

# 河澄響矢『トポロジーの基礎（上）』読書記録

最終更新: 2022 年 9 月 23 日

注意: 記述の正確性は保証しません。ややこしいことになりたくないので、本文の引用は最小限にしています。

## 誤植と思われるもの (2022/6/15 初版第 1 刷)

頁	行	誤	正
20	1	$f_{\#} :=$	$f_* :=$
32	7	$; X \rightarrow X$	$: X \rightarrow X$
51	4	$\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}V$	$\mathbb{R}P^{n-1} \rightarrow V$
85	5	$\partial_{n-1} : C'_{n-1} \rightarrow C'_{n-2}$	$\partial'_{n-1} : C'_{n-1} \rightarrow C'_{n-2}$
87	1	$\partial_{n+1}(C''_{n+1})$	$\partial''_{n+1}(C''_{n+1})$
105	2	$\beta_{\sigma} \text{Sd}_n(\partial_n \sigma)$	$\beta_{\sigma} \text{Sd}_{n-1}(\partial_n \sigma)$
107	-8	$\partial_{n-1}(\sigma)$	$\partial_n(\sigma)$
118	11	$f \circ p \simeq f \circ p'$	$f \circ p \simeq f' \circ p$
119	8	$p \circ 1_{S^1} = \varphi_1 \circ \varphi_1$	$1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$
121	11	$I$ の閉集合	$I$ の開集合
121	11	$F(x, 0) = F'(x, 0) = 0$	$F(x, 0) = F'(x, 0)$
121	-4	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset W_i$	$\{x\} \times [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}] \subset \overline{F}^{-1}(W_i)$
133	2	$l_1 = \alpha \circ \lambda_1$ および $l_2 = \alpha \circ \lambda_2$	$l_1 = \beta \circ \lambda_1$ および $l_2 = \beta \circ \lambda_2$
137	-8	準同型定理により	補題 A.3.3 により
144	10	$\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$	$X_n := \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$
146	4	$1 \leq i \leq n$	$1 \leq i \leq g$
153	-11	$1 - \theta_{\#} \partial_1$	$1 + \theta_{\#} \partial_1$
153	-9	(全体)	0 と 1 を入れ替える.
153	-7	$[u - 0]$	$[u + 0]$
169	4	$(X, A; M)$	$(X, A)$
169	4	$(X_{\lambda}, A \cap X_{\lambda}; M)$	$(X_{\lambda}, A \cap X_{\lambda})$
173	-3	$d_n \circ r$	$r \circ d_n$
174	2	$r \circ d_n$	$d_n \circ r$
176	-8	$H_n(X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$	$H_n(X, X \setminus \{p\}) \cong \mathbb{Z}$
176	-10	$\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i$	$[\sum_{i=1}^m a_i \sigma_i]$
180	-2	$U_i \subset X$	$U_i \overset{\text{open}}{\subset} X$
200	8	(3.2.1)	(4.1.3)
205	-11	$\{z_n = 0\} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$	$\{z_n \neq 0\} \cong \mathbb{C}^n$
207	9	Hausdorff	Hausdorff
208	1	$(\varphi_{\lambda}(y), t)$	$\varphi_{\lambda}(y)$
219	-2	$k = 1$ のとき $\mathbb{Z}$	$k = 1$ のとき $\mathbb{Z}^2$
220	4	胞対複体	胞体複体
222	-6	$\gamma(p_-) = p_+$	$\gamma_k(p_-) = p_+$

## 第1章

■4,4 ( $A_i$  に入っている) 相対位相の定義より,  $f^{-1}(C)$  は  $Y$  の閉集合.

■9,6 接着空間  $C \cup_g B$  の絵を描いた (図1) .

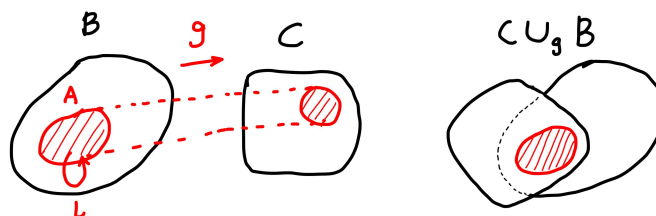


図1 接着空間  $C \cup_g B$ .

■10,6 (自然な写像  $\coprod_{i=1}^n A_i \rightarrow Y$  が等化写像であること) 部分集合  $O \subset Y$  が  $p^{-1}(O) = \coprod (O \cap A_i) \stackrel{\text{close}}{\subset} \coprod A_i$  を満たすと仮定する. 任意の  $i$  で  $O \cap A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$ , つまり  $O \cap A_i \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$  が成り立つ. ゆえに  $O \cap (\cup A_i) = O \cap Y = O \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$  となり条件 (a) が示された.

■23,1 (定理 1.2.1 証明) 図2.

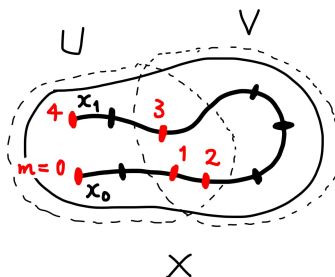


図2  $x_0, x_1$  が第一の部分集合から来ている場合.  $N = 9, m = 4$ .

