



ENGENHARIA ELETROTÉCNICA E DE COMPUTADORES

Electrotecnia Teórica

3^o Trabalho Laboratorial

CIRCUITO RLC-SÉRIE

(em Regime Forçado Alternado Sinusoidal)

Autores:

Daniel Dinis : 99906

João Gonçalves : 99995

Martim Bento : 100031

Tiago Brogueira : 100095

Supervisora:

Prof^a. Célia Jesus

Abril 2022

Questões

3.1 Verifique que o factor de qualidade Q_0 num circuito RLC-série é a sobretensão de U_{Lef} ou U_{Cef} em relação à tensão aplicada U_{Gef} na situação de ressonância.

Resposta: O factor de qualidade Q_0 é uma característica de um circuito ressonante (como é o caso do circuito RLC-série) que mede a qualidade dos componentes reactivos. Este factor indica-nos a relação entre a energia armazenada e a energia dissipada:

$$Q_0 \triangleq 2\pi \cdot \frac{(\text{Energia máxima armazenada})}{(\text{Energia perdida p/ ciclo})}$$

Note-se que as perdas de energia por ciclo nada mais são do que a potência média dissipada por período, i.e., temos:

$$Q_0 = 2\pi \cdot \frac{(\text{Energia máxima armazenada})}{(\text{Potência média dissipada}) \cdot T_0} = \omega_0 \cdot \frac{(\text{Energia máxima armazenada})}{(\text{Potência média dissipada})}$$

Do Teorema de Poynting complexo é-nos trivial deduzir que no estado de ressonância, a potência reactiva é nula. Isto indica-nos que tanto a bobina como o condensador estão a produzir a mesma energia, mas como estão em oposição de fase, anulam-se. Sendo assim, olhamos para o circuito como puramente resistivo. (Observa-se que $|\bar{Z}_{eq}| = R \wedge |\bar{I}| = |\bar{I}|_{MAX} = \frac{U_G}{R}$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_0 &= \omega_0 \frac{(W_m)_{MAX}}{(p_J)_{av}} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} L I_{ef}^2}{R \left(\frac{I_{ef}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{\omega_0 L}{R} \\ \Rightarrow Q_0 &= \omega_0 \frac{(W_e)_{MAX}}{(p_J)_{av}} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C U_{ef}^2}{R \left(\frac{I_{ef}}{\sqrt{2}}\right)^2} = \omega_0 \frac{\frac{1}{2} C I_{ef}^2 \mathcal{X}_c^2}{\frac{1}{2} I_{ef}^2 R} = \frac{1}{\omega_0 R C}, \text{ com } \mathcal{X}_c = \frac{1}{\omega_0 C} \\ \therefore Q_0 &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 R C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

□

No estado de ressonância as tensões no condensador e na bobina são de igual amplitude; verifica-se igualdade (em módulo) das reactâncias destes componentes.

$$\begin{cases} U_L = I \mathcal{X}_L = I \cdot \omega_0 L = \frac{\omega_0 L}{R} \cdot U_G = Q_0 \cdot U_G \\ U_C = I \mathcal{X}_C = \frac{I}{\omega_0 C} = \frac{1}{\omega_0 R C} \cdot U_G = Q_0 \cdot U_G \end{cases}$$

Justaposto, trivialmente concluímos que em ressonância:

$$Q_0 = \frac{U_L}{U_G} = \frac{U_C}{U_G} \iff Q_0 = \frac{U_{Lef}}{U_{Gef}} = \frac{U_{Cef}}{U_{Gef}}$$

□

3.2 Considere o circuito RLC-série, com frequência de ressonância $f_0 = 60$ kHz e admita que o valor estimado do coeficiente de auto-indução da bobina é $L = 3.0$ mH.

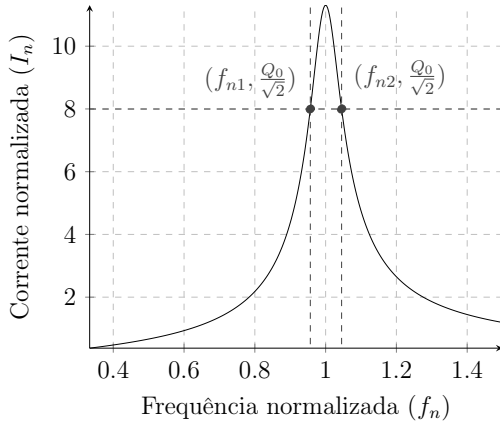
(a) Determine o valor da capacidade C tal que o circuito esteja em ressonância à frequência f_0 indicada.

Resposta: De acordo com as derivações e conclusões da alínea anterior, podemos imediatamente verificar que $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$. Pelo que, naturalmente, concluímos a expressão em ordem à incógnita:

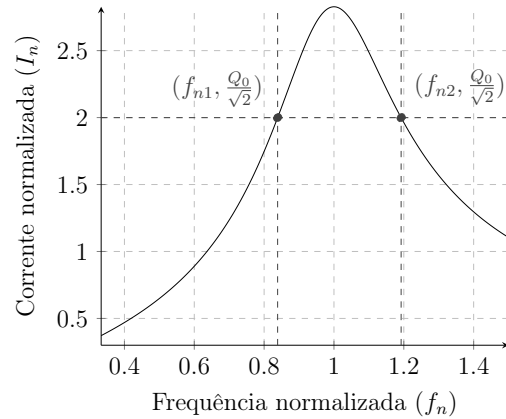
$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} \approx 2.345 \text{ nF}$$

(b) Trace duas curvas da corrente normalizada, I_n , em função da frequência normalizada. Para cada um dos valores de $R = R_S$, determine as frequências das situações de meia potência f_1 e f_2 , e determine, para cada caso, a largura de banda em valores absolutos Δf . Verifique (10).

Resposta: Tendo em conta a frequência de ressonância $f_0 = 60$ kHz e o intervalo de frequências a que nos restringimos, i.e., $f \in [20; 90]$ kHz, segue-se que a frequência normalizada ($f_n = \frac{f}{f_0}$) é delimitada no seguinte intervalo: $f_n \in [\frac{1}{3}; \frac{3}{2}]$.



(a) Caso com $R = R_S = 100 \Omega$



(b) Caso com $R = R_S = 400 \Omega$

Fig. 1: Curvas de corrente normalizada para os dois valores possíveis da resistência (com os respectivos pontos de meia potência normalizados).

$$R = 100 \Omega : \begin{cases} f_{n1} = 0.956757 \\ f_{n2} = 1.045186 \end{cases} \implies \Delta f_n = 0.088419 \implies \Delta f = 5305 \text{ Hz}$$

$$R = 400 \Omega : \begin{cases} f_{n1} = 0.838677 \\ f_{n2} = 1.192354 \end{cases} \implies \Delta f_n = 0.353678 \implies \Delta f = 21220 \text{ Hz}$$

Nas situações distintas observa-se:

$$R = 100 \, \Omega : \begin{cases} Q_0 = 11.309734 \\ \Delta f_n = 0.088419 \end{cases} \quad \wedge \quad R = 400 \, \Omega : \begin{cases} Q_0 = 2.827433 \\ \Delta f_n = 0.353678 \end{cases}$$

Pelo que, naturalmente se verifica a relação enunciada $\Delta f_n = \frac{1}{Q_0}$.

$$R = 100 \, \Omega : \begin{cases} \frac{1}{Q_0} = 0.088419 \\ \Delta f_n = 0.088419 \end{cases} \quad \wedge \quad R = 400 \, \Omega : \begin{cases} \frac{1}{Q_0} = 0.353678 \\ \Delta f_n = 0.353678 \end{cases}$$

$$\therefore \Delta f_n = \frac{1}{Q_0}$$

□

(c) Para o caso $R_S = 100 \, \Omega$, $U_{gef} = 1 \, \text{V}$ e tomando C o valor determinado em (a), calcule os valores eficazes e defasagens da corrente i e das tensões no condensador, u_C , na bobina, u_L , e na resistência, u_R , para a frequência de ressonância, f_0 , bem como para as frequências f_1 e f_2 .

Resposta: Por aplicação direta da Lei de Indução, obtemos as seguintes relações cruciais à análise:

$$\begin{cases} u_G = u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i \, dt \\ \bar{U}_G = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = \bar{I}R + j\omega L \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} \end{cases} \quad (1)$$

Salientando novamente, da alínea 3.1, a impedância equivalente observada em ressonância é puramente resistiva para o circuito RLC-série, pelo que este é o caso mais trivial:

$$f_0 : \begin{cases} \bar{Z}_{eq} = R + j(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}) = 100 \, \Omega \implies \bar{I} = \frac{\bar{U}_G}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{U_{Gef} \sqrt{2} \, e^{j0}}{R} = \frac{\sqrt{2}}{100} e^{j0} \, \text{A} \\ \bar{U}_R = \bar{I}R = \sqrt{2} \, e^{j0} \, \text{V} \\ \bar{U}_L = j\omega_0 L \bar{I} = 11.310 \sqrt{2} \, e^{j\frac{\pi}{2}} \, \text{V} \\ \bar{U}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \bar{I} = 11.310 \sqrt{2} \, e^{-j\frac{\pi}{2}} \, \text{V} \end{cases}$$

Para as seguintes frequências, f_1 e f_2 , o procedimento será o mesmo, no entanto, note-se que a impedância equivalente já **não será** puramente resistiva, o que se traduz numa corrente i com fase diferente da de u_G . Da alínea 3.2 (b) temos:

$$\begin{cases} f_{n1} = 0.956757 \\ f_{n2} = 1.045186 \end{cases} \implies \begin{cases} f_1 = 57.405 \, \text{kHz} \\ f_2 = 62.711 \, \text{kHz} \end{cases} \implies \begin{cases} \omega_1 = 360.891 \, \text{krad} \, s^{-1} \\ \omega_2 = 394.025 \, \text{krad} \, s^{-1} \end{cases}$$

Deste modo, juntamente com as ferramentas de (1), rapidamente chegamos a:

$$f_1 : \begin{cases} \bar{Z}_{eq} = 140.685 e^{-j0.780} \Omega \\ \bar{I} = \frac{\bar{U}_G}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{\sqrt{2}}{140.685} e^{j0.780} \text{ A} \\ \bar{U}_R = \bar{I}R = 0.710\sqrt{2} e^{j0.780} \text{ V} \\ \bar{U}_L = j\omega_1 L \bar{I} = 7.696\sqrt{2} e^{j2.351} \text{ V} \\ \bar{U}_C = \frac{1}{j\omega_1 C} \bar{I} = 8.399\sqrt{2} e^{-j0.791} \text{ V} \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} \bar{Z}_{eq} = 141.287 e^{j0.784} \Omega \\ \bar{I} = \frac{\bar{U}_G}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{\sqrt{2}}{141.287} e^{-j0.784} \text{ A} \\ \bar{U}_R = \bar{I}R = 0.708\sqrt{2} e^{-j0.784} \text{ V} \\ \bar{U}_L = j\omega_2 L \bar{I} = 8.366\sqrt{2} e^{j0.787} \text{ V} \\ \bar{U}_C = \frac{1}{j\omega_2 C} \bar{I} = 7.660\sqrt{2} e^{-j2.355} \text{ V} \end{cases}$$

Sinteticamente, em tabela:

Tab. 1: Valores eficazes e defasagens das grandezas consideradas.

f	I_{ef}/mA	$\alpha_I/^\circ$	U_{Ref}/V	$\alpha_R/^\circ$	U_{Lef}/V	$\alpha_L/^\circ$	U_{Cef}/V	$\alpha_C/^\circ$
f_0	10	0	1	0	11.310	90	11.310	-90
f_1	7.108	44.690	0.710	44.690	7.696	134.702	8.399	-45.320
f_2	7.078	-44.920	0.708	-44.920	8.366	45.092	7.660	-135.932

(d) Para as condições da alínea anterior e para cada uma dessas três frequências trace os correspondentes diagramas vectoriais de tensão.

Resposta: Apresentam-se, em seguida, os diagramas vectoriais como enunciado:

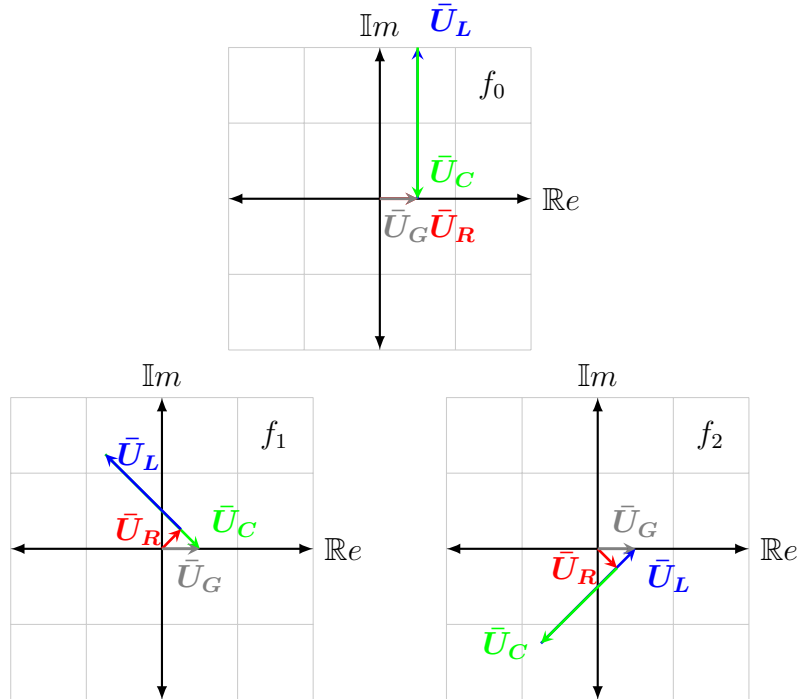


Fig. 2: Diagramas vectoriais de tensão para f_0 , f_1 e f_2 .

3.3 Demonstre as expressões (11) e (12).

Resposta: Para simplificar a análise do novo circuito, queremos converter a malha numa impedância equivalente, Z' , como ilustrado na Fig. 3. Após tal tarefa, torna-se trivial a análise, visto que se torna num circuito em série que se assemelha ao anteriormente estudado.

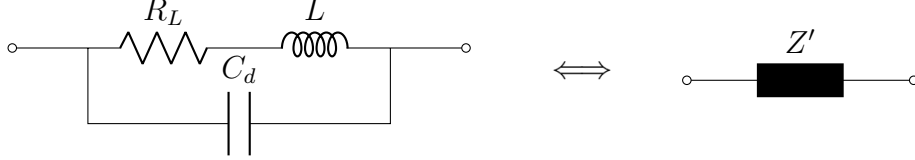


Fig. 3: Estratégia para simplificação da malha.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \approx 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{U}_1 = \bar{U}_2 = \bar{U}_{malha} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \bar{I}_1 = \frac{1}{R_L + j\omega L} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_2 = \frac{1}{1/(j\omega C_d)} \bar{U}_2 \end{cases} \xrightarrow{(2)} \bar{I} = \left(\frac{1}{R_L + j\omega L} + \frac{1}{1/(j\omega C_d)} \right) \bar{U}_{malha}$$

Aplicando a Lei de Ohm facilmente obtemos \bar{Z}' , i.e.:

$$\bar{Z}' = \frac{\bar{U}_{malha}}{\bar{I}} = \frac{(R_L + j\omega L)[1/(j\omega C_d)]}{R_L + j\omega L + [1/(j\omega C_d)]}$$

De acordo com o plano, agora podemos analisar em conformidade com o conceito de circuito em série:

$$\bar{U}_G = \bar{U}_R + \bar{U}_{malha} + \bar{U}_C \implies \bar{U}_G = \left(R_S + \frac{(R_L + j\omega L)[1/(j\omega C_d)]}{R_L + j\omega L + [1/(j\omega C_d)]} + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I}$$

$$\therefore \bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{U}_G}{\bar{I}} = R_S + \frac{1}{j\omega C} + \frac{(R_L + j\omega L)[1/(j\omega C_d)]}{R_L + j\omega L + [1/(j\omega C_d)]}$$

□

Supondo $R_L \ll \omega L$, temos que $R_L + j\omega L \approx j\omega L$, e assim obtemos a seguinte aproximação:

$$\bar{Z}_{eq} = R_S + \frac{1}{j\omega C} + \frac{(j\omega L)[1/(j\omega C_d)]}{j\omega L + [1/(j\omega C_d)]} = R_S - j\left(\frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L}{\omega^2 LC_d - 1}\right)$$

Para deduzir a nova frequência de ressonância, basta ter em consideração que o circuito durante o fenómeno é puramente resistivo, i.e., $\text{Im}\{\bar{Z}_{eq}\} = 0$.

$$\text{Im}\{\bar{Z}_{eq}\} = 0 \implies \frac{1}{\omega C} + \frac{\omega L}{\omega^2 LC_d - 1} = 0 \iff \frac{1 - \omega^2 LC_d}{\omega C(1 - \omega^2 LC_d)} = \frac{\omega^2 LC}{\omega C(1 - \omega^2 LC_d)}$$

