きくしたバージョンとして, μ-零集合を適度に追加した completion $\overline{\mathscr{F}_t^\mu}$ および augmentation $\mathscr{F}_t^\mu$ を考える.

A. Right-Continuity of the Augmented Filtration for a Strong Markov Process

実は, この augmented filtration $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ が, 望む性質をもっている（prop.7.7）. 具体的には, X が強マルコフのとき augmented filtration は右連続. X が強マル

コフかつ左連続のとき augmented filtration は連続.

$\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ が d-dim BM（初期分布 μ）のとき $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もまた d-dim BM である（つまり, $\mathscr{F}_t^\mu$ は, 拡張しすぎていることはない）. 任意の d-dim BM は strong Markov だったこととあわせて, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ も strong Markov.

ここで素朴な疑問: 一般に, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov なら, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もそうか? 答えは yes（7.11-7.13 で証明）. ただし, この一般化は見かけほどありがたくない. なぜなら, 個別ケースでは, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov の証明と $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ strong Markov の証明は（個別ケース特有ではあるが）同じ手口でできるから.

augmentation 万歳!

B. A "Universal" Filtration

ファミリー向けに augmentation を修正する.

augmentation のうざいところは, 初期分布 μ に依存するところ. とくに, strong Markov family になるとこいつは初期分布の連続体なのでやっかい. こういう場合でも使い物になる filtration をつくる.

d-dim strong Markov Family をとる. 任意の測度 μ に対し, $P^x(F)$ を重み μ で積分して $P^\mu(F)$ を得てから, さっきのように $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ をつくる. そして, $\tilde{\mathscr{F}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_\mu \mathscr{F}_t^\mu$ とする. これはいい. $\mathscr{F}_t^X \subset \tilde{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_t$ で, 左と右を使ったとき X は strong Markov だったので, 真ん中使ったときもそう.

$\tilde{\mathscr{F}}_t$ を Markov family の filtration として使っても, family 性をたもつ（BM の場合 Thm.7.15）. Remark7.16 大事やね. まあ八百長.

C. The Blumenthal Zero-One Law

時刻ゼロでは, 情報が少なすぎて, 確率 0 か 1 の event しかない.

2.8.

BM からつくるいろんな確率変数の分布を計算する. 主な道具: 反射原理, 対称性

A.

- T_b: b への到達時刻
- M_t: $\max_{0\le s\le t} W_s$

の分布をしらべる.

B.

0 にすいこまれる BM $W_{t\wedge T_0}$ をしらべる.

- $P^x[W_{t\wedge T_0}\in dy]=P^x[W_t\in dy, T_0>t]$

これを計算.

C.

0 と a にすいこまれる BM $W_{t\wedge T_0\wedge T_a}$ をしらべる.

- $P^x[W_{t\wedge T_0\wedge T_a}\in dy]=P^x[W_t\in dy, T_0\wedge T_a>t]$

これを計算.

D.

最終脱出時刻（これは stopping time ではない）

- θ_t: t までに最大値をとった最近の時刻
- γ_t: t までに 0 をとった最近の時刻

これらの分布を調べる. arcsin law:

$$P^0[\gamma_t\in ds]=\frac{ds}{\pi\sqrt{s(t-s)}}. \tag{1}$$

2.9.

Brownian motion のほとんどの path がもつ性質を調べる. いい性質も, 悪い性質もある.

A.

- 1 次元 BM は zero-mean, $\rho(s,t) = s \wedge t$ なる Gaussian process.
- 大数の強法則 $W_t/t \to 0$, a.s.

B.

ω のゼロ点の集合を $\mathscr{Z}_\omega$ とかく.

- $\mathscr{Z}_\omega$ の Lebesgue 測度は 0.
- 閉, 非有界.
- $t = 0$ が集積点.
- それ自身の中で dense.

1 回 0 通ったら, その付近で何回も通る, というかんじ.

C.

- local maximum は可算, $[0,\infty)$ 中で dense.
- 増加点なし.

D.

- いたるところ微分不可能. 右も左も.

E.

$$\limsup_{t \to 0} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log \frac{1}{t}}} = 1$$

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{W_t(\omega)}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1$$

F.

- $|t-s| \le \delta \implies |W_t - W_s| \le g(\delta) \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2\delta \log \frac{1}{\delta}}$ が必要十分の連続性.