■21,-8 ( $\varpi_X^{-1}(\ker \varepsilon_{\pi_0(X)}) / \ker \varpi_X \cong \ker \varepsilon_{\pi_0(X)}$  がなりたつこと) 一般に  $f: X \rightarrow Y$  を全射準同形,  $A$  を  $0$  を含む  $Y$  の部分集合とする.  $f(f^{-1}(A)) = A$  ( $f$  の全射性より) と準同形定理より  $f^{-1}(A) / \ker f \cong A$  がなりたつ.

■44,8 (補題 1.4.5)

1.  $\iota$  が等化写像であることを示すために,  $\iota$  が補題 1.1.13(a) の条件を満たすことを示す. 部分集合  $O \subset X \vee Y$  をとり,  $\iota^{-1}(O) \stackrel{\text{close}}{\subset} X \coprod Y$  と仮定する. 言い換えると,  $\iota^{-1}(O) = U \coprod V$ ,  $U \stackrel{\text{close}}{\subset} X, V \stackrel{\text{close}}{\subset} Y$ .  $\iota$  の全射性より,  $O = \iota(\iota^{-1}(O)) = \iota(U \coprod V) \stackrel{\text{close}}{\subset} X \vee Y$ .
2.  $\iota(x_0) = (x_0, y_0) = \iota(y_0) \implies x_0 \sim y_0$  であり, 逆に  $\iota$  の値が等しい点の組は  $(x_0, y_0)$  のみである. よって補題 1.1.13(a)  $\implies$  (c) より  $X \vee Y$  は  $X \coprod Y$  において  $x_0, y_0$  を同一視して得られる空間と同相.
3.  $(f \vee g)|_{X \times \{y_0\}} = f$  と  $(f \vee g)|_{\{x_0\} \times Y} = g$  は連続写像. また  $X \times \{y_0\} \stackrel{\text{close}}{\subset} \{x_0\} \times Y$  かつ  $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) = X \vee Y$  であるから貼り合わせの補題が適用できて  $f \vee g$  は連続.

■44,-6 余積のイメージ図を描いた (図3) .

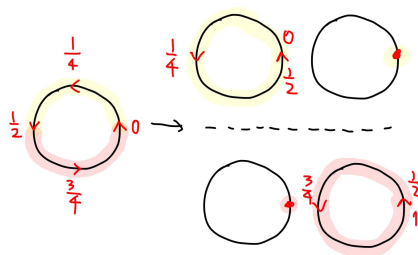


図3 余積

■44,-10  $g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$  のイメージ図を描いた (図4) .

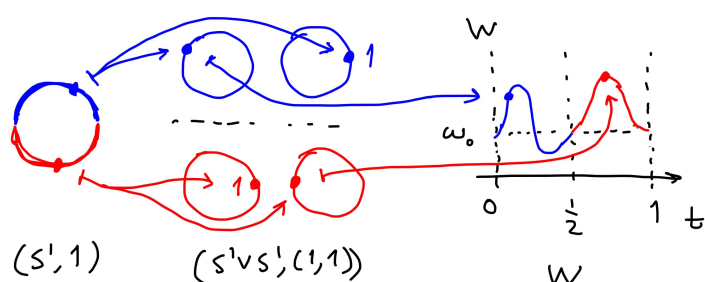


図4  $g \cdot f = (f \vee g) \circ \mu$  の図示.

■52,6 (命題 1.4.13) ? 表現論やってから戻ってくる.

## 第2章

■65,-4 ( $H_0(X)$  が  $\partial_1$  の余核であること)  $p_X$  が全射であることと,  $\ker p_X = B_0(X) = \text{Im } \partial_1$  より.

■66,4 商加群の普遍性より, 以下の準同形  $\varphi, \psi$  がただ一つずつ存在する:

$$\exists! \varphi : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}\pi_0(X), \varphi p_X = \varpi_X \varphi_{0\#}, \quad \exists! \psi : \mathbb{Z}\pi_0(X) \rightarrow H_0(X), \psi \varpi_X = p_X \varphi_{0\#}^{-1}.$$

$\varphi, \psi$  は互いの逆写像になっている. 実際,  $\varphi \psi \varpi_X \varphi_{0\#} = \varpi_X \varphi_{0\#}$  であることと,  $\varpi_X \varphi_{0\#}$  が全射であることより  $\varphi \psi = \text{id}_{\mathbb{Z}\pi_0(X)}$  である. 同様に  $\psi \varphi = \text{id}_{H_0(X)}$ .

■66,9  $\varpi_X$  と  $p_X$  が自然変換であることに注意して  $\varpi_Y \varphi_{0\#} f_* = \varpi_Y f_* \varphi_{0\#}$  を変形すると,  $\varphi f_* p_X = f_* \varphi p_X$  を得る.  $p_X$  は全射なので  $\varphi f_* = f_* \varphi$  を得る.

■75,14 プリズム分解のイメージ図を描いた (図5) .

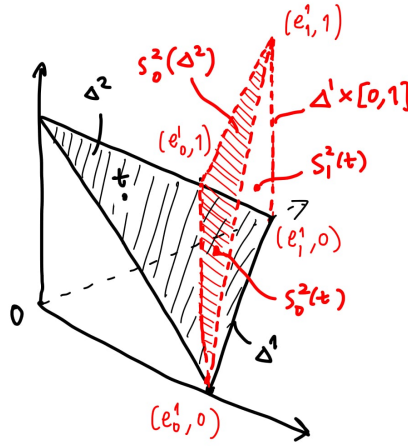


図5 プリズム分解 ( $n=1, i=0$ ) .

