

1 Математический анализ

- 1.1 Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение $\cos x = x$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Как его найти с точностью 0.001?
- 1.2 Выведите формулу Тейлора-Лагранжа для функций одного переменного. Вычислите число e с точностью 0.01.
- 1.3 Определите понятия непрерывной и дифференцируемой функции одного переменного. Докажите теорему о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
- 1.4 Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x \ln^2 x dx$$

- 1.5 Дайте определения сходящегося числового ряда и несобственного интеграла на $[1, +\infty]$. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях $\alpha > 0$ интегралы Дирихле и ряды Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

- 1.6 Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Для функций двух и трех переменных сформулируйте достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции $z = 2x^2y + y^3 - 3y$ и укажите, к какому типу они относятся.
- 1.7 Разложите функцию $\operatorname{sgn} x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Записав равенство Парсеваля для этой функции получите формулу

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- 1.8 Дайте определение криволинейного интеграла векторного поля в \mathbb{R}^2 и объясните его физический смысл. Что такое потенциальное векторное поле? Установите потенциальность векторного поля $(\sqrt{x} + e^y, y\sqrt{y} + xe^y)$ и найдите его работу на пути от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.
- 1.9 Дайте определение поверхностных интегралов от функции и от векторного поля в \mathbb{R}^3 . Поясните их физический смысл. Найдите поток поля $(x + y, y + z, z + x)$ через границу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ в направлении внешней нормали.

2 Дифференциальные уравнения

2.1 Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию $f(x, y)$ следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ не существует.

2.2 Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение

$$y'' - 2y' = 8 \sin 2x + 4x.$$

2.3 Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС n -го порядка образуют линейное пространство размерности n .

Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

2.4 Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых $(0, 0)$ является узлом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2003.

3 Функциональный анализ

3.1 Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение $x(t) = \int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения.

3.2 Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в l_2 :

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

4 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

- 4.1 Скалярное, векторное и смешанное произведения в \mathbb{R}^3 . Вычисление произведений в координатах. Объем параллелепипеда и тетраэдра. Площадь треугольника в пространстве.
- 4.2 Общее уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости.
- 4.3 Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Канонические уравнения кривых второго порядка и их графики.
- 4.4 Элементарные преобразования матриц. Приведение к ступенчатому и главному ступенчатому виду. Решение линейных систем методом Гаусса. Невырожденная матрица, ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
- 4.5 Умножение матриц. Свойства операции умножения. Обратная матрица и критерий ее существования. Определитель. Определитель и невырожденность. Определитель произведения матриц.
- 4.6 Понятие линейного пространства. Пространство \mathbb{R}^n . Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Размерность пространства. Линейные подпространства.
- 4.7 Линейные операторы и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Линейная независимость системы собственных векторов, имеющих различные собственные значения.

5 Уравнения математической физики

- 5.1 Опишите алгоритм решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.
- 5.2 Опишите алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.
- 5.3 Выведите формулу для фундаментального решения оператора теплопроводности в \mathbb{R}^n .
- 5.4 Докажите формулу Дюамеля для третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^n .
- 5.5 Выведите формулу для решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на полуоси с однородным краевым условием второго рода.
- 5.6 Выведите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 .
- 5.7 Расскажите о методе электростатических изображений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

6 Теория случайных процессов

- 6.1 Процессы восстановления. Функция восстановления, интегральные уравнения восстановления. Стационарные процессы восстановления. Формулировка элементарной и узловых теорем восстановления.

- 6.2 Марковские цепи. Определение. Однородные марковские цепи. Матрица переходных вероятностей за один и за несколько шагов. Формула конечномерного распределения для однородной марковской цепи.
- 6.3 Марковские цепи. Классификация состояний и цепей. Возвратность, существенные и несущественные состояния, положительные и нулевые состояния. Период состояния.
- 6.4 Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Однородные процессы. Переходные вероятности и их свойства. Интенсивности перехода, уравнения Колмогорова.
- 6.5 Марковские процессы гибели и размножения с конечным и счетным множеством состояний. Интенсивности перехода, уравнения Колмогорова, анализ вероятностей состояний при бесконечном времени.
- 6.6 Процесс Пуассона. Определение, свойства, характеристики.

7 Теоретическая механика

- 7.1 Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Разложение компонент скорости и ускорения точки на орты криволинейной системы координат.
- 7.2 Сложное движение. Теоремы Кориолиса о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки. Сложение угловых скоростей и ускорений при сложном движении твердого тела.
- 7.3 Вывод уравнений Лагранжа II рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Составить уравнения Лагранжа второго рода для двойного математического маятника.
- 7.4 Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Выражения для кинетической энергии и кинетического момента твердого тела через тензор инерции.
- 7.5 Динамические уравнения Эйлера. Первые интегралы в случае Эйлера. Стационарное вращение и регулярная прецессия в случае Эйлера.