

# 1 Математический анализ

- 1.1 Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений  $f(x) = 0$  методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение  $\cos x = x$  имеет решение на отрезке  $[0, 1]$ . Как его найти с точностью 0.001?
- 1.2 Выведите формулу Тейлора-Лагранжа для функций одного переменного. Вычислите число  $e$  с точностью 0.01.
- 1.3 Определите понятия непрерывной и дифференцируемой функции одного переменного. Докажите теорему о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
- 1.4 Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x \ln^2 x dx$$

- 1.5 Дайте определения сходящегося числового ряда и несобственного интеграла на  $[1, +\infty]$ . Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях  $\alpha > 0$  интегралы Дирихле и ряды Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

- 1.6 Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Для функций двух и трех переменных сформулируйте достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции  $z = 2x^2y + y^3 - 3y$  и укажите, к какому типу они относятся.
- 1.7 Разложите функцию  $\operatorname{sgn} x$  в ряд Фурье на отрезке  $[-\pi, \pi]$ . Записав равенство Парсеваля для этой функции получите формулу

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- 1.8 Дайте определение криволинейного интеграла векторного поля в  $\mathbb{R}^2$  и объясните его физический смысл. Что такое потенциальное векторное поле? Установите потенциальность векторного поля  $(\sqrt{x} + e^y, y\sqrt{y} + xe^y)$  и найдите его работу на пути от точки  $A(1, 1)$  до точки  $B(2, 4)$ .
- 1.9 Дайте определение поверхностных интегралов от функции и от векторного поля в  $\mathbb{R}^3$ . Поясните их физический смысл. Найдите поток поля  $(x + y, y + z, z + x)$  через границу шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$  в направлении внешней нормали.

## 2 Дифференциальные уравнения

2.1 Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию  $f(x, y)$  следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$  не существует.

2.2 Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение

$$y'' - 2y' = 8 \sin 2x + 4x.$$

2.3 Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС  $n$ -го порядка образуют линейное пространство размерности  $n$ .

Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

2.4 Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения  $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$  в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых  $(0, 0)$  является узлом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2003.

## 3 Функциональный анализ

3.1 Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение  $x(t) = \int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$  имеет единственное решение в пространстве  $C[0, 1]$ . Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию  $x_0(t) \equiv 0$ . Оцените точность найденного приближенного решения.

3.2 Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в  $l_2$ :

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

## 4 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

- 4.1 Скалярное, векторное и смешанное произведения в  $\mathbb{R}^3$ . Вычисление произведений в координатах. Объем параллелепипеда и тетраэдра. Площадь треугольника в пространстве.
- 4.2 Общее уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости.
- 4.3 Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Канонические уравнения кривых второго порядка и их графики.
- 4.4 Элементарные преобразования матриц. Приведение к ступенчатому и главному ступенчатому виду. Решение линейных систем методом Гаусса. Невырожденная матрица, ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
- 4.5 Умножение матриц. Свойства операции умножения. Обратная матрица и критерий ее существования. Определитель. Определитель и невырожденность. Определитель произведения матриц.
- 4.6 Понятие линейного пространства. Пространство  $\mathbb{R}^n$ . Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Размерность пространства. Линейные подпространства.
- 4.7 Линейные операторы и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Линейная независимость системы собственных векторов, имеющих различные собственные значения.

## 5 Уравнения математической физики

- 5.1 Опишите алгоритм решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.
- 5.2 Опишите алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.
- 5.3 Выведите формулу для фундаментального решения оператора теплопроводности в  $\mathbb{R}^n$ .
- 5.4 Докажите формулу Дюамеля для третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в  $\mathbb{R}^n$ .
- 5.5 Выведите формулу для решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на полуоси с однородным краевым условием второго рода.
- 5.6 Выведите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в  $\mathbb{R}^3$ .
- 5.7 Расскажите о методе электростатических изображений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

## 6 Теория случайных процессов

- 6.1 Дать определение простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Дать определение функции восстановления. Выписать функцию восстановления для простого процесса восстановления, у которого интервалы между восстановлениями имеют экспоненциальное распределение. Выписать интегральные уравнения восстановления для простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Сформулировать элементарную и узловую теоремы восстановления.

- 6.2 Марковские цепи. Определение. Однородные марковские цепи. Дать определение матрицы переходных вероятностей за один и за несколько шагов. Выписать формулу для вычисления вероятностей перехода за  $n$  шагов. Вывести формулу конечномерного распределения для однородной марковской цепи, используя марковское свойство и свойство однородности цепи.
- 6.3 Марковские цепи. Классификация состояний и цепей. Дать определения возвратности, существенных и несущественных состояний, положительных и нулевых состояний. Сформулировать связь указанных выше свойств состояний марковской цепи. Дать определение периода состояния. Альтернатива солидарности.
- 6.4 Дать определение марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Дать определение переходных вероятностей и сформулировать их свойства. Дать определение однородного марковского процесса. Дать определение интенсивностей перехода, выписать уравнения Колмогорова.
- 6.5 Дать определение марковского процесса гибели и размножения с конечным и счетным множеством состояний. Выписать интенсивности перехода, уравнения Колмогорова, провести анализ вероятностей состояний при бесконечном времени.
- 6.6 Дать определение процесса Пуассона. Сформулировать его основные свойства и характеристики. Вычислить вероятность  $P\{X(2) \geq 2 | X(1) = 1\}$ , где  $X(t)$  - процесс Пуассона с параметром  $\lambda$ ,  $X(0) = 0$ .

## 7 Теоретическая механика

- 7.1 Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Разложение компонент скорости и ускорения точки на орты криволинейной системы координат.
- 7.2 Сложное движение. Теоремы Кориолиса о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки. Сложение угловых скоростей и ускорений при сложном движении твердого тела.
- 7.3 Вывод уравнений Лагранжа II рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Составить уравнения Лагранжа второго рода для двойного математического маятника.
- 7.4 Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Выражения для кинетической энергии и кинетического момента твердого тела через тензор инерции.
- 7.5 Динамические уравнения Эйлера. Первые интегралы в случае Эйлера. Стационарное вращение и регулярная прецессия в случае Эйлера.