■75,-3 (補題 2.2.8) 任意の  $\sigma \in X^{\Delta^n}$  に対し,  $(f \times 1)_* \Phi_n^X(\sigma) = \sum (-1)^i (f \times 1) \circ (\sigma \times 1) \circ s_i^{n+1} = \sum (-1)^i ((f \circ \sigma) \times 1) \circ s_i^{n+1} = \Phi_n^Y f_*(\sigma)$  であるから.

■77,8  $u \in Z_n(S_*(X))$  とすると,  $u = (-1)^{n+1} \partial_{n+1} \Phi_n u + (-1)^n \Phi_{n-1} \partial_n u = \partial_{n+1} ((-1)^{n+1} \Phi_n u) \in \text{Im } \partial_{n+1}$  ゆえ  $H_n(X) = 0$ .

■79,7 (定理 2.2.11) ?

■99,-8 (定理 2.4.3) 補題 2.1.9 証明と類似の図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}X^{\Delta^1} & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}X^{\Delta^0} & \xrightarrow{\partial_0} & \mathbb{Z} \\ \varphi_{1\#} \downarrow \sim & \circ & \varphi_{0\#} \downarrow \sim & \circ & 1_{\mathbb{Z}} \downarrow \sim \\ \mathbb{Z}X^I & \xrightarrow{D_X} & \mathbb{Z}X & \xrightarrow{\varepsilon_X} & \mathbb{Z} \end{array}$$

より,  $\ker \partial_0 / \text{Im } \partial_1 \cong \ker \varepsilon_X / \text{Im } D_X$  を得る. 一方, 補題 1.2.10 より  $\ker \varepsilon_X / \text{Im } D_X \cong \ker \varepsilon_{\pi_0(X)}$  であるから証明が完了する.

■104,-1 ( $\text{mesh}(\partial_n \sigma) \leq \text{mesh}(\sigma)$  がなりたつこと)  $\partial_n \sigma = \sum (-1)^i (\sigma \circ d_i^{n-1})$  を思い出す. 任意の  $i$  で  $(\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1}) \subset \sigma(\Delta^n)$  ゆえ  $\delta((\sigma \circ d_i^{n-1})(\Delta^{n-1})) \leq \delta(\sigma(\Delta^n))$  であることと,  $\text{mesh}$  の定義より従う.

■105,-3 ? なぜ  $(\text{Sd}_n)^m(\sigma) = \sigma_*(\text{Sd}_n)^m(1_n)$  ?

■107,1 ? なぜ  $m(\sigma \circ d_i^{n-1}) \leq m(\sigma)$  ?

■102,-4 (重心細分の計算)

•  $\omega_1$  の計算

$$\begin{aligned} \omega_1 &:= \beta_{1_1}((d_0^0)_* \omega_0) - \beta_{1_1}((d_1^0)_* \omega_0) \\ &= \beta_{1_1}(d_0^0) - \beta_{1_1}(d_1^0) \\ &= (e_{01}e_1) - (e_{01}e_0) \quad ((e_0 + e_1)/2 := e_{01}, \text{以下同様}). \end{aligned}$$

•  $\omega_2$  の計算

$$\begin{aligned} \omega_2 &:= \beta_{1_2}((d_0^1)_* \omega_1) - \beta_{1_2}((d_1^1)_* \omega_1) + \beta_{1_2}((d_2^1)_* \omega_1) \\ &= \beta_{1_2}((e_{12}e_2) - (e_{12}e_1)) - \beta_{1_2}((e_{20}e_2) - (e_{20}e_0)) + \beta_{1_2}((e_{01}e_1) - (e_{01}e_0)) \\ &= (e_{012}e_{12}e_2) - (e_{012}e_{12}e_1) - (e_{012}e_{20}e_2) + (e_{012}e_{20}e_0) + (e_{012}e_{01}e_1) - (e_{012}e_{01}e_0). \end{aligned}$$

まとめると, 図 6 のようになる.

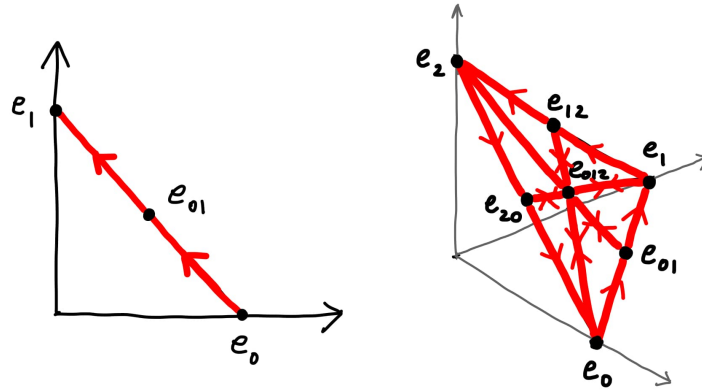


図 6 左:  $\omega_1$  のイメージ図, 右:  $\omega_2$  のイメージ図.

### 第 3 章

■118,-2 (回転数  $\tau$  の定義) 混乱してしまった. 写像度  $\deg$  の定義域は  $(S^1, 1)$  から  $(S^1, 1)$  への連続関数の集合であるから, 回転数  $\tau$  の定義を標準射影  $\pi$  を用いて以下のように修正する:

$$\tau : \pi_1(S_1, 1) \xrightarrow{(p^*)^{-1}} [(S^1, 1), (S^1, 1)] \xrightarrow{\pi^{-1}} (S^1, 1)^{(S^1, 1)} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

写像度のホモトピー不変性により  $\tau$  は well-defined.

