

ELECTROTECNIA TEÓRICA

LEEC

IST

2º Semestre 2021/22 (Período P3)

3º TRABALHO LABORATORIAL

CIRCUITO RLC-SÉRIE

em Regime Forçado Alternado Sinusoidal

Prof. V. Maló Machado

Prof.^a M^a Eduarda Pedro

ELECTROTECNIA TEÓRICA

CIRCUITO RLC – SÉRIE

1. **OBJECTIVOS**

Neste trabalho realiza-se o estudo do circuito *RLC* série, funcionando em regime forçado alternado sinusoidal, imposto por um gerador de tensão de frequência variável.

Obtém-se assim por via experimental, a curva de ressonância do circuito *RLC* série, em função da frequência.

2. INTRODUÇÃO TEÓRICA

2.1 Circuito RLC série

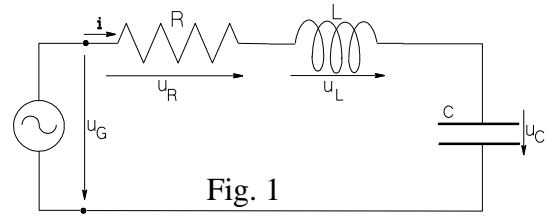
No caso do circuito RLC série da Fig. 1 tem-se, por aplicação da lei geral da indução, a seguinte expressão que relaciona a tensão instantânea aos terminais do gerador, com as tensões aos terminais da bobina de coeficiente de autoindução L , da resistência R e do condensador C :

$$u_G = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt \quad (1)$$

$$\bar{U}_G = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = R\bar{I} + j\omega L\bar{I} - j\frac{1}{\omega C}\bar{I} \quad (2)$$

À equação (1) de valores instantâneos, corresponde a equação vetorial (2), escrita em termos das amplitudes complexas.

A impedância do circuito, é dada pela expressão (3).



$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}_G}{\bar{I}} = Z e^{j\phi} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad (3)$$

2.2 Ressonância do circuito RLC série

Da equação (3) pode retirar-se a expressão do valor eficaz da corrente, como função do valor eficaz da tensão do gerador, e dos restantes parâmetros do circuito:

$$I_{ef} = \frac{U_{Gef}}{\sqrt{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2}} \quad (4)$$

A corrente exibe um máximo situado na frequência ω_0 que minimiza a impedância do circuito. Para essa frequência o circuito está em ressonância (tensão e corrente do gerador em fase).

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad , \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (5)$$

A potência ativa posta em jogo no circuito vale $P = RI_{ef}^2$, sendo o seu máximo atingido precisamente na ressonância

$$P_{\max} = RI_{res}^2 = \frac{U_{Gef}^2}{R}, \quad I_{res} = \frac{U_{Gef}}{R} \quad (6)$$

A equação (4) pode ser normalizada dividindo I_{ef} pelo valor de normalização I_0 ,

$$I_0 = \frac{U_{Gef}}{\omega_0 L} = \omega_0 C U_{Gef} = \frac{I_{res}}{Q_0} \quad (7)$$

$$I_n = \frac{I_{ef}}{I_0} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{Q_0^2} + \left(f_n - \frac{1}{f_n}\right)^2}} \quad (8)$$

sendo o fator de qualidade Q_0 dado por

$$Q_0 = \omega_0 L / R = 1 / (\omega_0 C R) \quad (9)$$

e $f_n = f/f_0$ a frequência normalizada onde ω_0 e f_0 são respetivamente a frequência angular e a frequência de ressonância.

