國立彰化師範大學特殊教育學系

在職進修專班特殊教教育行政碩士班

碩士論文

指導教授：徐享良博士

國小三年級數學學習困難學生乘法應用問題解題歷程之研究

研究生：陳瓊瑜 撰

中華民國九十一年六月

摘　　　要

論文名稱：國小三年級數學學習困難學生乘法應用問題解題歷程之研究
校（院）所別：國立彰化師範大學特殊教育學系
畢業時間及提要別：九十學年度第二學期碩士學位論文
指導教授：徐享良博士
論文提要內容：

本研究旨在比較國小三年級高數學能力學生與低數學能力學生在乘法應用問題之解題歷程的差異，進而依此差異來探索低數學能力學生在解乘法應用問題時其認知運作歷程可能遭遇的障礙。研究之對象包括低數學能力學生與高數學能力學生各五人，共計十人；研究材料為中難度與高難度之乘法應用問題各五題，共計十題；研究方法為放聲思考與晤談兩種。本研究依放聲思考之口語資料與晤談資料分析兩組受試的解題歷程，及解題歷程的差異。研究結果如下：

1. 高能力組受試在解題歷程的五個要素，大致能表現出良好的運作狀況。比較容易出現錯誤的是在問題整合與解題執行等兩個階段，另外，高能力組受試對計算錯誤的覺察狀況也不甚理想。
2. 低能力組受試在解題歷程的五個要素都可能出現錯誤，其中以問題整合與解題執行兩個要素的運作特別容易出現障礙。另外，低能力組受試也缺乏對整體之解題狀況的覺察。
3. 比較兩組受試的解題歷程發現，高能力組受試的解題速度顯著的快於低能力組受試，且高數學能力受試在整個解題歷程的各個要素大致都能有良好的運作，其比較容易出現錯誤的是計算的疏忽以及單位間換算的統整。相反的，低數學能力受試在整個解題歷程的各個要素都可能出現錯誤，尤其是在問題整合、解題執行、與問題轉譯等方面。
4. 低數學能力受試在解乘法應用問題時，其認知運作歷程可能遭遇的障礙在於，其對特定概念的理解有困難（如題目中的關係語句），加上乘法概念的知識不足，以至於難以運用這些概念知識來促進其對問題的轉譯與題意的整合。另一方面，也因為計算技能不夠熟練，解題監控的狀況不夠積極，導致解題的效率不佳，解題錯誤的情形容易出現。

The study of the problem solving process of multiplication word problems at the third grade students with mathematical learning difficulties

Abstract

This study aims at comparing and contrasting the difference of multiplication application problems solving process of the third graders of elementary students between those of high mathematical ability and those of low. Based on the result, or the differences, I will further study the possible difficulties these students of low mathematical ability might face while they are solving the multiplication application problems. Five for each ability group, ten in total, took part in this study. We will work on ten problems of multiplication application, include five for the middle difficult and five for the highly difficult problems. I will apply the research methods of thinking aloud and meeting. According to the oral records of thinking aloud and the meeting records, I analyze the problem solving process, and the difference of the process between the two groups as following:

1. The most students of the group of high mathematical ability can apply the five problem solving elements well. They often make mistakes at the stages of problem integration and problem solving execution. Also, they are less aware of their mistakes made in calculation.
2. It' s very possible for the students of low mathematical ability to make mistakes anytime, but the most difficult for them are the two elements: problem integration and problem solving execution. They are not aware of their mistakes made while they are working on the problems.
3. To summarize, obviously the students of high mathematical ability and solve the problems faster than the low. The group of high mathematical ability can apply the five problem solving elements well while the low can make mistakes at any elements. The group of high mathematical ability often makes mistakes while doing calculation and the integration of unit conversion. The group of low mathematical

ability often makes mistakes at problem integration, problem solving execution, problem translation, etc.

4. The possible cognitive difficulty of solving multiplication application problems the group of low mathematical ability might face is the students' comprehensive problem of specific concepts, such as the relative clauses occur in the question. Also, they don't have enough multiplication knowledge for them to apply upon problem translation and integration of meaning. Besides, due to their lack of calculation skill proficiency and their passive attitude at problem solving monitoring, they are lack of efficiency on problem solving, and it's easy for them to make mistakes during the process.

目　　錄

表　目　錄

圖　目　錄

第一章　緒　論

第一節　　問題背景

數學是重要的基礎學科，也是日常生活中的重要能力。Saunders（1980）研究代表總體經濟的一百種行業，發現有 62％的行業需要基本演算的知識，65％的行業需要統計方面的知識。Czepiel 和 Esty（1980）發現在報紙上面有 93％的文章，讀者必須具備數學知識才能夠完全瞭解那些報導的含意。因此如果學習數學有障礙，不只是學校的學習會出現困難，連平日生活都可能造成不便。

自一九六〇年代以來，隨著認知心理學的蓬勃發展，在數學教育的領域中，「解題導向」的研究趨勢亦受到相當的重視。有別於傳統行為主義「刺激-反應」的學習觀，認知心理學的訊息處理論著重在探討個體如何獲取訊息、儲存訊息、以及提取與應用訊息的歷程。在認知心理學的影響下，數學教育也強調解題的歷程，以及主動思考與建構知識的能力。

問題解決是各國政府致力提昇國民能力的重要目標，美國數學教師協會（National Council of Teachers of Mathematics, NCTM）於 1989 在幼稚園到四年級、五年級到八年級、九年級到十二年級等三個階段的數學課程綱要，皆把數學的問題解決列為首要教育目標。我國教育部於民八十九年公佈之九年一貫課程暫行綱要中，數學領域的課程目標也特別強調培養解決數學問題的能力。

數學應用問題的解題是複雜的心理活動，需要牽涉到概念性理解、基本技能、認知策略等方面的能力，而且彼此間可能還會互相影響（Gagne,1992)。如果學生不了解題目所牽涉的概念，固然難以理解題目的含意；如果計算技能未能熟練亦會影響概念理解及認知策略的運作。

近年來，國內在數學之應用問題解題研究大多集中在加減法問題，例如：古明峰（民 87)、林淑玲（民 88)、周台傑與蔡宗玫（民 86)、張莉莉（民 88）等等。對於乘法問題的研究論文還不多見，在僅有的研究中其重點大多著重在乘法概念的分析；研究對象也多為一般兒童（吳仁俊，民 85；李光榮，民 86；林原宏，民 83；林碧珍，民 80；許美華，民 90)。國內對於數學學習困難的學生的乘法解題歷程，則未見有人予以探討。

研究者從擔任國小資源班教學的工作經驗上發現，有一些學生他們的閱讀能力正常，也能默唸九九乘法表，但是在乘法應用問題的解題上卻往往有困難。此類學生的問題到底出在哪裡？教學上要如何因應？這是研究者在平日的工作上急需去面對的問題。

認知心理學家常使用「專家—生手模式」（expert-novice paradigm)，來探究構成某特定領域之專業知能（expertise）的要素。在這種研究模式中，研究者使用外在可接受的標準或測驗分數，來挑選一組特定領域的專家及一組生手，然後安排這兩組受試處理同樣的作業(tasks)。受試者在處理這些作業的過程中，研究者可使用放聲思考（thinking aloud）的方法，來蒐集受試者處理作業時，其心智活

動的及時資料（on-line data）；或者配合運用回溯報告（retrospective reports）的方式，來蒐集受試者處理作業時的回憶資料。運用這種方式可幫助我們確認構成一特定領域之專業知能的認知成分，這樣的知識最終可以對特定領域之評量與課程內容的選擇與安排，提供必要的訊息。

在乘法應用問題的解題歷程中，到底牽涉到哪些認知運作，目前我們尚不清楚。因此，如果直接觀察低數學能力學生的解題，並不容易精確指出他們的障礙出在哪裡。我們假定高數學能力學生的認知運作正常，是我們期望的教學結果。因此，運用「專家—生手模式」，比較高數學能力學生與低數學能力學生在解題時的認知運作歷程，可方便我們去探索低數學能力學生在解乘法應用問題時，其內在認知運作歷程可能出現的障礙。

本研究擬依上述的想法，比較高數學能力學生（專家）與低數學能力學生（生手），在解乘法解應用問題時，其解題歷程的差異，進而依此差異狀況來探索低數學能力學生在解乘法應用問題時，其內在認知歷程可能遭遇的障礙所在。

第二節　研究目的與研究問題

本研究旨在運用「專家--生手模式」比較國小三年級高、低數學能力學生在乘法應用問題之解題歷程的差異，進而探索低數學能力學生

在解乘法應用問題時，其內在認知運作歷程中可能出現的障礙。詳言之，本研究的目的為，比較國小三年級高數學能力學生與低數學能力學生在乘法應用問題之解題歷程的差異；並探索低數學能力學生在解乘法應用問題時其認知運作歷程可能遭遇的障礙。

依上述研究目的，本研究之研究問題如下：

一、國小三年級高數學能力學生在乘法應用問題的解題歷程如何？

二、國小三年級低數學能力學生在乘法應用問題的解題歷程如何？

三、國小三年級高數學能力學生與低數學能力學生在乘法應用問題的解題歷程有何差異？

四、低數學能力學生在解乘法應用問題時，其認知運作歷程可能遭遇的障礙為何？

第三節　名詞解釋

本研究之關鍵名詞包括：「高數學能力學生」、「低數學能力學生」、「專家—生手模式」、「乘法應用問題」、「數學解題歷程」及「放聲思考」等。茲分別說明如下：

一、高數學能力學生

本研究所稱高數學能力學生是指，任課老師依平日觀察確認口語表達能力正常，在「中文年級認字量表」的表現為百分等級 50 以上

及「閱讀理解困難篩檢測驗」的表現答對率為.50 以上；在「數學診斷測驗」的百分等級為 90 以上；智力在中等程度的國小三年級學生。

二、低數學能力學生

本研究所稱低數學能力學生是指，任課老師依平日觀察確認口語表達能力正常，在「中文年級認字量表」的表現為百分等級 50 以上及「閱讀理解困難篩檢測驗」的表現答對率為.50 以上；在「數學診斷測驗」的百分等級為 49 以下，智力在中等程度且無感官、智能、情緒等障礙或文化刺激不足等現象的國小三年級學生。

三、專家—生手模式

指比較專家與生手在同一項作業的執行或運作狀況，以幫助我們分辨某特定領域之專家與生手的知識結構或心智運作歷程之差異的一種研究模式。依「專家—生手模式」的研究結果，可幫助我們瞭解構成某特定領域之專業知能的要素，以及規劃能提高生手之專業知能的訓練課程或教學方式。本研究所稱的「專家—生手模式」係指，比較高數學能力學生（專家）與低數學能力學生（生手）在解乘法應用問題時，其解題歷程的差異狀況。

四、乘法應用問題

乘法應用問題的分類及方式有多種，尚未有一致的觀點，本研究基於實務工作上的需要，僅針對受試者在二年級下學期與三年級上

學期間教科書中出現比例最高題型作為研究題材。依研究者的對受試者之教科書的分析，其題型以等組形（equal groups）的題目佔最多，約在 90％以上。因此，本研究所稱的乘法應用問題是指等組型的乘法應用問題。

所謂等組型問題是指由一些內含有相同個數之物體的集合所構成的情境，等組情境以不同的方式出現，有些例子是（1）自然重複的情形（如 n 個人有 5n 根手指頭）；(2）重做一連串的動作（如一次走 3 步，要走 4 次）；(3）和人們的習慣，就如同將相同數目的東西給於一些人（如老師發給 4 個小朋友，每人 5 顆糖果）。

五、數學解題歷程

指個體面對數學問題時，將題目轉化為內在心理語言，並和所擁有的數學概念、原理、方法結合，以擬定計畫、執行解題和檢視解題狀況的歷程。本研究所稱之數學解題歷程係指受試者在面對乘法等組型應用問題時，包括問題轉譯、問題整合、解題計畫、解題執行與解題監控等要素的認知運作歷程。

六、放聲思考

指由研究者呈現一項作業，要求受試在執行或操作這項作業時，以口語報告的方式說出心中出現之念頭的一種收集資料的方法（Ericsson & Simon, 1993)。放聲思考可用以收集受試者執行一項作業時，其心智運作的線上資料，以便探究受試者執行該項作業時的

認知運作歷程。本研究所稱之放聲思考是指受試者在解乘法應用問題的同時，以口語報告方式說出解題時心中所浮現之念頭的研究方式。本研究依此口語報告資料，探究受試者在解乘法應用問題時的認知運作狀況。

第二章　文獻探討

基於本研究所提出的研究目的與研究問題，本研究的文獻探討分為三部份，第一部份是敘述數學學障兒童之學習特質的描述，第二部份討論數學的解題歷程，第三部份整理並呈現乘法應用問題的相關研究。

第一節 數學學習障礙兒童的學習特質

「數學學習障礙」一詞係源自「學習障礙」，依據我國教育部在八十七年十月十九日公佈之「身心障礙及資賦優異學生鑑定原則鑑定基準」，學習障礙的定義：學習障礙係指統稱神經心理功能異常，顯現出注意、記憶、理解、推理、表達、知覺或知覺動作協調等能力而有顯著問題，以致在聽、說、讀、寫、算等學習上有顯著困難者；其障礙並非因感官、智能、情緒等障礙因素或文化刺激不足、教學不當

等環境因素所直接造成的結果。其鑑定基準為：

（一）智力正常或正常程度以上。

（二）個人內在能力有顯著差異者

（三）注意、記憶、聽覺理解、口語表達、基本閱讀技巧推理、閱讀理解、書寫、數學運算或知覺動作協調等任一能力表現有顯著困難，且經評估確定一般教育所提供之學習輔導無顯著成效者。

在美國精神醫學學會出版的精神疾病診斷手冊第四版（簡稱DSM－Ⅳ，1994）中對於數學學習障礙的定義是：個體在個別化標準測驗的表現顯著低於個人的發展年齡、智力和符合該年級應有教育水準的預期標準，這些會影響這位學生的學業成就與在日常生活中與數學有關活動中的表現，而這樣的表現並不是因為視覺或聽覺神經系統問題所造成的，有許多技能會因數學障礙而發生困難，包括語文技能、知覺技能、注意力技能與數學性的技能等。

以下將數學學習障礙者的學習特質分為（1）神經生理與神經心理的特質；（2）認知心理的特質來說明。

壹、神經生理與神經心理的方面的特質

在神經生理與神經心理方面的研究係重視數學學習之「腦與行為之間的關係」之探討與發現，並對數學學習障礙進行亞型分析。

一般而言雙手右利者，左腦較大且較重，左腦與語言功能有相當密切的關係。而視覺---空間訊息處理的缺陷涉及右腦較大的範圍，且

右腦負責複雜訊息的整合以及進行適性推理與視覺---空間組織，即右腦處理視覺---空間---組織向度的計算與數學推理；相對的左腦是數字系統的中介處理區，例如從語言記憶檢索數的事實以及處理簡單的線性等式，即利用後側聯合區與左半腦處理基本數學運算與數學事實的理解（邱上真，民 90）。

在大腦皮質部雙側，尤其是右半腦的白質部為主，若有缺陷會造成計算推理以及閱讀理解上的困難。 Rourke 和 Conway（1997）進一步分析發現若缺陷在左腦者有下列困難發生：數字符號系統的中介；從語意記憶中檢索數的事實；簡單線性等式的運算。而發生於右腦的問題有：需要調整思考或視覺---空間組織的數學實作問題。

若用魏氏語文智商與操作智商的表現來進行神經發展的分析，可發現三種學習障礙亞型：甲為閱讀、拼字與數學表現都很差；乙為數學表現比拼字閱讀好；丙為數學表現很差。其中甲與乙兩型在語文智商較操作智商低，問題可能出在左腦，而丙型操作智商較語文智商低，問題可能在右腦。因為左腦與常規運算有關，而右腦則處理新奇、概念、視覺空間的訊息有關（邱上真，民 90）。

貳、認知心理方面的特質

依據 Miller 和 Mercer（1997）的綜合分析與歸納發現數學學習障礙的一般心理特質有：（1）習得無助感，（2）過於依賴老師，（3）被動且缺乏動機。至於較特定的心理特質則有（1）訊息處理因素，（2）後設認知因素，（3）語言因素，（4）社會與情緒因素等，茲臚列說明

如下：

一、訊息處理因素：

1. 注意力問題：

數學學習障礙學生在專注行為的表現上顯著低於一般學生（Hallahan,Kauffman& Lloyd,1999)。計算或解題有多重步驟時，注意力持續有顯著困難；長時間專注聽老師講解及計算有困難。Smith（1994）認為數學學習障礙學生容易分心、注意力難以持續的原因，可能是因生理缺陷、衝動的認知風格或是無法有效地運用語言所致。

2. 視動協調與視知覺問題：

Lerner（2000）指出部分數學學習障礙學生在點數系列物體的能力有困難；很快的分辨不同組別有困難，甚至在加二組東西有困難；做作業找到題目的位置有困難；分辨數字，例如 17 與 71 有困難；看時鐘的指針有困難；分辨運算符號有困難；對齊列式有困難；與涉及方位或方向有困難。

3. 記憶問題：

目前在訊息處理研究指出工作記憶能有效區辨學習障礙與非學習障礙兩種群體，因為根據 Swanson（1994）研究顯示工作記憶對高層次的認知學習(像閱讀與數學)是項重要的指標，而短期記憶只是訊息的表面處理，所以只能對低層次的認知學習扮演重要的角色。

Webster（1979）研究數學優秀學生與學障學生之間記憶廣度的差異，結果發現學習障礙者的記憶廣度明顯較低。Miller 與 Mercer（1997）研究指出數學學障學生記不住九九乘法表或新的訊息；忘記

計算步驟；解決或處理多步驟的文字題有困難。

4. 動作障礙：

寫的數字難以辨識、寫得太慢又不正確；寫在較小空間或寫整齊有困難。

二、後設認知方面

Brown（1978）認為後設認知就是個人對認知的理解，與環境互動的調整，另一方面是個體自我調整認知運作的計畫監控執行及檢核能力。楊明家（民 86）指出後設認知行為在解題過程中扮演重要的角色，高解題能力者表現較多的後設認知行為，能主動監控與修改答案的合理性。而研究亦指出數學學習障礙學生在自我評估有困難、辨識與選擇適當策略、組織訊息、偵測解題過程、評估答案正確性方面；在類化解題策略上也有困難（Brownell,Mellard,& Deshler,1993）。

三、語言方面

在計算過程中，具有語言能力是相當重要的，需要系統性的回憶並使用許多計算公式與步驟，例如要完成 29×85 需有 33 個步驟（Strang 與 Rourke,1985）。而且隨著年級的增加，解題需要語言能力的比例愈來愈大，因此許多閱讀障礙者也會在解數學題時發生困難（Smith,1994）。邱佳寧（民 90）指出數學學習障礙學生對於文字題的多餘訊息的察覺能力比較差，不一致語言的解題能力也比較差。

