

1 Математический анализ

- 1.1 Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение $\cos x = x$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Как его найти с точностью 0.001?
- 1.2 Выведите формулу Тейлора-Лагранжа для функций одного переменного. Вычислите число e с точностью 0.01.
- 1.3 Определите понятия непрерывной и дифференцируемой функции одного переменного. Докажите теорему о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.
- 1.4 Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x \ln^2 x dx$$

- 1.5 Дайте определения сходящегося числового ряда и несобственного интеграла на $[1, +\infty]$. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях $\alpha > 0$ интегралы Дирихле и ряды Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

- 1.6 Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Для функций двух и трех переменных сформулируйте достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции $z = 2x^2y + y^3 - 3y$ и укажите, к какому типу они относятся.
- 1.7 Разложите функцию $\operatorname{sgn} x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Записав равенство Парсеваля для этой функции получите формулу

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- 1.8 Дайте определение криволинейного интеграла векторного поля в \mathbb{R}^2 и объясните его физический смысл. Что такое потенциальное векторное поле? Установите потенциальность векторного поля $(\sqrt{x} + e^y, y\sqrt{y} + xe^y)$ и найдите его работу на пути от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.
- 1.9 Дайте определение поверхностных интегралов от функции и от векторного поля в \mathbb{R}^3 . Поясните их физический смысл. Найдите поток поля $(x + y, y + z, z + x)$ через границу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ в направлении внешней нормали.

2 Дифференциальные уравнения

2.1 Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию $f(x, y)$ следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ не существует.

2.2 Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение

$$y'' - 2y' = 8 \sin 2x + 4x.$$

2.3 Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС n -го порядка образуют линейное пространство размерности n .

Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$

$$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$$

2.4 Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых $(0, 0)$ является узлом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». – 2003.

3 Функциональный анализ

3.1 Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение $x(t) = \int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения.

3.2 Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в l_2 :

$$A : (x_1, x_2, \dots) \mapsto (x_2, x_3, \dots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

4 Теория функций комплексного переменного

- 4.1 Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного во внутренней точке области (доказательство теоремы). Гармонические и сопряженные гармонические функции (определения). Восстановление в односвязной области аналитической функции по ее действительной или мнимой части (вывод формулы).
- 4.2 Геометрический смысл аргумента и модуля производной функции комплексного переменного. Конформное отображение (определение). Круговое свойство дробно-линейного отображения (доказательство)
- 4.3 Теорема Коши для односвязной области и ее обобщение на случай многосвязной области (формулировка). Вывод интегральной формулы Коши. Определение интеграла типа Коши. Существование производных всех порядков для функции, аналитической в области (доказательство теоремы).
- 4.4 Теорема Тейлора (формулировка). Теорема единственности определения аналитической функции (формулировка) и ее следствия. Теорема Лорана (доказательство). Классификация изолированных особых точек однозначной аналитической функции. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса (формулировка).
- 4.5 Определение и формулы вычисления вычета аналитической функции в изолированной особой точке. Основная теорема теории вычетов (доказательство). Лемма Жордана (доказательство).

5 Линейная алгебра и аналитическая геометрия

- 5.1 Скалярное, векторное и смешанное произведения в \mathbb{R}^3 . Вычисление произведений в координатах. Объем параллелепипеда и тетраэдра. Площадь треугольника в пространстве.
- 5.2 Общее уравнение плоскости и канонические уравнения прямой в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Вычисление расстояния от точки до плоскости.
- 5.3 Кривые второго порядка. Эллипс, гипербола и парабола как геометрические места точек. Канонические уравнения кривых второго порядка и их графики.
- 5.4 Элементарные преобразования матриц. Приведение к ступенчатому и главному ступенчатому виду. Решение линейных систем методом Гаусса. Невырожденная матрица, ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.
- 5.5 Умножение матриц. Свойства операции умножения. Обратная матрица и критерий ее существования. Определитель. Определитель и невырожденность. Определитель произведения матриц.
- 5.6 Понятие линейного пространства. Пространство \mathbb{R}^n . Линейная зависимость и независимость векторов. Базис. Размерность пространства. Линейные подпространства.
- 5.7 Линейные операторы и их матрицы. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Характеристический многочлен. Линейная независимость системы собственных векторов, имеющих различные собственные значения.

6 Дискретная математика

- 6.1 Задача выбора и задача выбора с повторениями. Число сочетаний C_n^m . Треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Число целых неотрицательных решений уравнения $x_1 + \dots + x_n = k$.
- 6.2 Числа Каталана и их реализации: скобочные структуры, пути Дика, плоские деревья, плоские бинарные деревья, выражения. Формула для чисел Каталана.
- 6.3 Графы и их матрицы смежности. Изоморфизм графов. Полный граф K_n и полный двудольный граф $K_{m,n}$.
- 6.4 Планарность. Гомеоморфизм графов и теорема Понтрягина-Куратовского. Критерий планарности (необходимое условие).
- 6.5 Карты на плоскости. Формула Эйлера.