3.1. Introduction

普通の解析の理論では, 微分と積分をそれぞれ定義して, 微積分学の基本定理で両者を結びつける. いっぽう, 確率解析の理論では, 積分のみ定義し, 微積分学の基本定理を使って, 積分して xx になるものとして微分を定義する.

3.2. Construction of the Stochastic Integral

そういうわけで, 確率積分 $I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega)$ を定義したい. だが M_t は有界変動ではないので普通には定義できない.

確率積分の定義が普通にはできないことを示す例 舟木にある.

ではどうするかというと, 非自明だが自然な方法として, 有界変動 process $\langle M \rangle$ を使う方法をとる. まずはじめに, 確率積分が定義できる process M および X のクラスの整理をする.

$$\mu_M(A) \overset{\text{def}}{=} E\int_0^\infty 1_A(t,\omega)d\langle M\rangle_t(\omega), \tag{2}$$

$$[X]_T^2 \overset{\text{def}}{=} E\int_0^T X_t^2\ d\langle M\rangle_t \tag{3}$$

を右辺が有限なときに定義する.

まず基本方針として, X と Y が同値関係 $X_t(\omega) = Y_t(\omega);\ \mu_M -\text{a.e.}(t,\omega) \implies \forall T_{>0}, [X-Y]_T = 0$ をみたすなら, 積分 $I(X)$ と $I(Y)$ が indistinguishable になるように確率積分を定義する.

次に, 確率積分を定義できる M と X のクラスについて, 以下のようである. まず, 被積分過程 X の 2 つの同値クラスを考える：

- $\mathcal{L}$ すべての measurable $\{\mathscr{F}_t\}$-adapted process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス
- $\mathcal{L}^*$ すべての progressively measurable process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス

2 つの空間に X と Y の距離 $[X-Y]$ を入れる. このもとで,

1. $M \in \mathcal{M}_2^{\text{c}}$, $t \mapsto \langle M\rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to$ $X \in \mathcal{L}$ で確率積分を定義.
2. $M \in \mathcal{M}_2^{\text{c}}$, $t \mapsto \langle M\rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to$ $X \in \mathcal{L}^*$ で定義.
3. $M \in \mathcal{M}_2$ $\to$ X predictable で定義.

2 つ目は, この本ではやらない.

本節では後で,

- きつい条件 $M \in \mathcal{M}_2^{\text{c}}$ かつ $[X]_T^2 < \infty$ で最初定義して,
- ゆるい条件 $M \in \mathcal{M}_2^{\text{c,loc}}$ かつ $P[\int_0^T X_t^2 d\langle M\rangle_t < \infty] = 1$

にゆるめる.

M		X
$\mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$	$t \mapsto \langle M \rangle_t$ abs. conti.	$\mathscr{L}$
	otherwise	$\mathscr{L}^*$
$\mathcal{M}_2$		predictable
$\mathcal{M}_2^{\mathrm{c,loc}}$	$t \mapsto \langle M \rangle_t$ abs. conti.	$\mathscr{P}$
	otherwise	$\mathscr{P}^*$

表 1　$\int_0^t X_s \, dM_s$ が定義できる M, X のクラス

A. Simple and Approximations

B. Construction and Elementary Properties of the Integral

確率積分を定義するクラスを宣言したところで, 定義の具体的方針を書く.

1. simple process (単関数の確率過程バージョン) に対して確率積分を定義する.
2. simple process $X^{(n)}, n = 1, 2, \cdots$ の極限で, より一般の process X を近似する. simple process のクラスを $\mathcal{L}_0$ とかくと, 具体的には以下の結果がある.
3. $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to$ $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ 中で dense (距離 $[\cdot]$).
4. $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to$ $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^*$ 中で dense.
5. 注意: $\mathcal{L}^*(M) \subset \mathcal{L}(M)$ なので $\mathcal{L}$ のほうが dense にするのがむずい.
6. $\lim_n [X^{(n)} - X] = 0$ のとき $I(X^{(n)})$ も距離 $|| \cdot ||$ で極限をもつ. これを $I(X)$ とかいて, 確率積分の定義とする.

Lemma 2.7 のきもち $E \int \cdot ds$ の結果を $E \int \cdot dA$ に転用したい. $t \mapsto \langle M \rangle_t$ 絶対連続の時は簡単にできたが, 今回はむずい. ω ごとに A_t の逆関数を使って時刻をずらして $E \int \cdot ds$ と $E \int \cdot dA$ の関係式をつくる. 逆関数必要なので, A_t を狭義単調増加にするため $A_t + t$ にしている.