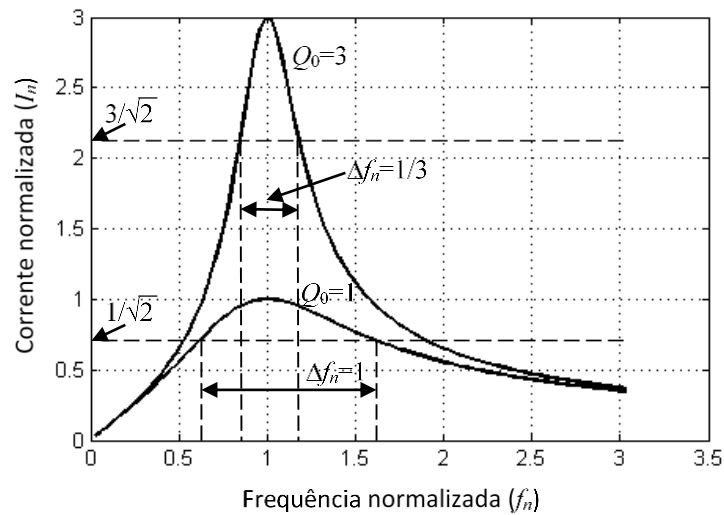


Fig. 2 – Curvas de ressonância para $Q_0 = 1$ e $Q_0 = 3$.

Mantendo a amplitude da tensão do gerador, mas variando a frequência de zero a infinito, obtém-se para o valor normalizado da corrente um andamento representado na Fig. 2.

De acordo com (8) note-se que o valor máximo da corrente normalizada é igual a Q_0 .

Chamam-se pontos de meia potência os pontos das curvas de ressonância em que a potência ativa é metade da potência máxima P_{max} (6) o que é equivalente à corrente ser $1/\sqrt{2}$ da corrente máxima. Largura de banda é o intervalo de valores de frequência em que a potência ativa e a corrente são maiores ou iguais aos respectivos valores observados nos pontos de meia potência. Para valores normalizados, de (8) a largura de banda Δf_n vem dada por

$$I_n = \frac{Q_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_n - \frac{1}{f_n} = \pm \frac{1}{Q_0} \Rightarrow f_{n1} = -\frac{1}{2Q_0} + \sqrt{\frac{1}{4Q_0^2} + 1} \quad e \quad f_{n2} = \frac{1}{2Q_0} + \sqrt{\frac{1}{4Q_0^2} + 1} \quad (10)$$

$$\Delta f_n = f_{n2} - f_{n1} = \frac{1}{Q_0}$$

2.3 Capacidade distribuída

Para se ter em conta a resistência e capacidade distribuídas ao longo da bobine, R_L e C_d , respetivamente, podemos supor a bobina equivalente à malha L , R_L , C_d , representada na Fig. 3.

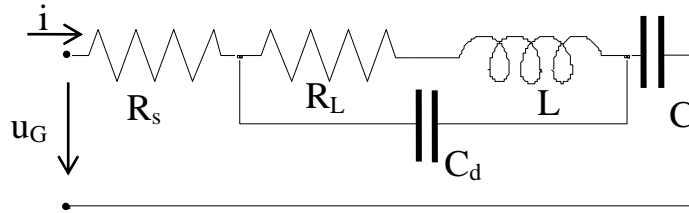


Fig. 3

A análise do circuito da Fig. 3 conduz à seguinte expressão para a impedância

$$\bar{Z} = R_s + \frac{1}{j\omega C} + \frac{(R_L + j\omega L)(1/j\omega C_d)}{R_L + j\omega L + (1/j\omega C_d)} \quad (11)$$

Supondo $R_L \ll \omega L$ poderá provar-se que a nova frequência de ressonância vem dada por:

$$1/\omega^2 = L(C + C_d) \quad (12)$$

ou ainda, atendendo a que $\omega = 2\pi f$:

$$1/f^2 = 4\pi^2 L(C + C_d) \quad . \quad (13)$$

Num gráfico com o eixo das ordenadas graduado proporcionalmente a $1/f^2$, e o eixo das abscissas graduado proporcionalmente aos valores da capacidade C que conduzem à ressonância, obtemos uma reta cujo coeficiente angular nos permite calcular L e cuja intersecção com o eixo das abscissas nos dá C_d .