■119,7 ( $\tau$  が群の準同型であること)  $[l_1], [l_0] \in \pi_1(S^1, 1)$  をとると,

$$\begin{aligned} \tau([l_1] \cdot [l_0]) &= \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1}([l_1] \cdot [l_0]) \\ &= \deg(\overline{[l_1] \cdot [l_0]}) \quad (\overline{[l_1] \cdot [l_0]} \circ p = l_1 \cdot l_0. \text{ cf. 補題 3.1.7}) \\ &= \deg([l_1 \cdot (1.4.2) \text{ の意味 } l_0]) \\ &= \deg[l_1] + \deg[l_0] \quad (\text{補題 1.4.4}) \\ &= \tau([l_1]) + \tau([l_0]) \end{aligned}$$

となるから  $\tau$  は群の準同型. 以下,  $\tau$  のホモトピー不変性を理由に記号を濫用して  $\tau([l])$  を  $\tau(l)$  と書いているみたい.

■119,8 ( $\tau(l_0) = \deg(\varphi_1) = 1$ ) 直前の式がよく分からなかったけど, こういうことかな:  $l_0 = p = 1_{S^1} \circ p = \varphi_1 \circ p$  ゆえ  $[l_0] = p^*[\varphi_1]$  だから,  $\tau(l_0) = \deg \circ \pi^{-1} \circ (p^*)^{-1} \circ p^*([\varphi_1]) = \deg(\varphi_1) = 1$ .

■128,-9 ( $\alpha^{-1} = (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1}$  がなりたつこと)

$$\begin{aligned} (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] &= (\Pi F \circ (l \times 1_I))([j_0]^{-1} \cdot [j_0]) \\ &= (\Pi F \circ (l \times 1_I))[c_{(0,0)}] \quad (\text{cf. p.125,1.2}) \\ &= [F \circ (l \times 1_I) \circ c_{(0,0)}] \\ &= [c_{x_0}] = e_{x_0}. \end{aligned}$$

同様に  $(\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0] \cdot (\Pi F \circ (l \times 1_I))[j_0]^{-1} = e_{x_0}$  も成立する.

### van Kampen の定理の証明

■139,-4 ( $P$  が  $l$  に関して開被覆  $\{U_+, U_-\}$  に適合していること)  $l$  に関して開被覆  $\{U_+, U_-\}$  に適合している分割  $P$  の例を図 7 に示した.

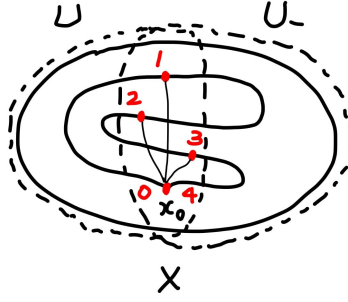


図7  $l$  に関して開被覆  $\{U_+, U_-\}$  に適合している分割  $P$  の例.

■142,-9  $I \times I$  の開集合  $L^{-1}((U_+)^{\circ})$  と  $L^{-1}((U_-)^{\circ})$  を図8に示した.

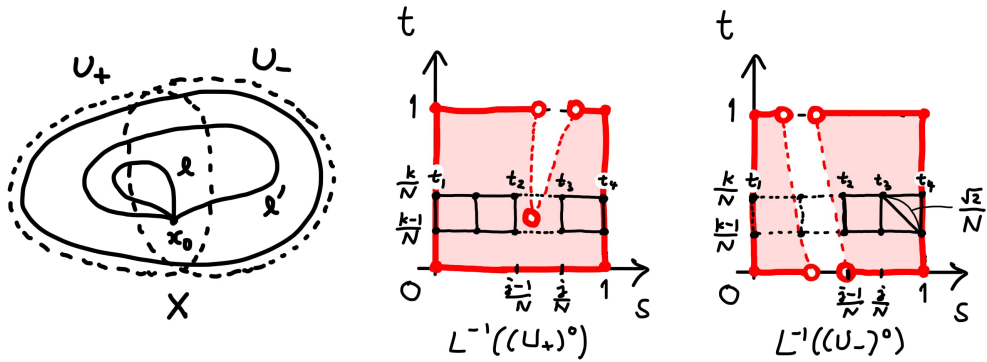


図8  $I \times I$  の開集合  $L^{-1}((U_+)^{\circ})$  と  $L^{-1}((U_-)^{\circ})$ .

■143,-10  $l_{k-1}^{P_{k,j}} = \alpha_j^{-1} l_k^{P_{k,j}} \alpha_{j-1}$  が成り立つ様子を図9に示した.

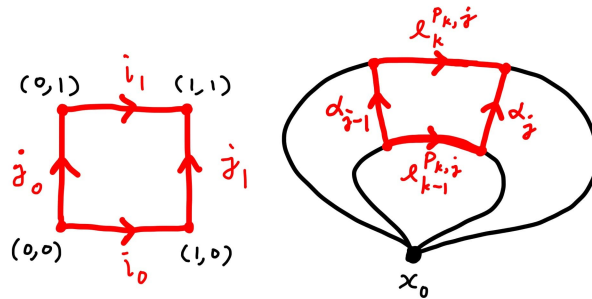


図9  $l_{k-1}^{P_{k,j}} = \alpha_j^{-1} l_k^{P_{k,j}} \alpha_{j-1}$ .