7 Уравнения математической физики

- 7.1 Опишите алгоритм решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.
- 7.2 Опишите алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.
- 7.3 Выведите формулу для фундаментального решения оператора теплопроводности в \mathbb{R}^n .
- 7.4 Докажите формулу Дюамеля для третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в \mathbb{R}^n .
- 7.5 Выведите формулу для решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на полуоси с однородным краевым условием второго рода.
- 7.6 Выведите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в \mathbb{R}^3 .
- 7.7 Расскажите о методе электростатических изображений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.

8 Теория вероятностей и математическая статистика

- 8.1 Случайные события и действия над ними. Определение и свойства вероятности. Формула сложения. Классическое определение вероятности. Условные вероятности. Независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- 8.2 Случайные величины. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Дискретные случайные величины. Примеры распределений дискретных случайных величин (биномиальное, геометрическое, пуассоновское). Абсолютно непрерывные случайные величины. Плотность распределения и ее свойства. Примеры абсолютно непрерывных распределений (равномерное, нормальное, показательное).
- 8.3 Числовые характеристики случайных величин. Свойства математического ожидания, дисперсии, ковариации и корреляции. Некоррелированность и независимость случайных величин.
- 8.4 Неравенство Чебышева. Закон больших чисел, примеры его применений. Центральная предельная теорема и теорема Муавра - Лапласа, как ее частный случай.

- 8.5 Понятие выборки. Оценки функции распределения и плотности: эмпирическая функция распределения и гистограмма.
- 8.6 Точечные оценки и их свойства. Метод моментов. Метод максимального правдоподобия. Примеры (среднее нормального распределения при известной дисперсии).
- 8.7 Построение доверительного интервала. Пример (доверительный интервал для среднего значения нормального распределения при известной дисперсии).
- 8.8 Проверка гипотез. Критерий, ошибки первого и второго рода, построение критической области. Проверка гипотезы о виде распределения по критерию хи-квадрат.

9 Теория случайных процессов и теория массового обслуживания

- 9.1 Дать определение простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Дать определение функции восстановления. Выписать функцию восстановления для простого процесса восстановления, у которого интервалы между восстановлениями имеют экспоненциальное распределение. Выписать интегральные уравнения восстановления для простого процесса восстановления и процесса восстановления с запаздыванием. Сформулировать элементарную и узловую теоремы восстановления.
- 9.2 Марковские цепи. Определение. Однородные марковские цепи. Дать определение матрицы переходных вероятностей за один и за несколько шагов. Выписать формулу для вычисления вероятностей перехода за n шагов. Вывести формулу конечномерного распределения для однородной марковской цепи, используя марковское свойство и свойство однородности цепи.
- 9.3 Марковские цепи. Классификация состояний и цепей. Дать определения возвратности, существенных и несущественных состояний, положительных и нулевых состояний. Сформулировать связь указанных выше свойств состояний марковской цепи. Дать определение периода состояния. Альтернатива солидарности.
- 9.4 Дать определение марковского процесса с непрерывным временем и дискретным множеством состояний. Дать определение переходных вероятностей и сформулировать их свойства. Дать определение однородного марковского процесса. Дать определение интенсивностей перехода, выписать уравнения Колмогорова.
- 9.5 Дать определение марковского процесса гибели и размножения с конечным и счетным множеством состояний. Выписать интенсивности перехода, уравнения Колмогорова, провести анализ вероятностей состояний при бесконечном времени.
- 9.6 Дать определение процесса Пуассона. Сформулировать его основные свойства и характеристики. Вычислить вероятность $P\{X(2) \geq 2 | X(1) = 1\}$, где $X(t)$ - процесс Пуассона с параметром λ , $X(0) = 0$.

10 Теоретическая механика

- 10.1 Криволинейные координаты. Коэффициенты Ламе. Разложение компонент скорости и ускорения точки на орты криволинейной системы координат.
- 10.2 Сложное движение. Теоремы Кориолиса о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки. Сложение угловых скоростей и ускорений при сложном движении твердого тела.

- 10.3 Вывод уравнений Лагранжа II рода. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Функция Лагранжа. Составить уравнения Лагранжа второго рода для двойного математического маятника.
- 10.4 Момент инерции системы относительно оси. Радиус инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера. Тензор и эллипсоид инерции. Главные оси инерции. Выражения для кинетической энергии и кинетического момента твердого тела через тензор инерции.
- 10.5 Динамические уравнения Эйлера. Первые интегралы в случае Эйлера. Стационарное вращение и регулярная прецессия в случае Эйлера.

11 Численные методы

- 11.1 Метод Ньютона для решения нелинейных уравнений: расчетные формулы, геометрический смысл, связь с методом простой итерации. Скорость сходимости метода простой итерации и метода Ньютона. Модификации метода Ньютона для кратных корней.
- 11.2 Норма вектора и матрицы: аксиомы нормы, примеры векторных и матричных норм. Число обусловленности матрицы. Обусловленность задачи решения системы линейных алгебраических уравнений (без доказательства).
- 11.3 Метод простой итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений. Достаточные условия сходимости сходимости метода простой итерации. Априорные и апостериорные оценки погрешности. Необходимые и достаточные условия сходимости (без доказательства).
- 11.4 LU -разложение невырожденной матрицы. Вычислительная сложность построения LU -разложения. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью LU -разложения. Выбор главного элемента: стратегии выбора, вычислительная сложность.
- 11.5 Постановка задачи интерполяции. Интерполяция многочленами: существование и единственность интерполяционного многочлена. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Погрешность интерполяции, явление Рунге.
- 11.6 Явный и неявный метод Эйлера решения задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка. Порядок аппроксимации метода Эйлера. Понятие абсолютной и относительной устойчивости конечно-разностной схемы решения ОДУ. Исследование устойчивости явного и неявного методов Эйлера для уравнения $du/dt = \lambda u$.

12 Программирование

- 12.1 Контейнеры `stl`. Перечислить основные контейнеры `stl` их особенности. Привести примеры использования классов `stl` для работы со строками и массивами. Итераторы. Сортировка массивов средствами `stl`.
- 12.2 Принципы наследования и композиции при конструировании новых классов (привести примеры). Что такое виртуальное наследование? Порядок вызова конструкторов и деструкторов при композиции и наследовании. Конструктор копирования. Спецификаторы доступа. Перегрузка методов класса. Перегрузка операторов. Привести примеры.
- 12.3 Методы и свойства класса. Статические методы и статические свойства. Константные методы. Виртуальные методы и полиморфизм. Абстрактные классы. Привести примеры.
- 12.4 Статические и динамические массивы. Операции с указателями в C++. Использование ссылок. Особенности передачи параметров в функцию (по значению или по ссылке). Привести примеры.

- 12.5 Обобщенное программирование. Шаблонные функции и шаблонные классы. Примеры шаблонной функций `swap`, меняющей местами значения переданных ей элементов. Пример шаблонного класса `Pair`, содержащего пару немонотипных элементов.

13 Операционные системы

- 13.1 Понятие ядра ОС. Функции ядра. Типы прерываний. Вектора прерываний и обработчики. Понятие процесса/потока. Состояния процесса/потока. Операции над процессами. Блок управления (дескриптор) процесса. Понятия: задания, нити, параллельного процесса, асинхронного процесса, взаимного исключения, семафора, мьютекса, события, критической секции, тупика. Приоритет процесса/потока.
- 13.2 Понятия файла, символьного набора. Типы файлов. Типы организации файлов. Блок управления (дескриптор) файла. Средства файловой системы. Топология файловой системы. Подходы к реализации файлов и каталогов.

14 Методы оптимизации

- 14.1 Общая постановка экстремальной задачи в произвольном нормированном пространстве. Различные виды ограничений. Допустимые точки. Понятие решения задачи. Определения локального и глобального экстремумов.
- 14.2 Гладкая задача без ограничений в конечномерном пространстве. Теорема о необходимых условиях экстремума первого порядка (теорема Ферма). Условия второго порядка. Матрица вторых смешанных производных (матрица Гессе). Критерии положительной и отрицательной определённости симметрической матрицы. (критерий Сильвестра). Теорема о достаточных условиях экстремума (максимума и минимума) в конечномерной задаче без ограничений.
- 14.3 Гладкая задача с ограничениями в форме равенств в конечномерном пространстве. Функция Лагранжа. Теорема о необходимых условиях экстремума в задаче с ограничениями в форме равенств. Условие регулярности и его теоретическое значение. Общий метод решения задачи с равенствами. Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума. Теорема о достаточных условиях экстремума в гладкой задаче с равенствами.
- 14.4 Гладкая задача с ограничениями в форме равенств и неравенств в конечномерном пространстве. Функция Лагранжа. Теорема о необходимых условиях экстремума в задаче с ограничениями в форме равенств и неравенств. Особенности необходимых условий в задачах с ограничениями в форме равенств и неравенств.
- 14.5 Классическое вариационное исчисление. Задача Больца без ограничений. Теорема о необходимых условиях экстремума. Алгоритмический смысл необходимых условий экстремума в задаче Больца. Использование метода непосредственной проверки для доказательства оптимальности допустимой экстремали.
- 14.6 Классическое вариационное исчисление. Простейшая задача. Теорема о необходимых условиях экстремума (условия первого порядка). Условия второго порядка в простейшей задаче (условия Лежандра и Якоби для одномерного варианта). Теоремы о необходимых условиях второго порядка и достаточных условиях экстремума в простейшей задаче.
- 14.7 Классическое вариационное исчисление. Задача с общими граничными условиями. Теорема о необходимых условиях экстремума. Возможность решения системы, состоящей из необходимых условий и ограничений. Особенности условий трансверсальности в задаче с общими граничными условиями. Использование метода непосредственной проверки для доказательства оптимальности допустимой экстремали.

15 Теория управления

- 15.1 Преобразование Лапласа. Примеры применения для решения линейных дифференциальных уравнений.
- 15.2 Управляемость линейных систем управления. Критерий управляемости.
- 15.3 Наблюдаемость линейных систем. Критерий наблюдаемости.
- 15.4 Устойчивость линейных систем по Ляпунову, асимптотическая устойчивость.