3. DIMENSIONAMENTO

O dimensionamento deve ser entregue na aula de laboratório, antes da realização do trabalho, sem o que o mesmo não poderá ser realizado!

3.1 Verifique que o fator de qualidade Q_0 (9) num circuito RLC série é a sobretensão de U_{Lef} (valor eficaz da tensão u_L) ou U_{Cef} (valor eficaz da tensão u_C) em relação à tensão aplicada U_{Gef} na situação de ressonância.

3.2 Considere o circuito RLC-série, com frequência de ressonância $f_0 = 60$ kHz e admita que o valor estimado do coeficiente de autoindução da bobina é $L = 3,0$ mH.

a) Determine o valor da capacidade C tal que o circuito esteja em ressonância à frequência f_0 indicada.

b) Trace duas curvas da corrente normalizada, I_n , em função da frequência normalizada, f_n , recorrendo à eq. (8), com $20 \text{ kHz} \leq f \leq 90 \text{ kHz}$, para $R=R_S = 100 \, \Omega$ e $R=R_S = 400 \, \Omega$.

Estas curvas podem ser obtidas recorrendo a um programa computacional ou podem ser traçadas na folha quadriculada **R 3.2 b)**, apresentada em anexo. Note que o gráfico tem de ser feito à escala para que possa registar nele os pontos experimentais obtidos no laboratório. Para cada um dos valores de $R=R_S$, determine as frequências das situações de meia potência f_1 e f_2 , marque-as (após normalização) nas curvas traçadas e determine, para cada caso, a largura de banda em valores absolutos Δf . Verifique (10).

c) Para o caso $R_s = 100 \, \Omega$, $U_{gef} = 1 \, \text{V}$ e tomando C o valor determinado em a), calcule os valores eficazes e defasagens da corrente i e das tensões no condensador, u_C , na bobina, u_L , e na resistência, u_R , para a frequência de ressonância, f_0 , bem como para as frequências f_1 e f_2 . Preencha a tabela **R3.2** com os valores obtidos.

d) Para as condições da alínea anterior e para cada uma dessas três frequências trace os correspondentes diagramas vetoriais de tensão.