C. A Characterization of the Integral

cross-variation formula $\langle I^M(X), I^N(Y)\rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N\rangle_u; t \geq 0, P-$ a.s. を示す．すでに両辺とも定義自体はすんでいる．simple process のときはすぐできる．これを $X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$ の場合に拡張する．2.14 から準備をはじめて, prop. 2.17 で証明している．

そして, 確率積分の特徴づけを最後にしている (prop. 2.19). 特徴付け: $I^M(X)$ は以下をみたす唯一の martingale $\Phi \in \mathcal{M}_2^c$ である:

$$\forall N \in \mathcal{M}_2^c, \langle \Phi, N\rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N\rangle_u;\ 0 \leq t < 0, a.s.P. \tag{4}$$

右辺には Lebesgue-Stieltjes 積分しか出てこないから, この特徴付けはとても便利らしい．

D. Integration with Respect to Continuous, Local Martingales

確率積分の被積分過程の定義域を $X \in \mathcal{M}_2^c$ を $\in \mathcal{M}_2^{c,loc}$ に拡張する．

3.3. The Change-of-Variable Formula

確率積分の定義と存在証明はしたが、実際に計算する技術がない。そこで ito rule を証明して使う。

continuous semimartingale とかいう謎概念

$$\text{continuous semimartingale} = \text{local martingale} + \text{increasing} - \text{increasing} \tag{5}$$

A. The Ito Rule

Ito Rule は,

1. continuous semimartingale X の滑らかな関数 $f(X)$ もまた conti semimartingale であり,

2. その裏付けとなる分解も与える.

B. Martingale Characterization of Brownian Motion

条件「2 次変分 $= t$」が連続局所マルチンゲールの中で, Brown 運動を特徴づけている.

- 「連続」を外すと, Poisson 過程も該当するので, 「連続」というのは本質的である.

C. Bessel Processes, Questions of Recurrence

- d 次元 Brown 運動の原点からの距離の過程 $\stackrel{\text{def}}{=}$ Bessel process R.
- R_t がしたがう SDE:

$$R_t = r + \int_0^t \frac{d-1}{2R_s} ds + B_t \tag{6}$$

ここからいろんな結果が出る.

1. $P[R_t > 0] = 1$ はあたりまえ. 実は, さらに, $d \geq 2$ のとき

$$P[R_t > 0, \forall 0 < t < \infty] = 1. \tag{7}$$

$d = 1$ のときはちがう.

2. $m = \inf R_t$, $r > 0$ スタート とする.
   (a) $d = 2$ のとき, $m = 0$, a.s. P.
   つまり, ちょうど 0 にはこないが, 0 にいくらでも近いところにはくる.
   (b) $d \geq 3$ のとき, $P[m \leq c] = (\frac{c}{r})^{d-2}$.
   こないこともある. スタート地点の近くほど, きやすい.

D. Martingale Moment Inequalities

- Burkholder-Davis-Gundy 不等式を示すのが目標.

- きもち: t-増加である $E(|M_t^*|^{2m})$ と $E(\langle M\rangle_t^m)$ が同じレートで増えることを言っている.

3.4. Representations of Continuous Martingales in Terms of Brownian Motion

Martingale 表現定理のいくつかの形. いずれも, Brownian motion が基本的な連続 martingale であることをある意味で示している;

1. 連続局所マルチンゲールからはじめる結果:
   - **Thm. 4.2** d 個の連続局所マルチンゲールのベクトルは, ある条件のもとで, r 次元 Brown 運動の確率積分で表現できる（$r \le d$）.
   - **Thm. 4.6, Thm. 4.13 (多変数, F. B. Knight)** 連続局所マルチンゲールは, random time-change によって Brown 運動に変換できる.
2. Brown 運動 W からはじめる結果:
   - **Thm. 4.15 (derivative pricing に使われる形)** Brownian filtration についての連続局所マルチンゲールは W についての積分で表現できる.
   - **Problem 4.17** $0 \le T \le \infty$ に対し, 任意の $\mathscr{F}_T$-可測確率変数は W についての積分で表現できる.

3.5. The Girsanov Theorem

適当な条件のもとで, Brownian motion のドリフトを消すような, 新しい測度がとれる. 指数マルチンゲール

$$Z_t(X) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left[\sum_{i=1}^{d}\int_0^t X_s^{(i)} dW_s^{(i)} - \frac{1}{2}\int_0^t ||X_s||^2 ds\right] \tag{8}$$

はそう呼んでいるだけで, 本当に martingale かは不透明. supermartingale であることはすぐいえる. $Z_t(X)$ が martingale なら, Girsanov がいえる. $Z_t(X)$ が martingale になる十分条件: Novikov

5.1. Introduction

5.2. Strong Solutions

stochastic differential equation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{9}$$

A. Definitions

strong solution の定義. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と initial condition ξ がはじめから与えられていて, その上の解が strong solution. 解 X が $\{\mathscr{F}_t\}$-adapted であると定義していることが重要. これは因果律からきている (自然科学からの要請).

strong uniqueness の概念. 2 つの解が, ずっと一緒である確率が 1 なら unique.

B. The Ito Theory

dW 項がない簡単な場合は, $b(t,x)$ が x について locally Lipschitz 連続なら, 解が一意. これを一般の SDE に拡張したのが, Ito の仕事 (Thm. 5.2.5). 5.2.5 は解の大域的な存在を保証するものではない (Rem. 5.2.8).

では, strong solution の大域的な存在を保証する条件はなにか? $\to$ Thm. 5.2.9

C. Comparison Results and Other Refinements

1 次元のときは, Lipschitz 条件はゆるめられる (Prop. 5.2.13).

D. Approximations of Stochastic Differential Equations

行間埋め作業

■1.3+（def.1.3 $\Longrightarrow$ def.1.1 $\Longrightarrow$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] \le \mathsf{P}[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] = 1 \Longrightarrow \forall t \in [0,\infty), \mathsf{P}[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{P}[X^{(n)} \in A] - \mathsf{P}[Y^{(n)} \in A]\right| &= \left|\int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right)\mathsf{P}(d\omega)\right| \\ &\le \int_\Omega \left|1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right|\mathsf{P}(d\omega) \\ &\le \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega)\neq Y^{(n)}(\omega)}\mathsf{P}(d\omega) \\ &= \mathsf{P}[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[X_k \neq Y_k] = 0\end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

■1.4 $\mathsf{P}[T \neq t] = 1$ は, T が連続であることより. Ω に位相が入っている状況を考えている.

■1.5 気持ち: ある時刻 t で $X_t(\omega)$ と $Y_t(\omega)$ が等しいなら, 連続性を使って, t の左の近くも等しいことがいえる. 加えて, 有理点で $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ なので, それぞれの有理点を左にのばせばいい.

■1.6+（Fubini の定理を使えと書いてあるところ） X が可測のとき,

1. 各 $\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が Borel 可測であること:
   Rudin[2] Theorem 8.5 そのまま. X_t は可積分とは限らない.

2. $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ が（定義されるなら） Borel 可測であること:
   Rudin よめ.
3. X_t の値域が $\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 内の区間 I が $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ をみたすなら積分の交換などができること:
   $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ ゆえ Fubini より $X_t(\omega)$ が積空間について可積分であることがいえ, 積分の交換ができる.

このへん当たり前に感じないようではまだこの本読むのは早い気がする.

■1.9+（Y も $\{\mathscr{F}_t\}$ に適合していること） X_t は $\mathscr{F}_t$-可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\} \in \mathscr{F}$ かつ右辺は測度 0 だから, 左辺は $\mathscr{F}$ の P-negligible set である. ゆえに左辺 $\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t$ であり, $\{Y_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$ がいえる.

■1.9+（This requirement is not same as saying $\mathscr{F}_0$ is complete について） たとえば, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ は完備だが, 空でない測度 0 集合を 1 つももたない [3].

”this requirement” は, $\mathscr{F}_0$ が, それ自体よりもはるかに大きい $\mathscr{F}_t$ たちのゼロ集合の面倒もみることを要求するから, $\mathscr{F}_0$ 自体が完備 (この概念は時刻ゼロで閉じている) であることよりもかなり強い.

■1.11+

- prog. msb. $\implies$ msb.
  $\{(s,\omega); 0 \leq s < \infty, \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in A\} = \cup_{n=1}^{\infty}\{(s,\omega); 0 \leq s \leq n, \omega \in \Omega, X_s(\omega) \in A\}$. 右辺の中身はそれぞれ $\in \mathscr{B}([0,n]) \otimes \mathscr{F}_n \subset \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$ ゆえ, 右辺 $\in \mathscr{B}([0,\infty)) \otimes \mathscr{F}$.
- prog. msb. $\implies$ adapted
  $(s,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ の $s = t$ section は $\mathscr{F}_t$-measurable だから.

■1.13 気持ち: 何も仮定しないと, ω と t の間の連携が弱いので, 1.12 のように, modification の存在しかいえない. 連続性を課すと, 連携が強まって, path 全

体に対する主張ができるようになる.

$$\{(s,\omega);\ X_s^{(n)}(\omega)\in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t\right]\times X^{-1}_{\frac{(k+1)}{2^n}t}(A)\right)\bigcup\left(\{0\}\times X_0^{-1}(A)\right)$$
$$\in \mathscr{B}([0,t])\otimes\mathscr{F}_t$$

に注意 [4].

■1.14　X が adapted でなくても, 1.13 の中で, $\mathscr{F}_t$ を $\mathscr{F}$ で置き換えれば, X が measurable であることの証明になる. 注意: $\omega\mapsto X_t(\omega)$ が $\mathscr{F}/\mathscr{B}(\mathbb{R}^d)$-measurable であることは, X が stochastic process であることの定義に含まれている.

■2.1　**気持ち**: optional time は, t より前に起こったかどうかが t にわかるということ. t に起こったかどうかは, t にはわからず, t よりほんの少し後にならないとわからない.

■2.3　The first statement: $T\equiv t_0\geq 0$ を定数とすると, 任意の $t\geq 0$ に対し $\{t_0\leq t\}$ は $\varnothing$ もしくは Ω でありいずれも $\mathscr{F}_t$ に属する.

気持ち: optional time であっても, t 時点で少し先がネタバレしている場合は, t に出来事が起こったかどうかが t ですでに判明し, stopping time になる.

■2.4　これめっちゃ強くね. 2.11 の証明で便利さを感じた. optional を全部 stopping の言葉でいいかえられる.

$\{\mathscr{F}_{t+}\}$ RC なので, 2.3 より, "$\{\mathscr{F}_{t+}\}$ について optional $\iff$ $\{\mathscr{F}_{t+}\}$ について stopping". よって, あとは, "$\{\mathscr{F}_{t+}\}$ について optional $\iff$ $\{\mathscr{F}_t\}$ について optional" をいえばよい.

$\Longleftarrow$ は $\mathscr{F}_t\subset\mathscr{F}_{t+}$ より明らか.

$\Longrightarrow$ を示す. 任意の t で $\{T<t\}\in\mathscr{F}_{t+}$ のとき,

$$\{T<t\} = \bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{T<t-\frac{1}{m}\right\}\in\mathscr{F}_t \tag{10}$$

なので示された. 最後の $\in$ は, $\{T<t-\frac{1}{m}\}\in\mathscr{F}_{(t-\frac{1}{m})+}\subset\mathscr{F}_t$ より.

■2.6　$X_r(\omega) \in \Gamma$ とすると, Γ: open と X: RC より時刻 r の直後も少しの時間 path は Γ に入っている. その時間の中から有理数時刻を取ってくればよい.

■2.8　最後から 2 番目の $\in$ で 2.4 を使っている.

■2.9

- The first two assertions:
  $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$ および $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$ より.
- The third assertion:
  $\{0 < T < t, T + S > t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)} \{t > T > r, S > t - r\}$ がなりたつこと:
  $0 < T < t, T + S > t \iff 0 < T < t, S > t - T \iff$ ある $r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)$ があって $\{t > T > r, S > t - r\}$ をいえばよい. 2 つ目の $\iff$ について, 実際
  - $\Longleftarrow$: $0 < r < T < t$, $S > t - r > t - T$.
  - $\Longrightarrow$: $t > T > t - S$ だが, 有理数の稠密性より $t > T > r > t - S$ なる $r \in \mathbb{Q}$ がとれる. このとき $S > t - r$, $r < T < t$.

  である.

■2.11　PROOF. の第 1 式より最後の主張は明らか, 第 2 式より optional の inf についての主張は明らか. あとは optional の sup を示せばいいが, 2.4 より PROOF. 第 1 式の右辺の中身はすべて $\in \mathscr{F}_{t+}$ なので, 左辺も $\in \mathscr{F}_{t+}$ で, 2.4 を再び使って, $\sup T_n$ が optional.