■144,-7 ?  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_s\} \simeq U$  を直接示すのは難しいのだろうか. (考えてない)

■145,-8 (曲面群の話) ? 基本群の表示が分かってないので後回しにする.

■148,11 (式 (3.3.1)) 式 (1.4.4) の両辺に  $p^*[\cdot]$  を作用した後,

$$\begin{aligned} p^*[f] \cdot p^*[g] &= [f \circ p] \cdot [g \circ p] \\ &= [(f \circ p) \cdot (g \circ p)] \quad (1.4.2) \text{ の積} \cdot \\ &= [(f \cdot g) \circ p] \quad (3.1.2) \text{ の積} \cdot \\ &= p^*[f \cdot g] \end{aligned}$$

を用いる.

■150,1 ( $h_\alpha(e_{x_0}) = 0$  であること)

$$\begin{aligned} h_\alpha(e_{x_0}) &= c_{x_0,*}([\tilde{\alpha}]) \quad ([\tilde{\alpha}] := \alpha, \tilde{\alpha} := \sum_l a_l \sigma_l \in Z_q(Z), a_l \in \mathbb{Z}, \sigma_l \in Z^{\Delta^q}) \\ &= [c_{x_0,*}(\tilde{\alpha})] \\ &= \left( \sum_l a_l \right) [\tilde{c}_{x_0}] \quad (\tilde{c}_{x_0} : \Delta^q \rightarrow X, x \mapsto x_0 \text{ (定値写像)}) \\ &= 0 \quad (\tilde{c}_{x_0} \in Z_q(\{x_0\}) \subset B_q(\{x_0\}) \subset B_q(X)). \end{aligned}$$

■151,-10 (ホモロジー類  $[p]$  が定義できること) 上述の同一視  $\Delta^1 \approx I_1, \Delta^0 \approx *$  のもとで,  $\partial_1 p = p(1) - p(0) = 1 - 1 = 0$  より従う.

■152,11  $x_0$  を基点とするループ  $\theta(l(1)) \cdot (l \cdot \theta(l(0))^{-1})$  の例を図 10 に示した.

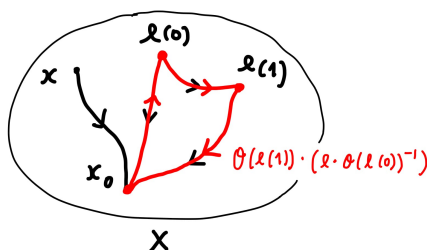


図 10  $x_0$  を基点とするループ  $\theta(l(1)) \cdot (l \cdot \theta(l(0))^{-1})$ .

■152,-3  $(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \rightarrow X \text{ rel } \partial$  が成り立つ様子を図 11 に示した.

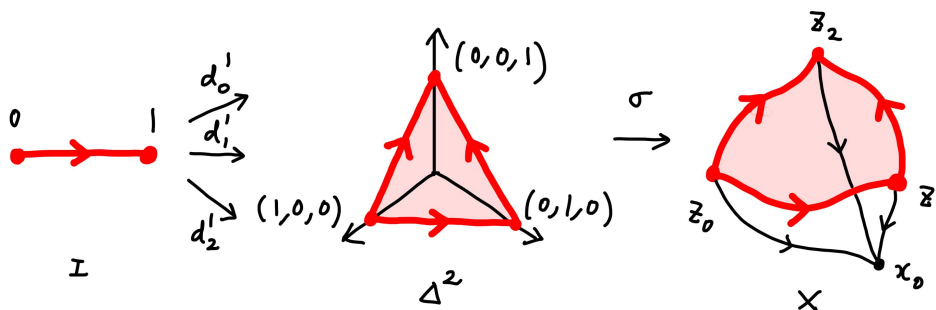


図 11  $(\sigma \circ d_0^1) \cdot (\sigma \circ d_2^1) \simeq (\sigma \circ d_1^1) : I \rightarrow X \text{ rel } \partial$ .

■153.-9 ?

■154,-9 ?

## 第 4 章

■159,-11 ( $j_*$  がチェイン写像であること)  $\partial_n j_*(u) = \partial_n(u + i_* S_n(A)) = \partial_n u + i_* S_{n-1}(A) = j_* \partial_n(u)$ .

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{j_*} & S_n(X, A) \\ \partial_n \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \partial_n \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{j_*} & S_{n-1}(X, A) \end{array}$$

■160,-8 ( $H_0(X, A) = 0$  であること) 完全性と  $i_*$  の全射性より  $\ker j_* = \text{Im } i_* = H_0(X)$  であるから  $j_*$  は零写像.  $j_*$  の全射性  $\text{Im } j_* = H_0(X, A)$  とあわせて  $0 = \text{Im } j_* = H_0(X, A)$ .

■160,-2 ? 最後の  $i_*$  はどういう写像?

■166,3 ( $\bar{F}$  が連続であること)  $\bar{F} \circ (p|_U \times 1_{[0,1]}) = p \circ F$  である. 右辺が連続写像であることと  $p|_U \times 1_{[0,1]}$  が等化写像であることより補題 1.1.13(b) が使えて  $\bar{F}$  は連続写像.

