Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Electrotecnia Teórica

4º Trabalho Laboratorial

REGIMES TRANSITÓRIOS

Autores:
Daniel Dinis : 99906
João Gonçalves : 99995
Martim Bento : 100031
Tiago Brogueira : 100095

Supervisora:
Profª. Célia Jesus

Abril 2022

Questões

2.1 Circuito RL Série

(a) Obtenha o regime transitório relativo à corrente i para $t \geq 0$.

Resposta: Por aplicação direta da Lei de Indução, $\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B}$, é facilmente derivada a EDO linear de primeiro grau que rege o sistema. Naturalmente, como o gerador não impõe nenhuma tensão para $t < 0$, verifica-se o seguinte par:

$$\begin{cases} u_g(t) = i(t)R + L\dfrac{di(t)}{dt} \\ i(0^-) = i(0^+) = 0 \end{cases}$$

Deste modo, procura-se a solução homogénea (*natural*), $i_n(t)$, e a solução particular (*forçada*), $i_f(t)$, tal que a resposta do PVI se verifique pela justaposição das soluções mencionadas, i.e.:

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) \tag{1}$$

Solução natural:

A equação linear homogénea $L\dfrac{di(t)}{dt} + i(t)R = 0$, tem como equação característica:

$$Ls + R = 0 \iff s = -\frac{R}{L} \implies \tau = -\frac{1}{s} = \frac{L}{R} = \frac{1}{3000} = 0.(3) \text{ ms}$$

$$\therefore i_n(t) = I_n e^{-t/\tau} \text{ A}$$

Solução forçada:

No domínio dos fasores é trivialmente deduzida a resposta forçada. Atendendo à equação que rege o circuito no domínio do tempo, observa-se:

$$\bar{U}_g = R\bar{I}_f + j\omega L\bar{I}_f = \bar{Z}_{eq}\bar{I}_f \implies \bar{I}_f = \frac{\bar{U}_g}{\bar{Z}_{eq}} = \frac{U_g}{Z_{eq}}e^{j(\alpha - \measuredangle \bar{Z}_{eq})}$$

$$\implies i_f(t) = \frac{U_g}{Z_{eq}}\cos(\omega t + \alpha - \measuredangle \bar{Z}_{eq}) = I_f \cos(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$\begin{cases} I_f = U_g/\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \approx 0.634\sqrt{2} \text{ mA} \\ \varphi = \measuredangle \bar{Z}_{eq} = \arctan\left(\dfrac{\omega L}{R}\right) \approx 1.476 \text{ rad} \end{cases}$$

$$\therefore i_f(t) \approx 0.634\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t - 3.046) \text{ mA, para } \alpha = -\pi/2.$$

Com especial atenção ao enunciado em (1) e às condições iniciais do PVI, procede-se à determinação do valor inicial do regime *natural* para que se obtenha a solução geral da equação diferencial (i.e., $i(t)$).

$$i(0) = 0 \iff i_n(0) = -i_f(0) \implies I_n = -0.634\sqrt{2} \cdot \cos(-3.046) \cdot 10^{-3}$$

$$\implies I_n \approx 0.893 \text{ mA}$$

$$\therefore i(t) = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ \cos(\omega t - 3.046) - \cos(3.046) \cdot e^{-3000t}\ ] \text{ mA}$$

$\square$

(b) Determine a expressão que permite calcular aproximadamente os instantes em que a corrente i tem extremos, supondo que estes extremos se dão quando $\cos(\omega t + \alpha - \varphi) = \pm 1$, e determine também a expressão que permite determinar o valor desses extremos para $\alpha = -\pi/2$.

Resposta: Tomando a aproximação enunciada, encontramos os extremos quando a expressão $\cos(\omega t_x + \alpha - \varphi) = \pm 1$ se verifica. Deste modo, é uma reação imediata[1]concluir que:

$$\omega t_x + \alpha - \varphi = k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$$

Assim, os instantes t_x correspondentes aos e**x**tremos (para $\alpha = -\pi/2$) são:

$$\implies t_x = \frac{k\pi - \alpha + \varphi}{\omega} \iff t_x = \frac{k\pi + 3.046}{10000\pi} \approx (100k + 96.957)\ \mu\text{s},\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Segue-se que a expressão que nos permite calcular os extremos (*aproximadamente*) pode ser descrita por:

$$i(t_x) = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ (-1)^k - \cos(3.046) \cdot e^{-3(100k+96.957)\cdot 10^{-3}}\ ] \cdot 10^{-3} \iff$$

$$\iff i(t_x) = 0.897 \cdot (-1)^k + 0.893 \cdot e^{-3(100k+96.957)\cdot 10^{-3}} \text{ mA},\ \forall k \in \mathbb{Z}_0^+$$

$\square$

[1]Note-se que $t \geq 0$, pelo que k *não pode* ser um inteiro negativo!

(c) Utilizando a expressão da alínea anterior determine os cinco primeiros extremos, no caso de $\alpha = -\pi/2$. Para o primeiro extremo determine a solução exata, através de um processo numérico. Verifique que a raiz exata é, neste caso, bastante próxima do valor aproximado.

Resposta: Utilizando os resultados da alínea a que a atual sucede, encontram-se sinteticamente na Tab. 1 os valores *aproximados* para as abcissas dos extremos, bem como os seus valores (para $\alpha = -\pi/2$).

Tab. 1: Primeiros cinco extremos determinados, e as suas abcissas respetivas.

k	t_x/μs	$i(t_x)$/mA
0	96.957	1.565
1	196.957	-0.402
2	296.957	1.263
3	396.957	-0.626
4	496.957	1.098

$\square$

Em seguida, utiliza-se o método de Newton-Rhapson de modo a comparar o valor *aproximado* obtido anteriormente para $k = 0$ com a solução exata.

$$\frac{di(t)}{dt} = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ -\omega \sin(\omega t - 3.046) + 3000 \cos(3.046) \cdot e^{-3000t}\ ] = 0$$

A expressão anterior é naturalmente referente ao cálculo dos extremos de $i(t)$, deste modo temos que:

$$f(x) = 0 \implies f(x) = \frac{di(x)}{dx} = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ -\omega \sin(\omega x - 3.046) + 3000 \cos(3.046) \cdot e^{-3000x}\ ]$$

$$\implies f'(x) = \frac{d^2 i(x)}{dx^2} = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ -\omega^2 \cos(\omega x - 3.046) - 9 \cdot 10^6 \cos(3.046) \cdot e^{-3000x}\ ]$$

O método de Newton-Rhapson visa obter, no nosso caso, de uma forma mais refinada, a abcissa do primeiro extremo calculado. Este é um método *iterativo* que termina com a restrição imposta no enunciado: $|x_{n+1} - x_n| < 10^{-6}$.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

Seja $x_0 = t_x(k = 0) = 96.957\ \mu$s, aplicando o método mencionado, obtem-se:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \implies x_1 \approx 94.680\ \mu\text{s} \implies |x_1 - x_0| \approx 2.277 \cdot 10^{-6} > 10^{-6}$$

Note-se que é necessária uma segunda iteração, para melhor refinar a abcissa:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \implies x_2 \approx 94.678\ \mu\text{s} \implies |x_2 - x_1| \approx 2.371 \cdot 10^{-9} < 10^{-6}$$

Chegando à condição de paragem, conclúi-se que x_2 é uma boa aproximação da raiz exata. Verifica-se que a *aproximação* está, de facto, relativamente próxima a este novo resultado:

$$\text{Erro}(\%) = \left| \frac{t_x(k=0) - x_2}{x_2} \right| \cdot 100 = \left| \frac{96.957 - 94.678}{94.678} \right| \cdot 100 \approx 2.41\%$$

Assim, o valor da solução exata, obtido através do processo *iterativo*, é para este extremo:

$$i(x_2) = 0.634\sqrt{2} \cdot [\ \cos(\omega x_2 - 3.046) - \cos(3.046) \cdot e^{-3000 x_2}\ ] \approx 1.566 \text{ mA}$$

Comparando com o valor obtido através da aproximação:

$$\text{Erro}(\%) = \left| \frac{i(t_x(k=0)) - i(x_2)}{i(x_2)} \right| \cdot 100 \approx 0.073\%$$

Como esperado, também se encontra bastante próximo.

$\square$

(d) Considere agora que se desliga o gerador quando a tensão vai a passar por zero de valores negativos para positivos, supondo que o circuito está em regime forçado. Determine a solução para $i(t)$, calculando o valor inicial da corrente I_0 e a constante de tempo τ.

Resposta: Naturalmente, como consequência imediata da remoção da tensão do gerador, verifica-se que a solução do regime forçado é nula, i.e., $i_f(t) \equiv 0$, $\forall t$.

Com a aplicação da Lei de Indução verifica-se uma equação diferencial homogénea tal como esperado:

$$\overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{B} \implies L\frac{di(t)}{dt} + i(t)R = 0$$

A forma da solução desta equação já é conhecida de 2.1 (b); é para além disto adiantado que a constante de tempo τ se mantém inalterada (como seria de esperar), seja $\tau = 0.(3)$ ms.

Para a nova situação, verifica-se a solução geral:

$$i(t) = i_n(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau} \text{ A}$$

Sequencialmente, para determinar I_0 é necessário determinar os instantes em que o gerador passa por zero de valores negativos para positivos:

$$u_g(t_0) = U_g \cos(\omega t + \alpha), \text{ e como } \alpha = -\pi/2 \implies u_g(t) = U_g \sin(\omega t) \text{ V}$$

Por conseguinte, t_0 é um ponto da forma: $t_0 = 2k\pi/\omega$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Até ao instante t_0, o circuito funciona em regime forçado, e assim, devido à continuidade de $i(t)$ que nos é assegurada, faz-se uso da equação da corrente forçada, estabelecida na alínea 2.1 (b), para calcular a amplitude neste dado instante.

Visto que não ocorrem saltos energéticos infinitos, voltamos ao resultado bastante familiar:

$$i(t_0^-) = i(t_0^+) = I_0 \iff I_0 = 0.634\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t_0 - 3.046)$$

$$\implies I_0 = 0.634\sqrt{2} \cdot \cos(2k\pi - 3.046) \approx -0.893 \text{ mA}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Em suma, a solução para $i(t)$ é:

$$\therefore i(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau} \approx -0.893 \cdot e^{-3000t} \text{ mA}, \forall t \geq t_0$$

□

(e) Verifique que para $t = \tau$ se tem:

$$i(\tau) = \frac{I_0}{e}$$

Resposta: Trivialmente verificado por substituição direta na expressão deduzida na alínea anterior:

$$i(t) = I_0 \cdot e^{-t/\tau} \implies i(\tau) = I_0 \cdot e^{-\tau/\tau} = I_0 \cdot e^{-1} = \frac{I_0}{e} \text{ A}$$

□

2.2 Circuito RLC-Série

(a) Estabeleça a equação para a corrente i em valores instantâneos para $t \geq 0$ em função do coeficiente de amortecimento β e da frequência angular das oscilações não amortecidas ω_0. Calcule ω_0.

Resposta: Escolhendo o caminho fechado conforme o enunciado (interruptor comutado), com o sentido coincidente com o da corrente convencionado, obtém-se, através da Lei de Indução:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \implies i(t) \cdot (R' + R_G) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L\frac{di(t)}{dt} = 0$$

Para obter a ilustre EDO linear de 2ª ordem homogénea, é simplesmente necessário derivar em ordem a t, i.e.:

$$i(t) \cdot (R' + R_G) + \frac{1}{C}\int i(t)\,dt + L\frac{di(t)}{dt} = 0 \implies L\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} \cdot R + \frac{1}{C} \cdot i(t) = 0$$

$$\iff \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{CL} \cdot i(t) = 0$$

Por comparação direta com a forma canónica $\dfrac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \dfrac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0$, pode-se concluir celeremente:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{R}{2L} \\ \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} = \dfrac{\sqrt{LC}}{LC} = 50 \text{ krad s}^{-1} \end{cases}$$

□

(b) Estabeleça as condições iniciais para o regime que se obtém para $t \geq 0$. Caracterize o regime forçado para $t \geq 0$.

Resposta: Caracteristicamente de sistemas reais, é de esperar que não ocorram saltos energéticos infinitos derivados de descontinuidades de $u_C(t)$ e $i_L(t)$.

$$p_C = \frac{d}{dt}W_e(t) \to \infty; \quad p_L = \frac{d}{dt}W_m(t) \to \infty$$

Esta situação é, naturalmente, fisicamente absurda, e não se pode evitar a conclusão óbvia de que $u_C(t)$ e $i_L(t)$ se verificam inalterados no instante de comutação do interruptor. Isto é:

$$u_C(0^+) = u_C(0^-); \quad i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

Através da Lei de Indução, salientando que se trata de um regime estacionário para $t < 0$, e que se trata de um circuito em série, concluem-se deste modo as condições iniciais:

$$\begin{cases} \bar{U}_G = \bar{U}_C + \bar{U}_L \\ i(t) = i_L(t) \end{cases} \implies \begin{cases} u_C(0) = U_G(0) = 4 \text{ V} \\ i(0^+) = i(0^-) = i(0) = 0 \text{ A} \end{cases}$$

Assim, ao comutar o interruptor, para $t > 0$, estamos perante um regime livre da influência do gerador.

Como esta influência foi removida, a solução dos problemas de valor inicial deve tender para zero há medida que o tempo se alastra (existem elementos dissipativos no circuito). Pelo que, naturalmente se verifica:

$$\begin{cases} i_f(t) = 0 \text{ A} \\ u_f(t) = 0 \text{ V} \end{cases}$$

□

(c) Discuta os tipos de solução que pode obter para o regime livre com R variável.

Resposta: Desprovido da influência do gerador, o circuito apresenta somente um regime livre que já foi introduzido, i.e.:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0$$

Esta EDO linear de 2ª ordem homogénea é de resolução imediata recorrendo ao seu polinómio caracteristico:

$$s^2 + 2\beta s + \omega_0^2 = 0 \implies s = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

Aproveitando as relações[2] deduzidas na alínea 2.2 (a), imediatamente se conclúi, ao analizar o binómio discriminante, que estamos perante três possíveis cenários:

- $\beta > \omega_0 \iff R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$: estamos perante um regime aperiódico fortemente amortecido e, como tal, as raízes são reais e diferentes (a solução para i seriam duas exponenciais decadentes).

- $\beta = \omega_0 \iff R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$: estamos perante um regime aperiódico *criticamente* amortecido (limite), neste caso temos uma raiz dupla real (a solução toma a forma de duas exponenciais decadentes em que uma é multiplicada por t).

- $\beta < \omega_0 \iff R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$: estamos perante um regime oscilatório amortecido, visto que são encontradas duas raizes complexas conjugadas (a solução é da forma de uma sinusoide multiplicada por uma exponencial decadente).

□

[2]Especificamente $\beta = R/2L$, dado que estamos a realizar um *gedankenexperiment* em que R é uma variável.

(d) Para $R = 100\ \Omega$, calcule o coeficiente de amortecimento β e verifique que a solução é do tipo oscilatório amortecido. Calcule $\omega = 2\pi/T$ sendo T o período de isocronismo. Verifique que:

$$A_1/A_2 = A_2/A_3 = \cdots = (A_1/A_n)^{\frac{1}{n-1}} = e^{\lambda}$$

Determine λ. Determine $i(t)$ e $u_C(t)$ tendo em conta as condições iniciais estabelecidas em b).

Resposta: Utilizando diretamente as expressões obtidas anteriormente:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{5}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-3}} = 5 \text{ kNp } s^{-1}$$

□

Desta forma, encontramo-nos de facto num regime oscilatório amortecido. Tal afirmação verifica-se imediatamente com o discutido na alínea precedente juntamente o resultado obtido para a frequência natural na alínea 2.2 (a), i.e.:

$$\beta < \omega_0 \iff 5 \cdot 10^3 < 50 \cdot 10^3 \implies [(5 < 50) \wedge 1] = 1$$

□

Posto isto, e tendo em conta que o regime transitório é puramente livre, temos que $i(t)$ é da forma:

$$i(t) = \mathbb{R}e\{\bar{I}e^{st}\} = Ie^{-\beta t}\cos(\omega t + \theta) \tag{3}$$

$$\begin{cases} \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 49.749 \text{ krad s}^{-1} \\ s = -\beta + j\omega = \omega_0\ e^{j\delta}; \quad \delta = \pi - \arctan\left(\frac{\omega}{\beta}\right) = 1.573 \text{ rad} \end{cases}$$

Em que ω é a frequência angular das oscilações amortecidas e $\bar{I} = Ie^{j\theta}$. Assim, o período de isocronismo é facilmente deduzido:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \implies T = \frac{2\pi}{\omega} \approx 126.298\ \mu\text{s}$$

□

De modo a verificar a igualdade enunciada: $A_1/A_2 = \cdots = (A_1/A_n)^{1/(n-1)} = e^{\lambda}$, com $\lambda = \beta T/2$; considera-se o facto de que de $T/2$ em $T/2$, a função regida pela sinusoide encontra ora dois zeros consecutivos, ou dois extremos consecutivos.

Assim, denominando por t_n o instante em que se verifica um extremo, temos:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{T}{2} \implies \begin{cases} i(t_n) = Ie^{-\beta t_n}\cos(\omega t_n + \theta) \\ i(t_{n+1}) = Ie^{-\beta t_n}e^{-\beta\frac{T}{2}}\cos(\omega t_n + \pi + \theta) \end{cases}$$

Sendo então o racio entre duas amplitudes consecutivas:

$$\left|\frac{i(t_n)}{i(t_{n+1})}\right| = \frac{A_n}{A_{n+1}} = \left|\frac{Ie^{-\beta t_n}\cos(\omega t_n + \theta)}{-Ie^{-\beta t_n}e^{-\beta\frac{T}{2}}\cos(\omega t_n + \theta)}\right|$$

$$\therefore \frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{\beta\frac{T}{2}} = e^{\lambda}$$

Note-se que $t_{n+1} = t_n + T/2$ é uma progressão aritmética de razão $T/2$. Assim, temos:

$$t_n = t_1 + (n-1)\cdot\frac{T}{2} \implies t_1 = t_n + (1-n)\frac{T}{2}$$

Então:

$$\left|\frac{i(t_1)}{i(t_n)}\right| = \frac{A_1}{A_n} = \left|\frac{Ie^{-\beta t_n}e^{(n-1)\beta\frac{T}{2}}\cos(\omega t_n - n\pi + \pi + \theta)}{-Ie^{-\beta t_n}\cos(\omega t_{n+1} + \theta)}\right|$$

$$\therefore \frac{A_1}{A_n} = e^{(n-1)\beta\frac{T}{2}} \implies \left(\frac{A_1}{A_n}\right)^{1/(n-1)} = e^{\beta\frac{T}{2}} = e^{\lambda}$$

Finalmente, conclúi-se:

$$\therefore \frac{A_n}{A_{n+1}} = \left(\frac{A_1}{A_n}\right)^{1/(n-1)} = e^{\lambda}; \quad \lambda = \beta\frac{T}{2} \approx 315.745 \text{ mNp}$$

□

Relembrando a equação (3) e as condições iniciais obtidas na alínea 2.2 (b), encontra-se sem grande resistência o argumento θ da corrente:

$$i(t) = Ie^{-\beta t}\cos(\omega t + \theta) \implies i(0) = I\cos(\theta) = 0 \implies \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Encontramo-nos perante um circuito em série, logo:

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt = \frac{1}{C}\int \mathbb{R}e\{\bar{I}e^{st}\}\,dt = \frac{1}{C}\mathbb{R}e\{\frac{1}{s}\bar{I}e^{st}\}$$

$$\implies u_C(t) = \frac{I}{\omega_0 C}e^{-\beta t}\cos(\omega t + \theta - \delta)$$

Verifica-se que no instante de comutação do interruptor $u_C(0) = 4$ V, e assim facilmente se obtem o valor da amplitude I. Seja $k = 0$, então:

$$u_C(0) = \frac{I}{\omega_0 C}\cos(\theta - \delta) \implies I = \frac{4\cdot\omega_0 C}{\cos(\theta - \delta)} \approx 8.0 \text{ mA}$$

Em suma, temos as seguintes soluções:

$$i(t) = Ie^{-\beta t}\cos(\omega t + \theta); \quad u_C(t) = \frac{I}{\omega_0 C}e^{-\beta t}\cos(\omega t + \theta - \delta)$$

□

(e) Calcule $R_0 = R$ de modo que a solução do regime livre seja do tipo aperiódico limite. Determine $i(t)$. Determine igualmente o valor mínimo de i (i_{min}) e o instante em que ocorre (t_{min}).

Resposta: Com os resultados da alínea 2.2 (c) é de imediato calcular a resistência R_0 que nos leva a uma solução do polinómio característico da equação diferencial com raiz dupla (isto é, um regime aperiódico limite; dado que $\beta = \omega_0$):

$$R_0 = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 1000\ \Omega \implies \beta = 50 \text{ kNp s}^{-1}$$

Assim, naturalmente, a solução encontrada para $i(t)$ é nos moldes:

$$i(t) = (I' + tI'')e^{-\beta t} \tag{4}$$

Em seguinda, calculam-se as amplitudes I' e I'', com uso das condições iniciais discutidas anteriormente:

$$i(0) = 0 \implies I' = 0 \text{ A} \implies i(t) = tI''e^{-\beta t}$$

Do mesmo modo, sabe-se que $u_C(0) = 4$ V, e por aplicação direta da Lei de Indução, temos:

$$u_C(0) = 4 \implies -R_0 i(0) - L\frac{di(0)}{dt} = 4 \iff \frac{di(0)}{dt} = -400 \text{ A}$$

$$\frac{di(t)}{dt} = -I''(\beta t - 1)e^{-\beta t} \implies \frac{di(0)}{dt} = -400 \iff I'' = -400 \text{ A}$$

De justa forma, obtem-se a expressão final para $i(t)$ no regime aperiódico limite:

$$\therefore i(t) = -400te^{-\beta t}, \text{ com } \beta = 50 \text{ kNp s}^{-1}$$

$\square$

Logicamente, visto que $i(t)$ é uma função *estritamente* decrescente até ao seu valor mínimo e que após passar este ponto tende para zero (não obstante dado o regime livre), obtemos trivialmente o seu valor mínimo através do zero da sua 1ª derivada.

Como nos lembra a Análise real:

$$\frac{di(t)}{dt} = -I''(\beta t - 1)e^{-\beta t} = 0 \iff t = \frac{1}{\beta} = \frac{2L}{R_0} = 20\ \mu\text{s}$$

Então, por fim:

$$\begin{cases} t_{\text{min}} = 20\ \mu\text{s} \\ i_{\text{min}} = i(t_{\text{min}}) = \dfrac{-1}{125e} \approx -2.943 \text{ mA} \end{cases}$$

$\square$