■2.16　$\mathscr{F}_{T \wedge S} \subset \mathscr{F}_T \cap \mathscr{F}_S$ となること: $T \wedge S \leq T$, $T \wedge S \leq S$ より.
on the other hand, のところ: 2.13 より R は $\mathscr{F}_R$-msb. 2.15 より $\mathscr{F}_R \subset \mathscr{F}_T$ なので, R は $\mathscr{F}_T$-msb. でもある.

■2.18　$\{T < \infty\} \cap \{T \leq t\} = \{T \leq t\} \in \mathscr{F}_t \implies \{T < \infty\} \in \mathscr{F}_T$.
$f : [0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega$, $(s, \omega) \mapsto (T(\omega) \wedge s, \omega)$ が $\mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t / \mathscr{B}([0,t]) \times$

$\mathscr{F}_t$-可測であること: 積可測空間が全 rectangle を含む最小の σ-algebra であることと, Rudin 1.12(a) より, $f^{-1}(\text{rectangle}) \in \mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t$ を示せば充分.

Rudin 1.12(c) より, $\forall B \in \mathscr{B}([0,t]), \{(s,\omega); T(\omega) \wedge s \in B\} \iff \forall u \in [0,t], \{(s,\omega); T(\omega) \wedge s \le u\}$.

いっぽう, $\{(s,\omega); T(\omega) \wedge s \le u\} \cap \{(s,\omega); \omega \in A\}$ を変形すると $\in \mathscr{B}([0,t]) \times \mathscr{F}_t$ がいえて OK.

■3.3 $\mathscr{F}_t^M = \mathscr{F}_t^N$ となること: $\{\{M_t \in A\}; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\} = \{\{N_t \in A\}; A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})\}$ をいえばよい. さらに, $\{M_t \in A\} = \{N_t \in A + \lambda t\}$ だから,

$$A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}) \implies A + x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$$

をいえば充分.

1. $A + x \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$ なる A たちの集合 $\mathscr{S}$ は σ-algebra になる.
2. U open $\implies$ $U + x$ open. これは $y \in U + x$ を包む開球をとれるから. ゆえに $\mathscr{O} \subset \mathscr{S}$.
3. 1., 2. と $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ の最小性より, $\mathscr{B}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}$. 以上で示した.

■3.22 (Optional Sampling) S optional のとき, そもそも $\mathscr{F}_S$ が定義できない. $\mathscr{F}_{S+}$ のみ定義できる. ということに注意.

■4.10 (Doob-Meyer Decomposition) 書きかけ すべての文章に行間がある地獄である. 定理のステートメントは本で見てください.

■一意性 X が 2 通りの分解 $X_t = M_t' + A_t' = M_t'' + A_t''$ を許すと仮定する. ここで M', M'' は MG, A', A'' は natural increasing である. このとき

$$\{B_t \stackrel{\text{def}}{=} A_t' - A_t'' = M_t'' - M_t', \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\} \tag{11}$$

は MG で, 任意の RC MG $\{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$ に対し

$$\mathsf{E}[\xi_t(A_t' - A_t'')] = \mathsf{E}\int_{(0,t]} \xi_{s-} dB_s = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left[B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}(n)}\right] \tag{12}$$

である．ここで $\Pi_n = \{t_0^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}\}$, $n \geq 1$ は $[0,t]$ の分割であって, $n \to \infty$ 極限で $||\Pi_n|| := \max_{1\leq j\leq m_n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to 0$ となるものとする．

$$\mathsf{E}\left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] = 0, \text{ and thus} \quad \mathsf{E}\left[\xi_t\left(A'_t - A''_t\right)\right] = 0. \tag{13}$$

