Brownian Motion and Stochastic Calculus[1] 読書記録

最終更新: 2023 年 11 月 19 日

注意: 原著（英語版）を読んでいきます．記述の正確性は保証しません．ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています．? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています．たとえば 1.3+ は項目 1.3 と 1.4 の間の部分を指します．

誤植と思われるもの

頁	行	誤	正
13	19	$t \in F; X_t(\omega) \leq \alpha$	$t \in F; X_t(\omega) < \alpha$
29	14	$\xi_{T_n(\epsilon)^{(n)}+}$	$\xi^{(n)}_{T_n(\epsilon)+}$
36	1	$t \geq 0: \ \lvert M_t\rvert = n$	$t \geq 0; \ \lvert M_t\rvert = n$
52	12	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)} : \omega(t_i) = x_i$	$\omega \in \mathbb{R}^{[0,\infty)}; \omega(t_i) = x_i$
57	-1	I_n	$I(n)$
68	22	for each i	for each k
72	14	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}(i)}$	$\tilde{\mathcal{F}}_t^{\tilde{B}^{(i)}}$
83	10	X	X

1.1

X と Y が 2 変数関数として全く同じ same というのは強すぎる場合がある．そこで, 3 種類の sanemness の概念を導入する．

1. modification
2. have the same finite-dim distribution
3. indistinguishable

$3 \implies 1 \implies 2$. X と Y が RC のとき $1 \implies 3$.

- progressively measurable $\implies$ measurable & adapted.
- measurable & adapted $\implies$ progressively measurable な modification をもつ.
- measurable & adapted & 全 path が RC or LC $\implies$ progressively measurable.

$\{\mathscr{F}_t\}$ が usual condition をみたす $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\mathscr{F}_t$ RC, $\mathscr{F}_0$ が $\mathscr{F}$ の P-negligible set をすべてふくむ.

random time $\supset$ optional time $\supset$ stopping time.

X prog. msb. $\implies$ X_T が $\mathscr{F}_T$-msb.

X submartingale RC のとき First submartingale ineq, second submartingale ineq, Doob's maximal ineq, Regularity of the paths.

$\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition みたすとき X が RC modification をもつ $\iff$ $t \mapsto \mathsf{E}X_t$ RC. もしそうなら,

modification を RCLL かつ $\{\mathscr{F}_t\}$ adapted にとれる. つまり $\{\mathscr{F}_t\}$-submartingale にとれる.

submartingale convergence 条件： RC submartingale

optional sampling 条件： RC submartingale 本質の結果: $\mathsf{E}X_T = \mathsf{E}X_0$.

A increasing $\overset{\text{def}}{=}$ (1)a.e. $A_0(\omega) = 0$ (2)a.e. $t \mapsto A_t(\omega)$ nondecreasing RC (3) $\forall t, \mathsf{E}A_t < \infty$.

$\mathsf{E}A_\infty < \infty$ のとき integrable という.

A natural $\overset{\text{def}}{=}$ increasing, $\forall$ martingale (RC, bounded) $\mathsf{E}\int_{(0,t]} M_s dA_s = \mathsf{E}\int_{(0,t]} M_{s-} dA_s$.

uniformly integrable を強めた概念.

- $\mathcal{T}$: $\P[T < \infty] = 1$ となる stopping time T のクラス.
- $\mathcal{T}_a$: $\P[T \leq a] = 1$ となる stopping time T のクラス.

を使って D, DL を定義:

- X: class D RC, $\{X_T\}_{T \in \mathcal{T}}$: uniformly integrable.
- X: class DL RC, $0 < \forall a < \infty$, $\{X_T\}_{T \in \mathcal{T}_a}$: uniformly integrable.

RC, $\forall t \geq 0, X_t \geq 0$ a.s. $\implies$ D(uniformly integrable のとき), DL RC, Doob-Meyer 分解可能 $\implies$ D(uniformly integrable のとき), DL. この逆が重要. 1.4.10

Doob-Meyer Decomposition $\{\mathscr{F}_t\}$ usual condition, X RC submartingale $\in$ DL $\implies$ $X = M + A$, M: RC martingale, A: increasing とくに natural 分解は indistinguishable の意味で unique.

$\in$ D なら, M: unif. integrable, A: integrable にとれる.

submartingale X が regular $\overset{\text{def}}{=}$ $\forall a > 0$, $\forall$ nondecreasing seq. of stopping times $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{T}_a$ with $T = \lim_{n\to\infty} T_n, \mathsf{E}X_{T_n} = \mathsf{E}X_T$.

4.14 X: RC submartingale, DL, usual condition, A: X の DM 分解の natural increasing process のとき A conti $\iff$ X regular.

この節では $\{\mathscr{F}_t\}$: usual condition みたすとする.

X: RC martingale. X square-integrable $\overset{\text{def}}{=}$ $\mathsf{E}X_t^2 < \infty$. $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}_2$ とかく. とくに conti のとき $X \in \mathcal{M}_2^c$.

$X \in \mathcal{M}_2$ なら X^2 は nonnegative submartingle $\to$ DL で DM 分解できる. : $X^2 = M + A$. このとき $\langle X \rangle_t := A_t =$ quadratic variation つまり $\langle X \rangle_0 = 0, X^2 - \langle X \rangle$ martingale.

quadratic variation という言葉は, $X \in \mathcal{M}_2^c$ のとき, 文字通りの意味になる (5.8).

$X, Y \in \mathcal{M}_2$, $\langle X, Y \rangle_t := \frac{1}{4}[\langle X+Y \rangle_T - \langle X-Y \rangle_t]$ crossvariation process. $\implies$ $XY - \langle XY \rangle$ martingale. $\langle X, Y \rangle = 0$ iff X, Y orthogonal

X, Y orthogonal と同値な条件: (1)XY martingale, (2)X の増分と Y の増分は conditional independent.

$X \in \mathcal{M}_2$ では 2 次変分まで有限, 3 次以上はゼロ. よって 2 次がしかるべき変分.

X $\exists\{\Gamma_n\}_{n=1}^\infty$ nondecreasing stopping time, $\{X_t^{(n)} := X_{t \wedge T_n}, \mathscr{F}_t; 0 \leq t < \infty\}$ martingale for each $n \geq 1$ and $\P[\lim T_n = \infty] = 1$ $\overset{\text{def}}{=}$ X local martingale

さらに $X_0 = 0$ a.s. のとき $X \in \mathcal{M}^{\text{loc}}$ とかく.

martingale $\implies$ loc. martingale, DL のとき逆なりたつ.

2.1

Brown 運動の存在証明を, 実際に Brown 運動を構成することで行う. Brown 運動 $B = \{B_t, \mathscr{F}_t^B; o \leq t < \infty$ を $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上につくる. このとき, 分布が大事. $\Omega, \mathscr{F}$ とかなんでもいい. 3 つやっている.

1. consistent な有限次元分布を拡張する方法 (Daniell) これは連続である保証がないので Kolmogorov-Centstov を使って連続な modification をつくる手間がかかる.
2. 折れ線をつくる方法. 連続性をたもってできる. 最初に BM を $[0,1]$ でつくっておいて, 端っこをつないでいく.
3. ランダムウォークの極限としてつくる方法. BM を $C[0,\infty)$ 上につくれる (Wiener measure という). これはなにかと便利らしい.

3 つ目を議論するために, いくつか新概念を導入.