■167-1  $p \in X$  のまわりで定義された  $X$  の座標近傍  $(U, \varphi, V)$  のイメージ図を描いた (図 12) .

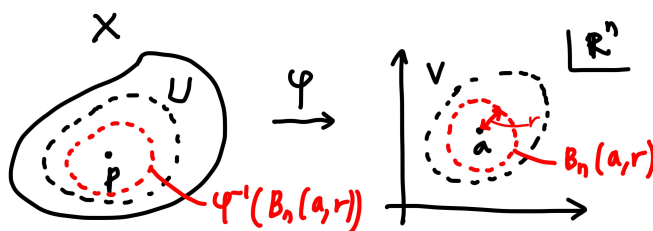


図 12  $p \in X$  のまわりで定義された  $X$  の座標近傍  $(U, \varphi, V)$ .

■167,4 (集合の包含関係について)

1.  $B_n(a, r) \subset \overline{B_n(a, r)}$  より  $X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_n(a, r)}) \subset X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r))$ .  $X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r)) \stackrel{\text{close}}{\subset} X$  であるから  $X \setminus \varphi^{-1}(\overline{B_n(a, r)}) \subset X \setminus \varphi^{-1}(B_n(a, r))$ .
2.  $\varphi^{-1}(B_n(a, r)) \ni p$ .
3.  $X$  は Hausdorff なので  $\{p\} \stackrel{\text{close}}{\subset} X$ .

■172,10 (空間の三対  $(X, A, A')$  の連結準同型の自然性) 4.4.1 節で用いる. 以下のように定式化しておく. 連続写像  $f: (X, A, A') \rightarrow (Y, B, B')$  について図式

$$\begin{array}{ccc} H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(A, A') \\ f_* \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f_* \\ H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(B, B') \end{array}$$

は可換.

■172,-3 (系 4.1.11) 補題 4.1.1 と同相  $D^n \approx \Delta^n$ ,  $S^n \approx \partial \Delta^{n+1}$  より

$$H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial \Delta^{n+1}) \stackrel{\partial_*}{\cong} H_n(\partial \Delta^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$$



であるから,  $H_n(\partial\Delta^{n+1})$  の生成元は  $H_{n+1}(\Delta^{n+1}, \partial\Delta^{n+1})$  の生成元  $[1_{n+1}]$  を  $\partial_*$  で写した  $[\partial 1_{n+1}]$  である. (cf. p.160, 1.4)

■180,-5 ( $f^{-1}(q)$  が有限集合であること)

1.  $Y$  の Hausdorff 性より  $\{q\} \overset{\text{close}}{\subset} Y$ .
2.  $f$  の連続性と 1. より  $f^{-1}(q) \overset{\text{close}}{\subset} X$ .
3.  $f$  の局所同相性より  $f^{-1}(q)$  は離散的.
4.  $X$  のコンパクト性と 2. より補題 A.1.7 が使えて  $f^{-1}(q) \subset X$  はコンパクト.
5. p.268, 1.12 と 3., 4. より  $f^{-1}(q)$  は有限集合.

■181,2 ( $\iota_*$  が同型であること) 定理 4.1.9 (5) より

$$\bigoplus_{i=1}^m H_n(U_i, U_i \setminus \{p_i\}) = H_n\left(\bigcup_{i=1}^m U_i, \bigcup_{i=1}^m U_i \setminus f^{-1}(q)\right).$$

ここで

$$X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right) = \overline{X \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m U_i\right)} \subset (X \setminus f^{-1}(q))^\circ = X \setminus f^{-1}(q)$$

が成り立つから切除定理が使える. よって  $\iota_*$  は同型.

■184,5 ( $B_n(x, r)$  の上で  $\deg_x f$  が一定であること) ?

■185,14 (可換図式がなりたつこと,  $S_{c*}\mu_x = \mu_{x+c}$  がなりたつこと) ? そうっぽい感じはするけど厳密にできてない. 所々で同一視が行われていて混乱している.

■187,2 (補題 4.2.11 証明)

- 線形同型  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  を  $A = (g(e_1), \dots, g(e_n))$  とすればよい.
- p.186, 1.-12 と  $g$  の定義より

$$\begin{aligned} \varepsilon(f) &= (\text{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(e_0), \dots, f(e_n) - f(e_0)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(f(e_1) - f(b), \dots, f(e_n) - f(b)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1), \dots, g(e_n)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(b), \dots, g(e_n) - g(b)) \\ &= (\text{sgn} \circ \det)(g(e_1) - g(e_0), \dots, g(e_n) - g(e_0)) \\ &= \varepsilon(g). \end{aligned}$$

- $g(b) = 0$  だから,  $0 = g(b) = \frac{1}{n+1}g(e_0) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n g(e_k)$  すなわち  $g(e_0) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$ . いっぽう,  $\iota_n(e_0) = (-1, \dots, -1)^\top \in \mathbb{R}^n$  だから  $A(\iota_n(e_0)) = -\sum_{k=1}^n g(e_k)$ . 以上より,  $A(\iota_n(e_0)) = g(e_0)$ .

■188,8  $\overline{f_z} = \overline{f_z}, \overline{f_{\bar{z}}} = \overline{f_z}$  に注意.

