Model Examen – Seria 14
Rezolvari

1 Exprimarea în notația Θ

Cerinta: Exprimati functiile urmatoare in notatie Θ:

a. $\sqrt{n} + \log n + n$. Gasim termenul dominant:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0 \to \sqrt{n} \in o(n)$.
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0 \to \log n \in o(n)$.

$\to \sqrt{n} + \log n + n \in \Theta(n)$.

b. $(\log n^{100})^3 + n$. Gasim termenul dominant:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(\log n^{100})^3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(100 \log n)^3}{n} = 10^6 * \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log^3 n}{n} = 0 \to (\log n^{100})^3 \in o(n)$.

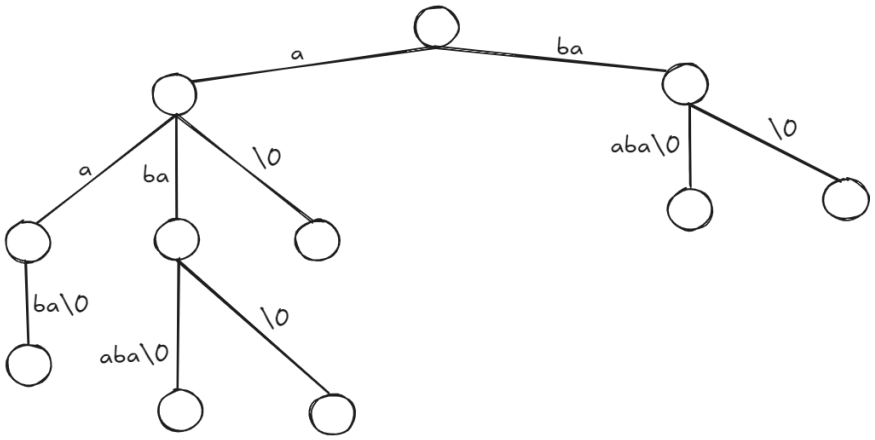
$\to (\log n^{100})^3 + n \in \Theta(n)$.

c. $\log(n^n) = n \log n \in \Theta(n \log n)$.

2 Suffix Trees si Suffix Arrays

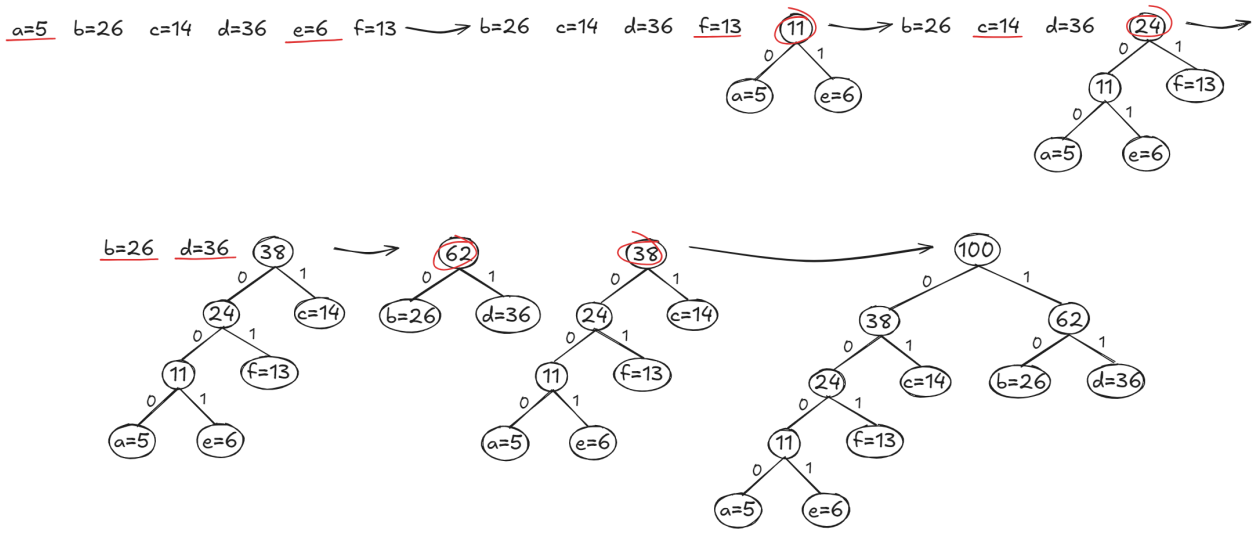
Cerinta: Construiti *suffix tree* si *suffix array* pentru sirul *abaaba*.

Sufixele pentru sirul *abaaba* sunt urmatoarele: $0 : abaaba$, $1 : baaba$, $2 : aaba$, $3 : aba$, $4 : ba$, $5 : a$. Sortandule in ordine lexicografica, obtinem suffix array-ul $5 : a$, $2 : aaba$, $3 : aba$, $0 : abaaba$, $4 : ba$, $1 : baaba$. De asemenea, am atasat suffix tree-ul desenat.



3 Arbori Huffman

Cerinta: Sa se deseneze arborele Huffman pentru literele urmatoare ce au frecventele a = 5, b = 26, c = 14, d = 36, e = 6, f = 13. Scrieti si codul optim (binar) pentru fiecare litera.

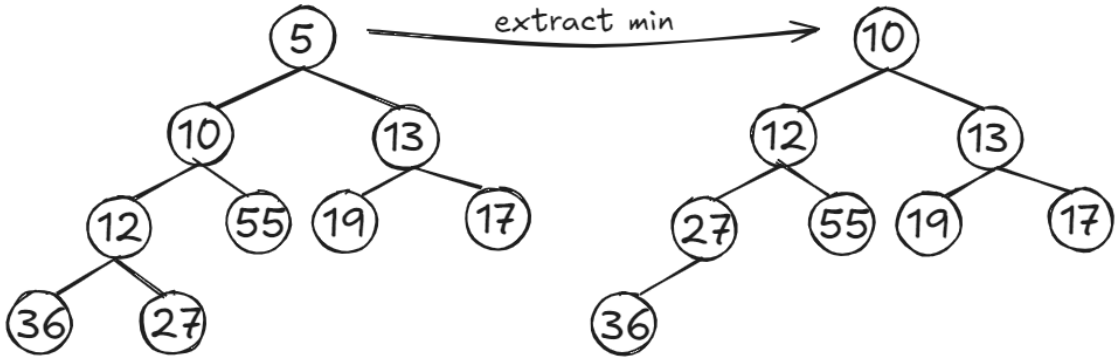


Codurile pentru litere sunt urmatoarele:

- a = 0000
- b = 10
- c = 01
- d = 11
- e = 0001
- f = 001

4 Heaps

Cerinta: Sa se construiasca un min-heap obtinut prin insertia pe rand a urmatoarelor chei, iar apoi sa se extraga radacina din arborele rezultat: 10, 5, 19, 36, 55, 13, 17, 12, 27.



5 Complexitati

Cerinta: Demonstrati ca daca $f(n) \in O(g(n))$ si $g(n) \in O(h(n))$, atunci $h(n) \in \Omega(f(n))$.

Daca $f(n) \in O(g(n))$, atunci stim ca de la un input n_0 incolo, vom avea $f(n) \leq c * g(n)$, pentru orice input $n \geq n_0$ si o constanta $c > 0$. In mod similar, $g(n) \leq c * h(n)$. Astfel, obtinem ca pentru orice input de la un n_0 incolo, vom avea $h(n) \geq c * f(n)$, unde $c > 0$. Acea inegalitate este echivalenta cu $h(n) \in \Omega(f(n))$ (h este marginit inferior de f).

6 Recurente

Cerinta: Rezolvati recurenta $T(n) = 4T(\frac{n}{3})+n$. Demonstrati prin inductie ca rezultatul este corect (arborele de recurenta si teorema master nu sunt considerate demonstratii).

In primul rand, ne putem folosi (nu pentru demonstratie) de teorema master pentru a avea un reper de unde sa pornim: $a = 4, b = 3 \rightarrow \log_b a = \log_3 4$. Incadram: $1 < \log_3 4 < 2$.
Stim ca $n \in O(n^1) \rightarrow 1 < \log_3 4 \rightarrow$ conform teoremei master, avem ca $T(n) \in O(n^{\log_3 4})$. Acum trebuie sa demonstram acest lucru.
Reformulam ceea ce vrem sa demonstram: $T(n) \in O(n^{\log_3 4}) \leftrightarrow T(n) \leq c * n^{\log_3 4}$, unde $c > 0$. Consideram cazul de baza al recursivitatii ca fiind $n = 1$ si verificam: $T(0) \leq c * 1^{\log_3 4}$; consideram $c \geq T(0)$ ca fiind adevarat, ca sa avem cazul de baza corect.
Presupunem ca este adevarat faptul ca: $\forall k < n \rightarrow T(k) \leq c * k^{\log_3 4}$. Cum $\frac{n}{3} < n$, obtinem ca $T(\frac{n}{3}) \leq c * (\frac{n}{3})^{\log_3 4}$ este adevarat. Astfel, il inlocuim pe $T(\frac{n}{3})$ in relatia originala si obtinem $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n \leq 4 * c * (\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n = \frac{4}{3^{\log_3 4}} * c * n^{\log_3 4} + n = c * n^{\log_3 4} + n$. Stim ca $n \in o(n^{\log_3 4})$, pentru ca $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^{\log_3 4}} = 0$, deci n este un termen neglijabil pe care il inlocuim cu $n^{\log_3 4}$, iar inegalitatea tot ramane adevarata: $T(n) \leq c * n^{\log_3 4} + n^{\log_3 4} = n^{\log_3 4}(c + 1) \rightarrow T(n) \in O(n^{\log_3 4})$.
Putem sa mergem mai departe si sa demonstram ca $T(n) \in \Omega(n^{\log_3 4}) \leftrightarrow T(n) \geq c * n^{\log_3 4}$, unde $c > 0$. Consideram cazul de baza ca fiind adevarat: $T(0) \geq c$.
Presupunem ca este adevarat faptul ca: $\forall k < n \rightarrow T(k) \geq c * k^{\log_3 4}$. Cum $\frac{n}{3} < n$, este adevarat ca $T(\frac{n}{3}) \geq c * (\frac{n}{3})^{\log_3 4}$. Ne folosim de asta in relatia initiala: $T(n) = 4T(\frac{n}{3}) + n \geq 4 * c * (\frac{n}{3})^{\log_3 4} + n = \frac{4}{3^{\log_3 4}} * c * n^{\log_3 4} + n = c * n^{\log_3 4} + n \geq c * n^{\log_3 4} \leftrightarrow T(n) \in \Omega(n^{\log_3 4})$.
Deoarece $T(n) \in \Omega(n^{\log_3 4})$ si $T(n) \in O(n^{\log_3 4})$, obtinem $T(n) \in \Theta(n^{\log_3 4})$.

7 Cod - Primul exercitiu

Cerinta: Se da un sir S cu n caractere. Sa se gaseasca cel mai lung subsir care apare de cel putin doua ori in S. In functie de timpul de rulare al algoritmului, se primesc urmatoarele punctaje: $O(n^3)$ - 0.5 puncte, $O(n^2)$ - 0.75 puncte, $O(n \log n)$ - 1 punct, $O(n)$ - 1.5 puncte.

Am gresit rezolvarea, trebuie sa pun una noua :) reveniti pe viitor

8 Cod - Al doilea exercitiu

Cerinta: Se da un sir $A[1 \dots n]$ de numere naturale pozitive (strict mai mari decat 0). Numim o secventa $A[i \dots j]$, $1 \leq i \leq n$, speciala daca cifra de control a sumei secventei este 9. Sa se determine numarul de secvente speciale in A.
Notam cu $c(x)$ cifra de control a lui x si $sum(x)$ suma cifrelor lui x. Atunci, $c(x)$ se defineste astfel:

- daca $x \leq 9$, atunci $c(x) = x$.
- daca $x > 9$, atunci $c(x) = c(sum(x))$.