■2.4.1　metric であること

1. $\rho(\omega_1,\omega_2) = 0 \iff \omega_1 \equiv \omega_2$.
2. $\rho(\omega,\omega) = 0$.
3. $\rho(\omega_1,\omega_2) = \rho(\omega_2,\omega_1)$.
4. 三角不等式

$$\begin{aligned}
\rho(\omega_1,\omega_3) &= \sum_n \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t\leq n}\left(|\omega_1(t) - \omega_3(t)| \wedge 1\right) \\
&\leq \sum_n \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t\leq n}\left([|\omega_1(t) - \omega_2(t)| + |\omega_2(t) - \omega_3(t)|] \wedge 1\right) \\
&\leq \sum_n \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t\leq n}\left(|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1 + |\omega_2(t) - \omega_3(t)| \wedge 1\right) \\
&\leq \sum_n \frac{1}{2^n}\left[\max_{0\leq t\leq n}\left(|\omega_1(t) - \omega_2(t)| \wedge 1\right) + \max_{0\leq t\leq n}\left(|\omega_2(t) - \omega_3(t)| \wedge 1\right)\right] \\
&= \rho(\omega_1,\omega_2) + \rho(\omega_2,\omega_3).
\end{aligned}$$

■2.4.8　continuity

$t \leq T$ のとき,

$$\rho(\omega_m,\omega) = \sum_n \frac{1}{2^n} \max_{0\leq t'\leq n}\left(|\omega_m(t') - \omega(t')| \wedge 1\right) \tag{14}$$

$$\geq \frac{1}{2^{\lceil T\rceil}}\left(|\omega_m(t) - \omega(t)| \wedge 1\right) \tag{15}$$

以上をふまえて, $0.01 > \epsilon > 0$ に対して $\rho(\omega_n,\omega) < \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2^{\lceil T\rceil}}$ のとき,

$$\frac{\epsilon}{2} > |\omega_m(t) - \omega(t)| \wedge 1 = |\omega_m(t) - \omega(t)|$$

で,

$$
\begin{aligned}
m^T(\omega_n,\delta)-m^T(\omega,\delta) &= \max_{0\le s,t\le T}|\omega_n(s)-\omega_n(t)|-\max_{0\le s,t\le T}|\omega(s)-\omega(t)| \\
&= \max_{s,t}|\omega_n(s)-\omega(s)|+\max_{s,t}|\omega_n(t)-\omega(t)| \\
&< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

同様に, $m^T(\omega,\delta)-m^T(\omega_n,\delta)<\epsilon$.

■2.4.9　結局何しているか

1. ω_n の部分列 $\tilde{\omega}_n$ をうまくとると, 各 $r\in\mathbb{Q}_+$ に対して各点極限がある. それを $\omega(r), r\in\mathbb{Q}_+$ とする.
2. $\omega(r)$ は $r\in\mathbb{Q}_+$ 上一様連続（(4.5) が強い連続性条件になっている）なので実数上の連続関数に拡張でき, それを改めて $\omega(r)$ とおく.
3. 実は任意の $t\in[0,T]$ に対して $\tilde{\omega}_n$ は ω に一様に収束している.
4. 3. は metric ρ のもとで $\tilde{\omega}_n\to\omega$ を意味している（じつは同値）.

<u>G_n open であること</u>

$\omega\in G_n$ をとる. このとき G_n の定義より $|\omega(0)|<n$.

$\rho(\omega,\omega')<\frac{n-|\omega(0)|}{2}\wedge 0.01=:\delta$ なる ω' に対し,

$$
\begin{aligned}
\delta>\rho(\omega,\omega') &= \sum_n \frac{1}{2^n}\max_{0\le t\le n}(|\omega'(t)-\omega(t)|\wedge 1) \\
&\ge |\omega'(0)-\omega(0)|\wedge 1 \\
&= |\omega'(0)-\omega(0)| \quad (\delta<1 \text{ なので}) \\
&\ge |\omega'(0)|-|\omega(0)|
\end{aligned}
$$

ゆえに

$$
|\omega'(0)|<\delta+|\omega(0)|<\frac{n+|\omega(0)|}{2}<\frac{n+n}{2}=n.
$$

つまり $U(\omega,\delta)\subset G_n$. これは G_n が open であることをいっている.

<u>K_δ 閉であること</u>

$[\epsilon,\infty) \subset \mathbb{R}$ 閉かつ, $m^T(\omega,\delta)$ が ω について連続であることより（2.4.8）, $\{\omega \in C[0,\infty); m^T(\omega,\delta) \geq \epsilon\}$ が閉. よって K_δ はこれと $\overline{A}$（閉）の共通部分で, また閉.

■2.4.10　(4.6)(4.7) は, n によらず, P_n が変な ω をとりづらい, という条件になっていて, tight みがある.

参考文献

[1] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/2159241/complete-filtration`.

[4] `https://www.stat.purdue.edu/~chen418/studynotesmath.html`.