■196,10 (補題 4.3.1(0))

- $N'$  の生成系を  $\{x'_1, \dots, x'_{n'}\}$ ,  $N''$  の生成系を  $\{x''_1, \dots, x''_{n''}\}$  とおく.
- $g$  が全射の場合:  $N$  の有限部分集合であって, その  $g$  による像が  $N''$  の生成系となるものを  $\tilde{N}$  とおく. 任意の  $x \in N$  をとる.  $g(x) = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x''_i$  とかけることと, 各  $1 \leq i \leq n''$  に対し  $x_i \in \tilde{N}$  があって  $g(x_i) = x''_i$  となることより  $g(x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i) = 0$  すなわち  $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i \in \ker g = \text{Im } f$  がなりたつ. ゆえに  $x - \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i = f\left(\sum_{j=1}^{n'} a'_j x'_j\right) = \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$  となり結局  $x = \sum_{i=1}^{n''} a''_i x_i + \sum_{j=1}^{n'} a'_j f(x'_j)$  を得る. これは  $N$  が有限生成であることを示している.

- $g$  が一般の場合:

– 部分加群  $g(N) \subset N''$  が有限生成であることを示せばよいこと: 任意の  $x \in N$  をとる.  $g(N)$  が有限生成であるから  $x_i \in N, 1 \leq i \leq n_{g(N)}$  を用いて  $g(x) = \sum_{i=1}^{n_{g(N)}} a_i'' g(x_i)$  とかける.  $x - \sum a_i'' x_i \in \ker g$  と  $\text{Im } f = \ker g$  より  $f\left(\sum_{j=1}^{n'} a_j' x_j'\right) = x - \sum a_i'' x_i$  つまり  $x = \sum a_i'' x_i + \sum_{j=1}^{n'} a_j' f(x_j')$ . これは  $N$  が有限生成であることを示している.

- ? これ以降わからない. 行間広すぎ~

### ■202,3 ( $\chi(P) = -1$ となること)

1.  $P \simeq P \setminus \partial P$  より  $\chi(P) = \chi(P \setminus \partial P)$ .

2.  $S^2$  から取り除いた 3 つの 2 次元閉円板を  $D_i^2, i = 1, 2, 3$  とおくと,  $\chi(S^2) \stackrel{(4.2.5)}{=} \chi(S^2 \setminus \cup_{i=1}^3 \partial D_i^2) = \chi(P \setminus \partial P) + 3\chi(*)$ .

1., 2. より  $\chi(P) = \chi(P \setminus \partial P) = \chi(S^2) - 3\chi(*) = 2 - 3 = -1$  がなりたつ.

■203,12 ( $\varphi(D^m) = \bar{e}$  がなりたつこと) 一般に  $\varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) \subset \bar{e}$ . すでに示した  $\varphi(D^m) \supset \bar{e}$  と  $D^m = \varphi^{-1}(\bar{e})$  を用いると,  $\varphi(D^m) = \varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) \supset \bar{e}$ . あわせて  $\varphi\varphi^{-1}(\bar{e}) = \bar{e}$ . ゆえに  $\varphi(D^m) = \bar{e}$  がなりたつ.

■204,-3 ( $\varphi_\lambda^{-1}(C)$  の  $\varphi_\lambda$  による像が  $C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$  となること)  $\varphi_\lambda(D^{n_\lambda}) \stackrel{(203,12)}{=} \overline{e_\lambda}$  ゆえ  $\varphi_\lambda^{-1}(C) = \varphi_\lambda^{-1}(C \cap \overline{e_\lambda})$  であるから,  $\varphi_\lambda\varphi_\lambda^{-1}(C) = C \cap \overline{e_\lambda} = C \cap \varphi_\lambda(D^{n_\lambda})$  がなりたつ.

■207,-10 変位レトラクト  $F$  の図を描いた (図) .

■207,-3 ( $F$  の連続性が  $F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]})$  の連続性からしたがうこと)

$$\begin{aligned} F \text{ が連続} &\iff \forall O \subset^{\text{open}} X^{(k)} \setminus \Phi(S), F^{-1}(O) \subset^{\text{open}} \left( X^{(k)} \setminus \Phi(S) \right) \times [0, 1]. \\ &\iff \forall O \subset^{\text{open}} X^{(k)} \setminus \Phi(S), \forall \lambda \in \Lambda, (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]})^{-1} \circ F^{-1}(O) \subset^{\text{open}} D^{n_\lambda}. \quad (\text{補題 4.3.6(4) より}) \\ &\iff \forall \lambda \in \Lambda, F \circ (\varphi_\lambda \times 1_{[0,1]}) \text{ が連続.} \end{aligned}$$

■211,14 ( $|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$  となること)  $|K|$  の定義より  $|K| = \cup_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$  である. さらに  $\sigma \neq \sigma'$  のとき  $\sigma(x) = \sigma$  と  $\sigma(x) = \sigma'$  が同時になりたつことはないから  $e_\sigma \cap e_{\sigma'} = \emptyset$ . ゆえに  $|K| = \coprod_{\sigma \in \Sigma} e_\sigma$  がなりたつ.

■212,8 ( $\varphi_\sigma \circ d_i$  は  $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$  の定める胞体の特性写像であること)  $(a_0 \cdots a_{i-1} a_{i+1} \cdots a_n)$  の定める特性写像  $\varphi$  は

$$\varphi: \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^N, (t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$$

で定義される. 一方,  $\varphi_\sigma \circ d_i(t_0, \dots, t_{n-1}) = \varphi_\sigma(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) = t_0 a_0 + \cdots + t_{i-1} a_{i-1} + t_i a_{i+1} + \cdots + t_{n-1} a_n$  であるから  $\varphi$  は  $\varphi_\sigma \circ d_i$  に等しい.

