



POLITECNICO
MILANO 1863

**SCUOLA DI INGEGNERIA INDUSTRIALE
E DELL'INFORMAZIONE**

Final Report - Group 09

LABORATORIO DI ANALISI DI MISSIONI SPAZIALI

Antela Ulaj	10860275
Eugenio Tricomi	10821002
Giacomo Tontini	10832317

Group ID: 09

Advisor: Mauro Massari, Fabio Ferrari, Maria Alessandra De Luca

Academic Year: 2024-25

Indice

Indice	i
0 Introduzione	1
1 Scenario 1 - Raggiungimento dell'orbita di parcheggio	2
1.1 Caraterizzazione delle Orbite	2
1.1.1 Orbita Iniziale	2
1.1.2 Orbita Finale	3
1.2 Traiettorie di trasferimento	4
1.2.1 Strategia 1	4
1.2.2 Strategia 2	5
1.2.3 Strategia 3	6
1.2.4 Strategia 4	6
1.2.5 Strategie biellittiche	7
2 Scenario 2 - Trasferimento interplanetario diretto verso un asteroide	8
2.1 Caratterizzazione delle Orbite	8
2.1.1 Orbita Iniziale	8
2.1.2 Orbita Finale	9
2.2 Ricerca dell'orbita di Trasferimento	10
2.2.1 Funzione Obiettivo $f_1 = \Delta v$	11
2.2.2 Funzione Obiettivo $f_2 = \Delta t$	12
2.2.3 Funzione Obiettivo $f_3 = \alpha \Delta v + \beta \Delta t$	13
2.2.4 Orbita del Trasferimento Diretto	13
3 Scenario 3 - Fasi di fuga e di arrivo	14
3.1 Traiettorie di fuga	14
3.1.1 Progetto iperbole di fuga	15
3.1.2 Costi Δv e Δt	15
3.1.3 Manovra avanzata	16
3.2 Traiettorie d'arrivo	17
3.2.1 Progetto iperbole	18
3.2.2 Costi Δv e Δt	19
4 Conclusioni	20
Bibliografia	22

A	Appendix A	23
A.0.1	Scenario 1	23
A.0.2	Scenario 2	26
A.0.3	Scenario 3	27

0 | Introduzione

Il presente elaborato è diviso in quattro parti e tratta la progettazione del trasferimento di un satellite: nella prima parte viene discusso un trasferimento geocentrico da un punto di partenza in un'orbita di trasferimento geostazionario (GTO) a uno di arrivo in un'orbita di parcheggio assegnata; nella seconda parte viene ottimizzato un trasferimento eliocentrico, dall'orbita della Terra all'orbita di un asteroide assegnato; la terza parte è divisa in due sezioni dove nella prima si analizza il trasferimento dall'orbita geocentrica di parcheggio della parte 1 all'orbita eliocentrica progettata nella parte 2, mentre nella seconda sezione si analizza il trasferimento da quest'ultima orbita eliocentrica a un'orbita ellittica intorno all'asteroide assegnato; nell'ultima sezione vengono tratte le conclusioni.

Nella prima parte, denominata Scenario 1, abbiamo analizzato diverse strategie per effettuare il trasferimento dal punto iniziale assegnato a quello finale. Tutte le strategie sono basate sulla combinazione di tre manovre principali: una manovra cambia la forma dell'orbita, ovvero l'eccentricità e il semiasse maggiore; una ruota l'orbita, ovvero cambia l'anomalia del pericentro; infine una modifica il piano dell'orbita. Le strategie che abbiamo esposto sono solo alcune delle numerose strategie possibili per effettuare il trasferimento e sono state scelte tenendo presente l'obiettivo di minimizzare i costi della traiettoria di trasferimento.

Il capitolo successivo tratta lo Scenario 2 nel quale il sistema di riferimento adottato è quello eliocentrico. In questo caso abbiamo collegato tramite un trasferimento diretto l'orbita terrestre con quella dell'asteroide a noi assegnato, *163899 (2003 SD220)*, cercando di minimizzare costi e tempi. Per risolvere il problema di ottimizzazione ci siamo serviti dell'approssimazione delle *Patched Conics* e di tre diversi metodi numerici.

Nell'ultimo Scenario abbiamo progettato le iperboli di fuga e d'arrivo richieste per concludere il trasferimento del satellite adottando nuovamente l'approssimazione delle *Patched Conics*. Nel caso dell'orbita iperbolica di fuga si è considerato prima il caso approssimato ove l'orbita di parcheggio e l'iperbolica giacciono sullo stesso piano e in seguito il caso reale in cui durante la manovra si modifica il piano. Nel caso dell'iperbole di arrivo, invece si è dovuta progettare un'orbita di arrivo puntando ad ottimizzare i costi.

Il paragrafo delle conclusioni riassume la progettazione completa del trasferimento con i relativi costi e le dovute considerazioni sulle scelte compiute.

Tutta la progettazione è stata fatta tenendo presente l'approssimazione sopra citata delle *Patched Conics* o coniche raccordate che permette di considerare solo problemi dei 2 corpi. Ciò fornisce una prima stima dei principali costi necessari a sostenere il trasferimento richiesto.

Trattandosi di un satellite, la nostra priorità nella fase di progetto è il costo in termini di Δv della missione, senza trascurare però il tempo necessario.

1 | Scenario 1 - Raggiungimento dell'orbita di parcheggio

In questo capitolo verranno dettagliatamente descritte l'orbita iniziale e quella finale. Successivamente saranno discusse le diverse strategie scelte per operare il trasferimento geocentrico.

1.1. Caraterizzazione delle Orbite

Per quanto riguarda l'orbita iniziale, i dati che ci sono stati forniti sono espressi in coordinate perifocali, dalle quali abbiamo ottenuto le corrispondenti coordinate cartesiane utilizzando la funzione $\text{[]} = \text{par2car}()$ su MATLAB.

Al contrario per l'orbita finale avevamo a disposizione le coordinate cartesiane e quindi abbiamo utilizzato la funzione $\text{[]} = \text{car2par}()$ per ottenere quelle perifocali.

1.1.1. Orbita Iniziale

La seguente tabella presenta i dati orbitali che ci sono stati forniti:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	24400.0	km
e - eccentricità	0.728300	-
i - inclinazione piano orbitale	0.104700	rad
Ω - RAAN	1.514000	rad
ω - anomalia del pericentro	3.107000	rad
θ - anomalia vera	1.665000	rad

Da questi dati è stato possibile trovare i vettori posizione $\mathbf{r} = [r_x, r_y, r_z]$ (km) e velocità $\mathbf{v} = [v_x, v_y, v_z]$ (km/s) in coordinate cartesiane:

Posizione	km	Velocità	km/s
r_x	12233.0	v_x	4.2396
r_y	38.4386	v_y	5.5074
r_z	-1283.2	v_z	-0.4119
$ \mathbf{r} $	12300	$ \mathbf{v} $	6.9624

Per completare la descrizione dell'orbita iniziale è possibile calcolare il periodo orbitale T e l'energia specifica gravitazionale E , tenendo presente che il valore del parametro gravitazionale dell'attrattore, ovvero la Terra, μ vale circa $398600 \text{ km}^3/\text{s}^2$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 37931 \text{ s} = 10 \text{ h } 32 \text{ min } 11 \text{ s}, \quad E = \frac{||\mathbf{v}||^2}{2} - \frac{\mu}{||\mathbf{r}||} = -8.1680 \times 10^6 \frac{J}{kg}$$

Possiamo anche calcolare il raggio di pericentro e di apocentro e il semilato retto:

$$R_p = a(1 - e) = 6629.5 \text{ km}, \quad R_a = a(1 + e) = 42171 \text{ km}, \quad p = a(1 - e^2) = 11458 \text{ km}.$$

Infine le rappresentazioni grafiche dell'orbita iniziale:

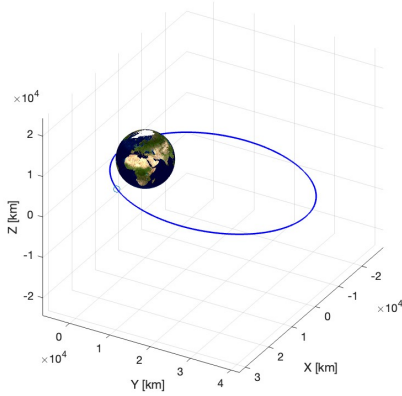


Figura 1.1: Orbita iniziale in ECI

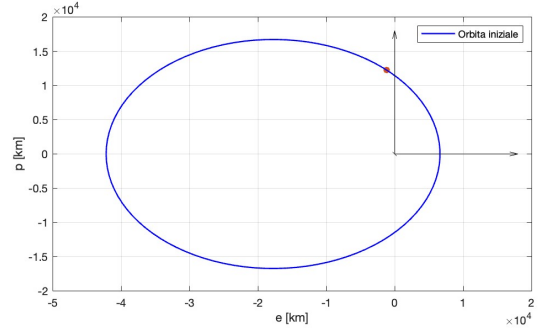


Figura 1.2: Orbita iniziale nel piano orbitale

1.1.2. Orbita Finale

Le tabelle mostrano i vettori posizione e velocità forniti in coordinate cartesiane:

Posizione	km
r_x	-12985.2800
r_y	3801.0114
r_z	8109.6193
$ \mathbf{r} $	15774

Velocità	km/s
v_x	-0.9486
v_y	-6.1340
v_z	1.3560
$ \mathbf{v} $	6.3533

Da questi due vettori abbiamo poi ricavato i parametri orbitali:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	39182	km
e - eccentricità	0.5974	-
i - inclinazione piano orbitale	0.5903	rad
Ω - RAAN	1.7495	rad
ω - anomalia del pericentro	1.1773	rad
θ - anomalia vera	6.2832	rad

Come abbiamo fatto per l'orbita iniziale, calcoliamo anche per l'orbita finale i seguenti dati:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 77186 \text{ s} = 21 \text{ h } 26 \text{ min } 26 \text{ s}$$

$$E = \frac{||\mathbf{v}||^2}{2} - \frac{\mu}{||\mathbf{r}||} = -5.0866 \times 10^6 \frac{J}{kg}$$

$$R_p = a(1 - e) = 15774 \text{ km}, \quad R_a = a(1 + e) = 62589 \text{ km}, \quad p = a(1 - e^2) = 25198 \text{ km}.$$

Le rappresentazioni grafiche dell'orbita finale:

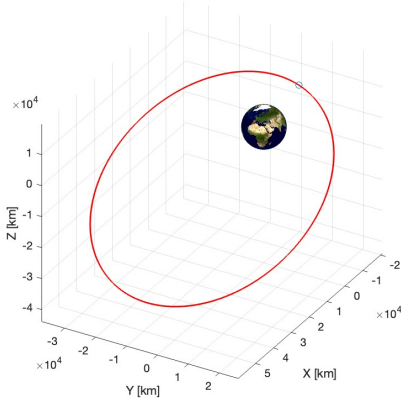


Figura 1.3: Orbita finale in ECI

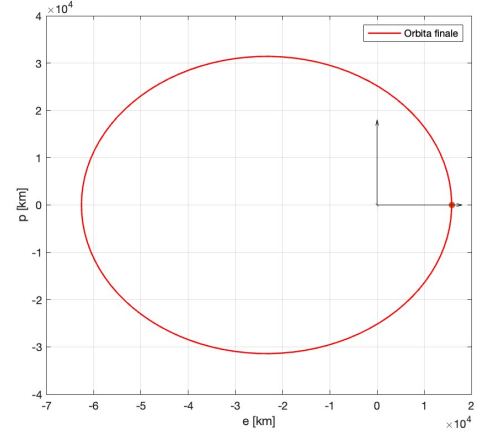


Figura 1.4: Orbita finale nel piano orbitale

Possiamo brevemente confrontare le due orbite assegnate, osservando innanzitutto che entrambe sono ellittiche ($0 < e < 1$, $E < 0$); l'orbita iniziale è più eccentrica ($e_i > e_f$) e più piccola ($a_i < a_f$). Il modulo della velocità finale è leggermente inferiore rispetto a quello iniziale e l'energia specifica risulta superiore ($E_f > E_i$). Confrontando le due orbite sullo stesso grafico si può osservare che non appartengono allo stesso piano, non presentano intersezioni ed anche i loro pericentri risultano essere visibilmente non allineati sullo stesso asse.

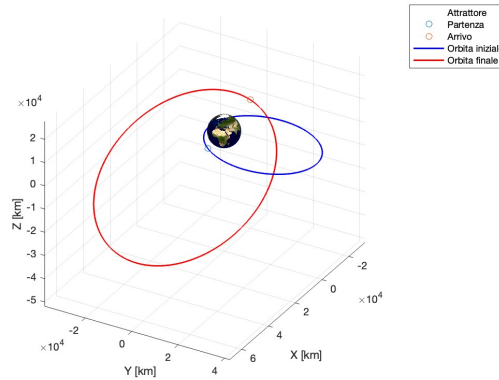


Figura 1.5: Rappresentazione delle due orbite

1.2. Traiettoria di trasferimento

1.2.1. Strategia 1

La prima strategia che abbiamo provato è quella standard che consiste nella sequenza delle tre manovre base: cambio piano, allineamento dell'asse di pericentro e cambio forma.

Il satellite parte dal punto assegnato e percorre l'orbita iniziale fino a uno dei due punti dove è possibile eseguire la manovra di cambio piano. Tale manovra si effettua nel primo punto disponibile in quanto si trova più lontano dall'attrattore e questo permette di risparmiare in termini di costo e, in questo caso, anche di tempo impiegato. Dopo aver ottenuto così un'orbita coplanare a quella finale il satellite prosegue su questa fino a raggiungere il primo punto disponibile per la manovra di cambio anomalia del

pericentro. Anche in questo caso è possibile effettuare la manovra in due punti, ma dal momento che in termini di costo è indifferente si sceglie quello che permette di risparmiare tempo, ovvero il primo punto incontrato. Una volta allineata l'orbita la si percorre fino al suo pericentro da dove effettuiamo il trasferimento bitangente arrivando così all'apocentro dell'orbita finale e proseguendo su questa fino al punto d'arrivo assegnato.

Il costo totale di questa prima strategia standard risulta essere $\Delta v = 8.0674 \text{ (km/s)}$, mentre il tempo impiegato complessivamente è $39 \text{ h } 52 \text{ min } 00 \text{ s}$.

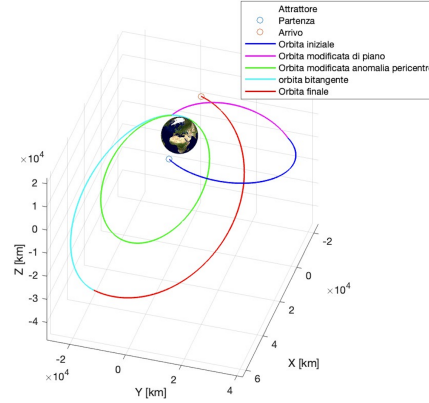


Figura 1.6: Strategia standard caso pa

1.2.2. Strategia 2

La seconda strategia che abbiamo realizzato fa uso delle stesse manovre della standard precedente, ma in questo caso il trasferimento bitangente è da pericentro a pericentro e viene effettuato per primo con l'appoggio di un'orbita ausiliaria che ha la stessa forma dell'orbita finale. L'obiettivo di questo trasferimento è quello di minimizzare il tempo impiegato a raggiungere il punto d'arrivo e la scelta di operare questa strategia si basa sul fatto che tale punto si trova approssimativamente sul pericentro dell'orbita finale. Per questo motivo è possibile risparmiare del tempo arrivando sull'orbita finale molto vicino al pericentro stesso in modo tale da non dover percorrere un tratto troppo lungo su quest'orbita. In questo caso il trasferimento risulta essere estremamente vantaggioso in termini di tempo $12 \text{ h } 45 \text{ min } 10 \text{ s}$ e anche il costo assoluto complessivo è migliore $\Delta v = 7.4439 \text{ (km/s)}$.

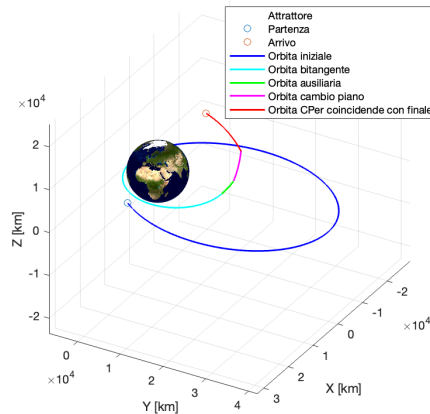


Figura 1.7: Strategia standard caso pp

1.2.3. Strategia 3

La seguente strategia è quella che abbiamo trovato più vantaggiosa in termini di costo. In questo caso abbiamo scelto di eseguire una manovra di circolarizzazione prima di procedere con il cambio di piano e la variazione dell'anomalia del pericentro. Circolarizzando l'orbita infatti otteniamo una traiettoria con velocità costante in ogni punto. In questo modo, le manovre successive possono essere eseguite in maniera più semplice, con una maggiore libertà ed efficienza. Si opera la circolarizzazione tramite un singolo impulso all'apocentro dell'orbita ellittica di partenza per averne una circolare con un raggio pari a quello di apocentro iniziale. Successivamente si effettua il cambio piano e il cambio di anomalia di pericentro, che in questo caso ha costo nullo, per poi concludere con un trasferimento bitangente. Otteniamo così un costo di $\Delta V = 3.909958 \text{ (km/s)}$ e un tempo di $37 \text{ h } 33 \text{ min } 42 \text{ s}$.

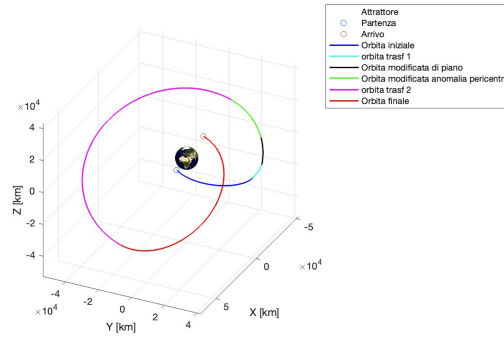


Figura 1.8: Strategia circolare

1.2.4. Strategia 4

In questa soluzione abbiamo cercato di limitare sia il costo che il tempo impiegato. La strategia consiste nell'esecuzione della manovra di cambio piano e cambio anomalia del pericentro durante la manovra di cambio forma. In questo caso operiamo un primo impulso all'apocentro dell'orbita iniziale per portarci sull'orbita di trasferimento ausiliaria da dove cambiamo il piano nel primo punto disponibile dal momento che si trova più lontano dall'attrattore e questo è un vantaggio per risparmiare sul costo. Successivamente si allineano i due assi e ci si porta sul pericentro dell'orbita finale che approssimativamente risulta essere il nostro punto d'arrivo, motivo per cui non è necessario percorrere tratti sull'orbita finale dopo aver eseguito l'ultimo impulso ed è quindi possibile risparmiare tempo. In questo modo otteniamo un costo di $\Delta v = 4.95211 \text{ (km/s)}$ e un tempo impiegato $23 \text{ h } 54 \text{ min } 18 \text{ s}$.

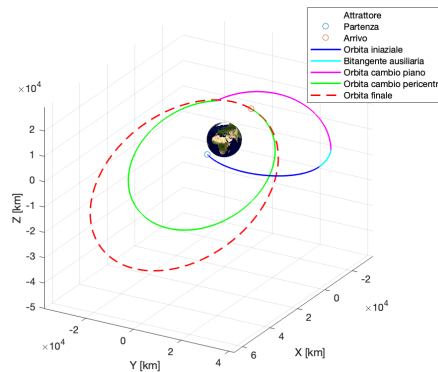


Figura 1.9: Strategia 4

1.2.5. Strategie biellittiche

Per le soluzioni successive abbiamo utilizzato un trasferimento biellittico per verificare se i costi e i tempi fossero più elevati rispetto al semplice trasferimento bitangente. Infatti dal modello teorico risulta che questa soluzione non offra particolari vantaggi nel nostro caso. In primo luogo abbiamo ripetuto la strategia standard concludendola con il trasferimento biellittico. Per fare ciò abbiamo prima ottimizzato il raggio di apocentro del biellittico (r_{at}) per massimizzare l'efficienza delle manovre. Dall'ottimizzazione mostrata in figura 1.10 è emerso che il raggio ottimale coincide con quello di apocentro dell'orbita finale, ma scegliendo quello opereremo il trasferimento bitangente della prima strategia; di conseguenza ne abbiamo scelto uno leggermente più grande $r_{at} = 64000$ km. Il costo di questa soluzione è $\Delta v = 8.083914$ (km/s), mentre il tempo impiegato è 40 h 25 min 52 s.

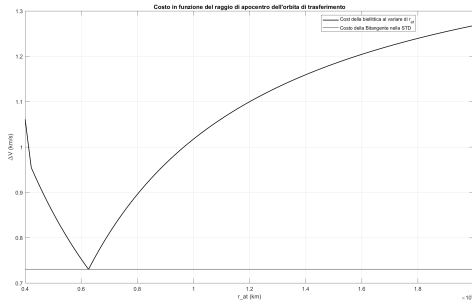


Figura 1.10: Ottimizzazione raggio

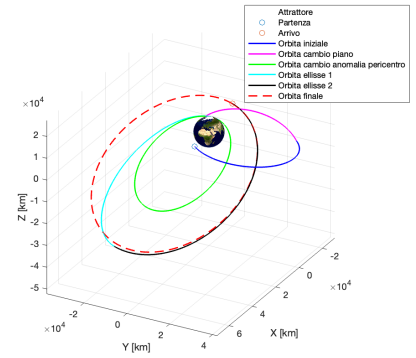


Figura 1.11: Strategia standard

Al fine di minimizzare il costo nel caso biellittico, si può considerare una diversa strategia, ovvero effettuare la manovra di cambio piano nella prima o nella seconda ellisse, in modo tale da allontanarci dall'attrattore e rendere più economica la manovra stessa. Ottimizzando r_{at} come nel caso precedente, otteniamo un raggio ottimale a 42171 km che coincide con il raggio di apocentro iniziale, risultando ancora una volta nella manovra bitangente; abbiamo perciò scelto un valore vicino, ma più grande tenendo presente l'obiettivo di allontanarci, $r_{at} = 43500$ km. Operando in questo modo si attua un impulso al pericentro dell'orbita iniziale per portarci sulla prima ellisse. All'apocentro di questa, che coincide con il punto più lontano dall'attrattore, si può decidere se continuare sulla prima ellisse ed effettuare il cambio piano oppure attuare un secondo impulso per portarci sulla seconda ellisse. Per le nostre orbite risulta migliore la prima opzione in termini di costo, $\Delta v = 4.711021$ (km/s). Nondimeno la seconda opzione risulta più conveniente con r_{at} maggiori come mostrato in figura 1.13

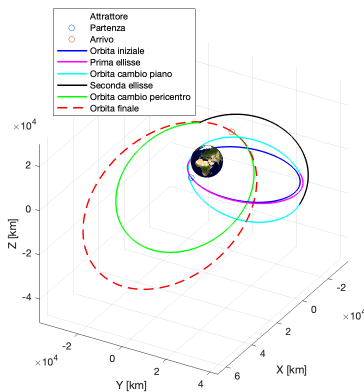


Figura 1.12: Strategia caso 1

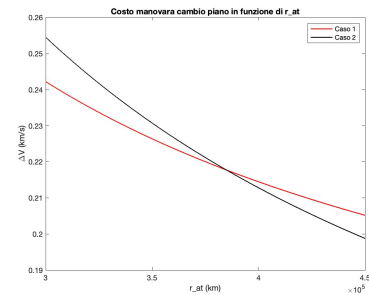


Figura 1.13: Confronto costi manovra cambio piano

2 | Scenario 2 - Trasferimento interplanetario diretto verso un asteroide

Si richiama ora l'approssimazione delle *Patched Conics* già introdotta. In questo scenario infatti si suppone che la posizione del satellite sia sovrapponibile con quella della terra e si tratta il trasferimento interplanetario come un problema dei 2 corpi Sole-Satellite, trascurando ogni ulteriore influenza di altri corpi celesti. Procediamo quindi col design della traiettoria che lega l'orbita terrestre e dell'asteroide *163899 (2003 SD220)*.

2.1. Caratterizzazione delle Orbite

L'approssimazione presentata, ci porta quindi ad andare a considerare le 2 orbite eliocentriche della Terra e dell'asteroide *163899 (2003 SD220)*, tramite i loro 5 parametri orbitali a , e , i , Ω , ω , l'angolo θ invece è uno dei gradi di libertà della fase di progetto dell'orbita di trasferimento.

Mireremo ad un trasferimento diretto, cercando di minimizzare costi e tempo.

2.1.1. Orbita Iniziale

La seguente tabella presenta i dati dell'orbita eliocentrica terrestre:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	1.4946×10^8	km
e - eccentricità	0.0160	-
i - inclinazione piano orbitale	9.1920×10^{-5}	rad
Ω - RAAN	2.7847	rad
ω - anomalia del pericentro	5.2640	rad

Riportiamo il periodo orbitale T e l'energia specifica gravitazionale E , tenendo presente che il valore del parametro gravitazionale del Sole μ_S vale circa $1.3271 \times 10^{11} \text{ km}^3/\text{s}^2$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu_S}} = 3.1515 \times 10^7 \simeq 1 \text{ anno}, \quad E = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^2} = -443.9731 \times 10^6 \frac{J}{kg}$$

Le coordinate cartesiane di interesse al pericentro

- $\mathbf{r}_p = [-0.2850, 1.4428, -0.0001] \times 10^8 \text{ km}$; $\|\mathbf{r}_p\| = 1.4707 \times 10^8 \text{ km}$
- $\mathbf{v}_p = [-29.7051, -5.8676, 0.0015] \text{ km/s}$; $\|\mathbf{v}_p\| = 30.2791 \text{ km/s}$

e all'apocentro:

- $\mathbf{r}_a = [0.2943, -1.4987, 0.0001] \times 10^8 \text{ km}$; $\|\mathbf{r}_a\| = 1.5185 \times 10^8 \text{ km}$

- $\mathbf{v}_a = [28.7695, 5.8628, -0.0014]$ km/s; $\|\mathbf{v}_a\| = 29.3524$ km/s

Notiamo che r_a e r_p sono molto simili, infatti l'orbita terrestre ha un'eccentricità molto bassa ed è quasi un'orbita circolare.

2.1.2. Orbita Finale

L'asteroide *163899 (2003 SD220)* è di piccole dimensioni, con un diametro $D = 0.79$ km e una massa $M = 5.1827 \times 10^{11}$ kg, i suoi parametri orbitali, nel sistema di riferimento eliocentrico, sono:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	1.2385×10^8	km
e - eccentricità	0.2095	-
i - inclinazione piano orbitale	0.1492	rad
Ω - RAAN	4.7757	rad
ω - anomalia del pericentro	5.7078	rad

Riportando di nuovo il periodo orbitale T e l'energia specifica gravitazionale E :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu_S}} = 2.3773 \times 10^7 \text{ s} \simeq 275 \text{ giorni}, \quad E = \frac{\|\mathbf{v}\|^2}{2} - \frac{\mu}{\|\mathbf{r}\|^2} = -535.7604 \times 10^6 \frac{J}{kg}$$

Le coordinate cartesiane di interesse al pericentro

- $\mathbf{r}_p = [-4.7383, -8.5312, -0.7922] \times 10^7$ km; $\|\mathbf{r}_p\| = 9.7908 \times 10^7$ km
- $\mathbf{v}_p = [34.9194, -19.8636, 5.0503]$ km/s; $\|\mathbf{v}_p\| = 40.4899$ km/s

e all'apocentro:

- $\mathbf{r}_a = [0.7250, 1.3053, 0.1212] \times 10^8$ km; $\|\mathbf{r}_a\| = 1.4980 \times 10^8$ km
- $\mathbf{v}_a = [-22.8231, 12.9827, 3.3008]$ km/s; $\|\mathbf{v}_a\| = 26.4639$ km/s

Notiamo che l'asteroide presenta un'orbita più eccentrica e leggermente più piccola. Di seguito le rappresentazioni grafiche delle 2 orbite: in blu la terrestre e in rosso l'asteroide.

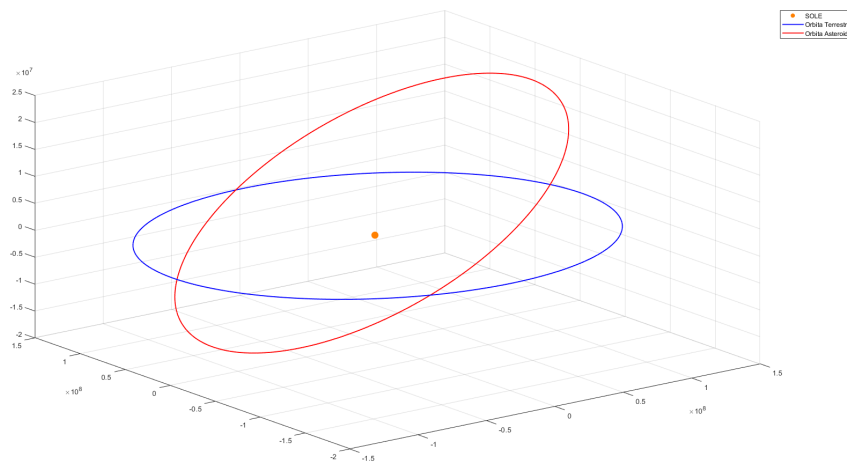


Figura 2.1: Le 2 orbite a confronto

2.2. Ricerca dell'orbita di Trasferimento

Un trasferimento diretto consiste nel trovare un'unica orbita ellittica eliocentrica, che interseca le 2 orbite in questione. Non avendo vincoli su punto di partenza, d'arrivo e orientazione, vi sono infinite orbite che collegano le 2 ellissi, per la precisione abbiamo 3 gradi di libertà: ω , θ_1 , θ_2 ; l'anomalia del pericentro ω è riferita all'orbita di trasferimento, le anomalie vere sono le posizioni in cui vengono effettuati gli impulsi riferiti rispettivamente all'orbita di partenza e d'arrivo, $\theta_{1,t}$ e $\theta_{2,t}$ saranno invece riferiti all'orbita di trasferimento.

La combinazione di queste 3 variabili, determina i 2 valori di interesse pratico: la durata della manovra Δt e il costo Δv , per assicurarsi la miglior combinazione possibile, si è deciso di evitare di imporre vincoli a priori, per esempio fissando una o più delle variabili, ma di andare ad ottimizzare in tutto il dominio la funzione obiettivo considerata.

L'approccio analitico è stato escluso perché ritenuto eccessivamente complicato, trovare l'espressione analitica delle 2 funzioni obiettivo in funzione dei 3 parametri, significa avere funzioni vettoriali dipendenti da valori riferiti a sistemi di riferimento differenti, entrano in gioco quindi matrici di rotazione e funzioni goniometriche, rendendo quindi anche l'espressione analitica non lineare e comunque necessari metodi numerici.

Le 3 funzioni dipendono da \mathbf{x} così definito:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

e sono:

- $f_1(\mathbf{x}) = \Delta v(\mathbf{x})$
- $f_2(\mathbf{x}) = \Delta t(\mathbf{x})$
- $f_3(\mathbf{x}) = \alpha \Delta v + \beta \Delta t$

Queste 3 funzioni sono state implementate in MATLAB in *O_tfuns.m*, *function handle* che ha come input le orbite da unire e \mathbf{x} .

Tramite $[\theta_1, \theta_2, \omega]$ la conica che lega i 2 punti, se esiste, è interamente vincolata. La funzione trova i 6 parametri orbitali e con loro i costi Δv e Δt del trasferimento. Per limitare le coniche trovate a orbite chiuse ed esistenti, prima di dare i risultati si fa un controllo logico, imponendo che $0 \leq e_t < 1$. *O_tfuns()* è quindi la funzione da ottimizzare, per fare ciò a livello numerico si sono impiegati 3 metodi diversi:

- Grid Search (tappeto.m)
- Genetic Algorithm (ga.m)
- *fmincon.m*

Il primo è stato implementato da noi, dividendo il dominio sopra definito in una griglia di punti discreti, vengono testate tutte le combinazioni possibili e presa quella che minimizza la funzione obiettivo. Il codice è risultato poco efficiente, ma è comunque riuscito a trovare gli stessi risultati di altri metodi, già implementati in MATLAB.

Il secondo e il terzo, per l'appunto, sono funzioni nativamente implementate in MATLAB per individuare il minimo di una funzione. Per la precisione *ga()* cerca stocasticamente nel dominio la strada per il minimo di una funzione, infatti ogni volta che viene lanciata può dare risultati diversi. *fmincon()* invece trova numericamente la direzione di discesa a partire da un punto dato, finché non arriva in un

minimo. Questi ultimi due metodi risultano molto più efficienti.

2.2.1. Funzione Obiettivo $f_1 = \Delta v$

Essendo la missione riferita ad un satellite e non ad un equipaggio umano, abbiamo reputato più significativa l'ottimizzazione dei costi rispetto a quella dei tempi. Come prima cosa abbiamo, quindi, trovato il trasferimento che minimizzasse i costi in termini di Δv . Con tutte e 3 i metodi, si trova:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	1.4812×10^8	km
e - eccentricità	0.0283	-
i - inclinazione piano orbitale	0.0440	rad
Ω - RAAN	5.3828	rad
ω - anomalia del pericentro	3.7292	rad

Il punto di minimo è in $\mathbf{x}_{\min \Delta v}$:

$$\mathbf{x}_{\min \Delta v} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6181 \\ 3.4981 \\ 3.7292 \end{bmatrix} \text{ rad} \quad (2.2)$$

Come ci si aspetterebbe, il trasferimento ha costo minimo a circa $\theta = \pi$ dove le velocità più basse diminuiscono i costi di un cambio piano. Per completezza riportiamo anche le anomalie vere riferite all'orbita di trasferimento:

$$\begin{cases} \theta_{1,t} = 2.5551 \text{ rad} \\ \theta_{2,t} = 4.8715 \text{ rad} \end{cases} \quad (2.3)$$

Con questo trasferimento risultano

$$\begin{cases} \Delta v = 1.4700 + 4.8490 = 6.3190 \text{ km/s} \\ \Delta t = 3304 : 29 : 10 \simeq 138 \text{ giorni} \end{cases} \quad (2.4)$$

Notiamo che, essendo le 2 orbite da legare orientate diversamente, queste presentano gli apocentri molto distanti e quindi un trasferimento piuttosto lungo.

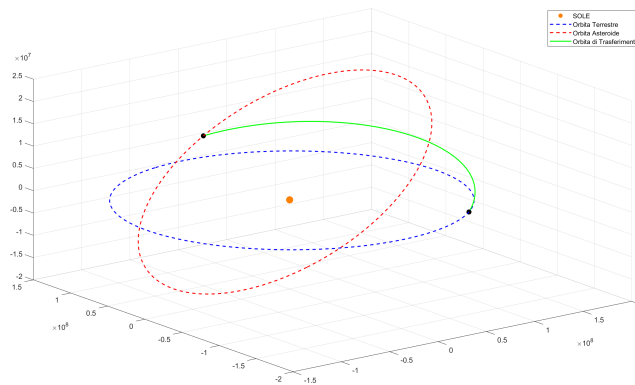


Figura 2.2: Trasferimento di minimo Δv

2.2.2. Funzione Obiettivo $f_2 = \Delta t$

Andando a cercare l'ottimo di f_2 , impiegando tutti e 3 i metodi, si ricava un trasferimento che segue questa orbita:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	1.5187×10^{13}	km
e - eccentricità	0.9999	-
i - inclinazione piano orbitale	1.5976	rad
Ω - RAAN	1.5562	rad
ω - anomalia del pericentro	1.7001	rad

Da notare l'eccentricità, praticamente unitaria. Questo accade sia perché le orbite aperte tendono ad essere più veloci, sia perché le orbite presentano punti così vicini che non riescono ad essere uniti da ellissi e quindi il trasferimento orbitale più rapido in assoluto sarebbe un'orbita aperta, orbite escluse dalla nostra ricerca.

L'ottimo è stato trovato in

$$\mathbf{x}_{\min \Delta t} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6.0735 \\ 3.6379 \\ 1.7001 \end{bmatrix} \text{ rad} \quad (2.5)$$

Riportando le anomalie vere, rispetto all'orbita di trasferimento:

$$\begin{cases} \theta_{1,t} = 4.5830 \text{ rad} \\ \theta_{2,t} = 4.5948 \text{ rad} \end{cases} \quad (2.6)$$

I costi risultanti dalla manovra sono:

$$\begin{cases} \Delta v = 52.53 + 51.41 = 103.94 \text{ km/s} \\ \Delta t = 17 : 02 : 41 \end{cases} \quad (2.7)$$

Da notare che θ_1 e θ_2 non hanno particolare significato teorico, ma sono semplicemente i punti in cui le 2 orbite sono più vicine. I costi in termini di Δv aumentano di quasi 20 volte, ma si riuscirebbe ad avere un trasferimento di solo 17 ore. Visto che questo risultato è evidentemente non accettabile, soprattutto in una missione senza umani, lo scartiamo per l'eccessivo consumo di propellente.

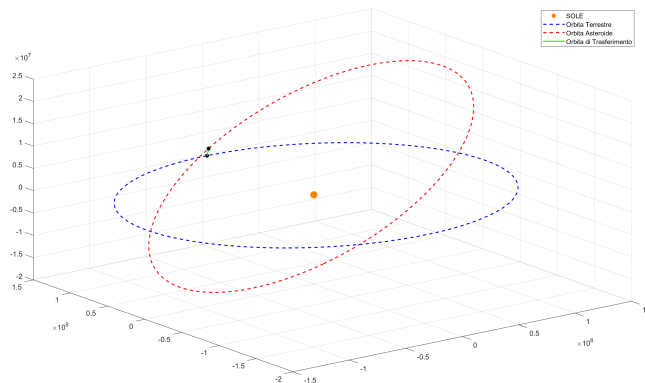


Figura 2.3: Trasferimento di minimo Δt

2.2.3. Funzione Obiettivo $f_3 = \alpha\Delta v + \beta\Delta t$

Le altre orbite possibili, caratterizzate da valori intermedi di Δt e Δv , potrebbero adattarsi meglio a eventuali vincoli pratici di una missione reale, ad esempio la presenza di equipaggio a bordo o la necessità di sorvolare un punto specifico in un istante prefissato. Per individuarle è possibile regolare opportunamente i parametri α e β e ottimizzare f_3 . Nel caso in analisi, trattandosi di una missione senza equipaggio e in assenza di ulteriori vincoli, è stata selezionata l'orbita che minimizza il Δv di fig:2.2.

2.2.4. Orbita del Trasferimento Diretto

Richiamando quindi l'orbita trovata ottimizzando f_1 , ricapitoliamo i risultati.

Le coordinate cartesiane dei punti di manovra sono:

r - Impulso I	km	r - Impulso II	km/s
r_x	0.9431×10^8	r_x	0.2247×10^8
r_y	$- 1.1867 \times 10^8$	r_y	1.4554×10^8
r_z	0.0001×10^8	r_z	0.0476×10^8
$ \mathbf{r} $	1.5157×10^8	$ \mathbf{r} $	1.4734×10^8

I costi trovati nella fase di ottimizzazione, hanno consentito di individuare qualitativamente i punti in cui manovrare costa meno, ma non sono effettivamente i costi reali, questo perché tramite l'approssimazione delle patched conics, abbiamo confuso satellite e corpi celesti. Il fatto che il satellite è già in orbita intorno alla Terra, che orbita attorno al Sole, implica che i reali costi siano in realtà minori, i valori e i motivi saranno approfonditi nel prossimo capitolo.

3 | Scenario 3 - Fasi di fuga e di arrivo

3.1. Traiettoria di fuga

Per il progetto della traiettoria di fuga si è ripresa la manovra svolta nello Scenario 2, entrando nel dettaglio del trasferimento tra l'orbita di partenza (ovvero l'orbita terminale dello Scenario 1) e l'orbita di trasferimento (trovata nello Scenario 2). Tale manovra viene attuata sfruttando un ramo di iperbole.

Orbita di partenza:

Come orbita di partenza si considera l'orbita di parcheggio trovata nello Scenario 1:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	39182	km
e - eccentricità	0.5974	-
i - inclinazione piano orbitale	0.5903	rad
Ω - RAAN	1.7495	rad
ω - anomalia del pericentro	1.1773	rad

La manovra avviene nel pericentro dell'orbita di parcheggio, ovvero nel punto caratterizzato da anomalia vera nulla.

Orbita di arrivo:

Come orbita di arrivo si è considerata la traiettoria calcolata nello Scenario 2 che minimizza il costo in termini di Δv .

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	1.4812×10^8	km
e - eccentricità	0.0283	-
i - inclinazione piano orbitale	0.0440	rad
Ω - RAAN	5.3828	rad
ω - anomalia del pericentro	3.7292	rad

Adottando il sistema di riferimento eliocentrico, la manovra si realizza nel punto calcolato nello Scenario 2, ovvero in coordinate cartesiane:

Posizione	km
r_x	0.9431×10^8
r_y	-1.1867×10^8
r_z	0.0001×10^8
$ \mathbf{r} $	1.5158×10^8

3.1.1. Progetto iperbole di fuga

Poichè si è in questa prima fase considerata l'iperbole di fuga sullo stesso piano dell'orbita di parcheggio, occorre progettare solo la forma dell'iperbole, considerando il piano di essa uguale a quello dell'orbita di parcheggio, ovvero:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
i - inclinazione piano orbitale	0.5903	rad
Ω - RAAN	1.7495	rad
ω - anomalia del pericentro	1.1773	rad

La forma è stata calcolata a partire dalla velocità asintotica. Occorre infatti porre la velocità asintotica dell'orbita iperbolica uguale a quella dell'orbita di trasferimento dello Scenario 2 valutata subito dopo il primo impulso. Modificando il sistema di riferimento si ottiene:

$$\mathbf{v}_{\infty} = \mathbf{v}_{trans} - \mathbf{v}_{earth} \quad (3.1)$$

Dove v_{trans} indica la velocità dell'orbita di trasferimento subito dopo il primo impulso, mentre v_{earth} la velocità della Terra intorno al Sole valutata nello stesso punto. Facendo ciò si ottiene:

$\mathbf{v}_{\infty} = [0.3011; -0.6488; 1.2884]$ km/s, il cui modulo risulta $||v_{\infty}|| = 1.4737$ km/s. Da questi dati è facile ricavare il semiasse maggiore come:

$$a = -\frac{\mu}{v_{\infty}^2} \quad (3.2)$$

Dove, in questo primo caso, μ si riferisce alla Terra.

Per quanto riguarda invece l'eccentricità, possiamo calcolarla passando dall'equazione della conica valutata nel pericentro, dove il raggio è imposto uguale al raggio di pericentro dell'orbita di parcheggio $r_p^{parc} = r_p^{hyper} = 1.5774 \times 10^4$ km, ovvero:

$$e = 1 - \frac{r_p^{parc}}{a} \quad (3.3)$$

Valutando le equazioni sopra elencate si ottiene l'iperbole di forma:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	-1.8355×10^5	km
e - eccentricità	1.0859	-

Abbiamo poi calcolato il valore del parametro di impatto e dell'angolo di deflessione:

$\Delta = 1.8355 \times 10^5$ km e $\delta = 0.8010$ rad.

Si osserva che l'iperbole così ottenuta ha un'eccentricità solo leggermente maggiore di 1, tende quindi ad essere quasi parabolica, il che è positivo in quanto, essendo un'orbita meno energetica, il passaggio da un'orbita ellittica a quest'ultima avrà un costo ridotto. Si può infatti osservare che gran parte dell'energia necessaria a immettersi nell'orbita di trasferimento è già data dalla velocità dell'orbita terrestre intorno al sole.

3.1.2. Costi Δv e Δt

Per quanto riguarda il calcolo dei costi in termini di velocità, poichè la manovra avviene nel pericentro dell'orbita di parcheggio, occorre calcolare il Δv in quel punto tra l'orbita iperbolica e quella di parcheggio:

$$\Delta v = v_p^{hyper} - v_p^{parc} \quad (3.4)$$

In questo caso essendo le due velocità allineate sullo stesso piano e sulla stessa direzione, non occorre usare operazioni vettoriali. Quantitativamente si ha $v_p^{hyper} = 7.2601 \text{ km/s}$ e $v_p^{parc} = 6.3533 \text{ km/s}$ e quindi un costo di $\Delta v = 0.9068 \text{ km/s}$. Per quanto riguarda i costi in termini di tempo, invece, è stato necessario studiare le leggi orarie di orbite iperboliche. Abbiamo quindi creato la funzione $\text{TOF_open}()$ la quale modifica la legge oraria ellittica sfruttando le funzioni iperboliche. Per scrivere questa funzione è stato usato il testo *Fondamenti di Meccanica del Volo Spaziale* [1]. Una volta nota la legge oraria abbiamo calcolato il tempo necessario a passare dal pericentro dell'iperbole fino a una distanza dalla Terra pari al raggio della sfera di influenza della Terra rispetto al Sole. A questo punto si è considerata conclusa la manovra e calcolando i tempi abbiamo ottenuto un costo di $\Delta t = 4.4780 \times 10^5 \text{ s}$.

Il tempo impiegato ad uscire dalla sfera di influenza terrestre è quindi 124 ore 23 minuti e 16 secondi, che seppur elevato va considerato in relazione al fatto che il raggio della sfera di influenza terrestre rispetto al Sole calcolato come $r_{SOI} = d_{terra-sol} \left(\frac{m_{terra}}{m_{sol}} \right)^{\frac{2}{5}}$ risulta pari a $r_{SOI} = 9.3688 \times 10^5 \text{ km}$. Si noti che la distanza Terra-Sole è calcolata valutando il raggio dell'orbita terrestre nel punto in cui avviene la manovra.

3.1.3. Manovra avanzata

Si analizzerà ora il caso non semplificato di fuga, in cui quindi non si assumerà il piano dell'iperbole uguale a quello dell'orbita di parcheggio. Per prima cosa occorre riportare la velocità asintotica \mathbf{v}_∞ , calcolata in precedenza, nel sistema di riferimento terrestre (ECI). Per fare ciò si attua una rotazione dell'angolo compreso tra l'eclittica e il piano equatoriale $\epsilon = 23.45 \text{ deg}$. Otteniamo:

$$\mathbf{T}_{\text{ECI} \rightarrow \text{eclip}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\epsilon) & \sin(\epsilon) \\ 0 & -\sin(\epsilon) & \cos(\epsilon) \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_\infty^{\text{ECI}} = \mathbf{T}_{\text{ECI} \rightarrow \text{eclip}}^T \mathbf{v}_\infty^{\text{eclip}} \quad (3.5)$$

Una volta trovata la velocità asintotica in forma vettoriale, normalizzandola si ottiene la direzione dell'asintoto $\mathbf{r}_\infty = \frac{\mathbf{v}_\infty}{\|\mathbf{v}_\infty\|}$. A questo punto è necessario definire il raggio di intersezione tra l'iperbole e l'orbita di parcheggio. Nel nostro caso, ottimizzando il costo, si è ricavato un raggio ottimo associato a un'anomalia vera dell'orbita di parcheggio pari a $\theta = 2.5387 \text{ rad}$. Per ottenere questo valore si è usata una *grid-search* rispetto alle anomalie vere cercando il costo minimo. Noto quindi il raggio di intersezione, risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} r_H = \frac{a_H(1-e_H^2)}{1+e_H \cos(\theta_H)} \\ \theta_\infty = -\frac{1}{e_H} \\ \theta_\infty = \alpha + \theta_H \end{cases} \quad (3.6)$$

Si ricavano e_H , ovvero l'eccentricità dell'iperbole, θ_H ovvero l'anomalia vera associata al raggio di intersezione tra l'orbita di parcheggio e l'iperbole nel sistema di riferimento dell'iperbole e θ_∞ l'anomalia vera asintotica.

A questo punto si cerca il piano su cui giace l'iperbole individuato dai vettori \mathbf{r}_H e \mathbf{r}_∞ tramite la direzione del vettore momento della quantità di moto $\mathbf{h}_H = \mathbf{r}_H \times \mathbf{r}_\infty$. Noto questo è facile calcolare l'angolo come $i = \arccos(\frac{\mathbf{h} \cdot \mathbf{k}}{h})$. Per quanto riguarda invece gli angoli Ω e ω occorre calcolare prima la direzione della linea dei nodi, ovvero $\mathbf{N} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{h}}{\|\mathbf{k} \times \mathbf{h}\|}$ e da cui si calcola:

$$\Omega = \begin{cases} \arccos(\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) & \mathbf{N} \cdot \mathbf{j} \geq 0 \\ 2\pi - \arccos(\mathbf{N} \cdot \mathbf{i}) & \mathbf{N} \cdot \mathbf{j} < 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Per quanto riguarda l'anomalia del pericentro invece, la si trova sfruttando il vettore eccentricità, ricavato risolvendo il sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_H \cdot \mathbf{e}_H = \cos(\theta_H) \\ \mathbf{r}_\infty \cdot \mathbf{e}_H = \cos(\theta_\infty) \\ \|\mathbf{e}_H\| = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

Una volta calcolato il piano su cui giace l'iperbole, usando l'Eq. (3.2) si può infine calcolare il semiasse maggiore. L'iperbole diventa quindi:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	-1.8355×10^5	km
e - eccentricità	1.1208	-
i - inclinazione piano orbitale	1.9150	rad
Ω - RAAN	5.2704	rad
ω - anomalia del pericentro	4.3390	rad

Abbiamo poi calcolato i valori del parametro di impatto e dell'angolo di deflessione:

$\Delta = 1.8355 \times 10^5 \text{ km}$ e $\delta = 0.9372 \text{ rad}$.

Nota l'iperbole si sono quindi calcolati i costi in termini di velocità e di tempo come $\Delta v = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{v}_P\|$ e usando la stessa funzione del caso precedente $\Delta t = TOF_open()$ ottenendo: $\Delta v = 2.5745 \text{ km/s}$ e un tempo di $\Delta t = 4.4017 \times 10^5 \text{ s}$.

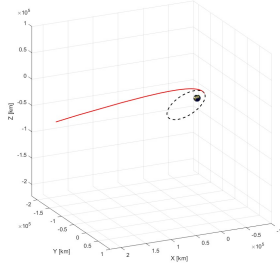


Figura 3.1: iperbole con ipotesi semplificativa

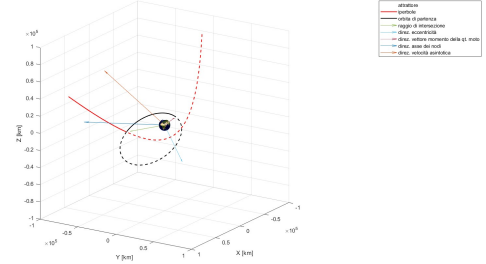


Figura 3.2: iperbole con cambio piano

3.2. Traiettoria d'arrivo

Questo secondo caso non ha un'orbita di arrivo definita, si è quindi scelta un'orbita di arrivo che giace sullo stesso piano di quella di trasferimento. Questa scelta non elimina le semplificazioni riguardanti il piano di giacitura dell'iperbole, adottando lo stesso piano dell'orbita di trasferimento, infatti, non si tiene conto della variazione del sistema di riferimento tra quello centrato nel sole e nell'asteroide. Di conseguenza riportando la velocità asintotica nel sistema di riferimento dell'asteroide essa giacerà su un piano diverso rispetto a quello dell'orbita di trasferimento.

Per quanto riguarda invece l'orbita di partenza si è considerata la stessa del caso precedente, ovvero quella di trasferimento.

Orbita di arrivo:

La scelta dell'orbita di arrivo si è basata sull'ottimizzazione del costo di manovra, ovvero nel minimizzare la differenza tra le velocità al pericentro. Dovendo il satellite rallentare per entrare nell'orbita dell'asteroide, si ottiene un costo minimo se la velocità di pericentro dell'orbita di arrivo è elevata. A questo fine, essendo la velocità in pericentro di un'orbita ellittica data dalla formula $v_p = \sqrt{\frac{\mu(1+e)}{a(1-e)}}$, a

parità di semiasse maggiore, si ha una velocità maggiore con eccentricità elevata.

Essendo poi l'eccentricità data da $e = \frac{r_a - r_p}{2a}$ si ha una eccentricità elevata nel momento in cui il raggio di apocentro è molto maggiore di quello di pericentro. Per massimizzare questa differenza si è preso come raggio di pericentro il minimo possibile, ovvero 1.2 volte il raggio dell'asteroide stesso: $r_p^{ast} = 1.2r_{ast} = 0.4740 \text{ km}$. Per quello di apocentro quello massimo, ovvero 0.9 volte il raggio della sfera di influenza dell'asteroide rispetto al Sole.

Per il calcolo del raggio della sfera di influenza si è usata $r_{SOI} = d_{ast-sole} \left(\frac{m_{ast}}{m_{sole}} \right)^{\frac{2}{5}}$ dove anche in questo caso si è considerato come distanza asteroide-Sole il raggio dell'orbita dell'asteroide, valutato nel punto in cui avviene la manovra. Così facendo risulta un raggio della sfera di influenza pari a $r_{SOI} = 5.4288 \text{ km}$. Da notare che risulta di 5 ordini di grandezza inferiore rispetto a quello della Terra.

A questo punto è facile calcolare il semiasse maggiore come $a = \frac{r_p + r_a}{2}$ e l'eccentricità con la formula riportata sopra, ottenendo:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	2.6799	km
e - eccentricità	0.8231	-
i - inclinazione piano orbitale	0.0440	rad
Ω - RAAN	5.3828	rad
ω - anomalia del pericentro	3.7292	rad

anche in questo caso la manovra avverrà nel punto ottimo calcolato nello scenario 2 ovvero:

Posizione	km
r_x	0.2247×10^8
r_y	1.4554×10^8
r_z	0.0476×10^6
$ \mathbf{r} $	1.4734×10^8

3.2.1. Progetto iperbole

Anche in questo caso, avendo preso come piano dell'orbita iperbolica lo stesso dell'orbita sull'asteroide, non è necessario modificarne il piano e basterà progettare la forma.

Come nel caso precedente, il progetto parte dal presupposto che la velocità asintotica del satellite coincida con quella che esso ha nel momento in cui arriva in prossimità dell'asteroide. Perciò, modificando adeguatamente il sistema di riferimento, risulterà:

$$\mathbf{v}_{\infty} = \mathbf{v}_{ast} - \mathbf{v}_{trans} \quad (3.9)$$

Dove \mathbf{v}_{ast} rappresenta la velocità dell'asteroide intorno al Sole e \mathbf{v}_{trans} quella del satellite nell'orbita di trasferimento, entrambe valutate nel punto di arrivo.

Si ottiene quindi $\mathbf{v}_{\infty} = [-3.1742, 2.0219, 3.0580] \text{ km/s}$, avente modulo $||\mathbf{v}_{\infty}|| = 4.8492 \text{ km/s}$. Come nel caso precedente si è quindi calcolato il semiasse maggiore usando sempre l'Eq.(3.2) e ottenendo quindi $a = -1.4701 \text{ km}$. In questo secondo caso bisogna notare che μ fa riferimento all'asteroide e assume valore $\mu_A = 34.5686 \text{ km}^3/\text{s}^2$. Analogamente usando l'Eq.(3.3) e imponendo come raggio di pericentro quello scelto per l'orbita intorno all'asteroide, si ottiene $e = 1.3224$.

L'iperbole ottenuta risulta quindi:

Parametri kepleriani	Valori numerici	Unità di misura
a - semiasse maggiore	-1.4701	km
e - eccentricità	1.3224	-
i - inclinazione piano orbitale	0.0440	rad
Ω - RAAN	5.3828	rad
ω - anomalia del pericentro	3.7292	rad

Abbiamo poi calcolato i valori di parametro di impatto e angolo di deflessione: $\Delta = 1.4700 \text{ km}$ e $\delta = 1.4266 \text{ rad}$.

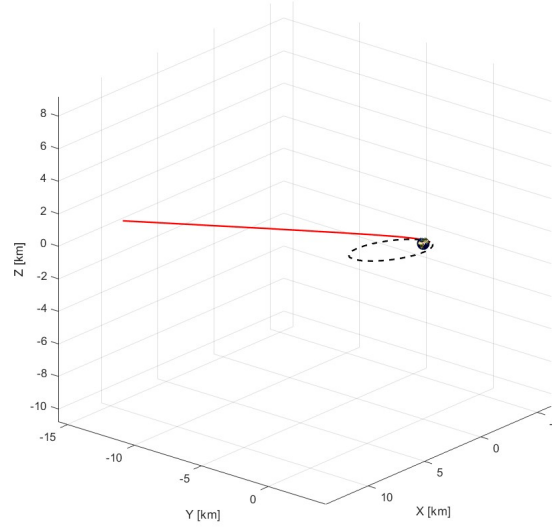


Figura 3.3: iperbole di arrivo

3.2.2. Costi Δv e Δt

Anche in questo caso per il calcolo del costo in termini di velocità è bastato calcolare la differenza tra le velocità di pericentro dell'orbita iperbolica $v_p^{hyper} = 13.0144 \text{ km/s}$ e di quella ellittica $v_p^{ast} = 11.5308 \text{ km/s}$:

$$\Delta v = v_p^{ast} - v_p^{hyper} \quad (3.10)$$

Essendo entrambe sullo stesso piano e sulla stessa direzione, non è necessario usare la forma vettoriale, basta il calcolo scalare, da cui risulta $\Delta v = 1.4835 \text{ km/s}$. Per quanto riguarda il costo in termini di tempo, come nel caso precedente, si è calcolato il tempo necessario al satellite per passare dal bordo della sua sfera di influenza fino al pericentro dell'orbita. Si è sfruttata la stessa funzione del caso precedente $\square = TOF_open()$ ottenendo così un costo di $\Delta t = 0.7771 \text{ s}$. Può essere interessante osservare quanto questo costo sia inferiore rispetto a quello del caso precedente. Questa differenza è spiegabile dalla differenza del raggio della sfera di influenza dell'asteroide che avendo una massa estremamente ridotta rispetto a quella della Terra, crea una sfera di influenza di raggio poco superiore a 5 km , distanza dello stesso ordine di grandezza della velocità alla quale sta viaggiando il satellite. Ci si può quindi aspettare un tempo necessario a raggiungere il pericentro dell'ordine di alcuni secondi, nel nostro caso addirittura inferiore ad 1 secondo.

4 | Conclusioni

Alla luce delle analisi svolte nei diversi Scenari, la proposta di trasferimento conclusiva del satellite prevede:

l'arrivo nell'orbita di parcheggio tramite la strategia più economica:

- Circolarizzazione
- Cambio di piano
- Cambio di pericentro
- Trasferimento Bitangente

La scelta di questa strategia, come anticipato, ha il vantaggio di semplificare la geometria del problema al fine di contenere i consumi. In questo modo la velocità diventa costante lungo tutta la traiettoria, garantendo maggiore flessibilità nell'esecuzione delle manovre successive. Il costo della manovra di cambio anomalia del pericentro viene addirittura annullato coerentemente con il fatto che perde significato con orbite circolari.

Successivamente, partendo da quest'orbita di parcheggio, si segue l'iperbole di fuga progettata fino ad uscire dalla SOI della Terra.

Una volta nel sistema eliocentrico, il satellite segue la traiettoria che porta all'asteroide designato che minimizza il costo in Δv .

A seguito il satellite entra nella SOI dell'asteroide e tramite una traiettoria iperbolica si immette nell'orbita di parcheggio intorno all'asteroide, progettata al fine di minimizzare i costi ancora una volta in termini di Δv .

L'insieme di tutte queste manovre porta ai seguenti costi, validi in prima approssimazione:

$$\begin{cases} \Delta V = 3.9099 + 2.5745 + 1.4835 = 8.5865 \text{ km/s} \\ \Delta t = 135222 + 18398 + 440172 + 11896150 + 0.7771 = 12489151 \text{ s} \simeq 145 \text{ giorni} \end{cases} \quad (4.1)$$

Come già sottolineato, per tutta la fase di progettazione è stata data totale priorità al costo più rilevante e cioè il Δv , vi erano infinite possibilità per progettare la missione e questa è stata la nostra scelta.

Bisogna anche chiarire che questi costi sono stati calcolati tramite numerose approssimazioni; sono stati presi in considerazione solo problemi dei 2 corpi, trascurando l'influenza gravitazionale di altri corpi celesti.

Il termine più rilevante per i costi di Δv è da attribuire al cambio di forma dell'orbita iniziale, invece per quanto riguarda ai costi di Δt al trasferimento interplanetario, come ci si aspetterebbe.

Si può osservare inoltre una differenza tra i costi calcolati nello scenario 2 e quelli calcolati nel terzo, seppur le manovre abbiano stesso punto di partenza e di arrivo. Questa discrepanza è spiegata dal fatto che nel caso dello scenario due si trascura l'energia che il satellite possiede per la rotazione intorno

alla terra stessa. Nello scenario 3, invece, andando a considerare anche questa energia si ottengono dei costi in generale minori. Nel caso del progetto avanzato, tuttavia si ha una descrizione più accurata in cui, considerando anche la direzione della velocità asintotica, il costo risulta più alto. Occorre infatti modificare il piano e non è detto che la velocità posseduta dal satellite intorno alla terra contribuisca favorevolmente alla manovra.

Riguardo alla manovra di rientro nell'orbita dell'asteroide è importante notare che anche ponendo il piano dell'orbita intorno all'asteroide uguale a quello dell'orbita di trasferimento, non si elimina la semplificazione adottata riguardo al piano. Per eliminare questa semplificazione si sarebbe dovuto comunque ripetere il caso avanzato.

Riguardo la stessa manovra può essere significativo osservare che risultando un tempo di manovra inferiore al secondo, la semplificazione di impulsi istantanei è poco corretta, il satellite dovrebbe, infatti, decelerare di oltre un km/s nell'arco di meno di un secondo. Si avrebbe quindi una decelerazione realisticamente non realizzabile. Per ridurre la poca fattibilità di questo caso, si potrebbe aumentare il tempo di manovra progettando un'orbita di trasferimento che minimizzi il delta velocità tra il satellite e l'asteroide, così facendo il tempo di manovra aumenterebbe e si ridurrebbe la variazione di velocità necessaria alla manovra, riducendo quindi la decelerazione e rendendo la manovra realizzabile.

Bibliografia

- [1] A. A. Q. Giovanni Menegalli. Fondamenti di meccanica del volo spaziale, 2013.

A | Appendix A

Sono mostrate di seguito le tabelle riferite ad orbite in sistema di riferimento Geocentrico.

A.0.1. Scenario 1

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
24853	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	3.4563	0.8781
-	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	-3.4043	3.4563	-
35574	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	-3.4043	5.4324	6.4588
-	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	1.1773	0.8508	-
72890	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.2337
-	34609.0	0.8084	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
143520	34609.0	0.8084	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	0.4967
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	-
143520	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
39 h 52 min 00 s							8.0674

Tabella A.1: Strategia 1

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
36190	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	0	0.9924
-	39182.0	0.5974	0.1047	1.5140	6.2486	0	-
42089	39182.0	0.5974	0.1047	1.5140	6.2486	3.1416	2.4862
-	39182.0	0.5974	0.1047	1.5140	6.2486	0	-
42881	39182.0	0.5974	0.1047	1.5140	6.2486	0.3147	0.8318
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	-0.2628	0.3147	-
44000	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	-0.2628	0.7200	3.1336
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	5.5632	-
45911	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
12 h 45 min 10 s							7.443948

Tabella A.2: Strategia 2

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
17224	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	3.1416	1.4719
-	42171.0	0	0.1047	1.5140	6.2486	3.1416	-
21541	42171.0	0	0.1047	1.5140	6.2486	0.3147	1.4887
-	42171.0	0	0.5903	1.7495	-0.2628	0.3147	-
27101	42171.0	0	0.5903	1.7495	-0.2628	0.7200	0
-	42171.0	0	0.5903	1.7495	1.1773	5.5632	-
36977	42171.0	0	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.2863
-	52380.0	0.1949	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
96629	52380.0	0.1949	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	0.6631
-	39182	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	-
135220	39182	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
37 h 33 min 42 s							3.909958

Tabella A.3: Strategia 3

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
17224	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	3.1416	0.6660
-	28972.0	0.4555	0.1047	1.5140	3.1070	3.1416	-
22919	28972.0	0.4555	0.1047	1.5140	3.1070	3.4563	1.1436
-	28972.0	0.4555	0.5903	1.7495	-3.4043	3.4563	-
39372	28972.0	0.4555	0.5903	1.7495	-3.4043	5.4324	2.8538
-	28972.0	0.4555	0.5903	1.7495	1.1773	0.8508	-
86059	28972.0	0.4555	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.2887
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
23 h 54 min 18 s							4.952110

Tabella A.4: Strategia 4

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
24853	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	3.4563	0.8781
-	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	-3.4043	3.4563	-
35574	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	-3.4043	5.4324	6.4588
-	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	1.1773	0.8508	-
72890	24400.0	0.728300	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.2447
-	35315.0	0.8123	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
105910	35315.0	0.8123	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	0.4881
-	39887	0.6045	0.5903	1.7495	1.1773	3.1416	-
145550	39887	0.6045	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.0141
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
40 h 25 min 52 s							8.083914

Tabella A.5: Strategia 5

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	24400.0	0.7283	0.104700	1.514000	3.107000	1.665000	-
36190	24400.0	0.728300	0.104700	1.514000	3.107000	6.2832	0.0212
-	25065	0.7355	0.1047	1.5140	3.1070	0	-
64013	25065	0.7355	0.1047	1.5140	3.1070	3.4563	0.8568
-	25065	0.7355	0.5903	1.7495	-3.4043	3.4563	-
95427	25065	0.7355	0.5903	1.7495	-3.4043	3.1416	0.6516
-	29637	0.4678	0.5903	1.7495	-3.4043	3.1416	-
118430	29637	0.4678	0.5903	1.7495	-3.4043	5.4324	2.9181
-	29637	0.4678	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
166820	29637	0.4678	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	0.2633
-	39182.0	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	6.2832	-
46 h 20 min 22 s							4.711021

Tabella A.6: Strategia 6

A.0.2. Scenario 2

Sono mostrate di seguito le tabelle riferite ad orbite in sistema di riferimento eliocentrico.

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	149460000	0.0160	9.1920e-05	2.7847	5.2643	3.6181	-
0	149460000	0.0160	9.1920e-05	2.7847	5.2643	3.6181	1.4700
-	148120000	0.0283	0.0440	5.3828	3.7292	2.5551	-
11896150	148120000	0.0283	0.0440	5.3828	3.7292	4.8715	4.8490
-	1.2385e+08	0.2095	0.1492	4.7757	5.7078	3.4981	-
11896150							6.3190

Tabella A.7: Scenario 2 - Trasferimento di **min Δv**

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	149460000	0.0160	9.1920e-05	2.7847	5.2643	6.0735	-
0	149460000	0.0160	9.1920e-05	2.7847	5.2643	6.0735	52.5308
-	1.5187e+13	0.9999	1.5976	1.5562	1.7001	4.5830	-
61362	1.5187e+13	0.9999	1.5976	1.5562	1.7001	4.5948	51.4112
-	1.2385e+08	0.2095	0.1492	4.7757	5.7078	3.6379	-
61362							103.9420

Tabella A.8: Scenario 2 - Trasferimento di **min Δt**

A.0.3. Scenario 3

Sono mostrate di seguito le tabelle riferite ad orbite in sistema di riferimento ECI, terrestre.

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	39182	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
0	39181	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
-	-183546	1.0859	0.5903	1.7495	1.1773	0	0.9068
4.4780×10^5	-183546	1.0859	0.5903	1.7495	1.1773	2.6651	-
4.4780×10^5							0.9068

Tabella A.9: Scenario 3 - iperbole di fuga con ipotesi semplificativa

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	39181	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	0	-
1.8398×10^4	39181	0.5974	0.5903	1.7495	1.1773	2.5386	2.5745
-	-183546	1.1208	1.9150	5.2704	4.3390	1.6172	-
4.5857×10^5	-183546	1.1208	1.9150	5.2704	4.3390	2.6730	-
4.5857×10^5							2.5745

Tabella A.10: Scenario 3 - iperbole di fuga senza ipotesi semplificativa

t [s]	a [km]	e [-]	i [rad]	Ω [rad]	ω [rad]	θ [rad]	ΔV [km/s]
0	-1.4701	1.3224	0.0440	5.3829	3.7292	2.4283	-
0.7771	-1.4701	1.3224	0.0440	5.3829	3.7292	0	1.4835
-	-183815	1.3004	1.1990	2.7861	4.3700	0.6083	-
-	2.6799	0.8231	0.0440	5.3829	3.7292	0	-
0.7771							1.4835

Tabella A.11: Scenario 3 - iperbole di arrivo