- $P_n \to^w P$ weak convergence.
- $X_n \to^{\mathcal{D}} X$ converges to X in distribution.
- S 可測完備なら, relatively compact $\iff$ tight. (Prohorov)

$X^{(n)} \to^{\mathcal{D}} X \iff (X_{t_1}^{(n)}, \ldots, X_{t_d}^{(n)}) \to^{\mathcal{D}} (X_{t_1}, \ldots, X_{t_d}) \implies$ はかんたんで, $\impliedby$ は, $X^{(n)}$ tight のときなりたつ. 以上をふまえて, Donsker

normalized random walk を interpolate したやつ $\to^{\mathcal{D}}$ BM 上の命題を使って示す. つまり, normalized random walk を interpolate したやつの有限次元分布が BM のそれに分布収束することと, normalized random walk を interpolate したやつが tight であることをいえばいい.

2.5 Markov Property

複数次元の BM の作り方 (初期分布 μ) Wiener measure を使ってつくる.

1. μ にしたがい B_0 をだして, 1-dim BM たちから作ったベクトル $(B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$ をたす.
2. $x \in \mathbb{R}^d$ スタートの BM 分布 P^x を 0 スタートの BM P^0 を平行移動してつくる. そして, P^x を重み μ で積分する.

multi dimensional BM を Wiener measure 上でつくったが, 一般の $(\Omega, \mathscr{F})$ 上に一般化したのが, d-dim Brownian family. 条件 (i) をゆるめにしたのは, $\mathscr{F}$ を後で少し大きくするため.

2.7

BM を定義する σ-field $\mathscr{F}_t$ として, $\mathscr{F}_t^B$ より真に大きいものを選ぶことを許した. 理由の 1 つは, $\mathscr{F}_t^B$ が左連続であっても右連続でないこと. では $\mathscr{F}_t$ としてどんなものをとるのがいいのか.

一般の $X = \{X_t, \mathscr{F}_t^X; 0 \leq t < \infty\}$ に対し, $\mathscr{F}_t^X$ を大きくしたバージョンとして, μ-零集合を適度に追加した completion $\overline{\mathscr{F}}_t^\mu$ および augmentation $\mathscr{F}_t^\mu$ を考える.

実は, この augmented filtration $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ が, 望む性質をもっている（prop.7.7）. 具体的には, X が強マ

ルコフのとき augmented filtration は右連続. X が強マルコフかつ左連続のとき augmented filtration は連続.

$\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ が d-dim BM（初期分布 μ）のとき $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もまた d-dim BM である（つまり, $\mathscr{F}_t^\mu$ は, 拡張しすぎていることはない）. 任意の d-dim BM は strong Markov だったこととあわせて, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ も strong Markov.

ここで素朴な疑問: 一般に, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov なら, $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ もそうか? 答えは yes（7.11-7.13 で証明）. ただし, この一般化は見かけほどありがたくない. なぜなら, 個別ケースでは, $\{B_t, \mathscr{F}_t^X\}$ strong Markov の証明と $\{B_t, \mathscr{F}_t^\mu\}$ strong Markov の証明は（個別ケース特有ではあるが）同じ手口でできるから.

augmentation 万歳!

B. A "Universal" Filtration（ファミリー向けに augmentation を修正する）

augmentation のうざいところは, 初期分布 μ に依存するところ. とくに, strong Markov family になるとこいつは初期分布の連続体なのでやっかい. こういう場合でも使い物になる filtration をつくる.

d-dim strong Markov Family をとる. 任意の測度 μ に対し, $P^x(F)$ を重み μ で積分して $P^\mu(F)$ を得てから, さっきのように $\{\mathscr{F}_t^\mu\}$ をつくる. そして, $\tilde{\mathscr{F}}_t \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_\mu \mathscr{F}_t^\mu$ とする. これはいい. $\mathscr{F}_t^X \subset \tilde{\mathscr{F}}_t \subset \mathscr{F}_t$ で, 左と右を使ったとき X は strong Markov だったので, 真ん中使ったときもそう.

$\tilde{\mathscr{F}}_t$ を Markov family の filtration として使っても, family 性をたもつ（BM の場合 Thm.7.15）. Remark7.16 大事やね. まあ八百長.

