『トゥー 多様体』読書記録

最終更新: 2022 年 9 月 21 日

注意: 記述の正確性は保証しません。ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています。

誤植と思われるもの（2021/4/30 第 1 版第 2 刷）

頁	行	誤	正
7	7	$x^i t$	$x^i(t)$
7	8	$(y^i - p^i)$	$\Sigma(y^i - p^i)$
49	1	命題 4.7	命題 4.8
95	-11	逆像 $x^{-1}(U_i)$	逆像 $\pi^{-1}(U_i)$
123	-8	S^1	S^2
134	-1	$(\mathbf{1}_M)^*$	$(\mathbf{1}_N)^*$
157	15	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^{2n}$
160	-8	$\phi(E_p) \subset \phi(E'_p)$	$\phi(E_p) \subset E'_p$
249	7	命題 18.11	命題 17.11
258	-3	(iii) $\Longrightarrow$ (i)	(ii) $\Longrightarrow$ (i)
281	-7	$(Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots Y_k)$	$(Y_0, \ldots, \hat{Y}_i, \ldots, Y_k)$
362	図 27.3	変化レトラクト	変位レトラクト

1　代数構造のまとめ（未整理）

Definition 1.0.1 (代数) A は体 K 上の**代数** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A は K 上のベクトル空間でもあるような環であって, 環の積が斉次性の条件

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \tag{1}$$

をみたす[*1].

1.1　例

■$C^\infty(U)$　開集合 $U \in \mathbb{R}^n$ 上の C^∞ 関数の集合 $C^\infty(U)$ は $\mathbb{R}$ 上の代数. $\mathcal{F}(U)$ ともかく.

■$C_p^\infty(M)$　$C_p^\infty(M)$ は $\mathbb{R}$ 上の代数.

■**導分**　M の p における **導分** (derivation) D

$$D : C_p^\infty(M) \to \mathbb{R} \quad \text{線形写像}$$

- $D(fg) = (Df)g(p) + f(p)(Dg)$

自然に導かれるベクトル空間 $\mathrm{Hom}(C_p^\infty(M), \mathbb{R})$ を点 p における M の **接空間** (tangent space) といい, T_pM と書く. その元 X_p を **接ベクトル** (tangent vector) という.

[*1] 代数には加法, 環の積, ベクトル空間のスカラー倍の 3 つの演算がある.

■**微分**　$F : N \to M, C^\infty$. 点 $p \in M$ における F の **微分** F_* は線形写像[*2]:

$$\begin{aligned} F_* : T_pN &\to T_pM \quad \text{線形写像} \\ X_p &\mapsto F_*(X_p), \\ (F_*(X_p))f &= X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}, \quad f \in C^\infty_{F(p)}(M). \end{aligned}$$

■**切断**　E の C^∞ **切断** (section) 全体の集合 $\Gamma(E)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間でもあり, 環 $C^\infty(M)$ 上の加群でもある. 開集合 $U \subset M$ に対し E の U 上の C^∞ 切断全体の集合 $\Gamma(U, E)$ は $\mathbb{R}$ ベクトル空間でもあり, 環 $C^\infty(U)$ 上の加群でもある.

■**C^∞ ベクトル場 X**

$$\begin{aligned} X : C^\infty(M) &\to C^\infty(M) \quad \text{線形写像, 導分} \\ f &\mapsto Xf, \\ (Xf)(p) &\overset{\text{def}}{=} X_pf \in \mathbb{R}, \quad p \in M. \end{aligned}$$

*3

■**コベクトル**　$M : C^\infty$ 多様体. $p \in M$ における M の **余接空間** (cotangent space) T_p^*M:

$$T_p^*M \overset{\text{def}}{=} (T_pM)^* = \mathrm{Hom}(T_pM, \mathbb{R}). \tag{2}$$

$\omega_p \in T_p^*M$ を p の **コベクトル** (covector) とよぶ.