3.3 Demonstre as expressões (11) e (12).

4. ESQUEMA DE LIGAÇÕES E LISTA DE MATERIAL

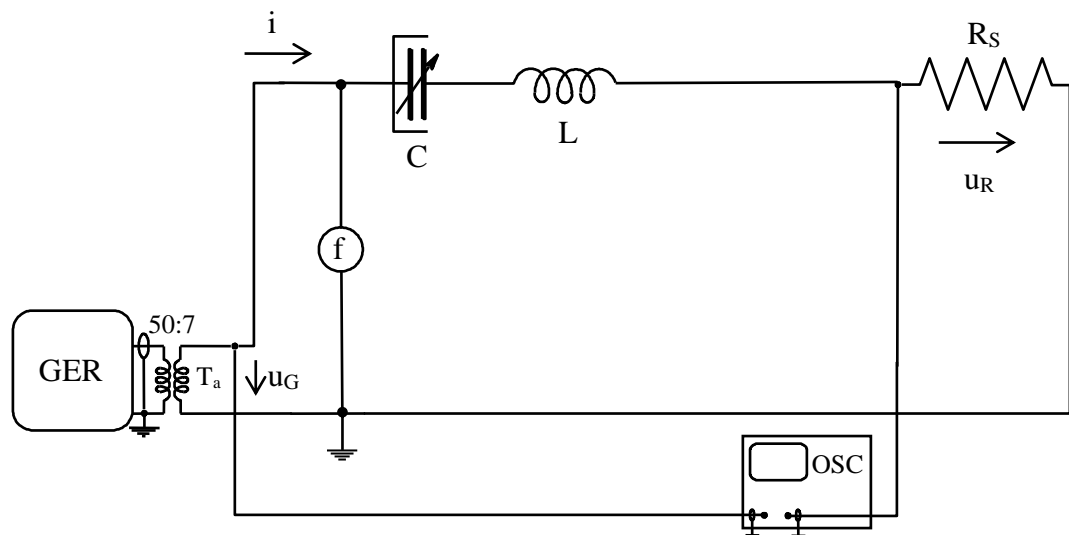


Fig. 4

- GER - Oscilador/Gerador de funções Beckman Industrial FG 2A.
- f - Frequencímetro Beckman Industrial VC 10A.
- C - Caixa de condensadores calibrados LIONMOUNT tipo CD1C.
- L - Caixa de indutância calibradas LIONMOUNT tipo LD2.
- R_s - Caixa de resistências calibradas LLOYD 0-1111 Ω .
- OSC - Osciloscópio Digital tektronix. TDS 200.
- Ta - Transformador de adaptação ($N_1/N_2 = 50/7$)

NOTA: O material a utilizar pode variar de bancada para bancada.

5. CONDUÇÃO DO TRABALHO

Monte o circuito representado na Fig. 4. Selecione na caixa de indutâncias $L = 4,0$ mH.

Antes de ligar os aparelhos, colocar:

Oscilador:	FREQUENCY RANGE:	100 kHz
	OUTPUT:	MAIN
	AMPLITUDE:	Mínimo
	FUNCTION:	SINUSOIDAL

Ligar os aparelhos por esta ordem:

- O frequencímetro.
- O osciloscópio
- O oscilador.
- Atuar no botão de amplitude do oscilador até se obter $U_{Gef} = 1$ V.

5.1 Em todos os ensaios manter $U_{Gef} = 1$ V.

Com $R_S = 100 \Omega$, para frequências f entre 60 kHz e 90 kHz com intervalos de 10 kHz, obtenha experimentalmente os valores da capacidade, C_{exp} , que conduzem à ressonância.

Registe os valores de f , U_{Gef} , U_{Ref} e C_{exp} na tabela **R6.1**.

5.2 Em todos os ensaios manter $U_{Gef} = 1$ V.

Para $R_S = 100 \Omega$ ou $R_S = 400 \Omega$, com $f = f_0 = 60$ kHz, ajuste o valor de C de modo a obter a ressonância, mantendo depois constante o valor de C .

- Para o caso $R_S = 100 \Omega$ e para as frequências f_0 , f_1 e f_2 previstas no dimensionamento em 3.2-b) para este caso, registe na tabela **R6.2** os valores de f , U_{Gef} e U_{Ref} , bem como o intervalo de tempo Δt entre dois máximos consecutivos de u_G e u_R (usando os cursores de tempo do osciloscópio).
- Para $R_S = 100 \Omega$ e $R_S = 400 \Omega$, variando a frequência (com f entre 20 kHz e 90 kHz e intervalos de 10 kHz) registe nas tabelas **R6.3-a)** para $R_S = 100 \Omega$ e **R6.3-b)** para $R_S = 400 \Omega$ os valores de f , U_{Gef} e U_{Ref} .

Quando terminar desligue os aparelhos pela ordem inversa. Primeiro desligue o gerador e no fim o frequencímetro.