C. The Blumenthal Zero-One Law

3.1

普通の解析の理論では, 微分と積分をそれぞれ定義して, 微積分学の基本定理で両者を結びつける. いっぽう, 確率解析の理論では, 積分のみ定義し, 微積分学の基本定理を使って, 積分を通して微分を定義する.

3.2

A

そういうわけで, 確率積分 $I_T(X) = \int_0^T X_t(\omega) dM_t(\omega)$ を定義したい. ではどうするか.

まず基本方針として, X と Y が同値関係 $X_t(\omega) = Y_t(\omega);\ \mu_M - \text{a.e.}(t, \omega) \implies \forall T_{>0}, [X-Y]_T = 0$ をみたすなら, 積分 $I(X)$ と $I(Y)$ が indistinguishable になるように確率積分を定義する.

次に, 確率積分を定義できる M と X のクラスについて, 以下のようである. まず, 被積分過程 X の 2 つの同値クラスを考える：

- $\mathcal{L}$ すべての measurable $\{\mathscr{F}_t\}$-adapted process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス
- $\mathcal{L}^*$ すべての progressively measurable process X $(\forall T_{>0}, [X]_T < \infty)$ の同値クラス

2 つの空間に X と Y の距離 $[X - Y]$ を入れる. このもとで,

1. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to X \in \mathcal{L}$ で確率積分を定義.
2. $M \in \mathcal{M}_2^c$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to X \in \mathcal{L}^*$ で定義.

3. $M \in \mathcal{M}_2 \to X$ predictable で定義.

2 つ目は, この本ではやらない.

本節では後で,

- きつい条件 $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$ かつ $[X]_T^2 < \infty$ で最初定義して,
- ゆるい条件 $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c,loc}}$ かつ $P[\int_0^T X_t^2 d\langle M \rangle_t < \infty] = 1$

にゆるめる.

B

確率積分を定義するクラスを宣言したところで, 定義の具体的方針を書く.

1. simple process (単関数の確率過程バージョン) に対して確率積分を定義する.
2. simple process $X^{(n)}, n = 1, 2, \cdots$ の極限で, より一般の process X を近似する. simple process のクラスを $\mathcal{L}_0$ とかくと, 具体的には以下の結果がある.
3. $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続 $\to \mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}$ 中で dense (距離 $[\cdot]$).
4. $M \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$, $t \mapsto \langle M \rangle_t(\omega)$ 絶対連続でない $\to \mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^*$ 中で dense.
5. 注意: $\mathcal{L}^*(M) \subset \mathcal{L}(M)$ なので $\mathcal{L}$ のほうが dense にするのがむずい.
6. $\lim_n [X^{(n)} - X] = 0$ のとき $I(X^{(n)})$ も距離 $||\cdot||$ で極限をもつ. これを $I(X)$ とかいて, 確率積分の定義とする.

Lemma 2.7 のきもち $E\int \cdot ds$ の結果を $E\int \cdot dA$ に転用したい. $t \mapsto \langle M \rangle_t$ 絶対連続の時は簡単にできたが, 今回はむずい. ω ごとに A_t の逆関数を使って時刻をずらして $E\int \cdot ds$ と $E\int \cdot dA$ の関係式をつくる. 逆関数必要なので, A_t を狭義単調増加にするため $A_t + t$ にしている.

C

cross-variation formula $\langle I^M(X), I^N(Y) \rangle_t = \int_0^t X_u Y_u d\langle M, N \rangle_u; t \geq 0, P-\text{a.s.}$ を示す. すでに両辺とも定義自体はすんでいる. simple process のときはすぐできる. これを $X \in \mathcal{L}^*(M), Y \in \mathcal{L}^*(N)$ の場合に拡張する. 2.14 から準備をはじめて, prop. 2.17 で証明している.

