1) Care din acestea sunt consecințe semantice pt Γ:

$\Gamma = \{ v_0 \to v_1 ,\ v_2 \wedge v_1 \} \vDash$ ________

a)

v_0	v_1	v_2
0/1	1	1

✓ 1) v_1

✗ 2) v_0

✓ 3) $v_2 \to v_1$

✓ 4) $(v_0 \to v_1) \to v_2$

✗ 5) $(v_2 \to v_1) \wedge v_0$

b) Dați exemplu de o mulțime Δ a.î. $\Gamma \sim \Delta$.

$v_2 \wedge v_1$

2) Dem. Prop 1.77

- i) $\to$ ii)

Γ nesat. $\Rightarrow$ $Mod(\Gamma) = \emptyset$

fie $\varphi \in Form$ $\Rightarrow$ $\emptyset \subset Mod(\varphi)$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $Mod(\Gamma) \subset Mod(\varphi)$ $\Leftrightarrow$ $\Gamma \vDash \varphi$

- ii) $\Rightarrow$ iii) evident

- iii) $\Rightarrow$ iv) cum $\bot$ este nesat. ~~...~~

luăm $\varphi := \bot$ și iese dem.

- iv $\Rightarrow$ i)

cum $\Gamma \vDash \bot$ și $Mod(\bot) = \emptyset$ avem că

$Mod(\Gamma) = \emptyset \Rightarrow \Gamma$ nesat.

Pe parcursul dem. am aplicat Definiția 1.74.

~~2)~~ ~~Ex~~

Bonus : dem Prop 1.80.

3) Seminar 2, iii)

Dem că pt. orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \models \varphi$ sau $\models \psi$

pt orice $\varphi, \psi \in Form$, $\models \varphi \vee \psi \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ pt. orice $e : V \to \{0, 1\}$ $e(\varphi \vee \psi) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ pt. orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem $\begin{pmatrix} e(\varphi) = 1 \text{ și } e(\psi) = 1 \\ \text{sau} \\ e(\varphi) = 0 \text{ și } e(\psi) = 1 \\ \text{sau} \\ e(\varphi) = 1 \text{ și } e(\psi) = 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\not\Rightarrow}$ pt. orice $e : V \to \{0, 1\}$ $e(\varphi) = 1$ și $e(\psi) = 1$

sau

— // — $e(\varphi) = 0$ și $e(\psi) = 1$

sau

— // — $e(\varphi) = 1$ și $e(\psi) = 0$

De exemplu, dacă luăm $\varphi := v_0$ și $\psi =: \neg v_0$

avem că pt. orice $e : V \to \{0, 1\}$ avem că

$\models \varphi \vee \psi$, dar este evident că nu are loc

relația pt. orice $e_1 : V \to \{0, 1\}$ $\models v_0$ și pt. orice $e_2 : V \to \{0, 1\}$ $\models \neg v_0$, dacă luăm simultan

$e_1(v_0) = 0$ și $e_2(v_0) = 1$ (putem lucra așa că $e_1 \neq e_2$)

4) Arătați, folosind rezoluția că φ este nesat.:

$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4)$
$\wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$

Transformăm formula în FNC pe care o vom transforma într-o mulțime de clauze S pe care vom încerca să obținem $\square$ (clauza vidă).

• Înlocuim implicațiile $\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge$
$\wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3)$

• Din prop. 1.41. avem că $\models \varphi \iff \models S_\varphi$

Deci, rămâne să dem. că S_φ este nesat. adică ~~dacă~~ să obținem clauza $\square$ prin rezoluție.

• $S_\varphi = \{ \overbrace{\{v_0, v_2\}}^{C_1}, \overbrace{\{\neg v_2, v_1\}}^{C_2}, \overbrace{\{\neg v_1\}}^{C_3}, \overbrace{\{\neg v_0, v_4\}}^{C_4},$
$\underbrace{\{\neg v_3\}}_{C_5}, \underbrace{\{\neg v_4, v_3\}}_{C_6} \}$

$C_7 := \{\neg v_4\}$, $Res(C_5, C_6)$

$C_8 := \{\neg v_0\}$, $Res(C_7, C_4)$

$C_9 := \{v_2\}$, $Res(C_8, C_1)$

$C_{10} := \{v_1\}$, $Res(C_9, C_2)$

$C_{11} := \square$, $Res(C_{10}, C_3)$

Deci, φ este nesat.

5) Fie $\varphi, \psi \in Form$. Dem că:

i) $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi \Rightarrow \Gamma \vDash \psi$

„$\Gamma \vDash \varphi$" înseamnă că pt. orice $e: Form \to \{0,1\}$ $e \in Mod(\Gamma) \Rightarrow e \in Mod(\varphi)$

Ca urmare, avem că pt. orice $e: Form \to \{0,1\}$ ($e \in Mod(\Gamma)$ cu $e(\varphi) = 1$) și pt. orice $e: Form \to \{0,1\}$, ($e \in Mod(\Gamma)$ și $e(\varphi \to \psi) = 1$)

$\Leftrightarrow$ pt orice $e: Form \to \{0,1\}$, $e \in Mod(\Gamma)$ cu $e(\varphi) = 1$ și și $e(\varphi \to \psi) = 1 \Leftrightarrow$ —//— $e(\varphi) = 1$ și $e(\varphi) \to e(\psi) = 1$

$\Leftrightarrow$ —//— $1 \to e(\psi) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ pt orice $e: Form \to \{0,1\}$, $e \in Mod(\Gamma)$ avem că $e(\psi) = 1 \Leftrightarrow \Gamma \vDash \psi$ $\square$.

ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi \Leftrightarrow \Gamma \vDash \varphi \to \psi$

fie $e \in Mod(\Gamma)$

„$\Rightarrow$": I) $e(\varphi) = 0$

Atunci avem că $e(\varphi \to \psi) = e(\varphi) \to e(\psi) =$
$= 0 \to e(\psi) = 1$, $\forall \psi \in Form$

Deci $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$

$\underline{II}$) $e(\varphi)=1$

Atunci avem că $e \in Mod(\Gamma \cup \{\varphi\})$ ~~...~~ $\Rightarrow$

$e \in Mod(\psi)$

Astfel avem că $e(\varphi \rightarrow \psi) = e(\varphi) \rightarrow e(\psi) =$

$= 1 \rightarrow 1 = 1$

Deci ~~$\not\models$~~ $e \in Mod(\varphi \rightarrow \psi) \Rightarrow$ ~~$Mod(\Gamma)$~~

$\Rightarrow Mod(\Gamma) \subset Mod(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$

„$\Leftarrow$":

. avem că $e(\varphi \rightarrow \psi) = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e(\varphi) = 0$ sau $e(\psi) = 1$

Dorim să forțăm cazul $e(\psi) = 1$. Ca urmare, vom defini $e'(\lambda) = \begin{cases} e(\lambda), & \lambda \neq \varphi \\ 1, & \lambda = \varphi \end{cases}$

evident, avem că $e' \in Mod(\Gamma \cup \varphi)$

Ca urmare, cum $e'(\varphi) = 1$ avem că singura posibilitate rămasă să fie $e'(\psi) = e(\psi) = 1$

Astfel, am dem. că $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$