四、社會與情緒特質

由於長期的失敗與挫折，在情緒特質上顯出低自尊、被動、有數

學焦慮思考混亂而缺乏組織、逃避以及堅持度不夠、負向的自我概念、不當的歸因以及缺乏自我效能（Miller 和 Mercer,1997）。秦麗花（民 84）亦指出數學學習障礙學生容易產生較低落與負向的內在語言。

綜合以上，數學學習障礙學生由於在訊息處理歷程中的心理歷程產生缺陷因而導致他們的學習困難，同時在語言表達與接收的困難也助長了數學學習的障礙，而這些問題與數學學習障礙學生在學習動機上的低落、社會情緒行為上的不適應更形成一種惡性循環。

參、數學學習障礙學生在解題方面的研究

林淑玲（民 88）探討台北市國小三、四年級學習障礙學生解決比較類加減應用問題的解題表徵正確率、類型和困難。指出正確率依次為被比較量未知、差異量未知，最低為參照量未知，表徵類型以書寫符號最多，表徵困難的主要原因在理解階段，且經常以關鍵字解題

朱經明、蔡玉瑟（民 89）以動態評量診斷國小五年級學習障礙學生數學能力，發現有 2%的學生是閱讀問題，10%學生是數學語言的理解問題，18%學生經「簡化題目」或「圖解提示」便可正確解題，30%學習障礙障學生具備基本計算能力。

Montague 和 Applegate(1993)利用放聲思考的方法比較學習障礙、普通、資優學生的認知、情感及後設認知行為。發現學習障礙學生在解題過程中，主要的問題在符號表徵與列式，而非計算，且學習障礙學生在表徵問題時使用較少策略，無法將語言或數字訊息轉譯成

內在表徵，是解題困難的關鍵。

Montague（1997）比較數學學習障礙學生和非學習障礙生在解題的認知策略和非認知策略的差異性，結果顯示兩者在策略使用上並無差異，但是學習障礙學生在策略使用形式的「質」、「量」上較普通學生落後。

Nacy 和 Theresa（1997）比較三年級普通生、數學學習障礙學生、閱讀學習障礙學生的解題能力，發現數學學習障礙學生常仰賴指算筆算等策略而非由記憶直接提取。

Lerner（2000）指出解題對許多學習障礙兒童而言是困難的，學生經常不清楚解題策略和程序，而導致解題失敗，因此需要教師引導和足夠練習，才能將思想與語言結合。

第二節　　數學解題歷程

對於數學解題的看法，Branca （1990）將解題定義為：1.解題是數學教育的目標；2.解題是運用先前經驗處理不熟悉或新問題的過程；3.解題是基本能力。在第二項定義中重視學生的解題方法、步驟與策略，指解題者必須區分相關訊息，並以邏輯思考提出問題、轉譯、形成結論等過程。因此解題的歷程相當複雜需具備多項能力（Snyder,1998）。

Mayer（1992）認為問題有三個特質：已知數（given）、目標（goals）和障礙（obstacles），而解題是由已知狀態移動到目標的歷程，由於數

學問題由文字和語意結構組成，因此學生在此過程必須閱讀問題、分析問題和解釋訊息（Cawey & Miller,1986）。

學生在解數學題目時，從題目到答案之間 ，是一個複雜的心智運作歷程。對於此歷程做有系統的介紹，可從 1945 年 Polya 所著「怎樣解題」（How to solve it）開始。Polya 將解題的過程分為四個步驟：

1.瞭解問題：解題者必須知道什麼是已知和未知的條件，及運用的運算與操作。
2.擬定計畫：解題者必須想出解決問題的程序與流程。
3.實行計畫：解題者著手執行解題流程。
4.回顧解答：重新檢視個人的解題執行歷程。

他在每一個步驟的過程中提出許多的問題，藉以對問題有更清楚的認識。McCoy（1994）曾以 Polya 的解題過程探究九十名國小二、三年級學生的解題行為表現，發現學生能夠使用各種方式解題，卻常忘了第四步驟評鑑和反省整個過程，研究指出 80%學生瞭解問題，70%會擬訂計畫、執行，只有 34%會回顧。林碧珍（民 78）探究學生在 Polya 的解題歷程表現，指出數學高、低成就學生在解題歷程上有很大的差異，低成就者通常能朗讀題目，但不懂題意、也沒有設立解題計畫，且在執行計畫中經常由關鍵字決定運算符號。

Schoenfeld（1985）對 Polya 的解題步驟加以修正，提出有關解題的階段，他主張影響解題成敗的因素除了學生的數學信念、擁有的數學資源（數學知識、捷思策略）外，於解題行為中的控制行為也是非常重要的，而且有必要分析的。因此他把解題過程分為七個要項：

（一）閱讀（reading）；（二）分析（analysis）；（三）探索（exploration）；（四）新資訊與局部評量（new information and local assessment）；（五）計畫－執行（planning—implementation）；（六）驗證（verification）；（七）衡接（transition），茲敘述如下：

1.閱讀：受試者開始讀問題

2.分析：將問題簡化或重述以便瞭解問題

3.探索：具有較大的問題思考空間一得到有關的訊息即併入分析計畫執行的程序中。

4.新資訊與局部評量：新資訊是指先前為注意到的訊息。局部評量是指從微觀的角度對目前的狀況加以評定價值。

5.計畫－執行：計畫的結構是否完整？是否依序執行？是否對局部或整體的計畫加以檢視與評估？

6.驗證：是否重新檢查解題？有無歷程及結果的評估？對結果的信心如何？

7.衡接：兩階段的連接處，各個情節的連接。

Garofalo 和 Lester（1985）融合了 Polya（1945）和 Flavell 與 Wellman（1977）的後設認知成分，提出認知－後設認知的數學解題模式，如表 2-1：

表 2-1、 **認知－後設認知的數學解題模式**

1.導向：評估與了解問題的策略行為
(1)評估策略
(2)評估訊息與條件
(3)評估內容的熟悉性
(4)最初與後續的表徵
(5)評估問題難度與改變完成的方式
2.組織：計劃行為與選擇行動
(1)確認目標與次目標
(2)整體計劃
(3)局部計劃
3.執行：調整行為以配合目標
(1)局部行動的完成
(2)檢視局部與整體計劃的進行
(3)決策決定
4.驗證：確認對決策與計劃執行結果的評估
(1)導向與結構的評估
A.表徵的適當性
B.結構決策的是當性
C.局部計劃與整題計劃的一致性
D.整題計劃與目標的一致性
(2)執行的評估
A.行動表現的適當性
B.對計畫所採行動的適當性
C.局部結果對計劃與問題條件的一致性
D.最後結果與問題條件的一致性

Mayer（1992）從認知心理學的觀點，對數學解題歷程及其所涉

及的之細節作了相當具有結構的分析，他提出的數學解題歷程主要可分為兩個成分：問題表徵（problem representation）與問題解決（problem solution）。在問題表徵中，又可分為問題轉譯（translation）與問題整合（integration）；問題解決又可分為解題計畫與監控（planning & monitoring）及解題執行（execution）。茲進一步說明如下：

1.問題轉譯：解題者開始解題時，將每一個陳述句轉譯為內在表徵，亦將語文的形式轉變為數學的形式。另外 語意知識在問題的轉譯上也是一關鍵因素，為了使問題能轉譯，必須儲存大量的語意知識與語文知識，在問題轉譯這個階段解題者必須瞭解已知的條件與解題目標。

2.問題整合：將問題轉譯中得到的資訊，整合成連貫有組織的知識。為了要瞭解及整合問題，問題解決者需要有關問題類型的知識（亦即基模知識），以便將問題歸為某一類。

3.解題計畫及監控：將問題分成數個小問題，然後逐步的加以解決。在解題過程中必須監控自己，而且知道自己在解題計畫的哪一個部分。解題者在解題時會因問題的特性及他個人的特性而使用不同的策略。

4.解題執行：將計畫的結果，運用計算的程序加以執行。問題執行需要程序性知識，關於如何執行加減乘除的程序性知識。隨著兒童經驗的累積，兒童對計算過程就能愈複雜與愈自動化。茲舉例如表2-2：

表 2-2、 Mayer（1992）的數學解題歷程模式

問題：每邊長 30 公分的正方形磁磚，每塊售價 0.72 元，若要以此磁磚撲滿一間長 7.2 公尺、寬 5.4 公尺的長方形房間，需花多少錢？		
階段	知識種類	問題實例
陳述問題		
(一)問題表徵		
1.問題轉譯	語言知識	長方形房間是 7.2 公尺長，5.4 公尺寬
	語意知識	1 公尺等於 100 公分
2.問題整合	基模知識	面積的問題，面積＝長×寬
(二)問題解決		
1.解題計畫與監控	策略知識	第一步:算長方形面積
		第二步:算每塊磁磚的面積
		第三步:把房間面積除以磁磚面積
		第四步：磁磚價錢除以磁磚數
2.解題執行	程序性知識	7.2 公尺×5.4 公尺＝38.88 平方公尺
		0.3 公尺×0.3 公尺＝0.09 平方公尺
		38.88 平方公尺÷0.09 平方公尺＝432 塊
3.獲得答案		0.72 元×432 塊＝311.4 元

Gagne 等人（1993）以訊息處理的觀點，認為數學解題歷程會牽涉到三項會互相影響的的要素：基本技能、概念性理解和策略。如果基本技能缺乏自動化，可能會妨礙他的概念性理解及策略，因為學生可能因此忘記他原先的目標，或是變的較無耐性。

對於應用問題，Mayer（1985）認為應用問題主要是藉由文字敘

述的計算題型式，學生在解應用問題時，不僅要熟悉計算的過程，同時也要能閱讀應用問題的文意的部分、理解問題的要求及其所提供的條件來解決問題。應用問題最大的特質在於其不直接陳述需要用到哪一種的計算過程來解決問題，解題者必須能從自己的記憶中提取相關經驗以對這個問題有所了解。解題者要解一個應用問題，有二點基本要點：第一、必須能理解這些字詞。第二、需能了解問題的情境，同時了解各數字間的關係。

Marshall， Pribe 和 Smith（1987）將應用問題依三個分類方式詮釋：

一、依「情境」分類

問題情境會影響學生的解題表現，學生在熟悉的情境與生活經驗結合的題型中，會有較高的解題能力（Kouba., Brown, Carprnter, Lindquist, Silver, & Swafford, 1988）。

二、依「運算」分類

指依運算符號或解題步驟來決定問題的類型，如以加法呈現則為「加法題」，故可分為「加法題」、「減法題」、「乘法題」和「除法題」；若以一個步驟解題則為「一步驟題」，故可分為「一步驟題」、「二步驟題」和「多步驟題」。許多研究指出二步驟比一步驟困難（Quintero，1984；朱經明與蔡玉瑟，民 89）。

Quintero（1984）指出學生無法解二步驟應用問題原因為對概念的理解、語意關係的詮釋有困難和使用錯誤的解題策略。邱佳寧（民 90）指出因第一步驟為產生的新資訊是第二步驟解題必要條件，需要

較多工作記憶、統合問題的能力及後設認知能力，用以監控解題過程

三、依「語意結構」分類

Morales 等人（1985）將應用問題分為改變（change）、相等（equalize）組合（combine）比較（compare）類問題。其中以改變類型的問題為最簡單的題型，之後依次為相等類問題、組合類問題，最後才是比較類問題。

Morales 等人（1985）對於兒童如何分類問題以「群集分析」（cluster analysis）的方法，分析國小三年級及五、六年級學童，發現三年級及五、六年級學童對「改變」類型的題目都有相當的概念，但三年級學童對「相等」、「組合」、「比較」類型的題目並不是根據概念來分類，缺乏適當的問題基模，而五、六年級學童則就有較好的概念。「改變」類題是描述牽涉到數量改變的情境；「相等」類題則描述目標要達成數量相等的情境；「組合」類題則包括兩個次級集組被組合成為一個較大的集組；「比較」類題乃是要比較不同組之間的數量差異。

應用問題之所以困難，主要是因為把語文形式的數學變成形式的數學涉及許多的轉換所產生的，其錯誤來源有四（鄭昭明，民 79）：

1. 兒童可能仍未能使用某些基模（schemata），尤其是「比較」基模。
2. 只注意文字的表面線索往往導致錯誤的回答（例如：只注意「較多」或「較少」的字眼）。
3. 一個未知數量若不置於題目的末尾，則使得問題的表徵更易出現錯誤。
4. 語言的概念與數學的符號並沒有穩定不變的關係，即數學符號的

運作意義可能與一般語言的運作意義不同，以致兩者間的翻譯出現錯誤。例如乘號有「倍數」的意義，但一公尺的布用去了 1/3，基本上有「減少」的意義，因此用乘法去求「剩下多少」或「用去多少」顯然是有衝突的，除非分式相乘具有減少的理念，否則學生是容易在這類題型出現錯誤的。

第三節　　乘法的相關研究

乘法問題在教科書上主要是從國小數學第四冊（二年級下學期用）開始談起，受訪學童第四冊是用南一書局出版的數學教科書，共有三個單元，第五冊則是用康軒版數學教科書，計有一個單元。茲將第四冊及第五冊的單元目標整理成表 2-3 及 2-4。

表 2-3、第四冊南一書局出版乘法單元目標

單 元 名 稱	單元目標
第三單元 有幾根手頭	1.解決單位量為 5、2，單位數在 12 以內的問題。 2.建立幾個 5 或幾個 2 是多少的語詞
第五單元 有幾倍	1.察覺單位量為 3、4、5、6、8 的轉換活動。 2.經驗「倍」的概念，並進行「倍」的語詞轉換。

	3.把「倍」的語詞轉換為用乘的符號「×」來表示。
第七單元 乘法	1.經驗乘法的意義。 2.完成單位量 2 到 9 的乘法表，並經驗查表找到答數 3.經驗兩步驟的加減乘問題。

表 2- 4、第五冊康軒版乘法單元目標

單元名稱	單元目標
第八單元 乘法	1. 認識 0 和 1 的乘法。 2. 認識乘法直式紀錄。 3. 認識被乘式、乘式、積等名詞。 4. 會解決三位數乘以一位數的問題。 5. 複習乘式意義並經驗乘法的交換律運算。 6. 了解乘式未知的算式填充題。

壹、乘法問題的類型

對於正整數乘法意義的看法，Hiebert & Behr（1988）認為可分為三類：即認為乘法是來自累加、直積與指示量的變換合成。其中以認為乘法是累加模式最為兒童所接受。根據 Fischbein（1985）等人的

研究，他們認為累加模式符合人們最初、自然且基本的心理發展模式。

Davydov（1991）認為乘法問題是單位量轉換的問題。所謂單位量轉換，係指將集聚單位轉化為以「一」為單位的活動。以「一個籌碼可以換六個花片，五個籌碼可以換幾個花片？」為例，六是集聚單位的數字，而 5 是集聚單位的倍數。因此利用單位量轉換的觀點來看乘法時，不僅與原本累加的意義相容，甚至連成數是小數或是分數時都能獲得適當的解釋（吳仁俊，民 85）。

Vergnaud（1983）則從概念域的觀點，認為所謂「乘法」應包括乘法、除法、比、比例、分數、有理數、笛卡兒乘積……等等。他將乘法分為三種類型：

1.量數同構型（isomorphism of measures）：是指兩個測度空間 M1 和 M2 之間存著簡單倍數關係的結構。如「買一條口香糖要 7 元，買 4 條要幾元？」

2.量數的乘積型（product of measures）：是由兩個度量空間 M1 和 M2 的乘積，由此產生測度空間 M3。如求面積、體積或笛卡兒乘積。

3. 多重比例（multiple proportion）：測度空間 M3 成比例於不同且獨立的測度空間 M1 和 M2。在多重比的問題中，測度各自含有內 在意義，如

P = k R I　（P=功率，R=電阻，I=電流強度）

以 Vergnaud 而言，乘法的意義不僅只是相同測度空間的倍數問題而言，尚有不同測度空間的轉換問題，且其分類的標準主要是依存於測度空間彼此之間性質的關係。國內林碧珍（民 80）以 Vergnaud 分

類的方法，以國小五、六年級學生為研究對象，發現學童對乘除法應用問題的瞭解由易而難是量數同構型、叉積型、比較型。

Nesher（1988）則把乘法文字題依其性質化成下列三種：

1.含對映性規則的題目（涉及累加性），如一頭豬有四條腿，五頭豬有幾條腿？

2.倍數比較類問題（或變大），如弟弟有 12 元，哥哥的錢是弟弟的錢的五倍，請問哥哥有多少元？

3.笛卡兒乘積，如你有 3 件上衣，4 條褲子，可以搭配成幾套衣服？

因為國小第四、五冊乘法教材中都是使用正整數，所以依據 Greer（1992）的分類，將正整數的文字體分成以下四種：

1.等組型問題（equal groups）：是由一些內含有相同個數之物體的集合所構成的情境，等組情境以不同的方式出現，有些例子是自然重複的情形（如 n 個人有 5n 根手指頭）；重做一連串的動作（如一次走 3 步，要走 4 次）；和人們的習慣，就如同將相同數目的東西給於一些人（如老師發給 4 個小朋友，每人 5 顆糖果）。另一種變化的方式是比率的乘法（如每個人有 4 塊餅乾，3 個人共有幾塊餅乾？）3 個人是一個人的 3 倍，所以餅乾數也會增為三倍。

2. 笛卡兒乘積（Cartesian product）：是描述一種有序對（ordered pair）關係，每一個序對都是由一個集合的每一個元素與另一個集合的所有元素有順序的結合而成。例如「小英有 3 件不同顏色上衣與 4 件不同款式裙子，可以用來搭配成不同的外出服，請問她的外出服有幾種不同的搭配方式？」這個問題中「外出服」是由「上衣」

與「裙子」兩個集合所合成的。此外還包括陣列問題，例如「升旗排隊時，三甲橫看有 4 列，直看有 6 排，請問三甲共有多少人？」

3. 長方形面積（rectangular area）：是將長方形任何一邊和相鄰一邊的長度相乘，例如「長 4 公尺寬 5 公尺其面積為多少平方公尺？」
4. 比較型乘法（multiplicative comparison）：是一種常被以"n 倍是多少？"來敘述的情境，例如「小華的蘋果是小明的 3 倍，如果小明有 4 個蘋果，小華有幾個蘋果？」此種比較型問題牽涉到二個量，小明的蘋果數是基準量，而我們則利用基準量來求小華的蘋果數目（比較量）。