そして, 確率積分の特徴づけを最後にしている (prop. 2.19). 特徴付け: $I^M(X)$ は以下をみたす唯一の martingale $\Phi \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$ である:

$$\forall N \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}, \langle \Phi, N \rangle_t = \int_0^t X_u d\langle M, N \rangle_u;\ 0 \leq t < 0, a.s.P. \tag{1}$$

右辺には Lebesgue-Stieltjes 積分しか出てこないから, この特徴付けはとても便利らしい.

D

確率積分の被積分過程の定義域を $X \in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c}}$ を $\in \mathcal{M}_2^{\mathrm{c,loc}}$ に拡張する.

3.3

確率積分の定義と存在証明はしたが、実際に計算する技術がない。そこで ito rule を証明して使う。
continuous semimartingale とかいう謎概念

A. The Ito Rule

continuous semimartingale X の滑らかな関数 $f(X)$ もまた conti semimartingale であるこれを近似するのが Ito Rule.

B

5.2 Strong Solutions

stochastic differential equation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t \tag{2}$$

strong solution の定義. $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ と initial condition ξ がはじめから与えられていて, その上の解が strong solution.

strong uniqueness の概念.

Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■1.3+（def.1.3 $\Longrightarrow$ def.1.1 $\Longrightarrow$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1: 任意の $s \in [0, \infty)$ に対し明らかに $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0, \infty)] \leq \mathsf{P}[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $\mathsf{P}[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0, \infty)] = 1 \Longrightarrow \forall t \in [0, \infty), \mathsf{P}[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}
\left|\mathsf{P}[X^{(n)} \in A] - \mathsf{P}[Y^{(n)} \in A]\right| &= \left|\int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A}\right)\mathsf{P}(d\omega)\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|1_{X^{(n)}(\omega) \in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega) \in A}\right|\mathsf{P}(d\omega) \\
&\leq \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega) \neq Y^{(n)}(\omega)}\mathsf{P}(d\omega) \\
&= \mathsf{P}[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}[X_k \neq Y_k] = 0
\end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

■1.6+（Fubini の定理を使えと書いてあるところ） X が可測のとき,

1. 各 $\omega \in \Omega$ に対し $t \mapsto X_t(\omega)$ が Borel 可測であること:

Rudin[2] Theorem 8.5 そのまま. X_t は可積分とは限らない.

2. $t \mapsto \mathsf{E}[X_t]$ が（定義されるなら） Borel 可測であること:
   $\mathsf{E}[X_t]$ が定義されるから, $\int X_t^+(\omega)d\omega$ と $\int X_t^-(\omega)d\omega$ はどちらも有限で, Rudin[2] Theorem 8.8(a) より Borel 可測. ゆえにその差 $\mathsf{E}[X_t] = \int X_t^+(\omega)d\omega - \int X_t^-(\omega)d\omega$ も Borel 可測.
3. X_t の値域が $\mathbb{R}$ で, $\mathbb{R}$ 内の区間 I が $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ をみたすなら積分の交換などができること:
   $\int_I \mathsf{E}|X_t|dt < \infty$ ゆえ Tonelli の定理（Rudin[2] Theorem 8.8(b)）より $X_t(\omega)$ が積空間について可積分であることがいえ, 同定理 (c) が使える.

■1.9+（Y も $\{\mathscr{F}_t\}$ に適合していること）　X_t は $\mathscr{F}_t$-可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$, $A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\forall t$, $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ だから $\{X_t \neq Y_t\} \in \mathscr{F}_t$. $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\}$ であるが, 左辺が $\mathscr{F}$-可測であることと $\mathsf{P}[X_t \neq Y_t] = 0$ から単調性より左辺も測度 0. ゆえに仮定より左辺 $\in \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_t$. 結局 $\{Y_t \in A\} \in \mathscr{F}_t$ でもある.

