Sinais e Sistemas – guia de laboratório

1 Introdução

Este documento descreve a componente laboratorial de Sinais e Sistemas. Contém questões assinaladas com "(Q$*$)", cuja resolução deve ser submetida individualmente por cada aluno, através de dois questionários na plataforma *Moodle*. O primeiro questionário cobre conceitos fundamentais de sinais e sistemas (questões QA1 a QA11, enunciadas nas secções 2 a 5 deste guia); o segundo cobre análise de Fourier e amostragem (questões QB1 a QB14, secções 6 a 9). O enunciado contém também questões marcadas com "(R$*$)", cuja resposta deve ser dada no relatório final a submeter por cada grupo de dois alunos, via *Fénix*.

> O documento contém parágrafos formatados como este, os quais contêm informações complementares que podem ser úteis para uma melhor compreensão de alguns aspectos, mas que não são essenciais para a realização do trabalho de laboratório.

Nota importante

A finalidade da componente laboratorial de Sinais e Sistemas é ajudar à melhor compreensão de alguns conceitos estudados na disciplina. Assim, não se pretende que observe passivamente os resultados que vai obtendo, mas sim que os analise e interprete. Em particular, quando, no enunciado, se pede que comente os resultados que obteve, não se pretende que descreva esses resultados, mas sim que os interprete à luz daquilo que sabe (por exemplo averiguando se eram expectáveis, analisando se fazem sentido ou não, ou o que significam, etc). Por esta razão, diversas das questões levantadas requerem trabalho analítico que, naturalmente, deve ser feito fora das aulas de laboratório.

Inicialização

Para iniciar a parte experimental do seu trabalho, proceda da seguinte forma:

- Abra a pasta `LabSS`. Dentro desta pasta, abra a pasta `WinPython-32bit-3.3.3.3`.
- Faça duplo clique no ficheiro `Spyder` (ou `Spyder.exe`). Não confunda com o ficheiro `Spyder (light)`, que não é o que se pretende utilizar.
- Ao fim de algum tempo, deverá aparecer uma janela com o título "Spyder (Python 3.3)".
- Ao fim de mais algum tempo, deverá aparecer nessa janela algum texto, que termina numa linha com "In [1]:".
- Introduza nessa linha a instrução `run -i lab` seguida de "Enter", para preparar o sistema para a realização do trabalho de laboratório.
- Deverá aparecer o texto "Sinais e Sistemas - trabalho de laboratório: inicialização concluída.", seguido duma linha com "In [2]:".
- O sistema está pronto para a realização do trabalho.

2 Sinais sinusoidais

Nesta parte do trabalho irá gerar alguns sinais sinusoidais e ouvir os sons correspondentes.

- Gere uma variável de tempo com a duração de 2s (com valores no intervalo $[-1\text{s}, 1\text{s}]$), usando a instrução `t = timevar(2)`. Na função `timevar`, o argumento indica a duração da variável a gerar.

- Em seguida, gere uma variável `x` contendo uma sinusóide com a frequência[1] de 10Hz, através do comando `x = cos(2*pi*10*t)`.

- Visualize o gráfico do sinal sinusoidal através da instrução `tplot(x)`. Irá aparecer uma janela com o gráfico dessa função (tenha em atenção que nalguns sistemas essa janela pode aparecer atrás de outras janelas já existentes). Confirme que o sinal que gerou tem 10 períodos por segundo.

  Experimente fazer zoom do gráfico e deslocá-lo. Para isso, comece por clicar na cruz com setas nas quatro pontas, na janela que contém o gráfico. Feito isso, poderá fazer zoom mantendo o botão direito do rato carregado e arrastando o rato horizontal e/ou verticalmente. Poderá deslocar o gráfico arrastando o rato com o botão esquerdo carregado. Pode voltar à forma inicial do gráfico clicando no símbolo com a forma de uma casa. Habitue-se à forma como funcionam estas operações, para poder examinar os detalhes dos vários gráficos que irá gerar ao longo do trabalho.

  No final, feche a janela que contém o gráfico. Se não fechar a janela, o gráfico que vai gerar no ponto seguinte irá aparecer sobreposto ao que gerou neste ponto.

  No sistema existe também a função `plot`, que é semelhante à `tplot`, mas que cria gráficos em que a escala dos tempos não está correctamente graduada. Não faça confusão entre as duas funções.

- Mude agora a variável `t` para a duração de 1s, com a instrução `t = timevar(1)`. Gere, na variável `x`, um sinal sinusoidal com a frequência de 1000Hz e visualize-a. Inicialmente, o gráfico deverá parecer apenas um rectângulo azul. Faça zoom e verifique que se trata do gráfico duma sinusóide com oscilação muito rápida.

- Ouça o sinal que gerou. Para isso deverá ter os auscultadores ligados à saída apropriada do computador, e deverá dar a instrução `play(x)`. Controle o volume do áudio de modo a que o som não fique muito alto (os sons muito altos produzem danos nos ouvidos).

- Dê os seguintes comandos, que têm a finalidade de preparar o sistema para os ensaios que vai fazer a seguir:

```
samplingrate = 48000
t = timevar(1)
```

(QA1) Gere sinais sinusoidais com várias frequências e ouça-os[2]. As sinusóides de frequências mais altas correspondem aos sons mais graves, ou aos mais agudos?

(QA2) Tente determinar, aproximadamente, quais as frequências máxima e mínima que consegue ouvir, e indique os resultados que obteve. Para tornar os testes mais rápidos, pode incluir a expressão da sinusóide directamente no comando `play`; por exemplo, `play(cos(2*pi*1000*t))`.

Note que as frequências que determinou podem não corresponder aos limites de audição, porque podem ser influenciadas pelo equipamento que está a utilizar (pelos auscultadores, por exemplo).

3 Notas musicais

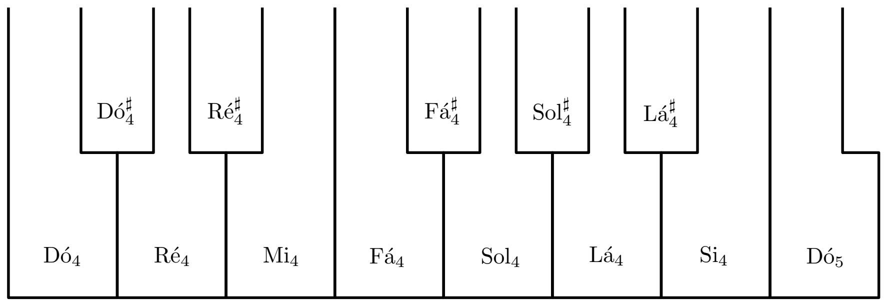
Cada nota musical corresponde a uma frequência bem definida. A figura seguinte representa a oitava central do teclado dum piano.

Tenha em atenção os seguintes dados relativos às frequências das notas musicais:

- A frequência do Lá_4 é de 440Hz.

[1] É comum, nas aplicações, usar-se a *frequência linear*, representada por f, e relacionada com a frequência angular por $\omega = 2\pi f$. A frequência linear tem normalmente unidades de ciclos por segundo, ou Hertz (Hz).

[2] Não utilize frequências superiores a 24 kHz, porque elas não seriam correctamente reproduzidas. Quando estudar a amostragem de sinais compreenderá por que razão isso acontece.



- A escala musical é logarítmica. A diferença de uma oitava (por exemplo entre Dó$_5$ e Dó$_4$) corresponde sempre a uma relação de frequências de 2:1. Por exemplo, a frequência do Dó$_5$ é dupla da do Dó$_4$.
- As diferenças entre notas sucessivas (incluindo as notas correspondentes às teclas assinaladas com o símbolo "$\sharp$", designado por "sustenido" no contexto musical) correspondem sempre à mesma relação de frequências, que é chamada de "meio tom". Como há 12 meios tons numa oitava, a relação de frequências correspondente a cada meio tom é de $\sqrt[12]{2}$, de modo a que a relação duma oitava seja de 2:1, como referido acima[3]. Por exemplo, a frequência do Dó$_4^\sharp$ é igual à do Dó$_4$ multiplicada por $\sqrt[12]{2}$.

Com estes dados, é possível calcular a frequência de qualquer nota do teclado.

(QA3) Determine as frequências das notas Mi$_4$, Fá$_4^\sharp$, Sol$_4$, Si$_4$, Dó$_5$.

- Dê o comando `samplingrate = 16000`.
- A função `seqsin` gera uma sequência de sinusóides ou períodos de silêncio.

  Por exemplo, a instrução

  ```
  x = seqsin(440, 0.3, 0, 0.5, 466.164, 0.15)
  ```

  cria, na variável `x`, uma sinusóide com a frequência de 440 Hz e com a duração de 0.3 segundos, seguida dum período de silêncio com a duração de 0.5 segundos, seguida duma sinusóide com a frequência de 466.164 Hz e com a duração de 0.15 segundos. Como a frequência de 440 Hz corresponde à nota Lá$_4$ e a de 466.164 Hz corresponde à nota Lá$_4^\sharp$, representaremos abreviadamente essa sequência de notas por "Lá$_4$(0.3), Sil(0.5), Lá$_4^\sharp$(0.15)".

  Crie agora, na variável `x`, a sequência seguinte (as frequências necessárias são as que determinou acima) e oiça o sinal que gerou:
  Sil(0.7), Sol$_4$(0.1), Fá$_4^\sharp$(0.1), Sol$_4$(0.2), Si$_4$(0.1), Dó$_5$(0.1), Si$_4$(0.8),
  Sil(0.2), Fá$_4^\sharp$(0.1), Sol$_4$(0.1), Fá$_4^\sharp$(0.2), Sol$_4$(0.1), Lá$_4$(0.1), Sol$_4$(0.8),
  Sil(0.2), Fá$_4^\sharp$(0.1), Mi$_4$(0.1), Fá$_4^\sharp$(0.2), Si$_4$(0.1), Dó$_5$(0.1), Si$_4$(0.8),
  Sil(0.2), Fá$_4^\sharp$(0.1), Mi$_4$(0.1), Fá$_4^\sharp$(1), Sil(0.7).

  O que acabou de fazer corresponde a uma forma muito simples de sintetizar sinais musicais. A maioria dos instrumentos musicais electrónicos usa formas mais elaboradas de gerar os sons, mas na base dessas formas de os gerar está normalmente algo de semelhante àquilo que fez aqui.

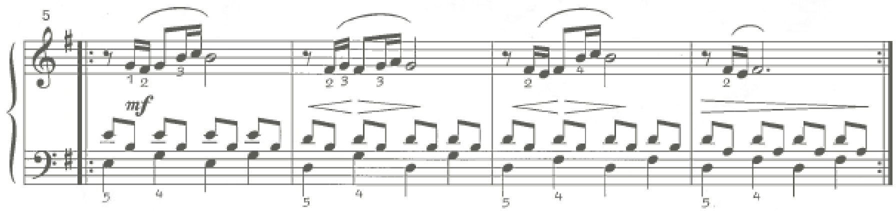
  O som correspondente a uma sinusóide tem um timbre relativamente "pobre". Pode obter um som um pouco mais interessante com a instrução `play(1.5*x)`. A função `play` limita o sinal ao intervalo $[-1, 1]$, que corresponde à gama máxima de amplitudes que pode ser reproduzida pelo sistema de áudio do computador. Fornecendo a essa função sinusóides com uma amplitude superior a 1, os picos positivos e negativos das sinusóides irão ser "cortados", o que origina um sinal com um timbre diferente do da sinusóide. Na secção 6 deste guia irá lidar com sinais periódicos que não são sinusoidais.

[3] As relações de frequências aqui descritas correspondem à *escala cromática igualmente temperada*, que é muito usada na afinação de instrumentos musicais. Existem, no entanto, muitas outras formas de afinar esses instrumentos.

Pode visualizar graficamente a sequência de sinusóides que gerou. Se fizer zoom nas transições entre sinusóides consecutivas, verificará que cada sinusóide termina de forma suave, e que a sinusóide seguinte se inicia também de forma suave. Se houvesse transições abruptas entre sinusóides, ouvir-se-iam "cliques" desagradáveis nas transições entre notas. Além disso, notas consecutivas com a mesma frequência soariam como uma única nota de duração mais longa.

Os adaptadores de áudio de alguns computadores fazem um pequeno "clique" ao ligar e ao desligar. Os silêncios que foram colocados no início e no fim da sequência de notas destinam-se a separar esses cliques da melodia.

Pode gerar um sinal com várias vozes simplesmente através da soma dos sinais correspondentes a cada voz. Como exemplo, considere a frase musical da figura seguinte, cuja voz mais aguda corresponde à variável `x` que gerou e ouviu.



Para gerar as outras vozes, pode criar na variável `y`, a sequência
Sil(0.5), Mi$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Mi$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Mi$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Mi$_4$(0.2), Si$_3$(0.2)
Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2)
Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Si$_3$(0.2)
Ré$_4$(0.2), Lá$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Lá$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Lá$_3$(0.2), Ré$_4$(0.2), Lá$_3$(0.2), Sil(0.5)
e na variável `z`, a sequência
Sil(0.5), Mi$_3$(0.4), Sol$_3$(0.4), Mi$_3$(0.4), Sol$_3$(0.4),
Ré$_3$(0.4), Sol$_3$(0.4), Ré$_3$(0.4), Sol$_3$(0.4),
Ré$_3$(0.4), Fá$^\sharp_3$(0.4), Ré$_3$(0.4), Fá$^\sharp_3$(0.4),
Ré$_3$(0.4), Fá$^\sharp_3$(0.4), Ré$_3$(0.4), Fá$^\sharp_3$(0.4), Sil(0.5).
A instrução `play(0.5*x+0.25*y+0.25*z)` permite ouvir o sinal musical correspondente à frase da figura.

4 Impulso e degrau unitários

O degrau unitário de tempo contínuo, $u(t)$, é gerado pela função `u`, cuja utilização é intuitiva:

- Gere uma variável de tempo com a duração de 4 segundos, através da instrução `t = timevar(4)`. Em seguida trace o gráfico de `u(t)` através da instrução `tplot(u(t))`.
- A função `u` permite colocar o degrau em qualquer posição. Experimente traçar o gráfico de `u(t-t0)` para vários valores de `t0`.

(QA4) A função `u` permite até lidar com qualquer transformação afim da variável independente. No entanto, $u(at+b)$ é equivalente a $u(\pm t - t_0)$ com a escolha adequada de t_0. Verifique este facto analiticamente, usando a definição do degrau unitário $u(t)$, e também experimentalmente, traçando o gráfico de `u(at+b)` para vários valores de `a` e `b`.

Na representação de sinais que é usada no computador não é possível representar exactamente o impulso unitário de tempo contínuo, $\delta(t)$. Ir-se-á usar uma representação aproximada constituída por um impulso muito curto, mas de duração não nula, e de amplitude muito grande, mas não infinita. A função `delta` gera essa representação. Os passos seguintes permitem que se familiariarize com essa função.

- Trace o gráfico de `delta(t)` através da instrução `tplot(delta(t))`. Pode observar que o resultado é formado por um impulso muito curto e de grande amplitude.
- A função `delta` permite colocar o impulso em qualquer posição. Experimente traçar o gráfico de `delta(t-t0)` para vários valores de `t0`.
- A função `delta` não permite, no entanto, lidar com escalamentos da variável independente. Para verificar esse facto proceda da seguinte forma:

(QA5) Deduza a expressão de $\delta(at)$ em função de $\delta(t)$, considerando $a > 0$. Para o fazer, recorde a definição de impulso unitário de tempo contínuo que adoptamos na disciplina, ou seja,

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t)\,, \quad \text{onde} \quad \delta_\Delta(t) = \frac{1}{\Delta}\big[u(t) - u(t-\Delta)\big]\,.$$

- Em seguida trace o gráfico de `b*delta(t)` para alguns valores de `b` e compare com o gráfico de `delta(t)`.

(QA6) Finalmente, trace o gráfico de `delta(a*t)` para alguns valores de `a`. Compare com o que seria o gráfico correcto de $\delta(at)$, à luz do que deduziu nos pontos anteriores.

5 Sistemas

Nesta parte do trabalho irá estudar propriedades de alguns sistemas e as suas respostas a diversos sinais.

Considere o sistema cuja relação entrada–saída é dada por

$$y(t) = x(t) + 0.7x(t-0.4)\,,$$

onde $x(t)$ representa a entrada do sistema e $y(t)$ representa a sua saída.

(QA7) Classifique o sistema quanto à linearidade e à invariância no tempo.

(QA8) Determine e esboce a resposta do sistema ao impulso unitário.

(QA9) Classifique o sistema quanto à memória, à causalidade e à estabilidade.

(QA10) A função `sistema1` implementa o sistema acima descrito. Por exemplo, para um sinal de entrada $x_1(t) = u(t) - u(t-1.5)$, a correspondente resposta $y_1(t)$ desse sistema é facilmente calculada:

```
t = timevar(4)
x1 = u(t) - u(t-1.5)
y1 = sistema1(x1)
tplot(y1)
```

Compare com o gráfico de $x_1(t)$, verificando se a relação entre esses gráficos é a esperada.

- De forma semelhante, usando agora a função `delta`, visualize o gráfico da resposta do sistema ao impulso unitário, constatando que está de acordo com o resultado acima previsto.
- A variável `fala` contém o registo de um pequeno segmento de fala. Ouça-o. Em seguida processe-o pelo `sistema1` e ouça o resultado. Note que o efeito produzido pelo sistema no sinal acústico é facilmente explicável através da interpretação da relação entrada-saída do sistema.

(QA11) Considere agora um sinal de entrada sinusoidal, $x_2(t) = \cos(\omega_x t)$, sendo o valor de ω_x especificado no *Moodle* (note que o valor de ω_x é diferente para cada instância do questionário). Usando a relação entrada-saída do sistema, determine a saída $y_2(t)$. Escrevendo as sinuisóides como soma de exponenciais complexas, mostre que a saída tem também forma sinusoidal, podendo ser escrita como $y_2(t) = A\cos(\omega_y t + B)$, e determine os valores de $A \in [0, +\infty)$, $\omega_y \in [0, +\infty)$ e $B \in (-\pi, \pi]$ (tenha em conta que os argumentos das funções trigonométricas são representados em *radianos*).

- Usando a função `sistema1`, calcule a resposta do sistema ao sinal `cos(`ω_x`*t)` e visualize-a, confirmando que está de acordo com o resultado previsto (por exemplo, sobrepondo-a ao sinal `A*cos(`ω_y`*t+B)`).

  Tenha em conta que, no computador, os sinais não são representados para t a variar de $-\infty$ a $+\infty$. Por exemplo, o comando `t = timevar(4)` gera a variável `t` com valores no intervalo [-2s, 2s], e o comando `x2=cos(15*t)` gera uma sinusóide para valores de t também nesse intervalo. Para os restantes valores de t, o sinal correspondente é considerado nulo. Por este motivo, é comum que, ao calcular respostas de sistemas a sinais, surja um "transitório" no início da resposta que foi calculada, e outro no final desta.

A instrução `y = sistema2(x)` permite calcular a resposta dum outro sistema, cuja relação entrada-saída é para si desconhecida, ao sinal contido em `x`. Realize experiências com a finalidade de classificar esse sistema no que diz respeito a:

(R1) Linearidade.

(R2) Invariância no tempo.

(R3) Memória.

(R4) Causalidade.

(R5) Estabilidade.

Descreva as experiências que realizou, explicitando os sinais de entrada usados, as saídas obtidas e as conclusões que tirou. Explicite, em relação a cada propriedade, se conseguiu ter a certeza da classificação, ou se conseguiu apenas ter indicações. Descreva apenas as experiências que foram importantes para tirar conclusões.

Notas sobre a representação de sinais de tempo contínuo no computador

Os sinais de tempo contínuo não são representados de forma exacta no computador. De facto, estes sinais têm valores para todos os valores de $t \in \mathbb{R}$, e no computador só se pode representar um número finito de valores[4]. Por isso, no trabalho de laboratório:

- Os sinais são representados apenas num intervalo de tempo finito. Fora desse intervalo, os sinais são considerados nulos. Por uma questão de simplicidade, utilizam-se sempre intervalos de tempo simétricos em relação à origem.
- Os sinais são representados apenas pelos valores que tomam em instantes igualmente espaçados entre si. Esses valores são normalmente designados por *amostras* do sinal. O número de amostras por segundo designa-se por ritmo, ou frequência, de amostragem, e está indicado na variável `samplingrate`. Na maior parte deste trabalho utiliza-se `samplingrate` $= 16000$. Para testar os limites de audição usa-se `samplingrate` $= 48000$. Como estudaremos mais tarde, a representação de sinais por meio de amostras só é correcta até metade da frequência de amostragem. Se, ao testar os limites de audição, usasse uma frequência de amostragem de 16000, só poderia testar frequências até 8 kHz, valor que fica abaixo do limite superior de audição da maioria das pessoas.
- Em consequência do que foi dito acima, cada sinal é representado por um número finito de valores. Estes são guardados em variáveis do tipo `array`. Variáveis como `t`, `x`, ou `y`, mencionadas acima, são então arrays.

A função `tplot` faz interpolação linear entre as amostras consecutivas do sinal que está a representar. Se fizer o gráfico dum sinal de variação muito rápida, por exemplo com a instrução `tplot(cos(10000*t))`, e fizer zoom muito acentuado do gráfico, poderá ver que este é constituído por segmentos de recta unindo as diversas amostras.

Dada a forma como os sinais são representados, não é possível calcular a saída do sistema 1, definido acima, através de uma expressão do tipo `y = x(t) - 0.5 * x(t-0.25)`. De facto, no computador, `x` não é uma função, mas sim um array. Poderíamos pensar em usar `t` como índice do array `x`, mas o argumento dum array tem de ser inteiro, e `t` toma valores não inteiros. O índice do array `x`, no computador, não representa directamente o valor do tempo, embora esteja relacionado com ele.

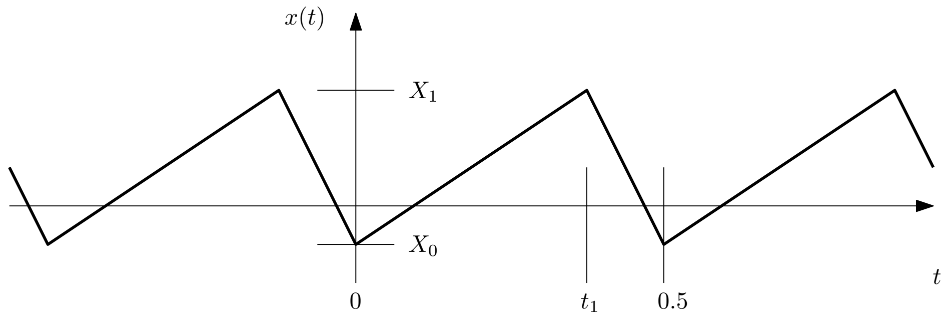
É possível fazer `x1 = u(t) - u(t-1.5)`, à semelhança do indicado no enunciado, porque `u` está definido como função e não como array (o mesmo acontecendo com `delta`). Pode ver, no ficheiro `lab.py`, a forma como essa função é definida, bem como a forma como é implementada a função `sistema1`, e diversos outros aspectos de implementação. A função `sistema2` é fornecida compilada para que não possa ver como é calculada, porque se pretende que tente determinar as propriedades do sistema correspondente exclusivamente através de ensaios realizados sobre ele. É comum, na prática, ter de se lidar com sistemas cuja descrição matemática se desconhece, e terem de se estudar esses sistemas através de ensaios feitos sobre eles.

[4] Seria possível representar exactamente alguns sinais através da sua expressão analítica, mas esse tipo de representação não seria conveniente para o trabalho que se pretende realizar. Por exemplo, o sinal contido na variável `fala` não seria representável nessa forma, porque não tem expressão analítica conhecida.

6 Série de Fourier

Nesta parte do trabalho ir-se-á sintetizar um sinal periódico a partir da sua representação em série de Fourier.

Considere a onda descrita pelo sinal periódico $x(t)$ representado na figura seguinte, onde os valores de X_0, X_1 e t_1 são especificados no *Moodle* (note que os valores são diferentes para cada instância do questionário).



Naturalmente, este sinal pode ser representado pela série de Fourier

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \, e^{jk\omega_0 t}.$$

Iremos considerar aproximações desta série dadas pela série truncada

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \, e^{jk\omega_0 t}, \tag{1}$$

para vários valores de N. Sendo $x(t)$ real, esta série pode ser escrita como uma soma de sinusóides, *i.e.*,

$$x_N(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(k\omega_0 t + \varphi_k), \tag{2}$$

onde $A_0 \in (-\infty, +\infty)$ e, para $k \geq 1$, $A_k \in [0, +\infty)$, $\varphi_k \in (-\pi, \pi]$.

(QB1) Determine os valores de $\omega_0, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6, \varphi_7$ na expressão (2). Para tal, proceda da seguinte forma:

1. Determine ω_0 e a expressão dos coeficientes a_k da série de Fourier do sinal $x(t)$. Naturalmente, pode obter a expressão de a_k usando propriedades conhecidas dos coeficientes da série de Fourier ou directamente a sua definição.
2. Determine as expressões dos coeficientes A_k e φ_k . Para isso, agrupe o termo de ordem k com o de ordem $-k$ na expressão (1), re-escrevendo-a na forma da expressão (2), o que evidenciará a relação entre $\{A_k, \varphi_k\}$ e a_k.
3. Calcule o valor dos coeficientes pedidos (lembre-se de que, para $k \geq 1$, $A_k \geq 0$ e $-\pi < \varphi_k \leq \pi$).

- Usando os valores dos coeficientes calculados e as funções que já conhece, crie os sinais $x_N(t)$ dados por (2), com t no intervalo $[-10, 10]$, para $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. *Nota: A variável* `pi` *contém o valor* π.
- Visualize os sinais $x_N(t)$ sobrepostos no mesmo gráfico (para traçar vários gráficos sobrepostos, dê os correspondentes comandos `tplot` seguidos, sem fechar a janela onde aparecem os gráficos) e compare-os com o gráfico de $x(t)$, acima representado. Faça zoom para poder observar em detalhe as formas de onda e verificar se têm o comportamento esperado.

Pretende-se agora visualizar o espectro de frequências dos sinais gerados, recorrendo à transformada de Fourier. A transformada de Fourier de um sinal pode ser calculda usando o comando `FourierTransform`. Para colocar na variável `X` a transformada de Fourier do sinal `x` e traçar o gráfico da sua parte real, utilize simplesmente as instruções

```
X = FourierTransform(x)
fplot(real(X))
```

Note que o comando usado para traçar o gráfico dum sinal no domínio da frequência (`fplot`) é diferente do usado para traçar o gráfico dum sinal no domínio do tempo (`tplot`). Note também que, tendo `X`, em geral, valores complexos, é necessário explicitar que se pretende traçar o gráfico da parte real de `X`, através do uso da função `real`. Para visualizar, respectivamente, a parte imaginária, o módulo ou a fase de `X`, basta usar as funções `imag`, `abs` ou `angle`.

- Visualize os gráficos das transformadas de Fourier dos sinais dos sinais $x_N(t)$ criados anteriormente, constatando que têm a estrutura esperada. Para visualizar melhor cada gráfico, deverá fazer zoom da zona em torno da origem.

(QB2) Indique, em particular, o que conclui da visualização da transformada de Fourier de $x_2(t)$.

7 Resposta em frequência

No laboratório ir-se-á determinar experimentalmente a resposta em frequência dum sistema linear invariante no tempo (SLIT).

Como sabe, a resposta em frequência dum SLIT, $H(j\omega)$, pode ser interpretada como sendo o "ganho" que o sistema apresenta para a frequência ω. Esta interpretação traduz o facto de que, colocando à entrada do sistema o sinal $e^{j\omega t}$, se obtém à saída o sinal $H(j\omega)\, e^{j\omega t}$.

Para determinar experimentalmente $H(j\omega)$, poder-se-ia pensar em colocar à entrada do sistema sinais $e^{j\omega t}$, com diferentes valores de ω, e em medir as amplitudes e as fases dos correspondentes sinais de saída. Embora esta forma de proceder pudesse, de facto, ser usada numa simulação em computador, na realidade tal procedimento não seria viável, porque os sinais e os sistemas que são normalmente usados na prática são reais. Os sistemas só aceitam entradas reais e só produzem saídas reais e, portanto, não permitem usar o sinal complexo $e^{j\omega t}$ como entrada. Por esse motivo, é necessário proceder-se duma forma um pouco diferente da indicada acima. As questões seguintes estabelecem os factos fundamentais que permitem medir a resposta em frequência dum sistema real (a qual toma, geralmente, valores complexos) usando apenas sinais reais.

(QB3) Considere um SLIT real (isto é, um SLIT que apenas aceita entradas reais e que apenas produz saídas reais) com resposta em frequência $H(j\omega)$. Admita que a sua entrada é $x(t) = \cos(\omega t)$. Verifique que a sua saída pode ser expressa na forma $y(t) = A(\omega) \cos\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]$, com $A(\omega)$ real não negativo e $\varphi(\omega)$ real. Determine as expressões de $A(\omega)$ e $\varphi(\omega)$ em função de $H(j\omega)$.

(QB4) Admita que está a trabalhar com um SLIT real. Com base nos resultados do ponto anterior, indique que sinal de entrada deve usar, que valores deve medir experimentalmente, e que cálculos deve efectuar sobre esses valores, para determinar o módulo e o argumento da resposta em frequência do sistema, $H(j\omega)$, para um dado valor de ω.

A função `sistema3` implementa um sistema real do qual se pretende determinar experimentalmente a resposta em frequência. Para tal, comece por gerar uma variável de tempo com a duração de 20 segundos, com a instrução `t = timevar(20)`. Em seguida, realize repetidamente uma sequência de passos como a indicada a seguir, de forma a determinar valores do módulo de resposta em frequência.

- Gere um sinal `x` apropriado.
- Dê a instrução `y = sistema3(x)`, que coloca na variável `y` a resposta do sistema ao sinal `x`.
- Efectue medidas sobre o sinal `y`.
- Efectue os cálculos necessários, com base nos resultados do ponto anterior, para determinar valores do módulo de $H(j\omega)$.

Note que ao gerar uma sinusóide no computador, com uma instrução do tipo `x = cos(t)`, está, de facto, a gerar uma sinusóide de duração limitada, e não uma sinusóide para t a variar de $-\infty$ a $+\infty$. A resposta do sistema a uma sinusóide de duração limitada apresenta um "transitório" no início e outro no final. Para determinar características da resposta, deverá usar o intervalo de tempo em que a resposta está estável, isto é, depois de o transitório inicial já se ter desvanecido e antes de o transitório final se ter iniciado.

Para determinar valores num gráfico, utilize o cursor do rato em forma de seta (se o cursor estiver na forma de uma cruz com quatro setas, clique no símbolo com a mesma forma, para passar para uma seta). Coloque a ponta da seta em cima do ponto cujas coordenadas quer saber. As coordenadas desse ponto aparecem na orla da mesma janela, em cima ou em baixo. Pode fazer zoom do gráfico, sempre que necessário, para efectuar medições com maior precisão.

Pode poupar tempo, nos seus ensaios, se, para cada valor de ω, em vez duma sequência de comandos do tipo

```
x = <expressão>
y = sistema3(x)
tplot(y)
```

usar simplesmente

```
tplot(sistema3(<expressão>)).
```

Pode também traçar os gráficos de várias respostas sobrepostos, e só depois fazer zoom e efectuar medições sobre eles.

(QB5) Através do método acima descrito, determine o módulo da sua resposta em frequência do `sistema3` para $\omega \in \{0, 1, 3, 5, 10, 20, 40\}$.

(QB6) Utilizando os resultados obtidos no ponto anterior, esboce o gráfico do módulo da resposta em frequência e indique se o `sistema3` é um filtro passa-baixo, passa-alto ou passa-banda, e se é ideal ou não.

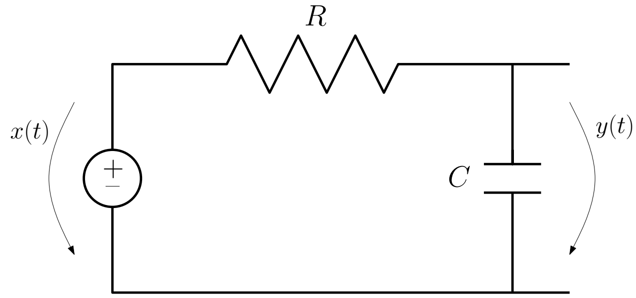
Nota: A simulação do sistema que está implementada no computador não é perfeita. Tem uma aproximação bastante boa para $|\omega| \leq 40$*, mas vai-se tornando menos exacta para valores maiores da frequência. Por isso, não utilize* $|\omega| > 40$*.*

Uma forma alternativa de obter a resposta em frequência usa como passo intermédio a determinação experimental da resposta ao impulso unitário, o que, podendo ser difícil de fazer na práctica para alguns sistemas reais, é perfeitamente exequível na simulação em computador. Verifique-o através dos segintes passos:

(QB7) Usando a função `delta`, determine experimentalmente a resposta do `sistema3` ao impulso unitário e visualize-a.

- Usando a função `FourierTransform`, calcule a resposta em frequência, ou seja, a transformada de Fourier da resposta ao impulso unitário obtida. Visualize o o seu módulo e, fazendo zoom na região $\omega \in [-40, 40]$, confirme que concorda com os valores obtidos em (QB4). Visualize também o argumento da resposta em frequência na mesma região.

Sabe-se que o sistema que a função `sistema3` implementa corresponde ao circuito RC da figura seguinte.



(QB8) Determine, em função de R e C, as expressões da resposta em frequência do circuito, $H(j\omega)$, bem como do seu módulo e argumento. Verifique que as expressões de $|H(j\omega|$ e $\angle H(j\omega)$ estão de acordo com os resultados experimentais obtidos.

(QB9) Determine, em função de R e C, a expressão da resposta do circuito ao impulso unitário, $h(t)$, verificando também que está de acordo com a resposta obtida experimentalmente.

(R6) Sabendo que $C = 500\,\mu F$, estime, justificadamente, o valor da resistência R, usando os resultados experimentais que obteve. Descreva como se certificou de que o valor estimado para R está de acordo com os resultados experimentais respeitantes a ambos $H(j\omega)$ e $h(t)$.

8 Filtragem

Nesta parte do trabalho ir-se-á filtrar um sinal com diversos filtros, e observar os resultados. As funções `sistema4(·)`, `sistema5(·)`, `sistema6(·)` implementam os seguintes sistemas:

`sistema4`	Filtro passa-baixo com frequência de corte de cerca de 500 Hz.
`sistema5`	Filtro passa-alto com frequência de corte de cerca de 250 Hz.
`sistema6`	Filtro passa-banda com banda passante de 800 Hz a 1000 Hz, aproximadamente.

A variável `p` contém um sinal periódico com a frequência fundamental de 50 Hz. Passe o sinal `p` por cada um dos sistemas indicados, e compare o gráfico do sinal de entrada com o de cada uma das saídas. Faça zoom dos gráficos de forma a que a largura da janela fique ocupada apenas por cerca de dois períodos do sinal, para poder observar cada uma das formas de onda com detalhe. Para comparar mais facilmente os sinais de entrada e de saída do sistema, de modo a poder responder às questões abaixo enunciadas, trace os gráficos dos dois sinais sobrepostos na mesma figura.

Ouça os sinais através dos auscultadores, por meio da função `play`.

Visualize os módulos dos espectros do sinal de entrada e dos sinais de saída (não visualize estes gráficos sobrepostos, porque ficam difíceis de distinguir entre si). Pode ser útil traçar os espectros da entrada e da saída do sistema em janelas separadas. Para isso:

- Dê o comando para traçar o primeiro gráfico.
- Dê o comando `figure()`. Abrir-se-á uma nova janela.
- Dê o comando para traçar o segundo gráfico.

Responda às seguintes questões, respeitantes à variação temporal dos sinais de entrada e de saída:

(R7) A saída do filtro passa-baixo reproduz bem as zonas de variação rápida do sinal `p`? E as de variação lenta? Explique porquê.

- A saída do filtro passa-alto reproduz bem as variações rápidas do sinal `p`? E as variações lentas? Explique porquê.

(R8) Verifique que a saída do filtro passa-banda tem, localmente, a forma aproximada duma sinusóide. Verifique que a amplitude dessa sinusóide varia no tempo, de forma sinusoidal também. Meça o valor aproximado das frequências dessas sinusóides. Explique por que razão a saída do filtro tem esta forma e os valores de frequência encontrados.

9 Amostragem

Nesta secção final do trabalho de laboratório irá verificar experimentalmente vários dos factos que estudou relativamente à amostragem e reconstrução de sinais.

(QB10) Considere o sinal $x_c(t) = \cos(10\pi t)$. Admita que este sinal é amostrado com um período de amostragem T. Indique a gama de valores de T para a qual são respeitadas as condições do Teorema da Amostragem.

Para realizar experimentalmente o processo de amostragem, execute os passos seguintes:

- Redefina a variável que controla a granularidade da repesentação em computador dos sinais de tempo contínuo de modo a preparar o sistema para os ensaios que vai fazer a seguir, através do comando `samplingrate = 20000`.
- Defina uma variável de tempo com a duração de 4 segundos, através do comando `t = timevar(4)`.
- Crie um sinal sinusoidal através do comando `xc = cos(10*pi*t)`.
- Visualize o gráfico desse sinal através do comando `tplot(xc)`. Faça zoom para verificar que se trata de facto duma sinusóide com a frequência 10π.
- Amostre esse sinal com um período de amostragem de 0.01, através do comando `xd = sample(xc,0.01)`.
- Visualize o sinal amostrado através do comando `dplot(xd)`. Faça zoom do gráfico para poder observá-lo melhor.

  Note que o comando para visualizar sinais de tempo discreto usa a função `dplot`*, e não a função* `tplot`*.*

  Recorde que pode ver simultaneamente dois gráficos em janelas diferentes, por exemplo os de `xc` *e* `xd`*, procedendo da seguinte forma: dê o comando* `tplot(xc)`*; abra uma nova janela com o comando* `figure()`*; trace nela o outro gráfico com o comando* `dplot(xd)`*.*

(QB11) Compare os gráficos de `xd` e `xc`. Indique o que conclui a respeito da relação entre estes sinais.

Para realizar experimentalmente o processo de reconstrução, execute simplesmente o passo seguinte:

- Reconstrua um sinal de tempo contínuo a partir do sinal `xd`, usando o mesmo período de amostragem. Use, para isso, o comando `yc=reconstruct(xd,0.01)`. Compare os sinais `xc` e `yc` visualizando-os sobrepostos, no mesmo gráfico, e visualizando o gráfico do sinal `yc-xc`.

Execute agora os seguintes passos:

- Repita o processo de amostragem e reconstrução, agora com um período de amostragem de 0.125, ou seja, gere, a partir do sinal `xc`, novos sinais `xd` e `yc`, procedendo como anteriormente mas usando agora o novo período de amostragem.

- Visualize, sobrepostos no mesmo gráfico, os sinais `xc` e `yc` e, numa janela diferente, o sinal `xd`.

(QB12) Meça o período do sinal `yc` e indique o valor obtido.

- Compare os sinais `xc` e `yc`, confirmando em particular que têm o mesmo valor nos instantes de amostragem. Certifique-se de que a relação entre as frequências de `xc` e `yc` é a esperada.

- A variável `xc1` contém um determinado sinal. Visualize-o. Faça zoom da parte central do gráfico, para perceber melhor a forma do sinal. Em seguida amostre esse sinal com um período de amostragem de 0.01, colocando o resultado em `xd1`.

- Reconstrua um sinal de tempo contínuo a partir de `xd1`, com o mesmo período de amostragem, e coloque o resultado em `yc1`.

(QB13) Visualize os sinais `xc1` e `yc1` sobrepostos, no intervalo de tempo [-0.1,0.1]. Indique o gráfico correspondente.

(QB14) Visualize, sobrepostos, os espectros de frequência dos sinais `xc1` e `yc1`. Faça zoom da parte central, visualizando os espectros no intervalo de frequências [-600,600]. Indique o gráfico correspondente.

Recorde que para visualizar, por exemplo, o modulo do espectro de frequência de um sinal `x`*, pode usar o comando* `fplot(abs(FourierTransform(x)))`*, e que para visualizar o seu argumento e as a suas partes real e imaginária deve usar* `angle`*,* `real` *e* `imag`*, respectivamente, em vez de* `abs`*.*

Nota: o comando `fplot` *não é apropriado para visualizar espectros de sinais de tempo discreto.*

(R9) Explique como é que o espectro que obteve para o sinal `yc1` resultou do de `xc1` através dos processos de amostragem e reconstrução de sinais.