1) $t = f(y, z)$

Se poate substitui x cu t în φ, unde

$\varphi = y \to (\forall x (x \to v_0) \to x)$

Dar dacă $\varphi = y \to (\forall y (x \to y))$?

2). Determinați varianta y_1, y_2 - liberă φ' a lui φ, unde:

$\varphi = (y_2 \to (\forall y_1 (y_2 \to (y_2 \to y_1)))) \to y_1$

Dar dacă: $\varphi = \forall y_1 (y_1 \to y_2 \land \forall y_2 (y_2 \to y_1))$

3) Demonstrați că:

$\exists y \forall x \varphi \vDash \forall x \exists y \varphi$

$(\exists y \forall x \varphi)[e] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. pt. orice $b \in A$ avem că $\varphi[e_{x \mapsto b, y \mapsto a}] \vDash$

$\vDash$ pt. orice $b \in A$ există $c \in A$ a.î.

$\varphi[e_{x \mapsto b, y \mapsto c}] \overset{b := d}{\Leftrightarrow}$ pt. orice $d \in A$ există $c \in A$ a.î. $\varphi[e_{x \mapsto d, y \mapsto c}] \Leftrightarrow \forall x \exists y \varphi$

4) Demonstrați:

$\mathcal{A} \vDash \forall x(\varphi \to \psi) \Leftrightarrow$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e_{x \mapsto a}]$

$\Leftrightarrow$ pt. orice $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash (\varphi)[e_{x \mapsto a}]$ sau

sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto a}] \Rightarrow$ există $a \in A$, $\mathcal{A} \nvDash (\varphi)[e_{x \mapsto a}]$

sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto a}] \Leftrightarrow$ există $a \in A$. $\mathcal{A} \nvDash (\varphi)[e_{x \mapsto a}]$

sau există $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \psi[e_{x \mapsto a}] \Leftrightarrow \mathcal{A} \nvDash (\exists x(\varphi))[e]$

sau $\mathcal{A} \vDash (\exists x \psi)[e] \Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x \varphi \to \exists x \psi)[e]$

5) Demonstrați: $\exists x(\psi \to \varphi) \mathrel{\vDash\!\!\!\dashv} \forall x \psi \to \varphi$

$\mathcal{A} \vDash (\exists x(\psi \to \varphi))[e] \Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î.

$\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \mapsto a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \mapsto a}] \Leftrightarrow$

$x \notin FV(\varphi)$

$\Leftrightarrow$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \nvDash \psi[e_{x \mapsto a}]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\exists x \neg \psi)[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\neg \forall x \neg(\neg \psi))[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \nvDash (\forall x \psi)[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mathcal{A} \vDash (\forall x \psi \to \varphi)[e]$

6) $S_{6.2}$:

$\forall x \forall y \forall z(x \sim x \land (x \sim y \to y \sim x) \land$

$\land ((x \sim y) \land y \sim z \to x \sim z)) \land \forall x \exists y$

$(x \sim y \land (\forall z(x \sim z) \to y = z \lor x = z))$

$\land \neg(x = y)$

7) Transformați în F.N. prenex ~~x~~ apoi în F.N. Skolem.:

$$\exists x \forall y P(x,y) \vee \neg \exists y (S(y) \to \forall z R(z)) \dashv\vdash$$

$$\exists x \forall v P(x,v) \vee \forall y \neg (S(y) \to \forall z R(z)) \dashv\vdash$$

$$(\exists x \forall v P(x,v) \vee \forall y \neg (S(y) \to \forall z R(z)) \dashv\vdash$$

$$\exists x \forall v \forall y (P(x,v) \vee \neg \forall z (S(y) \to R(z))) \dashv\vdash$$

$$\boxed{\exists x \forall v \forall y \exists z (P(x,v) \vee \neg (S(y) \to R(z)))} \models$$

F.N. prenex

$$\forall v \forall y \exists z (P(m,v) \vee \neg (S(y) \to R(z))) \models$$

$$\forall v \forall y (P(m,v) \vee \neg (S(y) \to R(f(v,y)))$$

unde m este un nou simbol de constantă, iar f fct. de aritate 2

F.N. Skolem.

Model rezolvat:

I)

P_1:

$$\Sigma = \{ \underbrace{(v_0 \wedge \neg v_1)}_{\varphi} \vee \underbrace{(v_1 \wedge \neg v_0)}_{\psi} \}$$

Cum pentru φ avem că modelul este g, iar pentru ψ modelul este h, obținem că $Mod(\Sigma)$ este reuniunea celor 2, adică $\{g, h\}$, asta deoarece avem operatorul „$\vee$" între cele 2.

P_2: $\Gamma \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\neg\varphi) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Mod(\Gamma) \cap Mod(\varphi) = \emptyset \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Mod(\Gamma \cup \{\varphi\}) = \emptyset \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesat.

P_4: Vezi ex. 5) din seminarul curent.

P_5:

$$\mathcal{L} = (N; S; <; 0)$$

$$\rho = \dot{S}\dot{0} \dot{<} x \qquad \theta = x \dot{<} \dot{S}\dot{0}$$

Este evident că $\varphi = \exists x \rho \wedge \exists x \theta$ este adev.

Totuși, avem ~~...~~ în ac. timp că $\exists x (\rho \wedge \theta)$ este falsă.

P_6 : A, C

P_7 : C

P_8 : B, E

P_9 : E

P_{10} : A, E

P_{11} : E

P_{12} : C, E

P_{13} : B

P_{14} : D, E

P_{15} : A, C