■1.9+（This requirement is not same as saying $\mathscr{F}_0$ is complete について）　たとえば, $\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$ は完備だが, 空でない測度 0 集合を 1 つももたない [3].

■1.13

$$\{(s,\omega);\ X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1} ((\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t] \times X^{-1}_{\frac{(k+1)}{2^n}t}(A)) \bigcup \big(\{0\} \times X_0^{-1}(A)\big) \tag{3}$$

に注意 [4].

■2.3　The first statement: $T \equiv t_0 \geq 0$ を定数とすると, 任意の $t \geq 0$ に対し $\{t_0 \leq t\}$ は $\varnothing$ もしくは Ω でありいずれも $\mathscr{F}_t$ に属する.

■2.6　$X_r(\omega) \in \Gamma$ とすると, Γ: open と X: RC より時刻 r の直後も少しの時間 path は Γ に入っている. その時間の中から有理数時刻を取ってくればよい.

■2.9

- The first two assertions:
  $\{T \wedge S \leq t\} = \{T \leq t\} \cup \{S \leq t\}$ および $\{T \vee S \leq t\} = \{T \leq t\} \cap \{S \leq t\}$ より.
- $\{0 < T < t, T + S > t\} = \cup_{r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)} \{t > T > r, S > t - r\}$ がなりたつこと:
  $0 < T < t,\ T + S > t \iff 0 < T < t,\ S > t - T \iff$ ある $r \in \mathbb{Q} \cap (0,t)$ があって $\{t > T > r, S > t - r\}$ をいえばよい. 2 つ目の $\iff$ について, 実際
  - $\Longleftarrow$: $0 < r < T < t$, $S > t - r > t - T$.
  - $\Longrightarrow$: $t > T > t - S$ だが, 有理数の稠密性より $t > T > r > t - S$ なる $r \in \mathbb{Q}$ がとれる. このとき $S > t - r$, $r < T < t$.

  である.

■4.10（Doob-Meyer Decomposition）書きかけ　すべての文章に行間がある地獄である. 定理のステートメントは本で見てください.

■一意性 X が 2 通りの分解 $X_t = M'_t + A'_t = M''_t + A''_t$ を許すと仮定する．ここで M', M'' は MG, A', A'' は natural increasing である．このとき

$$\{B_t \stackrel{\text{def}}{=} A'_t - A''_t = M''_t - M'_t, \mathscr{F}_t; 0 \le t < \infty\} \tag{4}$$

は MG で, 任意の RC MG $\{\xi_t, \mathscr{F}_t\}$ に対し

$$\mathsf{E}[\xi_t(A'_t - A''_t)] = \mathsf{E}\int_{(0,t]} \xi_{s-} dB_s = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\sum_{j=1}^{m_n} \xi_{t^{(n)}_{j-1}} \left[B_{t^{(n)}_j} - B_{t_{j-1}(n)}\right] \tag{5}$$

である． ここで $\Pi_n = \{t_0^{(n)}, \dots, t_{m_n}^{(n)}\}$, $n \ge 1$ は $[0,t]$ の分割であって, $n \to \infty$ 極限で $||\Pi_n|| := \max_{1\le j\le m_n}(t_j^{(n)} - t_{j-1}^{(n)}) \to 0$ となるものとする．

$$E\left[\xi_{t^{(n)}_{j-1}}\left(B_{t^{(n)}_j} - B_{t^{(n)}_{j-1}}\right)\right] = 0, \text{ and thus } \quad E\left[\xi_t\left(A'_t - A''_t\right)\right] = 0. \tag{6}$$

参考文献

[1] Ioannis Karatzas, Ioannis Karatzas, Steven Shreve, and Steven E Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus*, volume 113. Springer Science & Business Media, 1991.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. Mathematics series. McGraw-Hill, 1987.

[3] `https://math.stackexchange.com/questions/2159241/complete-filtration`.

[4] `https://www.stat.purdue.edu/~chen418/studynotesmath.html`.