Anton-Bivens-Davis

→ Sección 14.4

39 – 44 Find an equation of the tangent plane to the parametric surface at the stated point.

Ejercicio 43 $r = u\cos vi + u\sin vj + vk$; $u = 1/2$, $v = \pi/4$

<u>Solución:</u>

La ecuación paramétrica es

$$\vec{r} = u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + v\vec{k} \qquad (1)$$

Como $(u, v) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$ se tiene

$$x = x(u, v) = u\cos(u) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$y = y(u, v) = u\sin(u) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$z = z(u, v) = v = \frac{\pi}{4}$$

Ahora calcularemos las derivadas parciales de r:

- Derivada parcial respecto a u:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + v\vec{k}$$

$$= \cos v\vec{i} + \sin v\vec{j}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\vec{j}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$$

- Derivada parcial respecto a v:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}u\cos v\vec{i} + u\sin v\vec{j} + v\vec{k}$$

$$= -u\cos v\vec{i} + u\cos v\vec{j} + \vec{k}$$

$$= -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}\vec{j} + \vec{k}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} + \vec{k}$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{4}\vec{j} + \vec{k}$$

Entonces

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1) - (0)\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1) + (0)\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\vec{j} + \left(\frac{\sqrt{2}^2}{4(2)} + \frac{\sqrt{2}^2}{4(2)}\right)\vec{k}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{i} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\vec{j} + \left(\frac{1}{2}\right)\vec{k}$$

Por lo que la ecuación tangente al plano es

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(y - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(z - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$
$$\frac{\sqrt{2}x}{2} - \frac{\sqrt{2}y}{2} + \frac{z}{2} - \frac{\pi}{8} = 0$$
$$\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z - \frac{\pi}{4} = 0$$
$$\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z = \frac{\pi}{4}$$

$47 - 50$ True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

Ejercicio 47

If f has continuous first partial derivatives in the interior of a region R in the xy-plane, then the surface area of the surface $z = f(x,y)$ over R is

$$\iint_R \sqrt{\left[f(x,y)\right] + 1dA}$$

<u>Solución:</u>

El enunciado es Falso, ya que al estar en el xy-plano la región de integración no puede ser $\sqrt{k}$, tendría que ser k.

48.

Solución:

Suppose that $z = f(x, y)$ has continuous first partial derivatives in the interior of a region R in the xy-plane, and set $q = (1, 0, \partial z/\partial x)$ and $r = (0, 1, \partial z/\partial y)$. Then the surface area of the surface $z = f(x, y)$ over R is

$$\int\int_R ||q \times r|| dA$$

Solución:

Si $q = \left\langle 1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right\rangle$, $r = \left\langle 0, 1, \frac{\partial z}{\partial y} \right\rangle$ y la superficie es S, entonces

$$S = \iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \; \Delta A \; dA$$

donde $\Delta A = \Delta x \Delta y = 1 * 1 = 1$. Como $\|q \times r\| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}$ entonces

$$S = \iint_R \|q \times r\| * 1 \; dA$$

Por lo tanto es Verdadero

Ejercicio 49 If $r(u, v) = x(u, v)\mathrm{i} + y(u, v)\mathrm{j} + z(u, v)\mathrm{k}$ such that $\partial r/\partial u$ and $\partial r/\partial v$ are nonzero vectors at (u_0, v_0), then

$$\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$$

is normal to the graph of $\mathrm{r} = \mathrm{r}(u, v)$ at (u_0, v_0).

Solución:

Por la definición 14.4.1 sabemos que si $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ en un punto de la superficie, entonces el vector normal unitario a la superficie en ese punto se denota con n o $n(u, v)$ y se define como

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{||\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}||}$$

Entonces como $\frac{\partial r}{\partial u}$ y $\frac{\partial r}{\partial v}$ son vectores no cero en (u_0, v_0) se cumple que $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \neq 0$ en (u_0, v_0), sabemos que un vector unitario es de la forma

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

y como

$$n = \frac{\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}}{||\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}||}$$

se tiene que $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ es el vector normal en la gráfica $r = r(u, v)$

Por lo tanto es Verdadero

Ejercicio 50 For the function $f(x, y) = ax + by$, the area of the surface $z = f(x, y)$ over a rectangle R in the xy-plane is the product of $\Big|| < 1, 0, a\Big\rangle \times \Big\langle 0, 1, b\Big\rangle$ and the area of R.

