Brownian Motion and Stochastic Calculus[1] 読書記録

最終更新: 2022 年 11 月 29 日

<u>注意</u>: 原著（英語版）を読んでいきます．記述の正確性は保証しません．ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています．**?**　マークは不明/自信なし/要復習を意味しています．たとえば 1.3+ は項目 1.3 と 1.4 の間の部分を指します．

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
13	19	$t \in F; X_t(\omega) \le \alpha$	$t \in F; X_t(\omega) < \alpha$
29	14	$\xi_{T_n(\epsilon)^{(n)}+}$	$\xi^{(n)}_{T_n(\epsilon)+}$
36	1	$t \ge 0: \ \lvert M_t\rvert = n$	$t \ge 0; \ \lvert M_t\rvert = n$
52	12	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \omega(t_i) = x_i$	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \omega(t_i) = x_i$
57	-1	I_n	$I(n)$
68	22	for each i	for each k
72	14	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}(i)}$	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}^{(i)}}$
83	10	X	X

1　Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■1.3+（def.1.3 $\implies$ def.1.1 $\implies$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\implies$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] \le \mathsf{P}[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] = 1 \implies \forall t \in [0,\infty), \mathsf{P}[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 $\implies$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ とおく．

$$\begin{aligned}\left|\mathsf{P}[X^{(n)} \in A] - \mathsf{P}[Y^{(n)} \in A]\right| &= \left|\int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right)\mathsf{P}(d\omega)\right| \\ &\le \int_\Omega \left|1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right|\mathsf{P}(d\omega) \\ &\le \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega)\neq Y^{(n)}(\omega)}\mathsf{P}(d\omega) \\ &= \mathsf{P}[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\ &\le \sum_{k=1}^n \mathsf{P}[X_k \neq Y_k] = 0\end{aligned}$$

より示された．最後の等号は 1.1 による．

■1.6+（Fubini の定理を使えと書いてあるところ）　X が可測のとき,

1. 各 $\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が Borel 可測であること:
   Rudin[2] Theorem 8.5 そのまま. X_t は可積分とは限らない.
2. $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ が（定義されるなら） Borel 可測であること:
   $\mathsf{E}[X_t]$ が定義されるから, $\int X_t^+(\omega)d\omega$ と $\int X_t^-(\omega)d\omega$ はどちらも有限で, Rudin[2] Theorem 8.8(a) より Borel 可測. ゆえにその差 $\mathsf{E}[X_t] = \int X_t^+(\omega)d\omega - \int X_t^-(\omega)d\omega$ も Borel 可測.
3. X_t の値域が $\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 内の区間 I が $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ をみたすなら積分の交換などができること:
   $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ ゆえ Tonelli の定理（Rudin[2] Theorem 8.8(b)）より $X_t(\omega)$ が積空間について可積分であることがいえ, 同定理 (c) が使える.

■1.9+（Y も $\{\mathscr{F}_t\}$ に適合していること）　X_t は $\mathscr{F}_t$-可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\forall t$, $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ だから $\{X_t \neq Y_t\} \in \mathscr{F}_t$. $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\}$ であるが, 左辺が $\mathscr{F}$-可測であることと $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ から単調性より左辺も測度 0. ゆえに仮定より左辺 $\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t$. 結局 $\{Y_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$ でもある.

■1.9+（This requirement is not same as saying $\mathscr{F}_0$ is complete について）　たとえば, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ は完備だが, 空でない測度 0 集合を 1 つももたない [3].

■1.13

$$\{(s,\omega);\ X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} ((\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t] \times X^{-1}_{\frac{(k+1)}{2^n}t}(A)) \bigcup \left(\{0\} \times X_0^{-1}(A)\right) \tag{1}$$

に注意 [4].

■2.3　The first statement: $T \equiv t_0 \geq 0$ を定数とすると, 任意の $t \geq 0$ に対し $\{t_0 \leq t\}$ は $\varnothing$ もしくは Ω でありいずれも $\mathscr{F}_t$ に属する.

■2.6　$X_r(\omega) \in \Gamma$ とすると, Γ: open と X: RC より時刻 r の直後も少しの時間 path は Γ に入っている. その時間の中から有理数時刻を取ってくればよい.

■2.9

- The first two assertions:
  $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$ および $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$ より.
- $\{0 < T < t, T + S > t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)} \{t > T > r, S > t - r\}$ がなりたつこと:
  $0 < T < t$, $T + S > t \iff 0 < T < t$, $S > t - T \iff$ ある $r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)$ があって $\{t > T > r, S > t - r\}$ をいえばよい. 2 つ目の $\iff$ について, 実際
  - $\Longleftarrow$: $0 < r < T < t$, $S > t - r > t - T$.
  - $\Longrightarrow$: $t > T > t - S$ だが, 有理数の稠密性より $t > T > r > t - S$ なる $r \in \mathbb{Q}$ がとれる. このとき $S > t - r$, $r < T < t$.

  である.

■4.10（Doob-Meyer Decomposition）書きかけ　すべての文章に行間がある地獄である. 定理のステートメントは本で見てください.

■一意性　X が 2 通りの分解 $X_t = M_t' + A_t' = M_t'' + A_t''$ を許すと仮定する．ここで M', M'' は MG, A', A'' は natural increasing である．このとき

$$\{B_t \stackrel{\text{def}}{=} A_t' - A_t'' = M_t'' - M_t', \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\} \tag{2}$$

は MG で, 任意の RC MG $\{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$ に対し

$$\mathsf{E}[\xi_t(A_t' - A_t'')] = \mathsf{E}\int_{(0,t]} \xi_{s-} dB_s = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t_{j-1}^{(n)}} \left[B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}(n)}\right] \tag{3}$$

である．ここで $\Pi_n = \{t_0^{(n)}, \ldots, t_{m_n}^{(n)}\}$, $n \ge 1$ は $[0,t]$ の分割であって, $n \to \infty$ 極限で $||\Pi_n|| := \max_{1\le j\le m_n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to 0$ となるものとする．

$$E\left[\xi_{t_{j-1}^{(n)}}\left(B_{t_j^{(n)}} - B_{t_{j-1}^{(n)}}\right)\right] = 0, \text{ and thus } \quad E\left[\xi_t\left(A_t' - A_t''\right)\right] = 0. \tag{4}$$

参考文献

[1] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/2159241/complete-filtration`.

[4] `https://www.stat.purdue.edu/~chen418/studynotesmath.html`.