■216,5 周辺  $\ker \partial_q \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)}), \text{Im } \partial_* \cong \text{Im } \partial_{q+1}$  により,

$$H_q(X) \cong H_q(X^{(q+1)}, X^{(q-2)}) \cong H_q(X^{(q)}, X^{(q-2)}) / \text{Im } \partial_* \cong \ker \partial_q / \text{Im } \partial_{q+1} = H_q(C_*(X))$$

がなりたつ.

■217,1 ( $\pi_\lambda := \overline{\varphi_\lambda}^{-1} \circ \hat{\pi}_\lambda$  のイメージ図) 図 13.

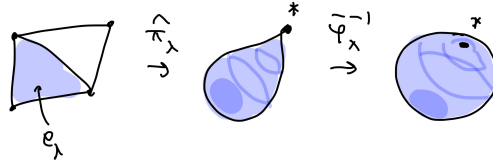


図 13  $\pi_\lambda := \overline{\varphi_\lambda}^{-1} \circ \hat{\pi}_\lambda$ .

■217,-10 可換図式より  $i_*\varphi_{\lambda*}\partial_*[D^k] = \partial_*\varphi_{\lambda*}[D^k]$ . 両辺に  $\pi_{\mu*}$  を作用したものを变形する: (左辺)  $= \deg(\pi_\mu \circ (\varphi_\lambda|_{S^{k-1}}))\partial_*[D^k]$ . (右辺)  $= \pi_{\mu*}\partial_k e_\lambda = \pi_{\mu*}(\sum_{\nu \in \Lambda_{k-1}} [e_\lambda : e_\nu] e_\nu) = [e_\lambda : e_\nu][S^{k-1}]$ . あとは  $\partial_*[D^k] = [S^{k-1}]$  ならよいが, 示せない. ?

■219,11 ( $T^2$  の胞体分割) 図 14.

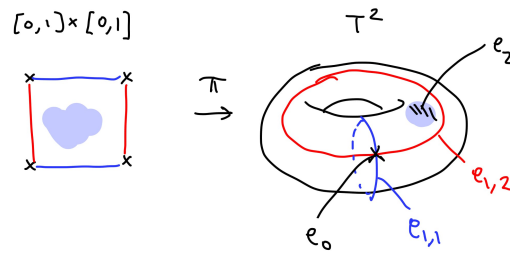


図 14  $T^2$  の胞体分割.

■219,-8 ( $\pi_{1,1} \circ (\varphi_2|_{\partial([0,1] \times [0,1])})$  のイメージ図) 図 15.

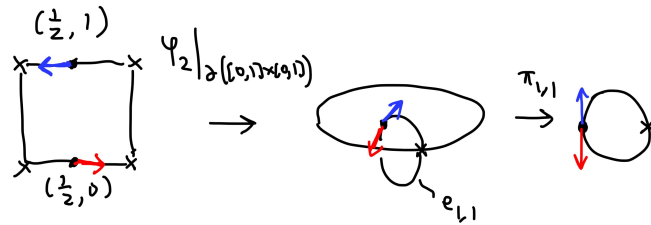


図 15  $\pi_{1,1} \circ (\varphi_2|_{\partial([0,1] \times [0,1])})$  のイメージ図.

■222,4 ( $\mathbb{R}P^2$  の胞体分割) 図 16.

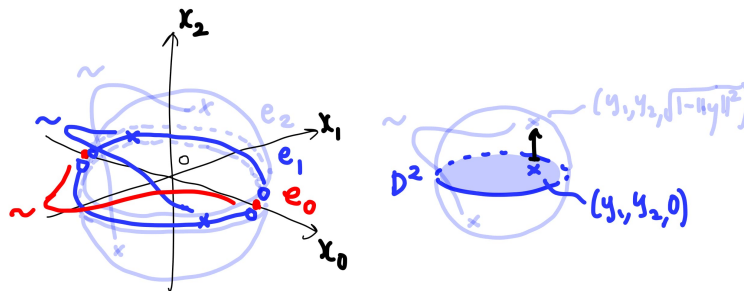


図 16  $\mathbb{R}P^2$  の胞体分割.

■222,-12  $[e_\lambda : e_\mu] = \deg(\pi_\mu \circ (\varphi_\lambda|_{S^{k-1}})) = \deg(\pi_\mu \circ (\varpi_n|_{S^{k-1}})) = \deg(\pi_\mu \circ \varpi_{k-1}) = ?$

■226,9 分類空間をとる操作は有限半順序集合と順序を保つ写像の圏から位相空間と連続写像の圏への共変関手であることを思い出す.  $F : P \times [1] \rightarrow Q$  は順序を保つから,  $|F| : |K(P)| \times [0, 1] \rightarrow |K(Q)|$  は連続. また関手性より  $|F| \circ i_0 = |F \circ i_0| = |f|$ ,  $|F| \circ i_1 = |F \circ i_1| = |g|$ . よって  $|F|$  はホモトピー  $|f| \simeq |g|$  を与える.

■226,15  $f(x) \leq f(x) \implies x \leq gf(x)$ ,  $g(y) \leq g(y) \implies fg(y) \leq y$  に注意する.

## 参考文献

[1] 河澄響矢『トポロジーの基礎 (上)』第1刷