Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 30 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

0.1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10（def.1.3 $\Longrightarrow$ def.1.1 $\Longrightarrow$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] \leq P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t;\ \forall t \in [0,\infty)] = 1 \Longrightarrow \forall t \in [0,\infty), P[X_t = Y_t] = 1$.
- 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2: $X^{(n)} := (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}), Y^{(n)} := (Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}
\left|P[X^{(n)} \in A] - P[Y^{(n)} \in A]\right| &= \left|\int_\Omega \left(1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right) P(d\omega)\right| \\
&\leq \int_\Omega \left|1_{X^{(n)}(\omega)\in A} - 1_{Y^{(n)}(\omega)\in A}\right| P(d\omega) \\
&\leq \int_\Omega 1_{X^{(n)}(\omega)\neq Y^{(n)}(\omega)} P(d\omega) \\
&= P[X^{(n)} \neq Y^{(n)}] \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} P[X_k \neq Y_k] = 0
\end{aligned}$$

より示された. 最後の等号は 1.1 による.

■3,19（Fubini の定理を使うところ） 明らか. Tonelli の定理より, $\int_I E|X_t|dt < \infty$ から $X_t(\omega)$ が積空間について絶対可積分であることがいえ, Fubini の定理が使える.

■4,19（Y も $\{\mathcal{F}_t\}$ に適合していること） X_t は $\mathcal{F}_t$-可測だから $\{X_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$, $A \in \mathcal{S}$. いっぽう, $\forall t$, $P[X_t \neq Y_t] = 0$ だから $\{X_t \neq Y_t\} \in \mathcal{F}_t$. $\{X_t \notin A\} \cap \{Y_t \in A\} \subset \{X_t \neq Y_t\}$ であるが, 左辺が $\mathcal{F}$-可測であることと $P[X_t \neq Y_t] = 0$ から単調性より左辺も測度 0. ゆえに仮定より左辺 $\in \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_t$. 結局 $\{Y_t \in A\} \in \mathcal{F}_t$ でもある.

■5,11（1.13 証明）

$$\{(s,\omega);\ X_s^{(n)}(\omega) \in A\} = \bigcup_{k=0}^{2^n-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}t, \frac{(k+1)}{2^n}t\right] \times X^{-1}_{\frac{(k+1)}{2^n}t}(A)\right) \bigcup \left(\{0\} \times X_0^{-1}(A)\right) \tag{1}$$

に注意.

参考文献

[1] 舟木直久, 確率論（朝倉書店, 2004）
[2] Terence Tao, An introduction to measure theory