6. RELATÓRIO

- 6.1 Com base nos valores de f e C_{exp} da tabela **R5.1** obtenha por regressão linear (ver nota) os valores experimentais de L e C_d e registe-os na tabela **R6.1**. No gráfico **R6.1** represente os pontos experimentais, bem como a reta obtida por regressão linear. Neste gráfico o eixo das ordenadas corresponde à grandeza $1/f^2$ e o eixo das abcissas à grandeza C_{exp} .
- 6.2 A partir dos resultados de 5.2 a), para a resistência $R_s=100\ \Omega$, calcule: o valor eficaz da corrente, I_{ef} , a sua desfasagem, α . Registe esses valores na tabela **R6.2**. Indique o valor eficaz máximo da corrente I_{res} e calcule o fator de qualidade Q_0 (9), tendo em conta o valor de L obtido em 6.1, e da corrente de normalização I_0 (7) para $R_s=100\Omega$ e $R_s=400\Omega$.
- 6.3 A partir dos resultados de 5.2 b), calcule: o valor eficaz da corrente, I_{ef} , bem como os valores normalizados da corrente, I_n , e da frequência, f_n . Registe esses valores nas tabelas **R6.3-a)** e **R6.3-b)**. Marque sobre as curvas obtidas em 3.2 b) do dimensionamento os pontos experimentais (f_n, I_n) .

O relatório tem que ser entregue no final da aula de laboratório e consiste no preenchimento da ficha apresentada em Anexo.

Nota: Regressão Linear

Considere que foram realizados n ensaios experimentais e que se registaram os valores x_i e y_i de duas grandezas diferentes. Admita que a relação existente entre essas duas grandezas pode ser aproximada por uma reta, $y = mx + b$, sendo m o declive e b a ordenada na origem. A partir do método dos mínimos quadrados obtém-se:

$$m = \frac{n \sum_{i=1}^n (x_i y_i) - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n (x_i)^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} ; \quad b = \bar{y} - m\bar{x}$$

sendo $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ e $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ os valores médios das duas grandezas medidas.

REFERÊNCIAS

J. A. Brandão Faria, '*Electromagnetic Foundations of Electrical Engineering*', Wiley, 2008. Cap. 7, Secção 7.2.3.

I.S.T., Fevereiro de 2022

ANEXO

RELATÓRIO DO 3º TRABALHO LABORATORIAL

R 3.2 c):

Tabela R3.2: cálculo das amplitudes complexas $(\bar{X} = \sqrt{2} X_{ef} e^{j\alpha_x})$:

	I_{ef} [mA]	α_I [°]	U_{Cef} [V]	α_C [°]	U_{Lef} [V]	α_L [°]	U_{Ref} [V]	α_R [°]
f_0								
f_1								
f_2								

R 5.1 e R 6.1:

Tabela R6.1: valores medidos em 5.1 e calculados em R 6.1:

f [kHz]	U_{Gef} [V]	U_{Ref} [V]	C_{exp} [nF]	L [mH]	C_d [pF]

R 5.2a) e R 6.2:

Tabela R6.2: Valores medidos em 5.2 a) e calculados em 6.2, para $R_s = 100 \Omega$:

	f [kHz]	U_{Gef} [V]	U_{Ref} [V]	Δt [ms]	I_{ef} [mA]	α_I [°]
f_0						
f_1						
f_2						

Valor eficaz máximo da corrente, $I_{res} =$

Valor de $Q_0 =$

Valor de $I_0(7) = I_{res}/Q_0 =$

Valores para $R_s = 400 \Omega$:

Valor eficaz máximo da corrente, $I_{res} =$

Valor de $Q_0 =$

Valor de $I_0(7) = I_{res}/Q_0 =$

R 5.2 b) e R 6.3:

Tabela R6.3-a): valores medidos em 5.2 b) e calculados em 6.3, para $R_S = 100 \Omega$:

f [kHz]	U_{Gef} [V]	U_{Ref} [V]	I_{ef} [mA]	I_n	f_n

Tabela R6.3-b): valores medidos em 5.2 b) e calculados em 6.3, para $R_S = 400 \Omega$:

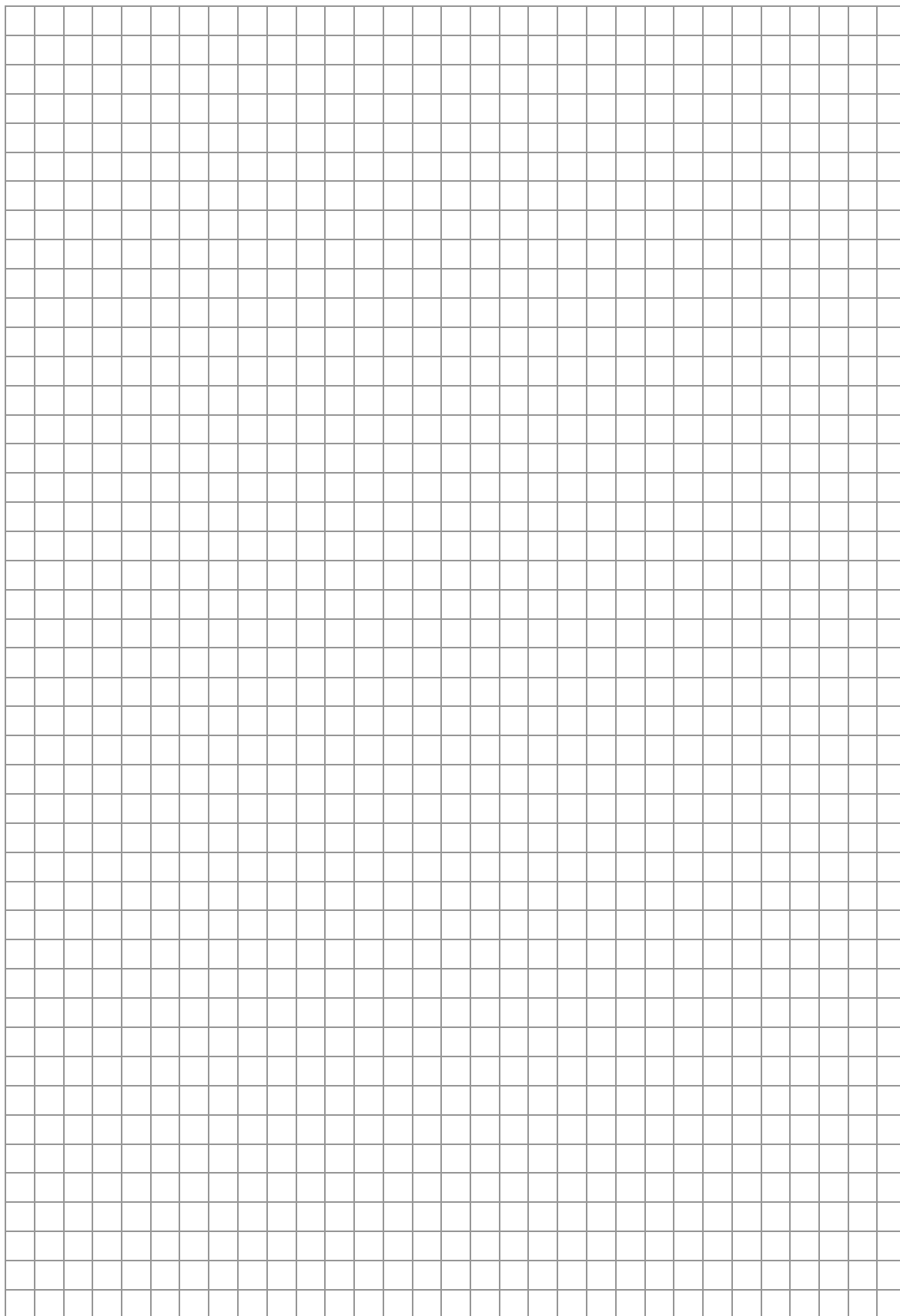
f [kHz]	U_{Gef} [V]	U_{Ref} [V]	I_{ef} [mA]	I_n	f_n

Comentários: _____

Número	Nome	Auto-Aval. [%]

R 3.2 b):

Representação gráfica de $I_n(f_n)$:



R 6.1:

Representação gráfica dos pontos experimentais ($C_{exp}, 1/f^2$) e da reta obtida por regressão linear:

