Alcance máximo en el plano horizontal

[Cinemática](#)

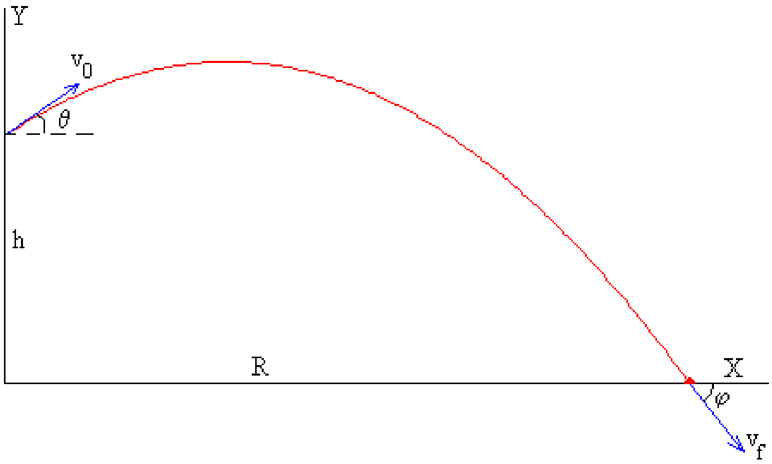
Hemos demostrado que el alcance máximo se obtiene para el ángulo de tiro de 45º, cuando el cañón y el blanco están en una superficie horizontal.

En esta página, vamos a estudiar el movimiento de un proyectil que se dispara desde una altura *h* sobre una superficie horizontal, y a calcular el ángulo de tiro para el cual el alcance es máximo.

Este ejemplo, nos permiten estudiar en detalle la trayectoria parabólica y practicar con funciones trigonométricas seno, coseno y tangente.

Se dispara un proyectil desde una cierta altura sobre el suelo

Se dispara un proyectil desde una altura *h* sobre un plano horizontal con velocidad inicial v_0, haciendo un ángulo θ con la horizontal. Para describir el movimiento establecemos un sistema de referencia como se indica en la figura.



Las componentes de la velocidad del proyectil en función del tiempo son:

$v_x=v_0\cdot\cos\theta$
$v_y=v_0\cdot\text{sen}\theta-g\cdot t$

La posición del proyectil en función del tiempo es

$x= v_0\cdot\cos\theta\cdot t$
$y= h+v_0\cdot\text{sen}\theta\cdot t-g\cdot t^2/2$

Estas son las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, ya que dado el tiempo *t*, se obtiene la posición *x* e *y* del proyectil.

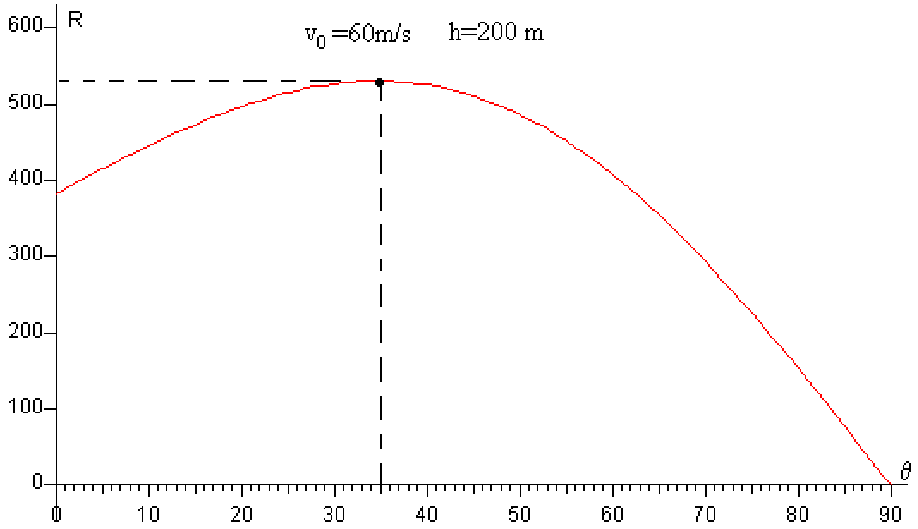
El tiempo de vuelo *T* se obtiene poniendo *y*=0 en la segunda ecuación y despejando el tiempo *t*.

