Brownian Motion and Stochastic Calculus

最終更新: 2022 年 10 月 20 日

注意: 記述の正確性は保証しません. ややこしいことになりたくないので, 本文の引用は最小限にしています. ? マークは不明/自信なし/要復習を意味しています.

1 Martingales, Stopping Times, and Filtrations

■2,10（def.1.3 $\Longrightarrow$ def.1.1 $\Longrightarrow$ def.1.2 がなりたつこと）

- 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1: 任意の $s \in [0,\infty)$ に対し明らかに $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0,\infty)] \le P[X_s = Y_s]$ がなりたつから, $P[X_t = Y_t; \forall t \in [0,\infty)] = 1 \implies \forall t \in [0,\infty), P[X_t = Y_t] = 1$, つまり 1.3 $\Longrightarrow$ 1.1.
- 1.1 $\Longrightarrow$ 1.2: 不等式 $|P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}) \in A]| \le 2P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \ne (Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})]$ を示す. 1.1 を仮定して不等式を用いれば, $|P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \in A] - P[(Y_{t_1},\dots,Y_{t_n}) \in A]| \le 2P[(X_{t_1},\dots,X_{t_n}) \ne (Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})] \le \sum_{i=1}^n P(X_{t_i} \ne Y_{t_i}) = 0$ から 1.2 を得る. では不等式を示す. $\mathbf{X} = (X_{t_1},\dots,X_{t_n}), \mathbf{Y} = (Y_{t_1},\dots,Y_{t_n})$ とおく.

$$\begin{aligned}
|P[\mathbf{X} \in A] - P[\mathbf{Y} \in A]| &= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})] \\
&\quad - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} = \mathbf{Y})]| - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})]| \\
&= |P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})] - P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})]| \\
&\le P[(\mathbf{X} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})] + P[(\mathbf{Y} \in A) \cap (\mathbf{X} \ne \mathbf{Y})] \\
&\le 2P[\mathbf{X} \ne \mathbf{Y}]
\end{aligned}$$

より示された. 他の導出法については [2] を参照.

参考文献

[1] 確率論, 舟木直久（朝倉書店, 2004）

[2] https://math.stackexchange.com/questions/1613202/if-one-stochastic-process-is-a-modification-of-anc