許美華（民 90）將國內小學數學第四冊六種版本課本與習作之乘法問題作一分析，其將笛卡兒乘積與長方形問題合成一類為笛卡兒乘積問題，發現以等組型問題佔絕大多數約佔了教材總數的 90%；而笛卡兒乘積問題則佔了 7%；比較型最少，僅有 3%。

貳、乘法的解題策略

乘法的解題策略由具體到抽象，由點數到使用乘法。其中的變化不同的學者提出如下：

Anghileri（1989）以訪談和觀察分別蒐集 4 到 12 歲學童的乘法解題策略，提出乘法問題的計數程序，由簡單到複雜，可分成四類，解題策略，而且這四種類型形成了發展順序。

1.單一計數（unitary counting）是指集合中的元素從一開始被計數，直到數完所有集合中的每一個元素為止。例如 2×3，通常

以具體物表徵出題意，再一一計數，1、2、3、4、5、6；或以圖形（例如圓圈）來替代集合中的元素，然後再加以計數。

2.節奏式計數（rhythmic pattern）是以數數停停的方式計數所有集合中的總數，此種方式常以手指來輔助解題，例如 3×5，每次 3 根，重複相加，直到數完。或以一隻手來計數集合內的元素，另一隻手計數已經數完的集合數目。學童在此階段已經從全數式加法（counting all），發展到往上數式加法（counting on）。

3.數字模式（number pattern）是以一個集合中的所有元素為一次計數的數目，不在一個元素、一個元素的計數，例如 3×5，以 3、6、9、12、15 來找出總數。數字模式是由節奏式計數逐漸內化而成的，當學童從「一個元素」為計數單位的節奏式計數發展到以「一個集合」為計數單位的數字模式，顯示學童對數字的認知也已經從數字聚集特性發展到數字的部分特性。

4.乘法事實（multiplication facts）學童經由 3＋3＝6、6＋3＝9、9＋3＝12、12＋3＝15 的計算方式，發現加數是相等的，然後在經由加法與乘法的結合，來建立使用乘法事實的解題活動。

從上面的說明可知，Anghileri 認為乘法的解題活動類型的發展與加法能力的發展是息息相關的。

Mulligan（1992）從 70 位國小二年級學童長達二年的訪談中發現，學童對乘法文字題的解題策略的表現層次有三：直接表徵後點數、無直接表徵的計數或相加、使用已知或推論出的加法或乘法事實。他並進一步將學童所使用的解題策略細分成有九種：

1.以實物表徵問題結構再以計數以求出答數

（1）全數（counting all）；（2）兩數同數（double counting）；（3）跳數（skip counting）；（4）連加法（repeated addition）；（5）重複相加（additive doubling）

2.不需使用實物表徵，而以點數或加法來求出答數

（1）全數；（2）跳數；（3）兩數同數；（4）連加法；（5）重複相加；（6）折半相加。

3.使用已知的推論事實來求出答數

（7）已知的加法事實（know addition fact）：不需再次記數就能立刻知道的加法事實，例 如 3＋3＝6。

（8）已知的乘法事實（know multiplication fact）：不需再次記數就能立刻知道的乘法事實，例如 3×5＝15。

（9）推論出的乘法事實（derived multiplication fact）：利用一個已知的乘法事實去找出另外一個乘法事實，例如 3×5＝15 再加上 3 就等於 18，也就是 3×6

的答數。

Kouba（1989）蒐集一至三年及國小學童的解題策略將學童的應用問題解題策略依抽象程度分成直接表徵法、過渡型數數法、加法和背誦乘法事實，並從統計結果中發現，越低年級的學童使用的策略越具體。

李俊仁（民 81）曾以國小二、三、四、五年級小學生及成人為研究對象，給他們一位數乘法的題目，以分析答題策略。發現受試者

有下列答題策略：

1.直接提取：受試者直接被出九九乘法表中的值，如 3×6，受試：3、6、18；或是 6、3、18（將乘數倍乘數倒過來提取答案）。

2.序列提取：受試者由成數開始背起，直背到有題目要求的成數為止，如 3×6，受試：3、6……..3、1、3；3、2、6；3、3、9；……..3、6、18。

3.點數：受試者以連加法或幾個一數的方式算出答案。如 3×6，受試：3＋3＋3＋3＋3＋3＝18 或是以畫圈計算。

4.直接提取---點數：受試者以直接提取與點數兩種方式得到答案。如 3×6，受試：3、5、15；在加 3 等於 18。

5.序列提取---點數：受試者以序列提取與點數兩種方式得到答案。如 3×6，受試：3、1、3；3、2、6；………3、5、15；16、17、18。

李俊仁（民 81）發現乘法一位數的答題策略與是否熟悉九九乘法有關，例如成人都用直接提取的方式來答題，三年級有 54％以直接提取，40％用序列提取，3.85％用點數的方式。

筆者綜合以上的研究結果，將乘法的解題活動依照 Mulligan（1992）研究的發展順序分為直接表徵、加法運思、乘法運思、過渡型解法四類，如表 2-5。

表 2- 5、乘法問題的解題策略

解題的分類 提出者	直接表徵	加法運思	乘法運思	過渡型解法
Anghileri（1989）	單一計數 節奏式數數		乘法事實	

	數字模式			
Kouba（1989）	直接表徵法 過渡型數數法	加法	背誦乘法事實	
Mulligan（1992）	全數 兩數同數 跳數	連加法 重複相加 折半相加 已知加法事實	已知乘法事實	推論乘法事實
李俊仁（民81）	點數	點數	直接提取 序列提取	直接提取--點數 序列提取--點數

許美華（民 90）分析三位二年級學生乘法問題解題策略的變化歷程，歸納出學習能力影響學童答題表現的進步程度，也影響學童乘法解題策略的變化歷程。

李俊仁（民 81）研究發現到了國小三年級以後，一位數乘法答錯率不超過 5%，這當中犯錯類型有下列幾類：

1.運算值錯誤：受試者給的答案是九九乘法表的答案，但運算值錯誤，如 3×6＝21。

2.運算符號錯誤：受試者用其他符號來運算。如 3×6＝9。

3.合法答案錯誤：受試者給的答案也是九九乘法表的答案，但兩個運算值都不是那個答案該有的運算值。如 3×6＝16。

4.非合法答案錯誤：受試者給的答案不是九九乘法中的答案，如 3×6＝17。

研究者將最近十年國內有關乘法的研究做一整理如表 2-6，在對象方面，可發現多數集中在國小五六年級普通學生的研究；在形式方

面，可發現兩大方向，一是研究乘法概念，一是研究乘法解題策略方面。

表 2-6、乘法相關研究

研究者	對象	研究問題
林碧珍（民 80）	五、六年級普通學生	乘除法應用問題之認知結構
李俊仁（民 81）	二、三、四、五、成人	一位數乘法答題策略發展之研究
林原宏（民 83）	五、六年級學生	乘除法文字題：以列式策略與試題分析
陳美芳（民 84）	五、六年級學生	「學生因素」與「題目因素」對乘除法應用問題解題影響
吳仁俊（民 85）	三年級普通學生	乘法概念—個案研究
李光榮（民 86）	四年級普通學生	乘法概念—個案研究
李盛祖、林世華（民 88）	五年級普通學生	乘法系列診斷測驗題庫的建立

邱裕淵（民 89）	六年級學生	乘法文字題的解題表現
許美華（民 90）	二年級學生	乘法問題解題活動類型縱貫研究

第三章　研究方法

第一節　研究流程

本研究旨在比較高數學能力學生（專家）與低數學能力學生（生手），在解乘法應用問題時之認知運作歷程的差異，期能指出低數學能力學生在解乘法應用問題時其內在認知運作可能面臨的障礙，研究程序請參見圖 3-1。

本研究材料包括低難度與高難度的乘法應用問題各五題，研究者運用放聲思考的方式請高數學能力組學生在應用問題的同時也以口語報告的方式，說出他心中的想法；並在十道題目結束後，在以晤談的方式，詢問受試者解每個問題的想法。低數學能力組學生也是如此。研究者依受試者在解數學應用問題時之放聲思考的口語報告資料及晤談資料，分析比較兩組不同數學能力學生之認知運作歷程的差異。

研究項目	實施程序
1.比較高數學能力學生與數學能力學生解乘法應用問題之解題歷程之差異	1.篩選高低數學能力學生 ↓ 2.實施放聲思考及晤談
2.探索低數學能力學生在解乘法應用問題時，其內在認知運作歷程可能出現的障礙	3.分析比較高、低數學能力學生在解乘法應用問題時，其解題歷程之差異狀況。

圖 3-1　研究流程圖

第二節　研究對象

本階段的研究對象包括國小三年級高數學能力學生及低數學能力學生各五人，共計十人。兩組受試的選擇標準如下：

1.高數學能力學生：任課老師依平日觀察確認口語表達能力正常，在

「中文年級認字量表」的表現為百分等級 50 以上及「閱讀理解困難篩檢測驗」的表現答對率為.50 以上；在「數學診斷測驗」的百分等級為 90 以上；智力在中等程度的國小三年級學生。

2.低數學能力學生：任課老師依平日觀察確認口語表達能力正常，在「中文年級認字量表」的表現為百分等級 50 以上及「閱讀理解困難篩檢測驗」的表現答對率為.50 以上；在「數學診斷測驗」的百分等級為 49 以下，智力在中等程度且無感官、智能、情緒等障礙或文化刺激不足等現象的國小三年級學生。

表 3-1、 參與放聲思考與晤談之受試的基本資料

受試組別	編號	認字量表 PR	閱讀理解測驗 答對率	數學診斷測驗 PR	智力 DIQ
高數學能力	H1	87	.83	99	116
高數學能力	H2	59	.72	98	105
高數學能力	H3	73	.72	90	115
高數學能力	H4	80	.67	94	111
高數學能力	H5	87	1.0	92	114
低數學能力	L1	71	.72	13	110
低數學能力	L2	52	.67	18	101
低數學能力	L3	57	.56	12	112
低數學能力	L4	59	.77	24	106
低數學能力	L5	81	.67	37	118

第三節　研究工具

本研究的目的在收集受試者解乘法應用問題時，其內在之認知運作歷程的資料。所使用的研究工具包括評估識字及閱讀理解能力的測驗、智力測驗、數學能測驗等。茲分項依序說明如下：

一、「中文年級認字量表」（黃秀霜，民 88）

本研究以此測驗做為受試者之識字能力的評估工具。此測驗包括兩百個中文字，由受試者逐字的唸，每唸對一個字算一分，最高二百分。編製者分別建立了國小一年級到國中三年級的百分等級與 T 分數常模。

二、「閱讀理解困難篩選測驗」（柯華葳，民 88）

本研究以此測驗做為受試者之閱讀理解能力的評估工具。測驗內容包括文意題、命題組合題、及理解題等三類題型。編製者分別依國語科段考成績，將小二到小六的樣本學生分為高程度、中程度、及低程度三組，並就這三組學生在此測驗的答對率，建立篩選小學二到六年級高、中、低三種閱讀理解程度的 95%信賴區間。

三、綜合性非語文智力測驗（許天威與蕭金土，民 88）

本研究以此測驗來排除疑似智能障礙的受試，以及挑選智能約略分佈在中等程度範圍的兩組受試。此測驗主要在評估類比推理、歸類區分、及序列推理等能力。其標準化樣本包括台灣地區國小一年級至

國中三年級學生，每個年級各取 100 名共計 900 名。修訂者分別建立離差智商及百分等級兩種常模。測驗的內部一致性係數在.79 到.97 之間；重測信度在.43 到.86 之間，均達到顯著差異水準。

四、國小數學診斷測驗（洪碧霞與吳裕益 ，民 85）

本研究以此測驗來篩選高數學能力與低數學能力學生。此測驗由洪碧霞、吳裕益（民 85）依國民小學新課程編製，隨機取樣台灣省、台北市及高雄市三個地區，每個年級取樣 3391-6272 人，共有十個分測驗：認數、分數、圖形與空間、加減法、乘除法、四則運算、量、時間與計算、統計與圖表以及輔助計算器與解題策略。該測驗之適用對象為國小一至六年級學生，並建立了百分等級常模與精熟水準指標。

本研究以該測驗第五分量表「乘除法」做為篩選學生之依據，此份量表包含 49 題，平均難度為.51。以學校數學成績為作為效標關連效度，其效標效度為.79，Cronbach α係數為.9，均達到顯著差異水準。

五、自編「乘法應用問題」

筆者將受訪學童所上的第四冊及第五冊課本與習作中的練習題以一題為一個單位，依據許美華的分類作一分析，亦可發現以等組型

問題為最多為 92%，笛卡兒問題只佔 6%，比較型問題僅有 2%。教材的分析除了了解學童的學習內容，亦幫助訪談問題的編制與題數安排。

表 3-2 受試在學期間所使用之教科書各類型乘法問題之出現次數表

題型 / 版本	等組型問題	笛卡兒問題	比較型問題	總　計
第四冊（南一）	86（93%）	5（6%）	1（1%）	92
第五冊（康軒）	13（86%）	1（6%）	1（6%）	15
總　計	99（92%）	6（6%）	2（2%）	107

本乘法應用問題係針對受試者在學期間之教科書（南一版第四冊及康軒版第五冊）上所陳列的乘法問題類型做為編題的依據。本研究係以此問題做為放聲思考及晤談的作業（tasks），藉以探討高、低數學能力學生在解題時內在的認知運作狀況。

本應用問題初步預計編製 20 題，研究者擬請國小三年級任課老協助師審查題目內容與題意是否符合學生程度，並進一步以彰化市國小三年級 104 名學生為預試對象，最後再依學生答題通過率選取合宜試題。

正試題目將依預試結果分為低難度及高難度題目各五題，每一題印在一張 B5 紙上，依難度排列由簡單而難，一頁一題裝訂成一本。

六、晤談指引

晤談指引之設計係參考 Mayer（1992）之解題歷程要項設計而成，因研究者認為監控在解題中是一個重要成分且為了便利分析，故把監控單獨成一項。分成問題轉譯、問題整合、解題計畫、解題執行與監控等五個要項，請詳見附錄二，每一要項所提出的問題其代表的意義如表 3-3 所列。

表 3-3、 解題歷程區分表

1.問題轉譯

瞭解問題的已知條件

瞭解問題的解題目標

2.問題整合

決定解答問題所需要的資料

能整合各個陳述句成為連貫一致的表徵

3.解題計畫

以運算列式或數字語句來表示問題

建立次目標

4.解題執行

進行單純計算

進行連續計算

5.監控

檢查答案

檢查解題步驟與計算過程

第四節　研究步驟

一、篩選研究對象

1. 教師推薦

請彰化市泰和國小三年級老師依平日觀察，推薦智力正常、認字及閱讀理解能力正常，數學成績約在班上前 6 名及後 6 名的學生每班各十二名，總計推薦六十名學生。

2.評估識字及閱讀理解能力

就老師推薦的六十名學生，實施「中文年級認字量表」、及「閱讀理解困難篩檢測驗」等兩項測驗。並依前述「高數學能力學生」、「低數學能力學生」的預定標準初步挑選受試。

3.評估智力

所有推薦的六十名學生均接受「綜合性非語文智力測驗」施測，

並依測驗結果先行排除離差智商在 70 以下的疑似智能障礙學生，再挑選離差智商約略在中等程度範圍（亦即大約分佈在平均數負一個標準差與正一點五個標準差之間）的「高數學能力學生」與「低數學能力學生」。

4.評估數學能力

所有推薦的六十名學生均接受「數學診斷測驗」，並依此測驗篩選五位「高數學能力學生」與五位「低數學能力學生」。

二、設計放聲思考材料

研究者依受試者就讀之學校的教學主題來編製乘法應用問題，並請以彰化市國小三年級數學中等程度 104 位學生進行預試，針對預試結果分析題目的難易度。

三、預試及修改資料收集程序

以國小三年級語文能力中等、智能正常及口語表達正常的學生一名，進行「乘法應用問題」的放聲思考及利用「晤談指引」進行晤談的預試。並依預試結果修改放聲思考及晤談的實施程序。

四、實施放聲思考

先由研究者告訴受試者研究的目的及實施的程序，研究者對受試者說明之指導語如下：

「我們現在不是要考試，只是想知道一般三年級學生是如何來解應用問題。等一下我會給你幾題數學應用問題，請你邊做邊說，把在做題時心中浮現的念頭、或曾經想到的事情都直接的說出來。在說的時候，不必去思考要怎麼說才好，也不必去解釋你為什麼心中會有這些念頭或想法，只要很直接的說出來就可以了。

你要把心中的念頭說出來，我才會知道你是怎麼解應用問題的。你要持續用這種方法來解十題應用問題。如果你持續一段時間沒有說出你心中的想法，我會提醒你。整個過程我們會用錄音機錄下來。」

在說明指導語後，接著由研究者示範「放聲思考」進行的方式，並請受試練習一面做問題、一面口述心中想法。必要時研究者會在旁給予提示，例如：「你在想什麼？」，「把你想到的說出來！」等等。當受試者熟悉放聲思考的實施方式後，才正式開始進行。正式開始實施放聲思考後，除非受試沒有反應，否則研究者不給予任何提示，只是將整過程錄音下來，研究者針對放聲思考將做以下解題前及解題後的措施，其流程如圖 3-2。

進行之時機	內容	說明
施測前	解說何謂放聲思考	指解題時，將腦中的運作情形，同步的以語言口述出來。
	說明放聲思考的注意事項	務必做到邊想、邊做及邊說
	測試	以兩題例題用放聲思考做做看
正試施測	正試解題	於 50 分鐘內將 10 題解完
施測後	晤談	應用晤談指南，再次一題一題蒐集解題歷程資料

圖 3-2 放聲思考實施流程圖

五、實施晤談

受試者在解完十題乘法應用問題後，研究者隨即與受試者進行晤談。研究者就先前擬訂之「晤談指引」的問題，逐題與受試者晤談。

五、資料分析

本研究的資料包括放聲思考之口語報告資料及晤談之記錄資料，晤談的資料是由研究者將十位受試的口述資料逐題摘錄成表，再歸納分析其間的含義。放聲思考之口語報告資料的分析方式包括謄寫思考草案、分析解題歷程、及比較兩組受試的差異等，以下分別加以說明：

1. 謄稿：將受試者放聲思考的口語報告錄音資料謄寫成書面的思考草案（protocol）。
2. 將思考草案與題目相配對：將所謄寫之思考草案內容與各個數學應用問題相配對，製作成左邊是題目，右邊是思考草案內容的表格，以便於指認出受試者之解題歷程。
3. 分析解題歷程的要素：思考草案分析的目的在於推敲受試者的內在運作歷程。本研究係參考 Mayer(1992)，將解題歷程分為問題表徵、問題整合、解題計畫、解題執行與監控等五個要項來分析受試者的解題歷程。

研究者分別逐一的審視高數學能力與低數學能力學　生的思考草案，並初步的指出受試者的解題歷程中所呈現的要項，並對每個類別加以定義。而後，再重新檢閱每一位受試的思考草案，同時試著依類別名稱歸類。當出現無法歸類或發覺原來名稱或定義無法

涵蓋某一特定屬性之內容時，則另起新類別或是修改類別名稱及定義。此修改步驟持續進行，直至全部資料循環數遍，而類別名稱及定義不再能修改為止。

4.信度檢驗：在實際進行分析前，先隨機挑選兩份思考草案，由研究者與一位熟悉數學解題歷程之人員，就前述的程序來分析，並核對一致性的比率。如一致性比率太低，則檢討整個分析的項目及程序，並作修改。

5.就思考草案分析的結果，比較高數學能力學生與低數學能力學生，在數學高難度與低難度問題時，其解題歷程的差異。

第四章　結果與討論

本研究旨在比較國小三年級高數學能力與低數學能力受試在乘法應用問題之解題歷程的差異，以便進一步依此差異狀況來探索低數學能力受試在解乘法應用問題時，其內在認知歷程可能遭遇的障礙。以下分為三節來呈現研究的結果，依序為「高數學能力受試的解題歷程」、「低數學能力受試的解題歷程」與「高、低兩組受試之解題歷程的比較及討論」。

第一節　高數學能力受試的解題歷程

研究者綜合受試者解題過程中之放聲思考的口語資料（詳見附錄四）、觀察資料、以及解題完畢後實施之晤談資料（詳見附錄五），並依數學應用問題之解題歷程的幾個要素加以分類整理成表 4-1 至表 4-22。在說明的示例中，「研」是指研究者；大寫英文字母 H 是指高能力受試；L 是指低能力受試。英文字母旁的阿拉伯數字是指第某位受試，如「H1」指高能力組第一位受試，「L3」指低能力組第三位受試，其餘類推。以下即分別依受試者在中等難度題目與高難度題目的解題狀況加以分析說明。

壹、 對中等難度題目的解題歷程

高數學能力學生面對中等難度的題目時其解題歷程，依「問題轉譯」、「問題整合」、「解題計畫」、「解題執行」和「解題監控」等五個要素來整理與分析說明如下，詳見表 4-1 至表 4-5 以及附錄四、五。

一、問題轉譯

高數學能力學生面對中等難度的題目時，大致均能正確的理解問題的要意，且能掌握問題的解題目標。96％個題次，能明確的指出題目的已知條件及題目的要意，僅 4％有誤。舉例如下：

H5 可以理解已知條件：

研：(第四題) 你說說看這個題目在說些什麼？

H5：他爸爸買了牛奶一瓶 115 元，爸爸又買了一瓶 115 元，牛奶一瓶 115 元，爸爸買了 3 瓶以後，又買了 2 瓶 28 元的咖啡，他要問爸爸共花了多少錢？

研：28 是什麼？

H5：就是 28 元的咖啡。

研：28 元可買幾瓶咖啡？

H5：1 瓶。

H2 未能理解已知條件：

研：(第四題) 請你說說看這一題在說些什麼？

H2：牛奶一瓶 115 元，爸爸買了 3 瓶牛奶後，又買了 2 瓶 28 元的咖啡。

研：28 是什麼？

H2：2 瓶咖啡的錢。

在解題目標的理解方面上，高能力組在 25 個題次中均能正確的指出題目的解題目標。舉例如下：

研：(第一題) 你可不可以說說看這個題目要你算出什麼？
H3：要我們算出每包有 7 片口香糖，哥哥買了 16 包，現在哥哥還有幾片。

研：(第二題) 這一題要你算出什麼？
H4：要我們算出 13 個星期又 2 天，共有多少天。

二、問題整合

學生在面對應用問題時，首先需能快速的掌握題目大意及解題的目標。其次，學生需進一步整合各陳述句的含意、運用數學知識的基模判斷該題目屬於何種類型的題目、以及將題目中所牽涉到的不同單位做單位的轉換。高能力組學生在問題整合方面，均能快速地統整各陳述句的含意，以及運用數學知識的基模判斷該題目屬於何種類型的題目。在 25 個題次中，每個題次受試者都能快速地指出該題目屬於乘法問題。舉例如下：

研：(第五題) 這題你是怎麼想的？
H2：小明有 27 個 5 元，小明比小英少 30 元，小英有幾元。
研：那你為什麼要 27 乘於 5？
H2：因為小明有 27 個 5 元。
研：如果不用乘的，還有沒有其他算法？
H2：27 加 5 次。

研：(第一題）那你怎麼知道要這樣想？
H1：因為想到哥哥還有幾片口香糖，就先 7 片乘於 16 包，再把 7 乘以 16 的答案減掉 4 片。
研：那你怎麼會用 7 乘於 16？
H1：7 是一包裡面幾片，16 是包數。
研：那 7 乘於 16 是什麼？
H1：就是 1 包裡面有 7 片， 16 個 7 片。

三、解題計畫

在瞭解題目的要意及掌握解題目標後，學生需進一步將解題目標劃分成幾個次目標，並依序來解題。高能力組學生在解題計畫方面，均能有效的依解題目標來建立次目標。例如在第四題中學生需先算出 3 瓶牛奶的總價，再算出 2 瓶咖啡的總價，最後再把兩者合起來；而在第五題中，學生需先求出小明有多少錢的次目標，才能算出小英有多少錢。受試者的反應如下：

研：(第四題）你說說看這題你剛剛是怎麼想的？
H4：我就是想說牛奶 1 瓶 115 元，爸爸買 3 瓶不知道幾元，所以 115 乘於 3 等於 345，爸爸又買了 2 瓶 28 元的咖啡，28 元的咖啡有 2 瓶也不知道多少錢，所以 28 乘於 2 等於 56，還要把 345 加上 56 等於 401，才是正確答案。

研：(第五題）那請你說說看這一題你怎麼想的？
H3：先想小明的錢；再想小英的，加小英比他多的 30 元，就是答案了。

四、解題執行

成功的解題除了要正確的理解題意及建立解題計畫外，實際的計算也不能有誤。高能力組學生在解題執行方面大致能夠快速及正確地計算出問題的答案。88%計算正確，12%計算錯誤，計算錯誤的情形說明如下

1. H5 在第一題 16 ×7＝94，因為 6 ×7＝42 應該是寫 2 進 4，他寫成寫 4 進 2，導致錯誤。
2. H3 在第五題 135 ＋ 30＝205，加法計算錯誤。
3. H5 在第五題 27 ×5＝55，7 ×5＝35 寫 5 進 3，應該要在乘於十位數，但他漏了此步驟，直接就在十位數那裡計算 3+2＝5。

除了計算結果的對錯之外，受試者的計算方式也值得觀察。高能力組受試的計算速度相當快，在中等難度的五道題目中，從讀題到解題完畢，平均速度都在一分鐘以內，此部分將留在第三節作進一步說明。當計算需要運用到九九乘法表的知識時，高能力組受試幾乎都是直接提取，未見有序列提取或是點數的情形。這也是高能力組受試能快速解題的原因之一。

計算的型式也在此一併說明，H1 習慣直接用橫式計算，並不需要用直式計算，尤其是二位數乘法或是三位數乘法，他照樣可以快速的計算出答案，而且五題都無誤。H2 及 H4 都用直式計算，H3 及 H5 則是先用算數填充式的方式寫一次，

再用直式計算。

對於計算的步驟，高能力組受試在第一、二、三、五題都是用二個步驟來計算，只有第四題是用三個步驟來計算。如果只計算算對題目所用的步驟數，則高能力組受試在中等難度題目的平均計算步驟數為 2.2 個步驟。

五、解題監控

解題監控是指受試者在解題的過程中，能隨時覺察自己的解題狀況，在解題完成後也能回頭檢閱自己解題的正確性。必要時，受試者會依監控狀況，對自己的解題狀況提出修正或調整的措施。在解題的監控方面，高能力組受試大致均能覺察出自己的解題狀況。雖然研究者從受試者解題行為的觀察發現，高能力組受試在完成中等難度題目的解題後都未再檢查、驗算，做完題目之後就直接表示寫好了；但是在晤談的過程中，研究者詢問受試：「你覺得自己的解題是不是都正確？或者哪裡有錯誤？」，受試者的判斷在 25 個題次中有 23 個題次是恰當的。這表示受試者雖未驗算，但是受試者能覺察出題目的難度不高，自己的解題狀況不必再進一步檢查。

表 4-1、高能力組受試在第一題之解題歷程的分析摘要表

題目：每包口香糖有 7 片，哥哥買了 16 包後吃了 4 片，請問哥哥現在還有幾片口香糖？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:34 秒 2.用直式二步驟解題 7×16＝112 112-4＝108	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1 具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:35 秒 2.用橫式二步驟解題 7×16＝112 112-4＝108	1.寫完時未檢查 2.考慮很久才說自己算對。
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:47 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算。 7×16＝112 112-4＝108	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:42 秒 2.用直式二步驟解題 7×16＝112 112-4＝108	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:55 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算。 16×7＝94，進位錯誤。 94-4＝90	1 寫完時未檢查 2 不知道自己算得對不對。

表 4-2、高能力組受試在第二題之解題歷程的分析摘要表

題目：一星期有七天，13 個星期又 2 天共有幾天？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期總日數 2.再加上 2 天	1.時間:25 秒 2.用橫式二步驟解題 7×13＝91 91+2＝93	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期總日數 2.再加上 2 天	1.時間:26 秒 2.用直式二步驟解題 13×7＝91 91+2＝93	1.寫完時未檢查 2 再看一下計算過程，才說自己算對

H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期總日數 2.再加上 2 天	1.時間:32 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 7×13＝91 91+2＝93	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期總日數 2.再加上 2 天	1.時間:26 秒 2.用直式二步驟解題 13×7＝91 91+2＝93	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具有乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期總日數 2.再加上 2 天	1.時間:48 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 13×7＝91 91+2＝93	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

表 4-3、高能力組受試在第三題之解題歷程的分析摘要表

題目：每個盒子裝 15 個草莓，媽媽買了 9 盒，發現有 4 個壞了，請問還有幾個好的草莓？

歷程 / 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1. 具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 15 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:28 秒 2.用直式二步驟解題 15×9＝135 135-4＝131	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1. 具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 15 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:33 秒 2.用直式二步驟解題 15×9＝135 135-4＝131	1 寫完時未檢查 2 很有信心認為自己算對
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 15 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:52 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 15×9＝135 135-4＝131	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 15 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:31 秒 2.用直式二步驟解題 15×9＝135 135-4＝131	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 15 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:52 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 15×9＝135 135-4＝131	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

表 4-4、高能力組受試在第四題之解題歷程的分析摘要表

題目：牛奶一瓶 115 元，爸爸買了 3 瓶牛奶後，又買了 2 瓶 28 元的咖啡，請問爸爸共花了多少元？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:33 秒 2.用橫式三步驟解題 115×3＝345 28×2＝56 345+56＝401	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H2	1.認為咖啡是 2 瓶加起來等於 28 元。 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再合計 3 瓶牛奶及一瓶咖啡的錢。	1.時間:37 秒 2.用直式二步驟解題 115×3＝345 345+28＝373	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:65 秒 2.先寫出三步驟算式填空題，再用直式計算 115×3＝345 28×2＝56 345+56＝401	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:53 秒 2.用直式三步驟解題 115×3＝345 28×2＝56 345+56＝401	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:102 秒 2.先寫出三步驟算式填空題，再用直式計算 115×3＝345 28×2＝56 345+56＝401	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

表 4-5、高能力組受試在第五題之解題歷程的分析摘要表

題目：小明有 27 個 5 元，他比小英少 30 元，請問小英有幾元？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出小明有多少錢。 2.再算出小英的錢。	1.時間:51 秒 2.用橫式二步驟解題 27×5＝135 135+30＝165	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出小明有多少錢。 2.再算出小英的錢。	1.時間:35 秒 2.用直式二步驟解題 27×5＝135 135+30＝165	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出小明有多少錢。 2.再算出小英的錢。	1.時間:44 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 27×5＝135 135＋30＝205 計算錯誤	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出小明有多少錢。 2.再算出小英的錢。	1.時間:35 秒 2.用直式二步驟解題 27×5＝135 135+30＝165	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出小明有多少錢。 2.再算出小英的錢。	1.時間:44 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 27×5＝55，計算錯誤 55+30＝85	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對

貳、對高難度題目的解題歷程

高數學能力學生在高難度題目的解題歷程，也是依「問題轉譯」、「問題整合」、「解題計畫」、「解題執行」和「解題監控」等解題歷程的五個要素來加以分析說明，資料詳見表 4-6 至表 4-10 以及附錄四、五。

一、 問題轉譯

對於高難度的題目，多數高能力組受試均能掌握題目的要意，也都能清楚題目的解題目標。對於題目的已知條件與未知條件，在 25 個題次中有 23 個題次能正確瞭解，兩個題次的錯誤都發生在第七題。其中 H5 直接表示這一題他不太會；而 H1 則遺漏了題目的部分要件--「兩張獎勵卡」。H1 的情形請看下列晤談資料：

研：(第七題) 這個題目要你算出什麼？
H1：要算出兩張獎勵卡又六個梅花章，它說還需要幾個梅花章才能換一張獎狀。兩張獎勵卡就可以不必算了，他說 15 個梅花章可以換一張獎勵卡，就先把 4 張乘起來，在用 60 減掉 6 個梅花章，就是答案了。

在解題目標的瞭解上，高能力組受試均能清楚每一題的解題目標，雖然 H5 在第七題表示他不會算，可是他也能明確的指出題目的解題的目標。

二、問題整合

對於高難度的問題，高能力組受試均能運用其數學知識分辨出所面對的題目是屬於乘法應用問題。這表示受試者具有乘法基模，且能運用此基模來幫助他解題；在陳述句的整合及單位的轉換方面，高能力組受試有 20％出現錯誤，例如：H4 對第七題中「哥哥已經有 2 張獎勵卡又 6 個梅花章，4 張獎勵卡才能換一張獎狀」的敘述，誤認為哥哥還須 2 張獎勵卡及 9 個梅花章；H2 與 H5 在第十題「塊」、「盒」和「箱」等不同單位的轉換有誤；H5 在第 7 題誤認已知條件。有關整合有誤的狀況，請看下列晤談資料：

研：(第十題）那你這一題你怎麼想的？

H5：我是想說一盒有 6 塊香皂，一大箱可以裝 24 盒，3 大箱有 24 盒，就 3 乘 24 盒等於 72，但是 72 盒不知道有幾塊香皂，所以就用 6 塊香皂，有 72 盒，所以除起來總共有 12 塊香皂。

研：這 12 塊是 3 大箱的？

H5：嗯……3 大箱應該不止只有 12 塊。

研：那 3 大箱應該有幾塊？

H5：3 大箱有 72 盒，應該是 72 乘於 6 才對。

三、解題計畫

對於高難度的問題，高能力組受試大致能依解題計畫建立解題的次目標，只有 8％出現錯誤。受試者在整個解題歷程中，如果前面階段的問題表徵或問題整合就出現錯誤，自然會影響解題計畫的運作，並導致建立次目標時的錯誤或是欠缺一、二個次目標，例如：H1 在第七題的問題表徵中忽略

了已知條件「兩張獎勵卡」，所以在解題計畫中便少了二個次目標（詳見表 4-7）；H2 在第十題因為單位整合錯誤，所以也導致解題計畫中次目標有所偏差（詳見表 4-10）。

四、解題執行

對於高難度的問題，高能力組受試大致都能依所建立之解題的次目標進行正確的計算。高能力組受試在 88％計算正確，有 12％計算出現錯誤，例如：H3 在第八題從自己的算式填充題抄成直式計算，72 抄成 73 導致計算錯誤；H5 在第九題 4 ×56＝324，計算錯誤；H 4 在第十題 432 + 30＝502，計算錯誤，而且這些錯誤都是屬於「粗心、不經意的錯誤」，。

高能力學生在高難度題目平均每題解題時間為 86.76 秒，平均解題步驟數為 2.7 個步驟。

五、解題監控

對於高難度的問題，高能力組受試對於問題轉譯及問題整合的部分都能有適當的覺察與調整，對計算的部分則較少加以檢視，做完題目後通常未再驗算就直接表示已經完成了。受試者 28％個題次中，曾重讀題目；有 8％個題次，自己覺得解題有誤，並加以修正。這表示受試者對自己在題目的理解狀況及解題的狀況有所覺察，並能運用一些措施來修正與補強。

在晤談的過程中，研究者詢問受試：「你覺得自己的解題是不是都正確？或者哪裡有錯誤？」，受試者的判斷在 80％個題次是恰當的。這表示受試者雖未驗算，但是受試者大致能覺察出自己在解題過程中的表現狀況，例如：H5 在晤談過程中發現他在第七題及第十題解題有錯誤；H2 也能發現他在第九題及第十題解題錯了。這些覺察都著重在問題表徵及問題整合的階段，但是對於計算錯誤部分，他們就比較缺乏覺察的能力了，例如 H5 雖然能覺察他在第七與第十題的解題有錯誤，就沒有發覺他在第九題的計算錯誤。舉例如下：

H2 在第十題發覺他算錯了

研：那你這一題你怎麼想的？
H2：一大箱裝 24 盒，乘於 6 塊香皂，算出來有 144 塊香皂。
研：144 塊香皂是哪裡的？
H2：一大箱。
研：再來呢？
H2：美美有 3 大箱，用 144 乘於 3 等於 432 塊，美美又有 5…..（停下來）
研：你發覺算錯了嗎？
H2：點點頭。
研：好。要怎樣改？
H2：（重新改）是 5 盒，30 塊香皂。

表 4-6、高能力組受試在第六題之解題歷程的分析摘要表

題目：一件衣服 288 元，一條褲子 369 元，買 2 條褲子及 3 件衣服共要多少錢？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服合起來的錢 2.在算出 2 條褲子合起來的錢 3.合計衣服及褲子的總金額	1.時間:32 秒 2.用橫式三步驟解題 288×3＝864 369×2＝738 864+738＝1602	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服合起來的錢 2.在算出 2 條褲子合起來的錢 3.合計衣服及褲子的總金額	1.時間:70 秒 2.用直式三步驟解題 288×3＝864 369×2＝738 864+738＝1602	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服合起來的錢 2 在算出 2 條褲子合起來的錢 3 合計衣服及褲子的總金額	1.時間:105 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 288×3＝864 369×2＝738 864+738＝1602	1 解題中發現計算錯誤，從新修改。 2 認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服合起來的錢 2 在算出 2 條褲子合起來的錢 3 合計衣服及褲子的總金額	1.時間:62 秒 2.用直式三步驟解題 288×3＝864 369×2＝738 864+738＝1602	1 寫完時未檢查 2 認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服合起來的錢 2 在算出 2 條褲子合起來的錢 3 合計衣服及褲子的總金額	1.時間:143 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 288×3＝864 369×2＝738 864+738＝1602	1 解題中發現錯誤重新修改 2 認為自己算對