Exemplu: $n = 7$ si $A = [1, 7, 6, 1, 11, 5, 9]$. Numarul de secvente speciale este 2. Cele doua secvente speciale sunt $A[3 \dots 5]$ (suma secventei este 18, iar $c(18) = 9$), $A[7 \dots 7]$ (suma secventei este 9, iar $c(9) = 9$).
In functie de timpul de rulare al algoritmului, se primesc urmatoarele punctaje: $O(n^3)$ - 0.5 puncte, $O(n^2)$ - 1 punct, $O(n)$ - 1.5 puncte.

Ca sa determinam eficient daca un numar are sau nu cifra de control egala cu 9, trebuie sa avem in vedere:

- Un numar este divizibil cu 9 daca suma cifrelor sale este egala cu 9.
- Cand calculam suma cifrelor unui numar natural cu cel putin doua cifre, aceasta va fi mereu mai mica decat numarul in sine. Astfel, aplicand recursiv acest proces, mereu vom ajunge la un numar cu o singura cifra.

Combinand logica de la cele doua puncte de mai sus, asta inseamna ca un numar divizibil cu 9 are cifra de control egala cu 9. In alte cuvinte, daca avem un numar `x`, atunci x `mod` $9 = 0 \leftrightarrow sum\_digits(x)$ `mod` $9 = 0 \leftrightarrow sum\_digits(sum\_digits(x))$ `mod` $9 = 0 \leftrightarrow \dots$, iar apelul recursiv pentru suma cifrelor se va opri cand se va ajunge la un numar cu o singura cifra (singurele numere de o cifra divizibile cu 9 sunt 0 sau 9).

Astfel, am modificat putin sarcina problemei: trebuie sa determinam numarul de subsecvente (elemente consecutive) care au suma elementelor divizibila cu 9, adica $sum(A[i \dots j])$ `%` $9 = 0$.

Totusi, putem sa mai rescriem formula: stim ca $sum(A[i \dots j]) = A[i] + \dots + A[j] = (A[0] + \dots + A[i] + \dots + A[j]) - (A[0] + \dots + A[i-1]) = prefix\_sum[j] - prefix\_sum[i-1]$, care trebuie sa fie divizibil cu 9.

Sa presupunem ca avem $(a - b)$ `%` $9 = 0 \rightarrow a - b = 9k$, $k \in Z \rightarrow a = b + 9k \rightarrow a$ `%` $9 = (b + 9k)$ `%` $9 = b$ `%` 9. Astfel, ultima relatie poate fi reformulata: $(prefix\_sum[j] - prefix\_sum[i-1])$ `%` $9 = 0 \leftrightarrow prefix\_sum[j]$ `%` $9 = prefix\_sum[i-1]$ `%` 9. Un mic detaliu: daca $i = 0$, atunci spunem ca $prefix\_sum[i-1] = 0$.

In concluzie, pentru $prefix\_sum[j]$ vrem sa numaram pentru cate valori anterioare $0 \leq i \leq j - 1$ avem $prefix\_sum[j]$ `%` $9 = prefix\_sum[i]$ `%` 9. Destul de simplu: folosim un vector de frecventa.

Pasii algoritmului au devenit:

1. Consideram variabila $prefix\_sum = A[0]$ si vectorul de frecvente $freq[i] = 0$, $\forall i \in [0, n-1]$ si $freq[prefix\_sum$ `%` $9] = 1$.
2. Iteram prin elementele vectorului, incepand de la al doilea element (indexul 1). Calculam $prefix\_sum = prefix\_sum + A[j]$. Intr-o variabila *count* vom stoca numarul de perechi pe care le putem forma intre indecsi din trecut si indexul curent: $count = count + freq[prefix\_sum$ `%` $9]$, si apoi $freq[prefix\_sum$ `%` $9] + +$.
3. Afisam *count*.