<u>Solución:</u>Sabemos que v ϵ $\mathbb{R}^2$, donde $||v|| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Entonces tenemos 3 vectores, tales que:

$$i = (1, 0, 0)j = (0, 1, 0)k = (0, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$$

Por producto cruz, sabemos que v es igual a:

$$v = i(-a) - j(b) + k(1) = (-a, 0, 0) - (0, b, 0) + (0, 0, 1) = (-a, b, 1)$$

Entonces $v = (-a, b, 1)$ y de lo anterior sabemos que:

$$||v|| = \sqrt{(-a)^2 + b^2 + 1^2}$$

Supongamos que:

$$z = ax + by$$

Donde $x = 5$ y $y = 5$

Es decir,

$$z = 5x + 5y$$

con $1 \leq x \leq 1$ Entonces

$$\begin{aligned} ||v|| &= \sqrt{25 + 25 + 1} \\ &= \sqrt{51} \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{x} 5x + 5ydydx = -\frac{20}{3}$$

Y sabemos que $\sqrt{51} \neq -\frac{20}{3}$

Por lo tanto el enunciado es Falso.

$\rightarrow$ Sección 14.7

13–16 True–False Determine whether the statement is true or false. Explain your answer.

Ejercicio 13 If $r = x(u, v)i + y(u, v)j$, then evaluating $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ at a point (u_0, v_0) gives the perimeter of the parallelogram generated by the vectors $\partial r/\partial u$ and $\partial r/\partial v$ at (u_0, v_0).

Solución:

Falso. Nos da el área de un paralelogramo que aproxima el área de una región.

Ejercicio 14 If $r = x(u, v)$i $+y(u, v)$j maps the rectangle $0 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 5$ to a region R in the xy-plane, then the area of R is given by

$$\int_1^5 \int_0^2 \left| \frac{\partial\,(x, y)}{\partial\,(u, v)} \right| du\,dv$$

Solución:

Por la fórmula (8) sabemos que si $\vec{k}$ es unitario

$$\Delta A = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

Por lo tanto es Falso

Ejercicio 15 The Jacobian of the transformation $x = rcos\theta$, $y = rsin\theta$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r^2$$

Solución:Haciendo la transformación del Jacobiano podemos decir lo siguiente:

$\partial(x, y) = \partial(r, \theta) = b$

$$a = \begin{bmatrix} \frac{x}{dx} & \frac{x}{dy} \\ \frac{y}{dx} & \frac{y}{dy} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{x'}{dx'} & \frac{x'}{dy'} \\ \frac{y'}{dx'} & \frac{y'}{dy'} \end{bmatrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} cos(\theta) & -rsen(\theta) \\ sen(\theta) & rcos(\theta) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$a = 1$$
$$b = r$$

Por lo que:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \frac{1}{r}$$

Y $\frac{1}{r} \neq r^2$

Por lo tanto el enunciado es Falso.

Ejercicio 16 The Jacobian of the transformation $x = \rho \sin\phi \cos\theta$,$y = \rho \sin\phi \sin\theta$, $z = \rho\cos\phi$ is

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$$

<u>Solución:</u>

En la transformación ρ es constante. Sea $r(\theta,\phi) = x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k} = \rho sen(\phi)cos(\theta)\hat{\imath}+ \rho sen(\phi)sen(\theta)\hat{\jmath}+\rho cos(\phi)\hat{k}$. Luego, el Jacobiano de la transformación es $\left\|\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\phi}\right\|$.

$\frac{\partial r}{\partial\theta} = \frac{\partial x}{\partial\theta}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial\theta}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial\theta}\hat{k} = -\rho sen(\phi)sen(\theta)\hat{\imath} + \rho sen(\phi)cos(\theta)\hat{\jmath} + 0\hat{k}$

$\frac{\partial r}{\partial\phi} = \frac{\partial x}{\partial\phi}\hat{\imath} + \frac{\partial y}{\partial\phi}\hat{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial\phi}\hat{k} = \rho cos(\phi)cos(\theta)\hat{\imath} + \rho cos(\phi)sen(\theta)\hat{\jmath} + (-\rho sen(\phi))\hat{k}$

$\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\phi} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -\rho sen(\phi)sen(\theta) & \rho sen(\phi)cos(\theta) & 0 \\ \rho cos(\phi)cos(\theta) & \rho cos(\phi)sen(\theta) & -\rho sen(\phi) \end{vmatrix}$
$= (\rho^2 sen(\phi)cos(\phi)sen^2(\theta) - \rho^2 sen(\phi)cos(\phi)cos^2(\theta))\hat{k} - 0 - \rho sen(\phi)(\rho sen(\phi)cos(\theta)\hat{\imath} + \rho sen(\phi)sen(\theta)\hat{\jmath}) = -\rho sen(\phi)(\rho sen(\phi)cos(\theta)\hat{\imath} + \rho sen(\theta)sen(\phi)\hat{\jmath} + \rho cos(\phi)\hat{k})$
$= -\rho sen(\phi) * r(\theta,\phi)$