$$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R} \tag{3}$$

1-form ω:

$$\begin{aligned} \omega : M &\to T_p^a stM \\ p &\mapsto \omega_p. \end{aligned}$$

■**関数の微分**　$f : M \to \mathbb{R}, C^\infty$ の **微分** は 1-form df:

$$(df)_p(X_p) \overset{\text{def}}{=} X_pf \in \mathbb{R}, \quad p \in M, X_p \in T_pM. \tag{4}$$

■**1-form が誘導する写像**

$$\begin{aligned} \omega : \mathfrak{X}(M) &\to C^\infty(M) \quad \mathbb{R}\ \text{線形}, C^\infty(M)\ \text{線形} \\ X &\mapsto \omega(X), \\ (\omega(X))(p) &\overset{\text{def}}{=} \omega_p(X_p) \in \mathbb{R}, \quad p \in M. \end{aligned}$$

*4

■**V 上の k テンソル**　V 上の k **テンソル** (k-tensor) $\overset{\text{def}}{=}$ k 重線形写像 $f : V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$.

■**V 上の k-コベクトル**　V 上の k-**コベクトル** (k-covector) $\overset{\text{def}}{=}$ V 上の交代 k テンソル.

■　V 上の k コベクトルからなるベクトル空間を $A_k(V)$ または $\wedge^k(V^*)$ とかく.

[*2] 導分（接ベクトル）がベクトル空間をなすこと（つまり接空間がベクトル空間であること）より.

[*3] 接ベクトル X_p が導分であることより.

[*4] $(fX)_p \overset{\text{def}}{=} f(p)X_p$.

■ M 上の k-form ω:

$$\omega : M \to \wedge^k(T_p^*M)$$
$$p \mapsto \omega_p.$$

■ $\omega : M$ 上の k-form, $X_1, \ldots, X_k$ M 上のベクトル場.

$$\omega(X_1, \ldots, X_k) : M \to \mathbb{R} \tag{5}$$
$$p \mapsto (\omega(X_1, \ldots, X_k))(p) = \omega_p((X_1)_p, \ldots, (X_k)_p) \tag{6}$$

■ M 上の C^∞ k-form 全体 $\Omega^k(M)$ はベクトル空間[*5].

■引き戻し　一般に, $L : V \to W$ 線形写像は $\alpha \in A_k(W)$ と $v_1, \ldots, v_k \in V$ に対して, **引き戻し** (pullback) $L^* : A_k(W) \to A_k(V)$ を誘導:

$$(L^*\alpha)(v_1, \ldots, v_k) = \alpha(L(v_1), \ldots, L(v_k)) \tag{7}$$

とくに幾何の文脈で, $F : N \to M, C^\infty, p \in N$ に対し微分

$$F_{*,p} : T_pN \to T_{F(p)}N \quad \text{線形} \tag{8}$$

は **引き戻し** (pullback) を誘導:

$$F^* \overset{\mathsf{def}}{=} (F_{*,p})^* : A_k(T_{F(p)}M) \to A_k(T_pN) \tag{9}$$

詳しく書くと, $\omega_{F(p)}$ を $F(p) \in M$ 上の k-コベクトルとすると, **引き戻し** $F^*(\omega_{F(p)})$ は

$$F^*(\omega_{F(p)}) : T_pN \times \cdots \times T_pN \to \mathbb{R}$$
$$F^*(\omega_{F(p)})(v_i, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \ldots, F_{*,p}v_k), \quad v_i \in T_pN.$$

と表される. ω を M 上の k-form とすると, **引き戻し** $F^*\omega$ は以下で定義される写像:

$$\begin{aligned} F^*\omega : N &\to A_k(T_pN) \\ p &\mapsto (F^*\omega)_p, \\ (F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) &\overset{\mathsf{def}}{=} F^*(\omega_{F(p)})(v_1, \ldots, v_k) \\ &= \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \ldots, F_{*,p}v_k), \quad v_i \in T_pN. \end{aligned}$$

[*5] $\wedge^k(T_p^*M)$ はベクトル空間だから.