1 Математический анализ

1. Докажите теорему Коши о промежуточном значении непрерывной функции на отрезке. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам. Докажите, что уравнение $\cos x = x$ имеет решение на отрезке $[0, 1]$. Как его найти с точностью 0.001?

2. Выведите формулу Тейлора-Лагранжа для функций одного переменного. Вычислите число e с точностью 0.01.

3. Определите понятия непрерывной и дифференцируемой функции одного переменного. Докажите теорему о дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона-Лейбница.

4. Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx\ , \qquad \int_1^2 \frac{x\, dx}{x^4 + 1}\ .$$

   Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x\, \ln^2 x\, dx$$

5. Дайте определения сходящегося числового ряда и несобственного интеграла на $[1, +\infty]$. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях $\alpha > 0$ интегралы Дирихле и ряды Дирихле

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\ .$$

6. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Для функций двух и трех переменных сформулируйте достаточное условие локального экстремума и его отсутствия. Найдите точки локального экстремума функции $z = 2x^2y + y^3 - 3y$ и укажите, к какому типу они относятся.

7. Разложите функцию $\operatorname{sgn} x$ в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$. Записав равенство Парсеваля для этой функции получите формулу

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}\ .$$

8. Дайте определение криволинейного интеграла векторного поля в $\mathbb{R}^2$ и объясните его физический смысл. Что такое потенциальное векторное поле? Установите потенциальность векторного поля $(\sqrt{x} + e^y, y\sqrt{y} + xe^y)$ и найдите его работу на пути от точки $A(1, 1)$ до точки $B(2, 4)$.

9. Дайте определение поверхностных интегралов от функции и от векторного поля в $\mathbb{R}^3$. Поясните их физический смысл. Найдите поток поля $(x + y, y + z, z + x)$ через границу шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ в направлении внешней нормали.

2 Дифференциальные уравнения

10. Дайте определение задачи Коши обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, разрешённого относительно производной. Сформулируйте теорему Коши-Липшица. Из каких условий на функцию $f(x, y)$ следует выполнение условия Липшица (с обоснованием)? Покажите, что условие Липшица слабее этих рассмотренных условий. Приведите пример нарушения единственности решения рассматриваемой задачи Коши, если $\dfrac{\partial f(x,\, y)}{\partial y}$ не существует.

11. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами с правой частью в виде квазимногочлена. Докажите её для линейного однородного уравнения в случае некратных корней характеристического многочлена. Решите уравнение
$$y'' - 2y' = 8\sin 2x + 4x.$$

12. Дайте определение фундаментальной системы решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений (ЛОС). Докажите, что решения ЛОС n-го порядка образуют линейное пространство размерности n.

    Решите данную систему, укажите какую-нибудь её фундаментальную систему решений:
$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z. \end{cases}$$
    $(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3)$

13. Изложите классификацию изолированных особых точек уравнения $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{cx + dy}{ax + by}$ в терминах характеристических корней. Приведите примеры уравнений, для которых $(0, 0)$ является узелом, седлом, центром, фокусом.

[1] Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». - 2004.

[2] Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М. Изд-во «УРСС». - 2003.

3 Функциональный анализ

14. Дайте определение сжимающего отображения. Сформулируйте теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Пользуясь теоремой о неподвижной точке сжимающего отображения, докажите, что уравнение $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{2 + x^2(s)}$ имеет единственное решение в пространстве $C[0, 1]$. Укажите алгоритм поиска решения. Вычислите первые два приближения к решению, взяв исходную функцию $x_0(t) \equiv 0$. Оцените точность найденного приближенного решения.

15. Дайте определение регулярного значения оператора, резольвентного множества оператора, спектра оператора. Вычислите норму и спектр оператора левого сдвига в l_2:
$$A : (x_1,\, x_2, \ldots) \mapsto (x_2,\, x_3, \ldots).$$

[1] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976 (а также более поздние издания).

4 Уравнения математической физики

16. Опишите алгоритм решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными первого порядка.

17. Опишите алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.

18. Выведите формулу для фундаментального решения оператора теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

19. Докажите формулу Дюамеля для третьей начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$.

20. Выведите формулу для решения начально-краевой задачи для однородного волнового уравнения на полуоси с однородным краевым условием второго рода.

21. Выведите формулу Кирхгофа для решения задачи Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$.

22. Расскажите о методе электростатических изображений на примере решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве.