

1 Дифференциальные уравнения

1. Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию $f(x, y)$ следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ не существует.

2. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение

$$y'' - 2y' = 8 \sin 2x + 4x.$$

3. Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС n -го порядка образуют линейное пространство размерности n .

Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

4. Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых $(0, 0)$ является узлом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2003.

2 Функциональный анализ

5. Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение $x(t) = \int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения.
6. Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в l_2 :

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).