表 4-7、高能力組受試在第七題之解題歷程的分析摘要表

題目：集滿 15 個梅花章可換一張獎勵卡，4 張獎勵卡可換一張獎狀，如果哥哥已經有 2 張獎勵卡又 6 個梅花章，請問他還需要幾個梅花章才能有一張獎狀？

歷程／受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.遺漏已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出一張獎狀需要多少個梅花章。 2. 再減掉已有梅花章的數目	1.時間:69 秒 2.用橫式二步驟解題 15×4＝60 60-6＝54	1.重複讀題讀 34 秒。 2.寫完時未檢查 3.認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1. 具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1 先算出一張獎狀需要多少個梅花章。 2. 算出 2 張獎勵卡需要幾個梅花章。 3 算出哥哥已 經有多少個梅花章。 4 算出哥哥還需要幾個梅花章。	1.時間:189 秒 2.用直式四步驟解題 15×4＝60 15×2＝30 30+6＝36 60-36＝24	1 重複讀 161 秒。 2.解題時 4－2 擦掉 2 次，考慮很久，才重新作答 3.寫完時未檢查 4.考慮很久才認為自己算 對
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1 先算出一張獎狀需要多少個梅花章。 2. 算出 2 張獎勵卡需要幾個梅章。 3.算出哥哥已 經有多少個梅花章。 4 算出哥哥還需要幾個梅花章。	1.時間:88 秒 2.用直式及橫式四步驟解題 15×4＝60 15×2＝30 30+6＝36 60-36＝24	1 重複讀題 39 秒。 2.寫完時未檢查 3.認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.對已知條件整合錯誤	1 先算出還需要幾個梅花章才可以換一張獎勵卡 2 再算出 2 張獎勵卡需要幾個梅花章 3 算出全部還需幾個梅花章	1.時間:81 秒 2.用直式三步驟解題 15－6＝9 15×2＝30 30＋9＝39	1.重複讀題 43 秒。 2.寫完時未檢查 3.認為自己算對

H5	1.不清楚題意 2.知道解題目標	1.無法整合各個已知條件。	1.先算出一張獎勵卡需要幾個梅花章 2.在算出另一張獎勵卡需要幾個梅花章 3.將兩張獎勵卡的梅花章總數合計。	1.時間:139 秒 2.先寫出三步驟算式填空題，再用直式計算 6×15＝90 6×15＝90 90+90＝180	4 重複讀題 2 次 5 訪談時表示這一題不太會算

表 4-8、高能力組受試在第八題之解題歷程的分析摘要表

題目：一盒蛋糕有 72 塊，小明有 7 盒蛋糕，小英有 3 盒，請問小明比小英多幾塊蛋糕？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕。	1.時間:37 秒 2.用橫式三步驟解題 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數	1.時間:50 秒 2.用直式三步驟解題 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對

H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數	1.時間:64 秒 2.先寫出三步驟算式填空題，再用直式計算 3.從算式填空抄下來計算，72 抄成 73，導致錯誤 72×7＝504 73×3＝219 504-219＝285	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數	1.時間:76 秒 2.用直式三步驟解題 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數	1.時間:64 秒 2.先寫出三步驟算式填空題，再用直式計算 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對

表 4-9、高能力組受試在第九題之解題歷程的分析摘要表

題目：每個盒子放 4 個蘋果，小美少 1 個才有 56 盒，請問小美共有幾個蘋果？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 56 盒蘋果總數 2.再減去少一個	1.時間:32 秒 2.用橫式二步驟解題 4×56＝224 224-1＝223	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.已知條件整合錯誤	1.先算出 55 盒蘋果總數 2.再加上 1 個	1.時間:46 秒 2.用直式二步驟解題 55×4＝220 220+1＝221	1.寫完時未檢查 2.訪談時發覺算錯了
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 56 盒蘋果總數 2.再加上 1 個	1.時間:43 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 56×4＝224 224+1＝225	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 56 盒蘋果總數 2.再加上 1 個	1.時間:73 秒 2.用直式二步驟解題 56×4＝224 224+1＝225	1.看題目看了 41 秒。 2 寫完後又再看一眼 3.認為自己算對
H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 56 盒蘋果總數 2.再減去少一個	1.時間:89 秒 2.先寫出二步驟算式填空題，再用直式計算 4×56＝324 計算錯誤 324-1＝323	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對

表 4-10、高能力組受試在第十題之解題歷程的分析摘要表

題目：一個盒子裡有 6 塊香皂，一大箱可以裝 24 盒，美美有 3 大箱又 5 盒，請問美美共有幾塊香皂？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
H1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出一大箱共可裝幾塊香皂 2.再算出3大箱的香皂總數 3.算出5盒的香皂總數 4.合計3大箱又5盒的香皂數	1.時間:80秒 2.用橫式四步驟解題 6×24＝144 144×3＝432 6×5＝30 432+30＝462	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.5盒香皂未化成「塊」的單位	1.算出一大箱共可裝幾塊香皂 2.再算出3大箱的香皂總數 3.合計3大箱又5盒的香皂數	1.時間:61秒 2.用橫式三步驟解題 6×24＝144 144×3＝432 432+5＝437	1.寫完時未檢查 2 訪談時發覺算錯了
H3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1． 具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出一大箱共可裝幾塊香皂 2.再算出3大箱的香皂總數 3.算出5盒的香皂總數 4.合計3大箱又5盒的香皂數	1.時間:101秒 2.先寫出四步驟算式填空題，再用直式計算 6×24＝144 144×3＝432 6×5＝30 432+30＝462	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
H4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1 先算出3箱有幾盒香皂 2 再算出3箱有幾塊香皂 3 算出5盒的香皂總數 4.合計3大箱又5盒的香皂塊數	1.時間:120秒 2.用橫式三步驟解題 6×24＝144 144×3＝432 6×5＝30 432＋30＝502 計算錯誤	1.重複讀題41秒 2.寫完時未檢查 3.認為自己算

H5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.無法整合各種單位轉換	1.無有效計畫	1.時間:213 秒 2.先寫出四步驟算式填空題，再用直式計算 24×8＝72 72÷6＝12 6×5＝30 12+30＝56	1.寫完時未檢查 2.訪談時表示算錯了

參、高能力組受試在中、高難度題目之解題歷程的比較

高能力組受試在中、高難度題目解題歷程之差異，請見表 4-11。在問題轉譯中，高能力組受試對於中、高難度題目都能掌握已知條件及題目的要義，而且也能瞭解題目的解題目標。但是，在解高難度題目時，偶而會遺漏題目的部分要件。

在問題整合的過程中，高能力組受試對於中、高難度的題目都能快速統整各個陳述句的含義。但是，在解高難度的題目時，對題意的統整偶而會出現錯誤，尤其是當題目中出現多個單位的轉換時，其問題整合的錯誤會增加。

對於解題計劃，高能力組受試在中、高難度題目都能有效的建立次目標。在解題執行的歷程，高能力組受試對於中、高難度題目大都能快速且有效率的計算出題目的正確答案，但在兩種難度的題目都會有粗心計算錯誤的狀況出現。

高能力組受試解題完畢後，在中、高難度兩類題目中，都未進一步再作驗算；但是，對於問題的轉譯與統整方面，

則能加以覺察及修正與補強。

高能力組在中難度題目的平均答對題數多於高難度的題目，中難度題目的平均答對題數為 4.2 題，在高難度題目的平均答對題數為 3.4 題，以 t 考驗來檢視，t 值為 2.530，達到統計上顯著差異水準。高能力組在中難度題目的平均解題時間明顯的低於高難度的題目，高能力組受試在中難度題目平均解題時間為 40.12 秒，在高難度題目平均解題時間為 86.76 秒。以 t 考驗來檢視，t 值為-4.782，達到統計上顯著差異水準（p＜.05)。這表示對於高難度的題目，除了題目長度變長之外，解題所需的步驟也增多；另一方面，單位的轉換也變得複雜。因此導致工作記憶負荷增加，以致提取及解題所需時間加長。

4-11、高能力組受試在中、高難度題目之解題歷程的摘要表

解題歷程	中難度題目	高難度題目
問題轉譯	1.能瞭解已知條件 及題目的要意 2.能掌握解題目標	1.能了解已知條件 及題目的要意 2.能掌握解題目標 3.偶而會遺漏題目的部分要件
問題整合	1.能快速統整各個陳述句 的含意 2.能運用乘法基模判斷 問題類型	1.能快速掌握各個陳述句的含意， 但偶而出現整合問題 2.能運用乘法基模判斷 問題類型 3.單位間的轉換偶會出現錯誤
解題計劃	1.能有效建立次目標	1.能有效建立次目標
解題執行	1.大致能快速且正確的 計算出答案，偶而會	1.大致能快速且正確的 計算出答案，偶而會

	有粗心的計算錯誤現象	有粗心的計算錯誤現象	
解題監控	1.未驗算 2.能覺察自己的解題狀況 3.未能覺察計算的錯誤	1.未驗算 2.能覺察自己的解題狀況 3.未能覺察計算的錯誤	
解題時間（秒） M(SD)及 t 值	40.12 (16.59)	86.76 (45.86)	t = -4.782***
平均答對題數 M(SD)及 t 值	4.2(.45)	3.4(.55)	t =2.350*

肆、高能力組受試之解題歷程的綜合結果

綜合上述之分析說明，並回應第一章之研究問題一：「國小三年級高數學能力學生在乘法應用問題的解題歷程如何？」，本研究的結果如下：

1.對於中難度的題目，高能力組學生能快速的理解題目的要意及解題目標，並依解題目標有效的建立解題的次目標，也能運用乘法基模知識來判斷問題的類型與協助解題。在解題執行時，能快速且正確的計算出題目的答案，只是偶而出現粗心的計算錯誤。在解題監控方面，高能力組學生能覺察自己的解題狀況，但是比較缺乏對計算錯誤的覺察。

2.對於高難度的題目，高能力組學生也能把握題目的要意與解題目標，但是偶而會遺漏題目的部分要件；在問題整合方面，高能力組受試能快速的統整題目中各個陳述句的含意，也能運用乘法基模知識來判斷問題的類型，但是偶而會出現題意整合的問題，尤其是牽涉到多重單位間之轉換

的問題；在解題計劃方面，高能力組學生大致都依解題目標，有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，高能力組學生大致能快速且正確的計算出題目的答案，只是偶而會有粗心的計算錯誤現象；在解題監控的情形方面，高能力組學生能覺察自己的解題狀況，但是比較缺乏對計算錯誤的覺察。

3 整體來看，高能力組受試對乘法應用問題的解題歷程，在解題歷程的五個要素中，大致均能表現出良好的運作狀況。比較容易出現錯誤的是在問題整合與解題執行的階段，特別是高能力組學生對計算錯誤的覺察狀況並不理想，這可能會加重解題錯誤的現象出現。

第二節　低數學能力受試的解題歷程

研究者綜合受試者解題過程中之放聲思考的口語資料（詳見附錄二）與觀察資料以及解題完畢後之晤談資料（詳見附錄三），並依數學應用問題之解題歷程的五個要素加以分類整理成表 4-12 至表 4-21, 以下即分別依受試者在中等難度題目與高難度題目的解題狀況加以分析說明。

壹、 在中等難度題目的解題歷程

低數學能力受試面對中等難度的題目時其解題歷程，依「問題轉譯」、「問題整合」、「解題計畫」、「解題執行」和「解題監控」等五個要素來整理與分析說明如下，詳見表 4-12 至表 4-16 以及附錄二、三。

一、問題轉譯

低能力組受試對於中等難度題目的解題，大致能夠瞭解問題的已知條件及解題目標，但是對於題目中的關係語句則較難以理解，以致影響對問題要意的掌握。受試者在 80%個題次能清楚且正確的了解問題的已知條件，有 20%個題次有誤，例如：L5 在第三題將「4 個草莓」誤為「4 盒草莓」；L1 、L2、 L3 則在第五題對關係語句「他比小英少 30 元」理解錯誤；L4 則遺漏了此句。舉例如下：

L2 在第五題對已知條件不明確

研：30 是什麼？
L2：30 就是有小英的錢。
…………
研：30 是什麼？
L2：30 就是小英有 30 個 5 元。

L3 在第五題對關係語句的解釋，「少 30 元」變成「30 元」

L3：小明有 27 個 5 元，它說想要跟小英比多少錢，小英原來有 30 元。

在解題目標上，低能力組學生有 88%能清楚的知道每一題的解題目標，僅 L2 在第二題、第五題及 L3 則在第五題的解題目標不清楚。舉例如下：

L2 在第二題對解題目標不清楚

研：(第二題) 你可不可以說一說這個題目要你算出什麼？
L2：要我們算出幾天。
研：幾天？你怎麼知道要算出有哪幾天？
L2：就是不是很久的事，又 2 天。

L3 在第五題對解題目標前後不一致

研：105 是什麼？
L3：105 是小英的錢。
研：你剛剛不是說小英有 30 元？
L3：135 是小明的錢，30 是小英的錢，然後算算看。
研：那算出來 105 是什麼？
L3：是他們的錢。

在輔助的策略方面， L3 、L4 在每一題都會先畫圈，並且在圈圈裡面寫數字來表示題意，以便幫助自己理解題目的含意。L2 在第五題也是使用這種策略來幫助自己表徵題意。

二、問題整合

低能力組受試面對中等難度題目時，能運用先前的數學

知識來幫忙判斷題目的類型，但是有些受試把題目歸為乘法的題型，有些則把題目歸為加法的題型。這表示，有些受試者具備乘法的基模，而且能用此基模來協助解題；另外有些低能力組受試則可能仍未具備乘法基模，例如：L1、 L2 及 L5 會以乘法基模來判定所面對之問題的類型；L3、 L4 則都是以加法的型式來思考問題。其晤談資料的例子如下：

L1 在第一題的晤談，可瞭解具有乘法基模。

L1：因為口香糖裡面有 7 片，哥哥買了 16 包，就是 16 乘於 7。

L3 在第四題的晤談是以加法基模來思考

研：你說說看這題你剛剛是怎麼想的？
L3：先把牛奶畫下來，每瓶 115 元，然後把牛奶 3 瓶加起來，然後在來畫咖啡 2 杯，每杯 28 元加起來，然後把牛奶的錢加咖啡的錢。

在問題之各個陳述句間的整合方面，低能力組受試大致能夠統整問題的含意，但是容易因為問題中的關係語句以及單位的轉換，而影響對問題的瞭解。在 72％個題次可以統整各陳述句的含意，有 28％個題次錯誤。例如：受試者在第五題有四題次的錯誤，因為題目中「..他比小英少 30 元」，受試者難以理解「..比..少..」的關係語句，所以整合時便成了混淆狀態。另外，受試者對第二題中「星期」與「天」之間的換算，也易出現單位整合混淆的情形。舉例如下：

L2 在第二題的晤談可以發現整合問題

研：（第二題）那你這邊為什麼用 13 乘於 2？
L2：因為那裡有 13 個星期又 2 天。
研：13 個星期又 2 天，所以用乘的？
L2：嗯。
研：乘出來是什麼？
L2：26。
研：13 個星期又 2 天乘出來是 26？
L2：嗯。
研：乘出來 26 代表是什麼？
L2：代表他們兩個合起來有幾天。
研：哪兩個？
L2：13 個星期又 2 天。
研：那你為什麼要再加 7？
L2：因為還有 7 個星期。
研：7 個星期用加 7 就可以了嗎？上面 26 是 26 個星期嗎？
L2：對
研：所以算出來答案是多少？
L2：33
研：33 天還是 33 個星期？
L2：33 天。

三、解題計畫

低能力組受試在中難度題目的解題計畫方面，也是會依解題目標來建立次目標的現象，在 88％個題次中能建立解題計劃。但因為解題計畫與問題表徵及問題整合有很大關連，當受試者在問題表徵階段對已知條件未能清楚掌握時，就可能導致解題計畫的錯誤。例如：在下列的示例中，L2 在第二題的對話，可以發現此種現象；再者，問題整合也會影響解題計畫，當各個陳述句無法整合時，受試者就有拼湊數字的

現象，把已知的數字拿來拼湊。

研：(第二題）你怎麼知道把 13 跟 2 乘在一起？
L2：看起來才知道幾天。
研：這樣看起來才知道幾天？13 乘於 2 才知道幾天是不是？
L2：嗯！
研：然後呢？
L2：又七個星期，在加 7。
研：在加 7 就知道幾天了？
L2：是。

四、解題執行

低能力組受試在解題執行上呈現出，計算技能不夠熟練且容易計算錯誤的現象。對於乘法的計算，多數受試者是使用系列提取而非直接提取的方式來計算，甚至有以點數來輔助或拆開來分別乘然後再累加起來的情形，或是直接用累加計算。舉例如下

第一題 L5 用系列提取

7 **乘於** 16 **等於** 7、1、7，7、2、16，7、3、21……………7、6、42…….

第一題 L3 用累加的方式計算

16+16+16+16+16+16+16＝112
112－4＝108

第一題 L4 用累加的方式列式，再拆開分別乘，然後再加起來。

7+7+7………＝（ ） **共加了** 15 **次**

9×7＝63
6×7＝42
42+3＝45
63＋45＝108

在 28％個題次中有計算上的錯誤，這些計算錯誤有 16％個題次是因為二位數或三位數乘於一位數時對位錯誤所造成的，有 8％的錯誤是乘法乘錯了，例如 L1：15×9＝130、L2：15×9＝125，有 4％個題次為加錯了。

低能力組平均每題的解題時間為 113.24 秒，計算答對題目的平均解題步驟為 2.7 個步驟。

五、解題監控

低能力組受試在做完題目後，大多不會再驗算，寫完之後就直接表示已經完成了，只有 16％個題次有驗算。

對於解題過程中的自我覺察與自我監控的行為，低能力組受試者的表現並不理想。當研究者詢問受試者：「你覺得自己的解題是不是都正確？或者哪裡有錯誤？」，受試者的判斷只有在 40％個題次是恰當的。有一位受試者會在研究者詢問他時，重頭心算一次，其餘受試則無此種情形。

表 4-12、低能力組受試在第一題之解題歷程的分析摘要表

題目：每包口香糖有 7 片，哥哥買了 16 包後吃了 4 片，請問哥哥現在還有幾片口香糖？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:97 秒 2.用直式二步驟解題 16×7＝112 112-4＝108	1.寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:118 秒 2.用直式二步驟解題 16×7＝112 112-4＝108	1.寫完在看一下自己的計算過程 2.不知道自己算得對不對。
L3	1.知道已知條件 3.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	2.先算出 16 包口香糖總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:110 秒 2.16+16+16+16+16+16+16＝112 112-4＝108 用直式計算	1.寫完未檢查 2.認為自己算對

L4	1.知道已知條件 2 知道解題目標 3.畫圈表示	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先將一包吃掉的 4 片減掉 2.再將 15 包分成 9 包及 6 包 3 分別計算 9 包及 6 包的口香糖片數 4.計算口香的總片數	1.時間:110 秒 2.先畫出 16 圈，每個圈下寫 7。 3.用 4 步驟直式計算 7+7+…7＝ 9×7＝63 6×7＝42 42+3＝45 63＋45＝108	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 16 包口香糖的總片數 2.再減掉已經吃的 4 片。	1.時間:74 秒 2.用直式二步驟解題 7×16＝742，乘法對位錯誤 742－4＝738	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對自己算對

表 4-13、低能力組受試在第二題之解題歷程的分析摘要表

題目：一星期有七天，13 個星期又 2 天共有幾天？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	3.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	4.先算出 13 個星期的總日數 5.再加上 2 天。	1.時間：48 秒 2.先寫二步驟算是填充題再用直式計算 13×7＝91 91＋2＝93	1 寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。

L2	1.知道已知條件 2.解題目標不清楚	1.各個陳述句間無法整合 2.單位轉換無法整合	1.拼湊數字計算	1.時間：104 秒 2.先寫二步驟算是填充題再用直式計算 13×2＝26 26＋7＝33	1.寫完未再檢查 2.不知道自己算得對不對
L3	1.知道已知條件 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1 各個陳述句間無法整合	1.拼湊數字計算	1.時間：42 秒 2.先畫圈表示 3.在用二步驟直式計算。 13＋13＝26 26＋2＝28	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L4	1.知道已知條件 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先將 13 個星期分成 10 星期及 3 星期。 2.分別計算 10 星期及 3 星期的天數 3.再加上 2 天	1 時間：113 秒 2 先畫圈表示 4.用四步驟直式計算。 10×7＝70 3×7＝21 21＋2＝23 70＋23＝93	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 13 個星期的總日數 2.再加上 2 天。	1.時間：46 秒 2.用直式二步驟記算 3.7×13＝721，對位錯誤 721＋2＝723	1 寫完未檢查 2 不知道自己是否算對

表 4-14、低能力組受試在第三題之解題歷程的分析摘要表

題目：每個盒子裝 15 個草莓，媽媽買了 9 盒，發現有 4 個壞了，請問還有幾個好的草莓？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 9 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1.時間:72 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式二步驟解題。 15×9＝130 乘法錯了 130－4＝126	1 寫完未再檢查 2.訪談時發現計算錯誤，重新訂正，但仍計算錯誤 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 9 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1 時間:72 秒 2 用直式二步驟計算 3.15×9＝125 乘法錯了 125-4＝121	1.寫完再看一下計算過程 2.不知道自己是否算對
L3	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 9 盒的草莓總數。 2.再減掉壞的	1 時間:119 秒 2 先畫 9 個圈表示 3.15 加 9 次 15+15+15+…+15＝135 135-4＝131	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	2.先把一盒裡面 4 個壞的減掉 3.計算 8 盒草莓總數 4.合計兩者	1 時間:155 秒 2 先畫 9 個圈 3.直式三步驟解題 15-4＝11 15×8＝120 120+11＝131	1.寫完未檢查 2.認為自己算對

L5	1.已知條件 4 個看成 4 盒 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 9 盒的草莓總數。 2.算出 4 盒壞掉的總數 2.好的減壞的	1 時間:98 秒 2 用直式三步驟計算 3.15×9＝945 15×4＝420 對位錯誤 945-420＝525	1.寫完未檢查 2.不知道是否算對

表 4-15、低能力組受試在第四題之解題歷程的分析摘要表

題目：牛奶一瓶 115 元，爸爸買了 3 瓶牛奶後，又買了 2 瓶 28 元的咖啡，請問爸爸共花了多少元？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:96 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式三步驟解題。 115×3＝345 28＋28＝56 345+56＝401	1 寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.認為要瞭解爸爸總共花多少錢需要用減的此類基模尚未建立 2.具乘法基模	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:155 秒 2.用直式三步驟解題。 115×3＝345 28×2＝52 345-52＝293	1 嘗試不同的方法計算 2 不知道自己是否算對

L3	1.知道已知條件 2 知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1.時間:118 秒 2.先畫圈表示 3.用直式三步驟解題。 115＋115＋115＝335 計算錯誤 28＋28＝56 335+56＝391	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對
L4	1.知道已知條件 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1 時間:118 秒 2 先畫圈表示 3.用直式 4 步驟解題。 115+115＝230 230+115＝345 28+28＝56 345+56＝401	1. 寫完未檢查 2. 認為自己算對
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 瓶牛奶的總金額。 2.再算出 2 瓶咖啡的總金額。 3 再把牛奶及咖啡的錢合起來	1 時間:118 秒 2.用直式 4 步驟解題。 3.115×3＝615 2×28＝416 對位錯誤 615+416＝1031	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對

表 4-16、低能力組受試在第五題之解題歷程的分析摘要表

題目：小明有 27 個 5 元，他比小英少 30 元，請問小英有幾元？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

L1	1.關係語句不清楚 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.無法整合各個陳述句	1.先計算小明有多少錢 2.計算小英有多少錢	1.時間：68 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式二步驟解題。 27×5＝135 135－30＝105	1 寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1 關係句不清楚，「少 30 元」認為是 30 個 5 元。 2 解題目標不清楚 3.用畫圈表示	1.具乘法基模 2.無法整合各個陳述句	無法有效計畫	1.時間：68 秒 2.畫出 27 個圈每個圈內寫 5 3.用 30-27＝3	1.知道題目念錯再重念一次 2.不知道自己是否算對
L3	1 關係句不清楚，「少 30 元」看成「30 元」 2 解題目標不清楚 3.用畫圈表示	1.具乘法基模 1.無法整合各個陳述句。	1.先算出小明有多少錢 2.再算出他們兩個共有多少錢	1 時間：148 秒 2 畫 5 個圈寫，下方寫 27 3.用直式二步驟解題 27+27+27+27+27＝135 135-30＝105	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對
L4	1 遺漏關係語句 2 知道解題目標 3 用畫圈表示	1.具加法基模 2.整合時忘記關係語句	1.算出小明有多少錢	1.時間：325 秒 2.畫出 27 個圈每個圈內寫 5 3.用直式二步驟計算 35+50＝85 85+50＝135	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明有多少錢 2.再計算小英有多少錢	1.時間：106 秒 2.用直式二步驟解題 27×5＝135 135+30＝165	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對

貳、 對高難度題目的解題歷程

低數學能力受試面對高難度的題目時其解題歷程，也是依「問題轉譯」、「問題整合」、「解題計畫」、「解題執行」和「解題監控」等解題歷程的五個要素來分析說明，資料詳見表 4-17 至表 4-21 以及附錄二、三。

一、 問題轉譯

對於高難度題目，低能力組受試有難以掌握題目已知條件的現象，對解題目標之瞭解的狀況則還不錯。在 25 個高難度題次中，低能力組受試能理解 60％個題次的已知條件，另 40％個題次則有理解錯誤或遺漏已知條件的狀況，或是直接表示看不懂。舉例如下

L5 在第七題遺漏了已知條件

研：(第七題）這一題你怎麼想的？
L5：我想說哥哥已經有 6 個梅花章，可是他說要 15 個梅花章可以換一張獎勵卡，我就用 15 減掉 6，就知道哥哥不夠多少個了。

在解題目標的掌握方面，低能力組受試在高難度題目有 92％個題次正確，只有 L2 在第八題及 L3 對第十題目標不清。舉例如下：

L2 **在第八題的解題目標不明確**

研：(第八題) 這一題在問什麼？
L2：他要問小明比小英多幾個蛋糕。
………………
研：所以用小明的加小英的？
L2：才知道他們有幾塊蛋糕。
研：題目在問你什麼？
L2：問小明比小英多幾個蛋糕。
研：那你加起來是在算什麼？
L2：算……..不知道。

二、問題整合

低能力組受試對高難度題目之問題整合方面有困難，尤其是牽涉到多個單位轉換的問題。在 25 個高難度題次中，低能力組受試有 48％個題次可以整合各個陳述句，52％個題次無法整合各陳述句或無法做單位間的轉換。問題整合有困難的情形都集中在第七題與第十題，這兩個題目都是屬於多個層次單位轉換。例如第七題的單位為「梅花章」、「獎勵卡」、「獎狀」，學生需要理解各個單位之間的關係，多少個梅花章可以換 1 張獎勵卡，多少張獎勵卡可以換一張獎狀；第十題的單位有「塊」、「盒」及「箱」，亦是屬於此種類型的題目。

L3 **在第九題與第十題各都製造一個新數字，可能是當他不知道怎麼計算時，只好把已知的數字拿來拼湊，從以下的例子可以發現他對盒、塊、箱等單位無法統整，而且又自**

行創造一個「元」的單位。

研：(第十題）香皂共有幾盒？
L3：香皂有 6 盒。
研：每一盒有幾塊？
L2：24 塊。
研：所以 6 盒加起來總共幾塊香皂？
L2：147 元。
研：是 147 元還是 147 塊香皂。
L2：147 元。
研：635 是什麼？
L2：是這個這個和這個加起來的錢（6 塊香皂的 6，3 大箱的 3，5 盒的 5）
研：635 的單位是什麼？
L2：635 盒。

三、解題計畫

低能力組受試在解高難度題目時，有難以依題目的目標來建立次目標，以便逐步進行解題的現象。在 25 個題次當中，低能力組受試有 24％個題次難以建立解題計劃，44％個題次因受問題轉譯與整合的影響以致缺乏解題中的若干個次目標。有些低能力受試是就題目中所呈現的數字隨意加以運算，缺乏整體有效的計劃。有些受試則是缺乏解題中的若干個次目標，如先把單位化成同一種單位再作運算。舉例如下：

研：(第八題）你可不可以說說看這一題你怎麼想的？
L2：想到哪裡就算到哪裡
研：那你怎麼想的？
L2：不知道

四、解題執行

在實際運算方面，低能力組受試的計算錯誤很高，其運用的計算方式也缺乏效率。在 25 個題次中，低能力組受試有 68%個題次計算正確，有 24%個題次計算錯誤，另 8%個題次未執行計算。在運算的方式方面，有些題目如果用乘法運算，一個步驟就可以快速計算出答案。但是，有些受試者卻用累加的方式來計算，因此需要比較多的步驟。

低能力組在高難度題目的平均解題時間為 172.56 秒，答對題目的平均步驟為 3.4 個步驟。

五、解題監控

低能力組受試對高難度題目之解題歷程及解題結果的監控不理想。低能力組受試對於問題轉譯及問題整合的部分，有時會予以覺察與調整，例如有 12%個題次重新讀題，8%用不同的方法嘗試計算。在 25 個題次中只有一次有驗算，而且只有 28%個題次在事後的晤談中有一致性的覺察表現。這表示，低能力學生缺乏對於高難度的題目之解題狀況的覺察狀況。

表 4-17、低能力組受試在第六題之解題歷程的分析摘要表

題目：一件衣服 288 元，一條褲子 369 元，買 2 條褲子及 3 件衣服共要多少錢？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服的總金額 2.算出 2 條褲子的總金額 3.合計總金額	1.時間：175 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式三步驟解題。 288×3＝864 369×2＝658 計算錯誤 864+658＝1522	1 寫完未再檢查 2 認為自己算對。
L2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服的總金額 2 算出 2 條褲子的總金額 3.合計總金額	1.時間：162 秒 2.用直式三步驟解題 369×2＝738 288×3＝864 864+738＝1602	1.算完之後再看一眼，發覺尚未完成，繼續寫完。 2.不知道是否算對。
L3	1.遺漏已知條件 2.知道解題目標	1.未整合各陳述句	1.合算一件衣服及一件褲子的金額	1.時間：70 秒 2.用直式一步驟解題 288+369＝657	1 寫完未檢查 2 認為自己算對
L4	1 知道已知條件 2 知道解題目標 3 畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服的總金額 2 算出 2 條褲子的總金額 3.合計總金額	1.時間：279 秒 2.先畫圈表示 3.用直式 4 步驟解題 369+369＝738 288+288＝576 576+288＝864 738+864＝1602	1 寫完未檢查 2 認為自己算對

L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.先算出 3 件衣服的總金額 2 算出 2 條褲子的總金額 3.合計總金額	1.時間：96 秒 2.用直式三步驟解題 369×2＝738 288×3＝864 864+738＝1602	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對

表 4-18、低能力組受試在第七題之解題歷程的分析摘要表

題目：集滿 15 個梅花章可換一張獎勵卡，4 張獎勵卡可換一張獎狀，如果哥哥已經有 2 張獎勵卡又 6 個梅花章，請問他還需要幾個梅花章才能有一張獎狀？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.無法整合各個陳述句。	1.算出還需要多少個梅花章才能換一張獎勵卡 2.算出還需幾張獎勵卡	1.時間：207 秒 2.用算式填充題列出式子解題 15-6＝9 4-2＝2	1 重複讀題，嘗試方法算算看 2 寫完未再檢查 3 認為自己算對
L2	1 已知條件不清楚。 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1 無法整合各個陳述句。	1.無解題計畫	1 時間：232 秒 2 用畫圈及比手指計算 10	1.嘗試方法算算看 2.寫完未再檢查 3.不知道自己是否算對
L3	1.知道已知條件 2.知道解題目標 3. 畫圈表示	1.單位轉換無法整合	1.先算出一張獎狀所需的梅花章數量 2.算出哥哥已有的梅花章數量 3.算出哥哥尚缺多少梅花章	1.時間：147 秒 2.先畫圈表示 3.用直式五步驟解題 15+15＝30 30+15＝45 45+15＝60 6+6＝12 60-12＝48	1 寫完未檢查 2 認為自己算對

L4	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1 無法整合各個陳述句	未有計畫	1.時間：162 秒 2.未計算	1.表試題目看不懂，放棄。
L5	1.遺漏已知條件 2.知道解題目標	1.無法整合各個陳述句	1.算出哥哥還需要多少梅花章才能換一張獎勵卡	1.時間：74 秒 2.用直式一步驟解題 15-6＝9	1.重複讀題 2.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對

表 4-19、低能力組受試在第八題之解題歷程的分析摘要表

題目：一盒蛋糕有 72 塊，小明有 7 盒蛋糕，小英有 3 盒，請問小明比小英多幾塊蛋糕？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數。	1.時間：97 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式三步驟解題 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1 寫完未再檢查 2 認為自己算對
L2	1.知道已知條件 2.解題目標不清楚	1.具乘法基模 2 單位無法整合	1.無解題計畫	1.時間：86 秒 2.用直式二步驟 72×7＝504 504＋3＝507	1.重複讀題 2.寫完未檢查 3.不知道自己是否算對

L3	1.知道已知條件 3.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數。	1.時間：508 秒 2.用直式計算 72+72+72+72+7 2+72+72＝434 計算錯誤 72+72+72＝216 434-216＝218	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L4	1.知道已知條件 2 知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數。	1.時間：508 秒 2 用直式計算 72+72＝144 144+72＝216 216+72＝288 288+72＝360 360+72＝432 432+72＝504 72+72＝144 144+72＝216 504-216＝288	1.寫完未檢查 2.認為自己算對
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出小明蛋糕總數。 2.算出小英蛋糕總數。 3.算出小明比小英多的蛋糕數	1.時間：105 秒 2 用直式三步驟計算 72×7＝504 72×3＝216 504-216＝288	1.寫完未檢查 2.認為自己算對

表 4-20、低能力組受試在第九題之解題歷程的分析摘要表

題目：每個盒子放 4 個蘋果，小美少 1 個才有 56 盒，請問小美共有幾個蘋果？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控

L1	1.關係語句遺漏 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出 56 盒共有幾個蘋果 2.再減一個	1.時間：155 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式一步驟解題 56×4＝224 答 223	1 寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1 算出 56 盒共有幾個蘋果 2.再減一個	1.時間：128 秒 2.用直式二步驟解題 56×4＝224 224-1＝223	1 寫完未檢查 2 不知道自己是否算對
L3	1.知道已知條件 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.無法整合各個陳述句 3.認為「每個盒子放 4 個，有 56 盒」自己製造一個數字 456	1.算出 56 盒共有幾個蘋果	1.時間：128 秒 2.用直式二步驟解題 56+56+56+56＝418 計算錯誤 418+456＝874	1. 寫完未檢查 2. 認為自己算對
L4	1.漏掉關係語句 2.知道解題目標 3.畫圈表示	1.具加法基模 2.能整合各個陳述句成連貫一致問題	1.算出 56 盒共有幾個蘋果	1.時間：128 秒 2.用直式三步驟解題 56+56＝112 112+56＝148 計算錯誤 148+56＝204	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對
L5	1 遺漏一個已知條件. 2.知道解題目標	1.無法整合各個陳述句	1.直接算出小美共有幾個蘋果	1.時間：128 秒 2.用直式一步驟解題 56-1＝55	1.寫完時未檢查 2.認為自己算對

表 4-21、低能力組受試在第十題之解題歷程的分析摘要表

題目：一個盒子裡有 6 塊香皂，一大箱可以裝 24 盒，美美有 3 大箱又 5 盒，請問美美共有幾塊香皂？

歷程 受試	問題表徵	問題整合	解題計畫	解題執行	解題監控
L1	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.單位無法整合	1 先算出 3 大箱共有多少盒 2 算出 5 盒共有多少塊香皂 3 二者加起來	1.時間：200 秒 2.用算式填充題列出式子，再用直式三步驟解題 24×3＝72 72×5＝360	1 寫完未再檢查 2.再心算一次、重新看過，才說自己算對。
L2	1.已知條件不清楚 2.知道解題目標	1.具乘法基模 2.單位無法整合	1.無法有效計畫	1.時間：138 秒 2.執行：直式計算 24×6＝144 6×3＝18 18+5＝23 144＋23＝167	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對
L3	1.已知條件不清楚 2.解題目標不清楚 3.畫圈表示	1.無法整合各陳述句 2.將每盒有 6 塊香皂，共有 3 大箱又 5 盒製造成一個 635 的數字	1.無法有效計畫	1.時間：103 秒 2 執行：直式計算 24+24+24+24+24+24＝147 計算錯誤 147+635＝782	1 寫完未檢查 2 認為自己算對
L4	1.看不懂題目 2.知道解題目標	1.無法整合各個陳述句	無解題計畫	1 時間：211 秒 2 沒有計算	1.表示看不懂題目，放棄
L5	1.知道已知條件 2.知道解題目標	1.具乘法基模	1.先算出 3 大箱總盒數 2.算出 6 盒總塊數 3.算出 3 大箱總塊數 4.合計 3 大箱又 5 盒總塊數	1.時間：95 秒 2 執行：直式計算 24×3＝612 計算錯誤 6×5＝30 6×612＝1212 計算錯誤 1212+30＝1242	1.寫完未檢查 2.不知道自己是否算對

參、低能力組受試在中、高難度題目之解題歷程的比較

低能力組受試在中高難度題目解題歷程的差異，請見表4-22。在問題轉譯方面，低能力組受試對於中難度題目大致能掌握已知條件及題目要意，但是對高難度題目則有困難。如果題目中有關係語句，低能力組受試往往有難以把握題意的現象；當題目的理解有困難時，低能力組受試會以畫圖來幫助理解。

在問題整合的過程中，低能力組受試大致能對中難度題目中之各個陳述句的含義做有效的統整，但是，對高難度題目的題意的統整有困難。低能力組受試也未能有效的運用乘法知識，來判斷問題的類型及協助解題。

對於解題計劃，低能力組受試在中難度題目可建立次目標、在高難度題目則顯現出難以有效建立次目標的現象。在解題執行方面，低能力組受試在解中、高難度題目時，都出現計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控的情形方面，低能力組受試比較缺乏對整體之解題狀況的覺察。

低能力組在中難度題目與高難度的題目的平均答對題數差不多，中難度題目的平均答對題數為 2.2 題，在高難度題目平均答對題數為 1.6 題，未達統計上.05 的顯著差異水準，可見兩種難度的題目對低能力學生都非常困難。低能力

組在中難度題目的平均解題時間明顯的少於高難度的題目，低能力組受試在中難度題目平均解題時間為 113.24 秒，在高難度題目平均解題時間為 172.56 秒。以 t 考驗來檢視，t 值為 -2.109，達到統計上的顯著差異水準（$p < .05$）。這表示低能力組受試在解高難度題目時，其心智運作的負荷相當大，而且其運作歷程受到一些障礙阻隔，以致解題所需時間加長，答對題數降低。

表 4-22、低能力組受試在中、高難度題目之解題歷程的摘要表

解題歷程	中難度題目	高難度題目	
問題轉譯	1.大致能瞭解已知條件及題目的要意 2.大致能掌握解題目標 3.難以理解題目中的關係語句 4.有時會以畫圖來幫助理解題意	1.難以理解題目的已知條件及題目的要意 2.大致能掌握解題目標 3.難以理解題目中的關係語句 4.有時會以畫圖來幫助理解題意	
問題整合	1.大致能統整各個陳述句的含意 2.易因單位轉換與關係語句而影響題意的整合 3.尚未能有效運用乘法知識來判斷問題的類型	1.難以統整各個陳述句的含意 2.易因單位轉換與關係語句而影響題意的整合 3.尚未能有效運用乘法知識來判斷問題的類型	
解題計劃	1.能建立次目標	1.難以有效的建立次目標	
解題執行	1.計算技能不夠熟練，速度較慢，步驟較多 2.易計算錯誤	1.計算技能不夠熟練，速度較慢，步驟較多 2.易計算錯誤	
解題監控	1.有些會驗算 2.較缺乏對解題狀況的覺察	1.有些會驗算 2.較缺乏對解題狀況的覺察	
解題時間（秒） M(SD)及 t 值	113.24 (75.03)	172.56 (118.97)	t = -2.109*

平均答對題數			
M(SD)及 t 值	2.2(.84)	1.6(.55)	t =1.342

肆、低能力組受試之解題歷程的綜合結果

綜合上述之分析說明，並回應第一章之研究問題二：「國小三年級低數學能力受試在乘法應用問題的解題歷程如何？」，本研究的結果如下：

1. 對於中難度的題目，低能力組受試大致能瞭解題目的已知條件及題目的要意，對題目的解題目標也能有所把握，但是對題目中的關係語句則較難以理解；在問題整合方面，低能力組受試大致能統整題目中各個陳述句的含意，但是尚未能有效的運用乘法基模知識來判斷問題的類型，而且容易因題目中單位轉換的錯誤以及未能瞭解關係語句的含意，以致影響題意的整合；在解題計劃方面，低能力組受試能依解題目標，建立解題的次目標；在解題執行方面，低能力組受試的計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控的情形方面，低能力組受試比較缺乏對解題狀況的覺察。
2. 對於高難度問題，低能力組受試在問題轉譯方面，大致能對題目的解題目標有所把握，但是對題目之已知條件及題目之要意的瞭解有困難，特別是對題目中出現之關係語句更是難以理解；在問題整合方面，低能力組受試對題目中

各個陳述句之含意的統整有困難，也未能有效的運用乘法的知識來判斷問題的類型，尤其容易因單位轉換以及關係語句的理解，而影響題意的整合；在解題計劃方面，低能力組受試難以依解題目標，有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，低能力組受試的計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控方面，低能力組受試比較缺乏對整體之解題狀況的覺察。

3. **整體來看，低能力組受試對乘法應用問題的解題歷程，在解題歷程的五個要素中，以問題整合與解題執行兩個要素的運作特別有困難。由於低能力組受試的乘法概念知識不足，詞句理解的能力也不精熟，以至於在問題整合出現困難。另外，計算技能不夠熟練加上解題覺察狀況並不理想，也是低能力組受試解題錯誤的重要原因。**

第三節 高、低數學能力受試之解題歷程的比較

壹、兩組受試之解題速度的比較

解題速度是指問題呈現到受試者表示解題完畢的時間，從表 4-23 可以看出，高、低能力兩組受試在中難度題目的平均解題時間分為 40.12 秒、113.24 秒；兩組受試在高難度題目的平均解題時間分為 86.76 秒、172.56 秒。以 t 考驗來檢視兩組受試之解題時間的差異，在中難度題目的 t 值為-4.757，在高難度題目的 t 值為-3.365，兩者均達到.01 的顯著差異水準。這結果顯示高能力組受試，不管在解高難度題目或中難度題目，其所花費的時間都顯著的少於低能力組受試。這意謂著高能力組受試的解題效率較佳，教能掌握題意，而且計算的技能也較熟練所致。

另外，從觀察的資料也發現同樣的結果。高能力組受試對於九九乘法的反應都是直接提取，而低能力組受試則是運用序列提取或是以比手指頭、畫圈圈來幫助計算。

表 4-23、兩組受試在不同難度題目之做答時間的 t 考驗摘要表

	高能力組		低能力組		
題目難度	M	SD	M	SD	t
中難度	40.12	16.59	113.24	75.03	-4.757***
高難度	86.76	45.86	172.56	118.97	-3.365***

貳、兩組受試之解題錯誤原因的比較

高、低能力兩組受試在乘法應用問題之平均答對題數的資料如表 4-24，從表 4-24 的資料可知，兩組受試在中難度題目答對率分別為 84%、44%題；兩組受試在高難度題目之答對率分別為 68%、32%。這資料顯示，兩組受試在中難度題目的平均答對題數都明顯的多於高難度的題目；另一方面，高能力組受試不管在中難度題目或者高難度題目，其平均答對題數都顯著的多於低能力組受試。

如果進一步分析受試者做答錯誤的原因，高能力組受試在 25 個中難度的題次中，有 16%個題次的答案錯誤。其中，4%是問題轉譯錯誤，另外 12%是計算錯誤。可見在解中難度題目時，高能力組受試出現錯誤的主要原因在於計算，而不是解題歷程中的其他要素。

對於高難度題目，高能力組受試在 25 個題次中，有 32%個題次的答案錯誤。其中，8%為問題轉譯有誤；20%是在問題整合中發生錯誤；另外 12%是計算錯誤。這顯示在解高難度題目的過程中，高能力組受試特別容易在問題整合的階段出現錯誤，尤其是對於題目中之陳述句的整合以及單位之轉換的整合最易出現錯誤。

如果把中、高難度題目合併來看，高能力組受試解題時最容易出現錯誤是在計算的部分，在 50 個題次，有 12％之多，其次是問題整合為 10％。

低能力組受試在 25 個中等難度的題次中，有 56％個題次的答案錯誤。其中，20％個題次的問題轉譯有誤；28％個題次是問題整合發生錯誤；12％個題次計劃錯誤，另外 28％個題次的計算有錯誤。這顯示低能力組受試解中難度題目時，發生錯誤的原因，主要發生在問題整合與解題執行的計算階段，其次是出現在問題表徵。

對於高難度的題目，低能力組受試在 25 個題次中，有 72％個題次的答案錯誤。其中，40％問題表徵有誤；52％問題整合有誤，24％無法建立有效計劃；另外有 32％計算錯誤。可見低能力組受試解高難度題目時，錯誤的原因主要發生在問題整合的階段，其次是出現在問題轉譯、解題執行的計算階段。

如果合併中、高難度題目題目來看，低能力組受試解題時最容易出現錯誤是在問題整合上，其次是問題表徵與計算方面。

表 4-24、兩組受試在不同難度題目之平均答對題數與解題錯誤原因之摘要表

題目難度	高能力組	低能力組
中難度（答對率）	84％	44％
高難度（答對率）	68％	32％
中難度（解題錯誤原因）	1.解題執行（計算）	1.問題整合 2.解題執行（計算） 3.問題轉譯
高難度（解題錯誤原因）	1.問題整合 2.解題執行（計算）	1.問題整合 2.問題轉譯 3.解題執行（計算）

參、兩組受試在中難度題目之解題的比較

兩組受試在中難度題目的解題狀況如表 4-1 到表 4-16，以及下之表 4-25。這些資料呈現出，面對中難度題目時，高能力組受試在問題轉譯方面，能清楚的瞭解題目的已知條件及題目的要意，對題目的解題目標也能把握；在問題整合方面，高能力組受試能快速的統整題目中各個陳述句的含意，也能運用乘法基模知識來判斷問題的類型；在解題計

劃方面，高能力組受試都依解題目標，有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，高能力組受試大致能快速且正確的計算出題目的答案，只是偶而會有粗心的計算錯誤現象；在解題監控的情形方面，高能力組受試能覺察自己的解題狀況，但是比較缺乏對計算錯誤的覺察。

低能力組受試在中難度問題的問題轉譯方面，大致也都能瞭解題目的已知條件及題目的要意，對題目的解題目標也能有所把握，但是對題目中的關係語句則較難以理解；在問題整合方面，低能力組受試大致能統整題目中各個陳述句的含意，但是尚未能有效的運用乘法基模知識來判斷問題的類型，而且容易因題目中單位轉換的錯誤以及未能瞭解關係語句的含意，以致影響題意的整合；在解題計劃方面，低能力組受試能依解題目標，建立解題的次目標；在解題執行方面，低能力組受試的計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控的情形方面，低能力組受試雖偶而會對計算結果加以驗算，但整體來看，低能力組受試比較缺乏對解題狀況的覺察。

比較兩組受試在中難度題目的解題狀況，高能力組受試在解題歷程中之五個要素的表現都顯著的優於低能力組。高能力組受試除了在解題執行上，偶而會出現粗心的計算錯誤外，在解題歷程中之各個要素的表現都能有良好的表現。低能力組受試在解題歷程中之各個要素的表現均容易出錯，尤

其是在問題整合與解題執行方面。

表 4-25 兩組受試在中難度題目之解題歷程比較

解題歷程	高能力組	低能力組	z 值
問題轉譯	.96	.80	3.077*
問題整合	1.0	.72	5.437**
解題計劃	1.0	.88	2.230*
解題執行	.88	.72	3.213*
解題監控	.84	.40	10**

肆、兩組受試在高難度題目之解題的比較

兩組受試在高難度題目的解題狀況如表 4-6 到表 4-22，以及下之表 4-26。這些資料呈現出，面對高難度題目時，高能力組受試在問題轉譯方面，能清楚的瞭解題目的已知條件及題目的要意，對題目的解題目標也能把握，但是偶而會遺漏題目的部分要件；在問題整合方面，高能力組受試能快速的統整題目中各個陳述句的含意，也能運用乘法基模知識來判斷問題的類型，但是偶而會出現題意整合的問題，

尤其是牽涉到多重單位間之轉換的問題；在解題計劃方面，高能力組受試大致都依解題目標，有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，高能力組受試大致能快速且正確的計算出題目的答案，只是偶而會有粗心的計算錯誤現象；在解題監控的情形方面，高能力組受試能覺察自己的解題狀況，但是比較缺乏對計算錯誤的覺察。

低能力組受試在高難度問題的問題轉譯方面，大致能對題目的解題目標有所把握，但是對題目之已知條件及題目之要意的瞭解有困難，特別是對題目中出現之關係語句更是難以理解；在問題整合方面，低能力組受試對題目中各個陳述句之含意的統整有困難，也未能有效的運用乘法基模的知識來判斷問題的類型，尤其容易因單位轉換以及關係語句的理解，而影響題意的整合；在解題計劃方面，低能力組受試較難以依解題目標，有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，低能力組受試的計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控的情形方面，低能力組受試比較缺乏對整體之解題狀況的覺察。

比較兩組受試在高難度題目的解題狀況，高能力組受試在解題歷程中之五個要素的表現都顯著優於低能力組。高能力組受試在解題歷程中之各個要素的表現，大致都能有良好的運作。但是，當題目之敘述的複雜度增加以及單位之轉換

變得複雜時，高能力組受試會出現問題整合方面的錯誤；另外，高能力組受試對於解題執行的覺察也較弱，易出現粗心的計算錯誤。低能力組受試在解題歷程中之各個要素的表現均容易出錯，尤其是在問題整合與解題執行、問題表徵方面。

表 4-26 兩組受試在高難度題目之解題歷程比較

解題歷程	高能力組	低能力組	z 值
問題轉譯	.92	.60	6.53***
問題整合	.80	.48	7.159***
解題計劃	.96	.72	4.706**
解題執行	.88	.68	4.082**
解題監控	.88	.28	14.085***

伍、兩組受試之解題歷程的綜合比較結果

綜合上述有關比較兩組受試之解題歷程的分析，並回應第一章所列之研究問題三、研究問題四，本研究的結果如下：

針對研究問題三：「國小三年級高數學能力學生與低數學能力學生在乘法應用問題的解題歷程有何差異？」，本研

究的結果顯示：

1. 解中難度題目時，高能力組受試除了在解題執行方面，偶而會有粗心之計算錯誤現象，以及在解題監控方面，對計算錯誤的覺察較為缺乏外，整個解題歷程的各個要素大致均能有良好的運作。相形之下，低能力組受試在解題歷程中之各個要素的表現均容易出錯，尤其是在問題整合與解題執行方面特別容易出現困難，而且解題監控的狀況也不理想。
2. 解高難度題目時，高能力組受試在解題歷程中之五個要素的表現，大致都能有良好的運作。但是，當題目之敘述的複雜度增加以及單位之轉換變得複雜時，高能力組受試會出現問題整合方面的錯誤；另外，高能力組受試對於解題執行易出現粗心的計算錯誤，對計算執行的覺察也較弱，。低能力組受試在解題歷程中之各個要素的表現均容易出錯，尤其是在問題整合、解題執行、與問題轉譯方面。

針對研究問題四：「低數學能力學生在解乘法應用問題時其認知運作歷程可能遭遇的障礙為何？」，本研究的結果顯示：

1. 比較兩組受試的解題歷程可發現，高數學能力受試在整個解題歷程的各個要素大致都能有良好的運作，其容易出現錯誤的地方是計算的疏忽以及題目難度增加時單位間換

算的統整。相反的，低數學能力受試在整個解題歷程的各個要素幾乎都可能出現錯誤，尤其是在問題整合、解題執行、與問題轉譯方面。

2. 依此比較結果可知，低數學能力受試在解乘法應用問題時其認知運作歷程可能遭遇的障礙在於，其對特定概念的理解有困難（如題目中的關係語句），加上乘法概念的知識不足，以至於難以運用這些概念知識來促進其對問題的轉譯與題意的整合。另一方面，也因為計算技能不夠熟練，解題監控的狀況也不夠積極，導致解題的效率不佳，解題錯誤的情形容易出現。

陸、討論

依放聲思考及晤談資料的分析結果，本研究的討論如下：

一、本研究發現國小三年級高數學能力受試的解題速度明顯的比低數學能力受試的解題速度快。如果計算他們答對題目解題過程所寫下之計算步驟的數目，本研究發現高能力受試在解題時所用的平均步驟數為 2.3 個步驟，也明顯的少於於低能力學生的 3 個步驟。

這個發現與 Anderson(1982，2000)和鄭昭明（1993）的看法一致，Anderson 認為當知識的學習逐漸熟練後，有些基

本的認知運作成分會自動化，使得有限的心智能力能用到較高層次的運作上。認知運作自動化的過程包括將數個運作程序組合(composition)，並加以程序化(proceduralization)。這樣的轉化歷程會使認知運作的速度加快，而且有效率。高能力組受試的解題速度較快、解題步驟較少，呈現出其對乘法知識與計算的熟練度較高，而且部分的運作已經自動化。

Lewis（1981）以幾何作為研究題材也發現，高數學能力受試已發展出一些組合程序，因此在解題過程中有些特定的中間步驟便不再被需要呈現於工作記憶了，不必依賴寫下一些中間步驟來達成目標，而低數學能力組則較無法有這樣的表現。

二、本研究從受試者的解題行為發現，高數學能力組受試在乘法計算時，所需之九九乘法表的知識，都是直接提取；相反的，低數學能力受試在計算時，對所需之九九乘法表的知識有時用直接提取、有時用序列提取、有時甚至使用點數的方式。

在乘法的演算過程中所需的九九乘法表的知識，固然也可以逐步建構，但是這些都是很固定的知識，所以熟練的學生對這些數值大都能夠快速、類似自動化的提取，才能有效的運用這些數值。Gagne 等人（1993）指出經由大量的練習，學生們從建構事實轉化為直接提取需要經過大量的練

習，當學生可以較快速提取數字事實，這會讓他們有更充裕的時間並可將心力放在高層次的解題活動上。本研究中高數學能力受試即呈現出此種現象。另外，Houlihan 與 Ginsberg（1981）針對學童之加減法運算，也有類似的發現。

三、本研究發現高數學能力學生在解題歷程中比較容易出現的問題是計算部分。低數學能力受試容易出現的錯誤則是在問題整合、問題轉譯與計算的部分。這現象與 Montague 和 Applegate（1993）的部分研究結果一致。

Montague 和 Applegate（1993）發現學障學生在解題過程中主要的問題在符號表徵與列式，而非計算，無法將語言或數字訊息轉譯成內在表徵，以致嚴重影響解題的進行。

本研究除了發現低能力受試在問題轉譯上以及陳述句與單位轉換之整合有障礙。這也可視為符號表徵的問題。低能力受試者難以將題目中的語文訊息及數字訊息加以有效的轉譯，以致影響對題目的理解，進而造成解題的錯誤。

四、本研究發現高數學能力受試在解題時，能用乘法概念來幫助他們辨識問題的類型及構思結題計劃。相反的，低能力組受試則較無法運用乘法概念的知識來協助辨識問題及構思解題計劃。甚至，低能力組受試對題目中關係語句及一般

知識也常有理解的困難。

研究指出，先前知識（pre-existing knowledge）是學習的基礎，有效的學習是學習者積極的運用其先前知識與新出現之訊息互動，並重新鏈夠的過程（Bransford，Brown，& Cocking，2000）。因此相關之先前知識豐富者，其學習也較為順利；反之，在學習過程中易出現較多的障礙。本研究中之低能力組受試即呈現出先前知識貧乏的現象。Cobb（1994）也強烈的指出在數學的過程中，先前知識與信念對理解及建構新知識的重要性。

五、本研究發現在解題監控方面，高能力組受試對問題轉譯及整合能有所覺察及調節，但是對計算錯誤的覺察較弱；相反的低能力組受試，則不只缺乏對計算錯誤的覺察，對整體之解題歷程的監控狀況卻不理想。

積極的去察覺及調解修正補強自己的認知運作及行為表現，是有效學習的必要條件。這也就是後設認知研究所強調的要項（Brown，1978；Flavell，1975）。在數學的學習與解題方面，Schoenfeld（1991）就特別強調監控的重要性。本研究的低能力組受試因解題監控狀況不夠積極，以致解題效率不佳，以及解題錯誤容易出現。另外高、低能力組受試對計算錯誤的覺察都不理想，這可能跟發展有關，三年級學生在這項能力的發展可能尚未成熟。

第五章　結論與建議

本研究旨在比較國小三年級高、低數學能力學生在乘法應用問題之解題歷程的差異，進而探索低數學能力學生在解乘法應用問題時，其認知運作歷程可能遭遇的障礙。本研究依放聲思考之口語資料與晤談資料分析兩組受試的解題歷程，及解題歷程的差異。以下摘述本研究之結論，並依結論提出可供相關人員參考的建議，最後並條列本研究之若干限制。

第一節　結 論

本節分別依下列四項，摘述本研究的結論：(一) 高數學能力受試的解題歷程；(二) 低數學能力受試的解題歷程；(三) 高、低能力受試之解題歷程的差異；(四) 低數學能力受試之可能的認知運作障礙。

一、 高數學能力受試之乘法應用問題的解題歷程

1.高能力組受試在解題時，能快速的理解題目的要意及解題目標，並能依解題目標有效的建立解題的次目標，也能運用乘法基模知識來判斷問題的類型與協助解題。但是，在解高難度題目時，偶而會出現題意整合的問題，尤其是牽涉到多重單位間之轉換的問題。在解題執行時，能快速且正確的計算出題目的答案，只是偶而會出現粗心的計算錯誤。在解題監控方面，高能力組受試能覺察自己的解題

狀況，但是比較缺乏對計算錯誤的覺察。

2.整體來看，高能力組受試對乘法應用問題的解題歷程，在解題歷程的五個要素中，大致均能表現出良好的運作狀況。比較容易出現錯誤的是在問題整合與解題執行的階段，另外，高能力組受試對計算錯誤的覺察狀況也不理想，這會影響他們解題的正確性。

二、低數學能力學生之乘法應用問題的解題歷程

4. 低能力組受試在解題歷程的問題轉譯方面，大致能把握題目的解題目標。解中難度題目時，能瞭解題目的已知條件及題目的要意，但是在解高難度題目時，對題目之已知條件及題目之要意的瞭解有困難，特別是對題目中出現之關係語句更是難以理解；在問題整合方面，低能力組受試在中難度題目大致能統整題目中各個陳述句的含意，但解高難度題目時，則對各個陳述句之含意的統整有困難，也未能有效的運用乘法基模的知識來判斷問題的類型，尤其容易因單位轉換以及關係語句的理解困難，而影響題意的整合；在解題計劃方面，低能力組受試因為受問題轉譯與整合的影響，較難有效的建立解題的次目標；在解題執行方面，低能力組受試的計算技能不夠熟練，其計算的速度較慢，運算的步驟較多，且容易出現計算錯誤的現象；在解題監控方面，低能力組受試比較缺乏對整體之解題狀況的覺察。

5. 整體來看，低能力組受試對乘法應用問題的解題歷程，在解題歷程的五個要素中，以問題整合與解題執行、問題轉譯三個要素的

運作特別有困難。由於低能力組受試的乘法概念知識不足，詞句理解的能力也不精熟，以至於容易在問題整合方面出現困難。另外，計算技能不夠熟練加上解題覺察狀況不理想，也是低能力組受試解題錯誤的重要原因。

三、高、低數學能力學生在乘法應用問題之解題歷程的差異

3. 比較兩組受試的解題歷程可發現，高數學能力受試在整個解題歷程的各個要素大致都能有良好的運作，其比較容易出現錯誤的地方是計算的疏忽以及題目難度增加時單位間換算的統整。相反的，低數學能力受試在整個解題歷程的各個要素幾乎都可能出現障礙，尤其是在問題整合、解題執行、與問題轉譯等方面。
4. 高能力組受試與低能力組受試之解題時間的比較，在中、高難度題目兩者均達到.01 的顯著水準。這意謂著高能力組受試的解題效率較佳，較能掌握題意，而且計算的技能也較熟練所致。

四、低數學能力受試解乘法應用問題時可能出現之認知運作障礙

依上述比較結果可知，低數學能力受試在解乘法應用問題時其認知運作歷程可能遭遇的障礙在於，其對特定概念的理解有困難（如題目中的關係語句），加上乘法概念的知識不足，以至於難以運用這些概念知識來促進其對問題的轉譯與題意的整合。另一方面，也因為計算技能不夠熟練，解題監控的狀況不夠積極，導致解題的效率不佳，解題錯誤的情形容易出現。

第二節　建　議

一、教導低數學能力學生時，宜仔細評估造成其數學解題困難的原因。

影響數學解題的因素很多，排除智能與識字條件後，教師可依據本研究分析的解題歷程，將應用問題解題分為問題轉譯、問題整合、

解題計劃、解題執行與監控五個要素，逐項檢視學生解題困難的原因，以作為補救教學的依據。

二、數學教學時，應加強基本概念知識的深刻理解。

本研究發現學生在解題歷程中，常無法運用乘法概念知識來協助其辨識問題類型，例如用加法解題，或是先用加法列式再用乘法解題，還有乘數、被乘數用其他的已知條件解題。另外，本研究也發現受試者常因無法理解題目中的關係語句，而導致誤解題意，例如「…比…少…」、「……還要幾個才有…」這樣概念的知識。因此，在教學的過程中，宜特別加強這些基本概念知識的理解。

三、學生在面對應用問題時，應先教學生學會一些基本的語意知識與語言知識。

本研究發現低數學能力學生在解題表徵中，缺乏語意知識與語言知識，教師應先教學生學會一些基本的事實知識，例如每星期有七天等事實，與教語言知識，要求學生用他們自己的語言說明問題的已知條件及解題目標，甚至要求學生以繪圖方式來表示問題的語句。

四、對於問題整合，教師應先建立學生的基模訓練，將各種問題類型作較大的混合，要求學生將問題加以分類，促使學生能區辨這些不同類型的問題。

本研究發現低數學能力學生最大的問題是在問題整合中，缺乏適

當的基模，所以老師最重要的是讓學生多練習辨別題型，而非關鍵字教學。

五、應加強學生對於乘法基本運算的熟練度，以增加提取數字事實的速度。

本研究發現低數學能力學生在解題執行中，對於九九乘法有些雖會背，但對於九九乘法的提取停留在序列提取或是在累加；再者對於二位數乘法的技能並不純熟，有拆成個位數乘法再加或是直接用加法，這樣做法相對的步驟增多，增加工作記憶負荷，計算錯誤的機率也增多。訓練學生快述提取數字事實，這會讓學生能有更充裕的時間並可將注意力放在較高階層的解題活動上。

六、對於三年級學生的數學解題，應加強引導學生重視驗算的重要性

本研究發現國小三年級高、低數學兩組學生在解題完畢後很少再予驗算，以致未能發覺解題方面的錯誤，因此學校教育的過程中，有必要特別強調驗算。

第三節　研究限制

一、研究對象的限制

因認知能力會受到發展因素的影響，所以，如果要將本研究所得結論推論到國小三年級之外的其他年級，宜有所保留。

二、研究工具的限制

本研究以中、高難度之等組型的乘法應用問題做為研究的作業（tasks）。因此，如要將研究結果推論至其他題型之問題時，宜有所保留。

參考書目

一、中文部分

古明峰（民 87）：加減法應用問題語文知識對問題難度之影響暨動態評量在應用問題之學習與遷移歷程上研究。新竹師院學報，11，391-420。

朱經明、蔡玉瑟（民 89）：動態評量在診斷國小五年級數學障礙學生錯誤類型之應用成效。特殊教育研究學刊，18，173-189。

吳仁俊（民 85）：兒童的乘法概念研究—一個三年級的個案。國立高雄師範大學數學系未出版之碩士論文。

李光榮（民 86）：國小兒童正整數乘法概念之研究—一個四年級兒童之個案研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所未出版之碩士論文。

李俊仁（民 81）：一位數乘法答題策略發展之研究。國立中正大學心理研究所未出版之碩士論文。

李盛祖、林世華（民 88）：國小數學乘法系列診斷測驗題庫的建立與應用。師大學報：教育類，44（1＆2），55-74。

林原宏（民 83）：國小高年級學生解決乘除文字題之研究—以列式策略與試題分析為探討基礎。國立台中師範學院初等教育研究所未出版之碩士論文。

林淑玲（民 88）：國小學習障礙學生對比較類加減應用題解題表徵之研究。國立台灣師範大學特殊教育學系未出版之碩士論文。

林碧珍（民 80）：國小兒童對於乘除法應用問題之認知結構。國立新竹師範學院學報，5，221-288。

周台傑、蔡宗玫（民 86）：國小數學學習障礙學生應用問題解題之研究。特殊教育學報，12，233-292。

邱上真（民 90）：跨領域多層次的數學學障研究：從學習障礙的官方

定義談起。載於 2001 數學學習障礙研討會手冊。台北：台灣師範大學。

邱佳寧（民 90）：國小數學學習障礙學生解題策略之研究。國立彰化師範大學特殊教育學系系未出版之碩士論文。

邱裕淵（民 89）：國小六年級學生在乘法文字題的解題表現。國立嘉義師範學院國民教育研究所未出版之碩士論文。

洪碧霞、吳裕益（民 85）：國小數學診斷測驗。台北市：教育部訓育委員會。

柯華葳（民 88）：閱讀理解困難篩選測驗。行政院國家科學委員會特殊教育工作小組。

許天威、蕭金土（民 88）：綜合性非語文智力測驗。台北市：心理出版社。

許美華（民 90）：國小二年級乘法解題策略之變化—以三位學童為例。花蓮師院學報，12，173-199。

陳美芳（民 84）：「學生因素」與「題目因素」對國小高年級兒童乘除法應用問題解題影響之研究。國立台灣師範大學心理與輔導研究所未出版之博士論文。

張莉莉（民 88）：加減問題之解題活動類型: 一個國小二年級兒童的個案研究。臺南師院學生學刊，20， 114-132。

教育部（民 89）：國民中小學九年一貫課程暫行綱要。台北：教育部。

黃秀霜（民 88）：中文年級認字量表。行政院國家科學委員會特殊教育工作小組。

鄭昭明（1993）：認知心理學。台北市：桂冠。

楊明家（民 86）：六年級不同解題能力學生在數學解題歷程後設認知

行為之比較研究。國立嘉義師範學院國民教育研究所未出版之碩士論文。
秦麗花（民84）**：國小數學學習障礙兒童數學解題錯誤類型分析。特殊教育季刊，55，**33-38。

二、 英文文獻

Anderson, J. R. (2000). **Cognitive psychology and its implications**（5th ed.）. New York: Worth Publishers and W. H. Freeman.

Anderson, J. R. (1982). Acquisition of cognitive skills. **Psychological review, 89,** 369-406.

Anghileri, J.（1989）. An investigation of young children' s understanding of multiplication. **Educational Studies in Mathematics, 20**,367-385.

Badian, N. A. (1983). Dyscalculia and nonverbal disorders of learning. In H. R. Mykelbust (Ed.), **Progress in Learning Disabilities** (pp.235-264). New York : Stratton.

Baum, S. (1994). Meeting the needs of gifted/learning disabled students. **The Journal of Secondary Gifted Mathematics, 5**(3), 6-16.

Branca, N. A. (1990). Problem solving as a goal, process, and basic skill. In S. Krulik, & R. E. Reys (Eds.), **Problem Solving in School Mathematics**, 3-8.

Brown, A.L.(1978). Knowing when, and how to remember: A problem of matacognition. In R. Glaser, Advance in Instructional Psychology

(pp77-165). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
Cawley, J. F., & Miller, J. H. (1989). Cross-section comparison of the mathematics performance of children with learning disabilities: Are we on the right tract toward comprehensive programming, **Journal of Learning Disabilities, 22**, 250-259.
Czepiel, J.,& Esty, J. M.(1980). Mathematics in the newspaper .**Mathematics Teacher, 73**, 582-586.
Davydov, V. V. (1991). A psychological analysis of the operation of multiplication. In L. P. Steffe (Ed.), **Psychological ability of primary school children in learning mathematics**.9-85.Soviet Studies in Mathematics Education Series, volume 6, (J. Teller trans.). Reston, VA: NCTM.
Deshler, D. D. (1993). Strategy mastery by at-risk students: Not a simple matter. **Elementary School Journal, 94**, 153-67.
Ericsson, K. A., & Simon, H. A. (1993). **Protocol analysis: verbal reports as data** (rev. ed.). Cambridge, MA: The MIT Press.
Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving decimal problem in multiplication and division. **Journal for Research in Mathematics Education, 16**, 3-17.
Gagne, E. D., Yekovich, C.W., &Yekovich, F. R. (1993). **The cognitive psychology of school learning** (2nd ed.). New York, NY: HarperCollins College Publishers.
Garofalo, J., & Lester, F. K. (1985). Matacognition, cognitive monitoring and mathematics performance. **Journal for Research in**

Mathematics Education, 16 (3), 163-176.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. In D. Grouws (Eds.). **Handbook of research on mathematics teaching learning.** 276- 295. Reston, VA: NCTM.

Hallahan, D. P., Kauffman, J. M., **&** Lloyd, J. W. (1999). **Introduction to Learning Disabilities**. (2nd ed.). Needham Heights, Mass: Allyn & Bacon.

Hiebert, J., & Behr, M. (1988). Introduction capturing the major themes. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), **Number concepts and operations in the middle grades**. Pp.1-18. Reston VA: NCTM.

Kouba, V. L., Brown, C. A., Carprnter, T. P., Lindquist, M. M., Silver, E. A.& Swafford, M. M.(1988). Results of the forth NAEP assessment of mathematics: Number, operations, and word problems. **Arithmetic Teacher, 35**,14-19.

Koubo, V. L. (1989). Children' s solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. **Journal for Research in Mathematics Education, 20**, 147-158.

Lerner, J. (2000). **Learning disabilities: Theories, diagnosis, and teaching strategies**(8th ed.). Boston, MA: Houghton Mifflin Co.

Marshall, S. P., Pribe, C. A. &Smith, J. D. (1987). **Schema knowledge structure for representing and understanding arithmetic story problem.** (Tech. Rep. Ontract No.nooo14-85-k-0661). Arilington, VA: Office of Naval Research.

Mayer, R. E. (1992). **Thinking, problem solving, cognition.** New York: W. H. Freeman and Company.

McCoy, L. P. (1994). Mathematics problem –solving processes of elementary male and female students. **School Science & Mathematics, 94** (5), 266-271.

Miller, S. P., & Mercer, C. D. (1997). Educational aspects of mathematics disabilities. **Journal of Learning Disabilities, 30** (1), 47-56.

Montague, M. & Applegate, B. (1993). Middle school students mathematical problem solving: An analysis of think-aloud protocols. **Learning Disabilities Quarterly, 16**, 19-31.

Montague, M. (1997). Student' s perception, mathematical problem solving and learning disabilities. **Remedial and Special Education, 18**(1), 46-53.

Mulligan, J. T. (1992). Children' s solutions to multiplication and division word problems: A longitudinal study. **Mathematics Education Research Journal,4**(1), 24-41.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). **Curriculum and evaluation standards for school mathematics.** Reston, VA: Author.

Nacy, C. J., & Theresa, O. M. (1997). Cognitive arithmetic and problem solving: A comparison of children with special and general mathematics difficulties. **Journal of Learning Disabilities,30** (6), 624-634,684.

Nesher, P. (1988). Multiplicative school word problem: Theoretical approaches and empirical findings. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), **Number concepts and operations in the middle grades** (41-52). Reston, VA: NCTM.

Polya, G., (1945). How to solve it: **A new aspect of mathematical method**. New Jersey: Princeton University Press.

Quintero, A. H.(1984).**Children's difficulties with two-step word problem**. ERIC Document Reproduction, Service No. ED 242535.

Saunters, H. (1980). When are we ever gonna have to use this? **Mathematics Teacher, 73**, 7-16.

Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of out loud problem-solving protocols. **Journal of Mathematical Behavior, 4**, 171-191.

Schoenfeld, A.H. (1991). On pure and applied research in mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior, 10**,263-276.

Strang, J. D., & Rourke, B. P. (1985). Adaptive behavior of children who exhibit specific arithmetic disabilities and associated neuropsychological abilities and deficits. In B. P. Rourke (ed.), **Neuropsychology of Learning Disabilities**. New York: The Guilford Press.

Snyder, R. F.(1998).A clinical study of three high school problem solvers. **High School Journal, 81** (3), 167-177.

Swanson, H. L. (1994). Short-term memory and working memory: Do both contribute to our understanding of academic achievement in children and adults with learning disabilities? **Journal of Learning Disabilities, 27**(1), 34-50.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures in acquisition of mathematics concepts and processes. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), **Acquisition of mathematics concepts and process**. Academic press.

Webster**,** B. J. (1979). Accounting for variation in science and mathematics achievement. **School Effectiveness & School Improvement, 11**, 339-360.