1 Математический анализ

1.1 Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение $\cos x = x$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Как его найти с точностью 0.001?

1.2 Выведите формулу Тейлора-Лагранжа для функций одного переменного. Вычислите число e с точностью 0.01.

1.3 Определите понятия непрерывной и дифференцируемой функции одного переменного. Докажите теорему о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.

1.4 Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx\,, \qquad \int_1^2 \frac{x\,dx}{x^4+1}\,.$$

Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x\,\ln^2 x\,dx$$

1.5 Дайте определения сходящегося числового ряда и несобственного интеграла на $[1, +\infty]$. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях $\alpha > 0$ интегралы Дирихле и ряды Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,.$$

1.6 Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Для функций двух и трех переменных сформулируйте достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции $z = 2x^2y + y^3 - 3y$ и укажите, к какому типу они относятся.

1.7 Разложите функцию $\operatorname{sgn} x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Записав равенство Парсеваля для этой функции получите формулу

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}\,.$$

1.8 Дайте определение криволинейного интеграла векторного поля в $\mathbb{R}^2$ и объясните его физический смысл. Что такое потенциальное векторное поле? Установите потенциальность векторного поля $(\sqrt{x} + e^y, y\sqrt{y} + xe^y)$ и найдите его работу на пути от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

1.9 Дайте определение поверхностных интегралов от функции и от векторного поля в $\mathbb{R}^3$. Поясните их физический смысл. Найдите поток поля $(x + y, y + z, z + x)$ через границу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ в направлении внешней нормали.

2 Дифференциальные уравнения

2.1 Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию $f(x, y)$ следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\dfrac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}$ не существует.

2.2 Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение
$$y'' - 2y' = 8\sin 2x + 4x.$$

2.3 Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС n-го порядка образуют линейное пространство размерности n.

Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$
$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$

2.4 Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cx + dy}{ax + by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых $(0, 0)$ является узлом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». - 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». - 2003.

3 Функциональный анализ

3.1 Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения.

3.2 Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в l_2:
$$A : (x_1,\, x_2, \ldots) \mapsto (x_2,\, x_3, \ldots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

4 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

4.1 Скалярное, векторное и смешанное произведения в $\mathbb{R}^3$. Вычисление произведений в координатах. Объем параллелепипеда и тетраэдра. Площадь треугольника в пространстве.

4.2 Общее уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости.

4.3 Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Канонические уравнения кривых второго порядка и их графики.

4.4 Элементарные преобразования матриц. Приведение к ступенчатому и главному ступенчатому виду. Решение линейных систем методом Гаусса. Невырожденная матрица, ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

4.5 Умножение матриц. Свойства операции умножения. Обратная матрица и критерий ее существования. Определитель. Определитель и невырожденность. Определитель произведение матриц.

4.6 Понятие линейного пространства. Пространство $\mathbb{R}^n$. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Размерность пространства. Линейные подпространства.

4.7 Линейные операторы и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Линейная независимость системы собственных векторов, имеющих различные собственные значения.

5 Уравнения математической физики

5.1 Опишите алгоритм решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.

5.2 Опишите алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.

5.3 Выведите формулу для фундаментального решения оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

5.4 Докажите формулу Дюамеля для третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

5.5 Выведите формулу для решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на полуоси с однородным краевым условием второго рода.

5.6 Выведите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$.

5.7 Расскажите о методе электростатических изображений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

6 Теория случайных процессов и теория массового обслуживания

6.1 Дать определение простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Дать определение функции восстановления. Выписать функцию восстановления для простого процесса восстановления, у которого интервалы между восстановлениями имеют экспоненциальное распределение. Выписать интегральные уравнения восстановления для простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Сформулировать элементарную и узловую теоремы восстановления.

6.2 Марковские цепи. Определение. Однородные марковские цепи. Дать определение матрицы переходных вероятностей за один и за несколько шагов. Выписать формулу для вычисления вероятностей перехода за n шагов. Вывести формулу конечномерного распределения для однородной марковской цепи, используя марковское свойство и свойство однородности цепи.

6.3 Марковские цепи. Классификация состояний и цепей. Дать определения возвратности, существенных и несущественных состояний, положительных и нулевых состояний. Сформулировать связь указанных выше свойств состояний марковской цепи. Дать определение периода состояния. Альтернатива солидарности.

6.4 Дать определение марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Дать определение переходных вероятностей и сформулировать их свойства. Дать определие однородного марковского процесса. Дать определение интенсивностей перехода, выписать уравнения Колмогорова.

6.5 Дать определение марковского процесса гибели и размножения с конечным и счетным множеством состояний. Выписать интенсивности перехода, уравнения Колмогорова, провести анализ вероятностей состояний при бесконечном времени.

6.6 Дать определение процесса Пуассона. Сформулировать его основные свойства и характеристики. Вычислить вероятность $P\left\{X\left(2\right)\geq 2\right| X\left(1\right)=1\}$, где $X\left(t\right)$ - процесс Пуассона с параметром λ, $X\left(0\right)=0$.

7 Теоретическая механика

7.1 Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Разложение компонент скорости и ускорения точки на орты криволинейной системы координат.

7.2 Сложное движение. Теоремы Кориолиса о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки. Сложение угловых скоростей и ускорений при сложном движении твердого тела.

7.3 Вывод уравнений Лагранжа II рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Составить уравнения Лагранжа второго рода для двойного математического маятника.

7.4 Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Выражения для кинетической энергии и кинетического момента твердого тела через тензор инерции.

7.5 Динамические уравнения Эйлера. Первые интегралы в случае Эйлера. Стационарное вращение и регулярная прецессия в случае Эйлера.