Por conseguinte, temos que a relação $1 = \omega^2 LC_d + \omega^2 LC$ deve ser satisfeita para dado ω , de modo a que se verifique um estado de ressonância no novo circuito (note-se que o denominador não se anula, evitando a singularidade).

$$\therefore \frac{1}{\omega^2} = L(C + C_d)$$

□

Anexo

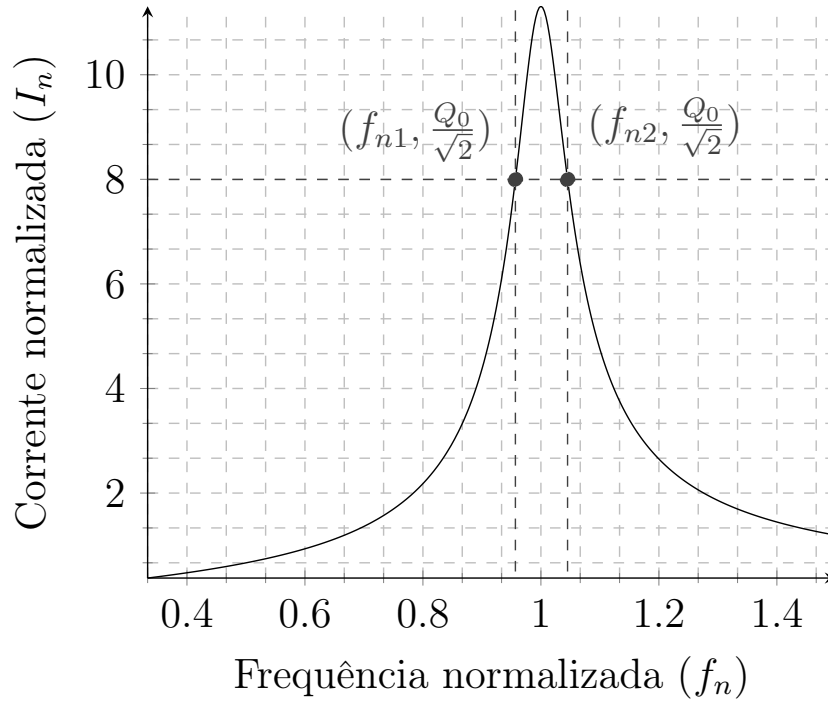


Fig. A1: Curvas de corrente normalizada para $R = R_S = 100 \, \Omega$.

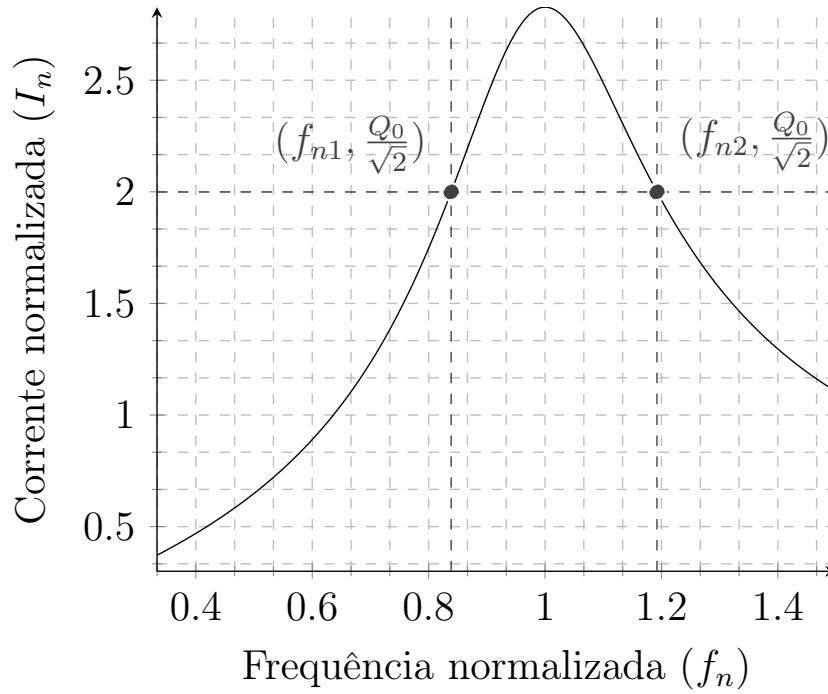


Fig. A2: Curvas de corrente normalizada para $R = R_S = 400 \, \Omega$.