$$T = \frac{v_0}{g}\left(\text{sen}\,\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}\right) \qquad z = \frac{gh}{v_0^2}$$

El proyectil llega al punto de impacto en el instante *t=T*. Sustituyendo *t* en la primera ecuación obtenemos el alcance, o distancia horizontal entre el origen y el punto de impacto, *R*.

$$R = \frac{v_0^2}{g}\left(\text{sen}\,\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}\right)\cos\theta \qquad z = \frac{gh}{v_0^2}$$

En la figura, se representa el alcance *R* en función del ángulo de tiro θ.



La componente v_y de la velocidad cuando el cuerpo llega al suelo es

$$v_y = v_0\text{sen}\,\theta - gT = -v_0\sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}$$

La velocidad final v_f del proyectil cuando llega al suelo y el ángulo que forma con la horizontal (véase la primera figura) es

$$v_f = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = v_0\sqrt{1+2z}$$

$$\tan\varphi = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}}{\cos\theta}$$

El módulo de la velocidad final v_f se puede calcular también, aplicando el principio de conservación de la energía.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$$

Alcance máximo

Derivando *R* con respecto del ángulo de tiro θ e igualando a cero obtenemos el ángulo de tiro θ_m para el cual el alcance es máximo.

$$\left(\cos\theta + \frac{2\text{sen}\,\theta\cos\theta}{2\sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}}\right)\cos\theta - \left(\text{sen}\,\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}\right)\text{sen}\,\theta = 0$$

$$(\cos^2 - \text{sen}^2\theta)\left(\text{sen}\,\theta + \sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}\right) = 2z\text{sen}\,\theta$$

$$\sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z} = \frac{2z\text{sen}\,\theta}{\cos(2\theta)} - \text{sen}\,\theta$$

Elevamos al cuadrado y simplificamos

$$(1-2\text{sen}^2\theta)^2 = 2z\text{sen}^2\theta - 2\text{sen}^2\theta(1-2\text{sen}^2\theta)$$

$$\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2+2z} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+2z}{2+2z}$$

El ángulo θ_m para el cual el alcance R es máximo vale

$$\boxed{\tan\theta_m = \frac{1}{\sqrt{1+2z}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh}}}$$

Sustituyendo cosθ y senθ en función del parámetro z, en la expresión del alcance R, se obtiene después de algunas operaciones

$$\boxed{R_m = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+2z} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2+2gh}}$$

Otra forma de expresar el alcance máximo R_m es

$$R_m = \frac{v_0^2}{g\cdot\tan\theta_m}$$

Teniendo en cuenta la relación trigonométrica

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

llegamos a esta expresión tan simple para el alcance máximo

$R_m=h\cdot\tan(2\theta_m)$

El tiempo de vuelo T_m para el ángulo θ_m

$$\boxed{T_m = \frac{v_0}{g}\sqrt{2+2z} = \frac{\sqrt{2(v_0^2+2gh)}}{g}}$$

El alcance máximo sin cálculo de derivadas

Una forma alternativa de calcular el ángulo θ_m, sin tener que realizar un cálculo de derivadas es el siguiente:

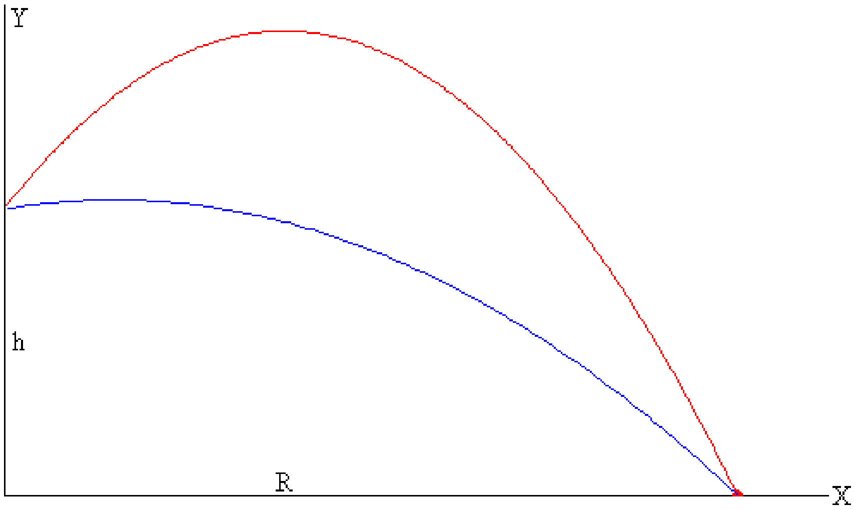
Eliminamos el tiempo t, en de las ecuaciones paramétricas de la trayectoria, llegamos a la ecuación de la parábola (recuérdese que $1/\cos^2\theta=1+\tan^2\theta$)

$$y = h + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1+\tan^2\theta)$$

En el punto de impacto con el suelo y=0, obtenemos la ecuación de segundo grado en tanθ

$$\frac{gR^2}{2v_0^2}\tan^2\theta - R\cdot\tan\theta + \left(\frac{gR^2}{2v_0^2} - h\right) = 0$$

con dos soluciones para $R<R_m$, y una solución para $R=R_m$ y ninguna para $R>R_m$,véase la figura.



Esto implica que el discriminante de la ecuación de segundo grado debe ser cero para el ángulo θ_m que hace que el alcance sea máximo

$$R_m^2 - 4\frac{gR_m^2}{2v_0^2}\left(\frac{gR_m^2}{2v_0^2} - h\right) = 0 \qquad R_m = \frac{v_0}{g}\sqrt{2gh + v_0^2}$$

El mismo resultado que ya obtuvimos de una forma más laboriosa.

Velocidad final y velocidad inicial

La velocidad final y el ángulo que forma con el eje X son

$$v_f = v_0\sqrt{1+2z}$$

$$\tan\varphi_m = -\frac{\sqrt{\text{sen}^2\theta + 2z}}{\cos\theta} = -\sqrt{1+2z}$$

La relación entre el ángulo de disparo θ_m y el ángulo ϕ_m que forma el vector velocidad cuando el proyectil llega al suelo es

$$\tan\varphi_m = -\frac{1}{\tan\theta_m} \qquad \theta_m = \varphi_m + \frac{\pi}{2}$$

El vector velocidad inicial $\mathbf{v_0}$ y el vector velocidad final $\mathbf{v_f}$ son perpendiculares,

Ejemplo:

- La velocidad de disparo v_0=60 m/s,
- La altura inicial del proyectil h=200 m
- El ángulo de tiro θ=30º.

  El alcance R es

  $$z = \frac{9.8\cdot 200}{60^2} = 0.54 \qquad R = \frac{60^2}{9.8}\left(\text{sen}30° + \sqrt{\text{sen}^2 30° + 2\cdot 0.54}\right)\cos 30° = 527.2\text{ m}$$

  El tiempo T de vuelo del proyectil es

  $$T = \frac{60}{9.8}\left(\text{sen}30° + \sqrt{\text{sen}^2 30° + 2\cdot 0.54}\right) = 10.1\text{ s}$$

- El alcance máximo (véase la última figura) se obtiene para el ángulo

  $$\tan\theta_m = \frac{1}{\sqrt{1+2\cdot 0.54}} \qquad \theta_m = 34.7°$$

El alcance y el tiempo de vuelo para este ángulo son, respectivamente

$$R_m=\frac{60^2}{9.8}\sqrt{1+2\cdot 0.54}=530.9\text{ m}$$

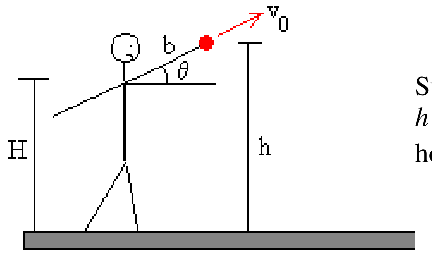
$$T_m=\frac{60}{9.8}\sqrt{2+2\cdot 0.54}=10.8\text{ s}$$

- Ángulos de tiro que producen el mismo alcance R=450 m.

  Podemos calcular los dos ángulos de tiro que producen el mismo alcance $R<R_m$, por ejemplo un alcance de R=450 m. Calculamos las raíces de la ecuación de segundo grado en $\tan\theta$

$$\frac{9.8\cdot 450^2}{2\cdot 60^2}\tan^2\theta-450\cdot\tan\theta+\left(\frac{9.8\cdot 450^2}{2\cdot 60^2}-200\right)=0$$

  θ_1=10.8º, θ_2=55.3º, Como vemos $\theta_1<\theta_m<\theta_2$



Supongamos que un atleta lanza un peso desde una altura h con una velocidad v_0, haciendo un ángulo θ con la horizontal.

Si el atleta lanza el peso desde una altura de h=2.1 m y quiere que llegue a una distancia R_m=22 m, el ángulo óptimo de lanzamiento θ_m vale

$R_m=h\cdot\tan(2\theta_m)$ θ_m=42.3º

El análisis del lanzamiento del peso es más complicado, ya que la altura h no es independiente del ángulo θ, tal como se aprecia en la figura, sino que $h=H+b\cdot\text{sen}\theta$, siendo H la altura del hombro y b la longitud del brazo. (Véase De Luca 2005)

Actividades

Se introduce

- La altura h desde la que se dispara el proyectil, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Altura**.
- El ángulo de tiro θ, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Ángulo**, o bien, introduciendo el valor del ángulo en el control de edición correspondiente.
- La velocidad de disparo se ha fijado en el valor v_0=60 m/s

Se pulsa el botón titulado **Empieza**

Observamos la trayectoria del proyectil hasta que llega al suelo. En la parte superior del applet, se proporcionan los datos del proyectil:

- tiempo t,
- las componentes de la velocidad v_x y v_y,
- la posición x, e y

Cuando llega al suelo, podemos anotar el alcance x, el tiempo de vuelo t y la velocidad final del proyectil v_x y v_y, y comprobar estos resultados con los cálculos realizados manualmente.

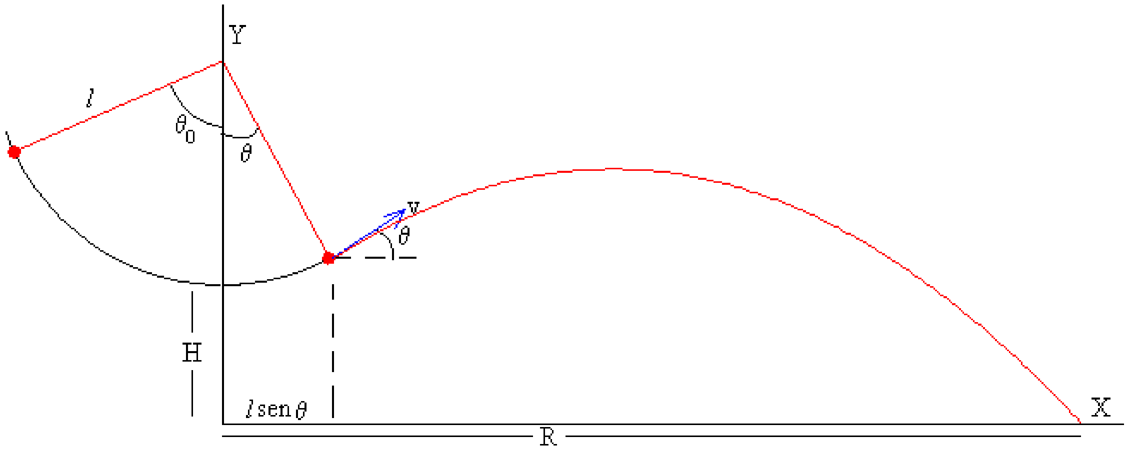
El programa interactivo representa, la trayectoria actual del proyectil y su trayectoria anterior. Fijada la altura h, vamos cambiando el ángulo de tiro θ. Mediante el procedimiento de aproximaciones sucesivas, podemos obtener el ángulo para el cual el alcance es máximo.

CinemaApplet2 aparecerá en un explorador compatible con JDK 1.1.

Se lanza un proyectil desde un péndulo simple

Consideremos un objeto que denominaremos proyectil de masa *m* que cuelga de una cuerda de longitud *l*. Cuando se separa de su posición de equilibrio y se suelta comienza a oscilar, tal como estudiaremos en la página dedicada al péndulo simple.

Soltamos el proyectil cuando la cuerda se desvía de la posición de equilibrio un ángulo θ_0. Se corta la cuerda cuando el péndulo se desvía de la posición vertical un ángulo $\theta<|\theta_0|$. El proyectil describe una trayectoria parabólica si se desprecia el rozamiento con el aire, tal como se aprecia en la figura.



Principio de conservación de la energía

El proyectil parte de la posición inicial θ_0, con velocidad inicial v=0. Describe un arco de circunferencia y llega a la posición final θ, con velocidad v. Aplicamos el principio de conservación de la energía para calcular la velocidad v. Si ponemos el nivel cero de energía potencial en la parte más baja de la trayectoria

$$mg(l - l\cos\theta_0) = \tfrac{1}{2}mv^2 + mg(l - l\cos\theta)$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

Ecuaciones del tiro parabólico

Para describir el movimiento del proyectil, situamos los ejes X e Y del modo en el que se señala en la figura; el eje X en el suelo, y el eje Y tiene la dirección del péndulo en la posición de equilibrio $\theta=0$.

El proyectil se dispara con una velocidad v, haciendo un ángulo θ con la horizontal, desde una altura $h=H+(l-l\cos\theta)$. Siendo $H+l$ la altura del centro de giro del péndulo.

La posición del proyectil en función del tiempo es

$x= l\cdot\text{sen}\theta+v\cdot\cos\theta\cdot t$
$y= h+v\cdot\text{sen}\theta\cdot t-g\cdot t^2/2$

Siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior. Obtenemos el alcance R, poniendo $y=0$, en la segunda ecuación, despejando el tiempo de vuelo t, y sustituyéndolo en la primera ecuación de la trayectoria.

$$R=\frac{v^2}{g}\left(\text{sen}\,\theta+\sqrt{\text{sen}^2\theta+2z}\right)\cos\theta+l\cdot\text{sen}\,\theta \qquad z=\frac{gh}{v^2}$$

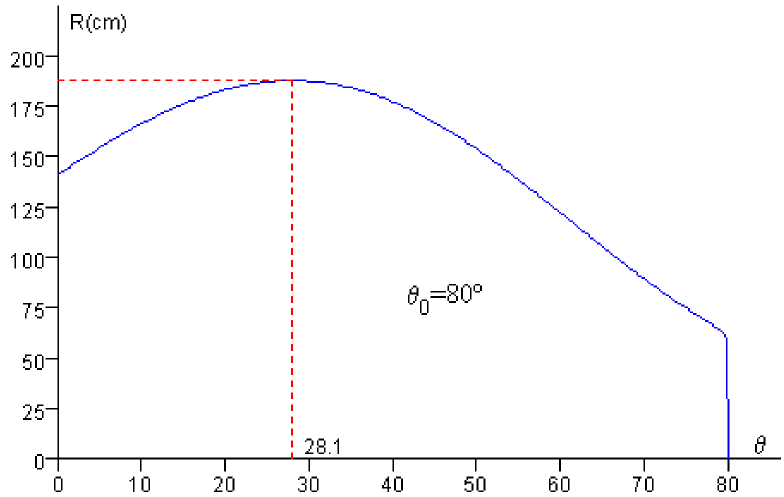
Expresamos el alcance R en función del ángulo θ

$$R=2l(\cos\theta-\cos\theta_0)\cos\theta\left(\text{sen}\,\theta+\sqrt{\text{sen}^2\theta+\frac{H+l(1-\cos\theta)}{l(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\right)+l\cdot\text{sen}\,\theta$$

Dado el ángulo θ_0 de partida del objeto, se tratará de calcular el ángulo θ, para el cual el alcance R es máximo.

Alcance máximo

Dado el ángulo θ_0 de partida del objeto, calcularemos el ángulo θ_m, para el cual el alcance R es máximo.



En la figura, se representa el alcance R en función del ángulo θ, para θ_0=80º. El ángulo θ_m para el cual R es máximo se obtiene derivando R respecto del ángulo θ, e igualando a cero. Es decir, resolviendo la ecuación $dR/d\theta=0$.

En el segundo artículo citado en las referencias, el alcance máximo se obtiene calculando las raíces reales de la ecuación cúbica.

$$x^3+\frac{H+l(1-2\cos\theta_0)}{l}x^2-\frac{H+l(1-\cos\theta_0)}{l}=0$$

con $x=\cos\theta_m$

Ejemplo:

- Longitud del péndulo l=0.6 m

- Altura del proyectil en la situación de equilibrio, H=1.0 m
- Se desvía el péndulo θ_0=80º de la posición de equilibrio
- Se corta la cuerda cuando el péndulo se desvía θ=30º

La velocidad del proyectil cuando se corta la cuerda es

$$v=\sqrt{2\cdot 9.8\cdot 0.6(\cos 30^{o}-\cos 80^{o})}=2.85\ \mathrm{m/s}$$

Ecuaciones del movimiento

x= 0.6·sen30+2.85·cos30·t
y= 1.0+0.6-0.6·cos30+2.85·sen30·t-9.8·t^2/2

El alcance se calcula poniendo y=0. Resolvemos la ecuación de segundo grado en t. La raíz positiva vale t=0.64 s

Calculamos el alcance en la primera ecuación x=1.87 m

También podemos calcular el alcance de forma directa

$$R=2\cdot 0.6(\cos 30-\cos 80)\cos 30\left(\mathrm{sen}30+\sqrt{\mathrm{sen}^2 30+\frac{1.0+0.6(1-\cos 30)}{0.6(\cos 30-\cos 80)}}\right)+0.6\cdot\mathrm{sen}\,30=1.87\ \mathrm{m}$$

Para calcular el ángulo θ_m para el cual el alcance es máximo, se resuelve la ecuación cúbica

$x^3+a\cdot x^2+bx+c=0$

con a=2.32, b=0, c=-2.49

Se calcula

$$Q=\frac{a^2-3b}{9}=0.60 \qquad R=\frac{2a^3-9ab+27c}{54}=-0.78$$

Como $R^2>Q^3$ entonces la ecuación tiene una raíz real

$$A=-\mathrm{sgn}(R)\left[|R|+\sqrt{R^2-Q^3}\right]^{1/3}=1.12$$
$$x_1=A+\frac{Q}{A}-\frac{a}{3}=0.882$$

El ángulo $x_1=\cos\theta_m$, θ_m=28.1º

Este ángulo θ_m se puede obtener aproximadamente de forma gráfica.

Actividades

Se introduce

- El ángulo θ_0 que se desvía el péndulo de la posición de equilibrio, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Angulo partida.**
- La longitud del péndulo se ha fijado en l=0.6 m
- La altura del proyectil en la posición de equilibrio θ=0 se ha fijado en H=1.0 m

Se pulsa el botón titulado **Nuevo**

- El ángulo θ que forma el péndulo con la vertical cuando se corta la cuerda que sostiene el proyectil, actuando en la barra de desplazamiento titulada **Angulo final.**

Se pulsa el botón titulado **Empieza**

Cuando el proyectil llega al suelo, se guardan los pares de datos, (ángulo θ, alcance R) en el área de texto situado en la parte izquierda del applet.

Pulsando el botón titulado **Gráfica** se representa los resultados "experimentales" como puntos de color rojo sobre la representación gráfica de la función $R(\theta)$. El alcance R en función del ángulo final θ. Calcula el ángulo θ_m que hace que el alcance R sea máximo

CinemaApplet2 aparecerá en un explorador compatible con JDK 1.1.

Referencias

Buckmaster H. A., *Ideal ballistic trajectories revisited*. Am. J. Phys. 53 (7) July 1985, pp. 638-641.

Bittel D. *Maximizing the range of a projectile launched by a simple pendulum*. The Physics Teacher, 43, February 2005, pp. 98-100.

De Luca R. *Shot-put kinematics*. Eur. J. Phys. 26 (2005), pp. 1031-1036