Por lo tanto,

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial\theta} \times \frac{\partial r}{\partial\phi}\right\| = |\rho|\, sen(\phi)\, \|r(\theta,\phi)\| = |\rho|\, sen(\phi)\rho = \rho^2 sen(\phi)$$

Por lo que es Verdadero

Ejercicio 22 Use the transformation $u = x + y$, $v = x - y$ to find

$$\int\int_R (x-y)e^{x^2-y^2}\, dA$$

over the rectangular region R enclosed by the lines $x+y=0$, $x+y=1$, $x-y=1$, $x-y=4$.

Solución:

Como $u = x+y$, $v = x-y$ se tiene que

$$\int\int_R (x-y)e^{x^2-y^2}\, dA = \int\int_R ve^{(x+y)(x-y)}\mathrm{d}A = \int\int_R ve^{uv} J(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

Entonces $1 \leq u \leq 4$ y $1 \leq v \leq 3$, por lo que

$$\int_1^4 \int_1^3 ve^{uv} J(u,v)\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

Calculemos las derivas parciales

- $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\, x+y = 1$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\, x-y = -1$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\, x+y = 1$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\, x-y = 1$

Ahora vamos a obtener $J(u,v)$:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = ((1)(-1)-(1)(1))^{-1} = (-2)^{-1} = -\frac{1}{2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \int_1^3 -\frac{1}{2}ve^{uv}\mathrm{d}v\mathrm{d}u &= -\frac{1}{2}\int_1^3 \int_1^4 ve^{uv}\mathrm{d}v\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 v \int_1^4 e^{uv}\mathrm{d}v\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$w = uv \qquad dw = vdv \qquad du = \frac{dw}{v}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 v \int_1^4 \frac{1}{v}e^{w}\mathrm{d}w\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 \frac{v}{v} \int_1^4 e^{w}\mathrm{d}w\mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 e^{uv}\Big|_1^4 \mathrm{d}u \\
&= -\frac{1}{2}\int_1^3 e^{4v} - e^{v}\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\int_1^3 e^{4v}\mathrm{d}u - \int_1^3 e^{v}\mathrm{d}u\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}e^{4v}\Big|_1^3 - e^{v}\Big|_1^3\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\left(e^{4(3)} - e^{4(1)}\right) - \left(e^{3} - e^{1}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{8}\left(e^{12} - e^{4}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{3} - e^{1}\right)$$

$$= \frac{-e^{12} + e^{4} + 4e^{3} - 4e}{8}$$

Ejercicio 29 If a, b, and c are positive constants, then the transformation $x = au$, $y = bv$, $z = cw$ can be rewritten as $x/a = u$, $y/b = v, z/c = w$, and hence it maps the spherical region:

In these exercises, perform the integration by transforming the ellipsoidal region of integration into a spherical region of inte- gration and then evaluating the transformed integral in spherical coordinates.

$$\iint\limits_{G} x^2 dV$$

Where G is the region enclosed by the ellipsoid $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$

<u>Solución:</u>

Sabemos que la fórmula de la elipsoide es:

$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1$

Utilizando la transformación Jacobiana podemos decir que:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

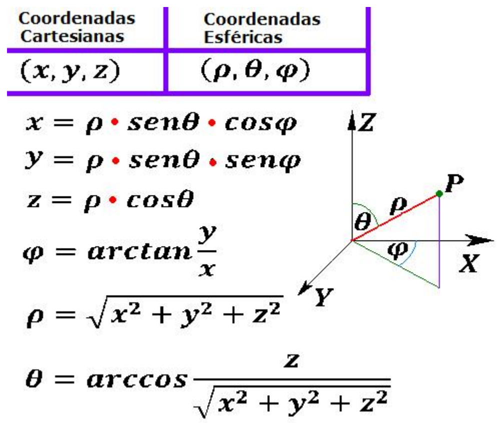
Entonces $J = 36$

Utilizando las fórmulas de las coordenadas esféricas, tenemos que:

$$u = \varphi cos\theta sin\phi$$

$$v = \varphi sin\theta sin\phi$$

$$w = \varphi cos\phi$$



Hughes-Hallet

In Exercises 1−6, check whether p is a joint density function. Assume $p(x, y) = 0$ outside the region R.

