
確率論, 舟木直久 [1] 読書記録

最終更新: 2022 年 10 月 13 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

誤植と思われるもの（2019/7/25 初版第 14 刷）

頁	行	誤	正
141	10	$(\Omega = S^n, \mathcal{F}, P)$	$\Omega = (S^n, \mathcal{F}, P)$
239	-3	**定理 A.5**	**定義 A.5**

■42,5（$\Omega_0 \in \mathcal{F}$ がなりたつこと） Ito[2], p.65, 定理 10.2 より.

■42,6（$\tilde{X}$ が確率変数であること） $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ をいえばよい.

$$\begin{aligned}\{\tilde{X} \le a\} &= \left(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0\right) \cup \left(\{\tilde{X} \le a\} \cap \Omega_0^c\right) \\ &= \begin{cases} (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \Omega_0^c & a \ge 0 \\ (\{\lim_n X_n \le a\} \cap \Omega_0) \cup \varnothing & a < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

と変形できるが, $\{\lim_n X_n \le a\} \in \mathcal{F}$, $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ であるから a によらず $\{\tilde{X} \le a\} \in \mathcal{F}$ である. ゆえに $\tilde{X}$ は確率変数.

■45,13（$x = \pm n$ として $n \to \infty$ とすればよいこと） 有界単調数列が収束することと, 収束列の部分列はもとの列と同じ極限をもつことによる.

■46,-6

- $F(x) < w \implies x < Y(w)$: $F(x) < w \implies x \le \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\}$ である. $x = Y(w)$ と仮定すると, $\forall y > x$, $F(y) \ge w$ がなりたつが, F の右連続性より $F(x) = \lim_{y \to x+} F(y) \ge w$ となり矛盾.
- $x < Y(w) \implies F(x) < w$: 明らか. $x < Y(w) = \sup\{y \in \mathbb{R} \mid F(y) < w\} \implies F(x) < w$.

■46,11（関数 $Y(w)$） 関数 $Y(w)$ の例.

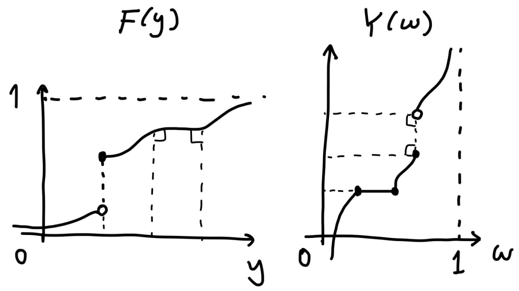

図 1　関数 $Y(w)$.

■46,-4 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{w : Y(w) \le x\} = \{w; w \le F(x)\} = (0, F(x)] \in \mathcal{B}((0,1))$ ゆえ Y は可測.

■47,2　$\mu((-\infty,x]) = m(Y \le x) = m((0,F(x)]) = F(x)$. 2 つ目の等号で (2.3) を用いた.

■47,8（X と Y の分布が一致すること）　47,2 より任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し, $m_Y((\infty,x]) = F(x) = P_X((-\infty,x])$ がなりたつ. π-λ 定理より $m_Y = P_X$.

■48,4（絶対連続, 特異）　Ito[2], p.130, 18 章.

■61,-2（$X_{1,1}, X_{2,1}, X_{2,2}, \ldots$ が）

- p 次平均収束すること: $E[|X_{n,k}|^p] = E[X_{n,k}] = \frac{1}{n}$ ゆえ $\lim E[|X_{n,k}|^p] = 0$ となる.
- 概収束しないこと: $X_{n,k}$ の定義より, 任意の $w \in (0,1)$ に対し, 任意の n について k が存在して $X_{n,k}(w) = 1$ となるから, $\{w \in (0,1); \lim X_{n,k}(w) = 0\} = \varnothing$. ゆえに $P(\lim X_{n,k} = 0) = 0 \neq 1$.

■62,2（$X_n(w) = n1_{(0,\frac{1}{n})}(w)$ が）

- 概収束すること: 任意の $w \in (0,1)$ をとる. $N \ge \frac{1}{w}$ なる自然数 N をとれば, $n \ge N$ で $X_n(w) = 0$ となる. ゆえに $\lim X_n(w) = 0$. w は任意だったから $P(\lim X_n = 0) = 1$.
- p 次平均収束しないこと: $E[|X_n|^p] = \int_0^{\frac{1}{n}} n^p dw = n^{p-1}$ だから $\lim E[|X_n|^p] \neq 0$.

■68,1（$(X_n - X)_{n\in\mathbb{N}}$ が一様可積分であること）　補題 2.55(1)(2) の条件をみたすことを確かめる.

1. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(1) をみたすことと X が可積分であることより, $\sup_n E[|X_n - X|] \le \sup_n E[|X_n|] + E[|X|] < \infty$.
2. $\sup_n E[|X_n - X|, A] \le \sup_n E[|X_n|, A] + E[|X|, A]$ に注意. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, $A \in \mathcal{F}$ が $P(A) < \delta$ をみたすなら $\sup_n E[|X_n|, A] < \epsilon/2$ かつ $E[|X|, A] < \epsilon/2$ となるような δ を選ぶ*1. このとき $\sup_n E[|X_n - X|, A] < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$.

■69,14（$||X_n| - |X|| \le |X_n - X|$）　一般の $a, b \in \mathbb{R}$ について $ab \le |a||b| \implies |a|^2 - 2|a||b| + |b|^2 \le |a|^2 - 2ab + |b|^2 \implies ||a| - |b||^2 \le |a - b|^2$ であるから.

■69,-5（条件 $P(|X| = \lambda) = 0$ について）　たとえば $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ が単調増加のとき, $|X| = \lambda$ となる w で

$$|X_n| \cdot 1_{\{|X_n| < \lambda\}}(w) \to \lambda \neq 0 = |X| \cdot 1_{\{|X| < \lambda\}}(w) \tag{1}$$

となるおそれがあるが, $P(|X| = \lambda) = 0$ なら概収束 $|X_n| \cdot 1_{\{|X_n|<\lambda\}} \to |X| \cdot 1_{\{|X|<\lambda\}}$ $a.s.$ に関与しない（ので安心）.

■70,5　$P(|X| = \lambda) > 0$ なる λ が高々可算個しかないから, この後で十分大かつ $P(|X| = \lambda) = 0$ なる λ を選ぶことができている.

■70,10（このことから...）　各 $m = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ についてそれぞれ $E[|X_m|, |X_m| \ge \lambda_m] < 2\epsilon$ をみたす λ_m を選んでおく. $\lambda_0 := \max\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n_0-1}, \lambda\}$ とおけば任意の $\lambda \ge \lambda_0$ で $\sup_n E[|X_n|, |X_n| \ge \lambda] < 2\epsilon$ がなりたつ. よって $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ は一様可積分.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] ルベーグ積分入門, 伊藤清三（裳華房）

*1 このような δ は $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が補題 2.55(2) をみたすことと, X が可積分であることより存在する.