Ejercicio 6 $p(x, y) = xye^{-x-y}$, where R is $x \geq 0$, $y \geq 0$

<u>Solución:</u>

Para decir que p es una función de densidad debe de cumplir

- $p(x, y) \geq 0$
- $\iint_R p(x, y)\,\mathrm{d}A = 1$

→ Probemos que $p(x, y) \geq 0$:

Se tiene que $x \geq 0$, $y \geq 0$ entonces e^{-x-y} es positivo para cualquier punto (x, y) en R

Por lo tanto $p(x, y) \geq 0$

→ Probemos que $\iint_R p(x, y)\,\mathrm{d}A = 1$:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\infty} y\left(-e^{-y-x}x - e^{-y-x}\right)\Big|_0^{\infty} dy$$

$$= \int_0^{\infty} y\left(\left(-e^{-y-\infty}\infty - e^{-y-\infty}\right) - \left(-e^{-y-(0)}\cdot(0) - e^{-y-0}\right)\right) dy$$

$$= \int_0^{\infty} y\left((0)\cdot\left(-e^{-y-(0)}\cdot(0) - e^{-y-0}\right)\right) dy$$

$$= \int_0^{\infty} y\left(-\left(-e^{-y}\right)\right) dy$$

$$= -e^{-y}y - e^{-y}\Big|_0^{\infty}$$

$$= -e^{-\infty}\infty - e^{-\infty} - \left(-e^{-0}\cdot(0) - e^{-0}\right)$$
$$= 0 - \left(0 - e^{0}\right)$$
$$= 0 - \left(-e^{0}\right)$$
$$= e^{0}$$
$$= 1$$

Por lo tanto $\int_0^\infty \int_0^\infty xye^{-x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$

Ejercicio 22 Two independent random numbers x and y between 0 and 1 have joint density function

$$p(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ if } 0 \le x, y \le 1 \\ 0 \qquad \text{otherwis.} \end{cases}$$

(a) Find $F(t)$, the probability that $z \le t$. Treat separately the cases $t \le 0$, $0 < t \le 1/2$, $1/2 < t \le 1$, $1 < t$. Note that $F(t)$ is the cumulative distribution function of z.

Solución:

Como $z \le t$ entonces cuando $t \le 0$ $F(t) = 0$ pues $z = \frac{x+y}{2} \ge 0$ y cuando $t > 1$ entonces $F(t) = 1$ pues $z \le 1$.
Para el caso $0 \le t \le 1$ tenemos que $F(t) = \int_R p(x,y)dA$ donde R es la región donde $\frac{x+y}{2} \le t$, además como $p(x,y) = 1$ solo si $0 \le x, y \le 1$ y$p(x,y) = 0$ en otro caso, la integral solo tiene valor si $0 \le x, y \le 1$. Si hacemos que $t = \frac{x+y}{2}$ entonces tenemos que $F(t)$ es el área dentro de la región que está debajo de la recta t. Se observa que $2t = x + y$ y cuando $x = 0$ tenemos $y = 2t$ y cuando $y = 0$ tenemos que $x = 2t$, por lo tanto t junto con los ejes construyen un triángulo rectángulo de base y altura $2t$.

Cuando $0 < t \le \frac{1}{2}$ el triángulo está dentro de R pues $2t \le 1$. Entonces $F(t) = \frac{2t*2t}{2} = 2t^2$

Cuando $\frac{1}{2} < t \le 1$ no todo el triángulo está dentro de R pues $2t \le 2$. Cuando $y = 1$ tenemos que $x = 2t - 1$ y cuando $x = 1$, $y = 2t - 1$, entonces la recta t corta los límites de R en $x, y = 2t - 1$ lo que nos crea un triángulo rectángulo sobre t y dentro de R cuya base y altura es $1 - (2t - 1) = 2 - 2t$ y su área es $\frac{(2-2t)^2}{2}$. Por lo tanto $F(t) = 1 * 1 - \frac{(2-2t)^2}{2} = 1 - 1 - 2t + t^2 = 2t + t^2$ Por lo tanto,

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \le 0 \\ 2t^2 & \text{si } 0 < t \le \frac{1}{2} \\ 2t + t^2 & \text{si } \frac{1}{2} < t \le 1 \\ 1 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(b) Find and graph the probability density function of z.

Solución:

Obtenemos la función de densidad derivando la función acumulada. Entonces:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ 4t & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{2} \\ 2 + 2t & \text{si } \frac{1}{2} < t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

(c) Are x and y more likely to be near 0, 1/2, or 1?What about z?

Solución:

Como $0 \leq x, y \leq 1$ es igual de probable que x y y estén cerca del 0, $\frac{1}{2}$ ó 1.