

# Robustni problem nahrbtnika

Eva Babnik in Jan Založnik

December, 2020

## Kazalo

|   |                                     |   |
|---|-------------------------------------|---|
| 1 | Uvod                                | 3 |
| 2 | Povzetek                            | 3 |
| 3 | Problem nahrbtnika                  | 4 |
| 4 | Robustni problem nahrbtnika         | 4 |
| 5 | Pristop z dinamičnim programiranjem | 5 |
| 6 | Viri in literatura                  | 6 |

## Slike

# 1 Uvod

## 2 Povzetek

Poročilo se prične s kratko predstavitvijo navadnega oziroma klasičnega problema nahrbtnika in nato še z razlago robustnega problema nahrbtnika. V robustnem primer problema nahrbtnika prav tako kot pri klasičnem problemu iščemo množico predmetov, ki jih bomo položili v nahrbtnik in njihovo optimalno vrednost, vendar v tem primeru nimamo točnih podatkov o vseh težah predmetov. Za njihove teže vemo le, da so element določenega zaprtega intervala, ki torej ima zgornjo in spodnjo mejo. Poleg intervalov tež predmetov pa še vemo maksimalno število elementov, ki lahko spremeni svojo težo, to število označimo z  $\lambda$ .

Za sledeči problem sva s pomočjo dinamičnega programiranja napisala rekurzivne enačbe, na katerih bazira najina koda v programskem jeziku *python*. Napisala sva program, ki reši tako klasični problem nahrbtnika kot tudi robustni problem nahrbtnika in za rešitev vrne optimalni seznam predmetov, ki jih položimo v nahrbtnik in skupno optimalno vrednost le-teh. Sestavila pa sva tudi enostavnejši grafični program, ki omogoča, da lahko problem reši tudi posameznik, ki nima nikakršnega predznanja v programiranju.

Nato sva kodo malo modificirala in jo uporabila na malo poenostavljenem finančnem modelu. Program prebere datoteko s podatki, ki zajemajo ceno delnice, najvišjo možno ceno delnice in letno stopnjo donosa, vrne pa optimalni portfelj, ki si ga lahko izberemo če imamo na voljo za investicije določeno vsoto denarja.

### 3 Problem nahrbtnika

Spodobi se, da v uvodu najprej predstaviva klasični problem nahrbtinka (angl. *classical Knapsack Problem*) v nadaljevanju poročila bova uporabljala kar kratico KP. Na voljo imamo množico  $n$ -tih predmetov, ki jo označimo z  $N = \{1, \dots, n\}$  in nahrbtnik s kapaciteto  $c$ . Vsak predmet ima pozitivno vrednost  $p_j$  in pozitivno utež  $w_j$ . Problem nahrbtnika nas sprašuje, katero podmnožico predmetov iz  $N$  moramo položiti v nahrbtnik, da bo skupna vrednost le teh čim večja možna in da ne bo presegla nahrbtnikove kapacitete. Torej maksimiziramo skupno vrednost predmetov pri pogoju, da seštevek izbranih uteži ne presega nahrbtinkove zmogljivosti. Problem lahko predstavimo kot celoštevilski linearni program (CLP):

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j \in N} p_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j \in N} w_j x_j \leq c \\ & x_j \in \{0, 1\}, j \in N \end{aligned}$$

Kjer  $x_j$  zavzame vrednost 1, če  $j$ -ti predmet položimo v nahrbtnik, sicer zavzame vrednost 0.

### 4 Robustni problem nahrbtnika

Robustni problem nahrbtnika (angl. *Robust Knapsack Problem*) v nadaljevanju RKP, je nekakšna nadgranja problema nahrbtnika. Dodaten problem se pojavi pri točnosti naših podatkov, in sicer pri utežeh  $w_j$ . Vsak predmet  $j$  ima svojo nominalno težo  $w_j$ , ki pa je lahko netočna, ampak zanjo vemo, da se nahaja na intervalu  $[w_j - \underline{w}_j, w_j + \overline{w}_j]$ . Podan imamo tudi celoštevilski parameter  $\Gamma$ , ki označuje največje možno število predmetov z netočno izmerjeno težo. Pri iskanju rešitve problema moramo torej paziti, da bo seštevek vseh novih uteži še vedno manjši od kapacitete nahrbtnika. Težav z rešitvijo seveda ne bomo imeli, če bodo vse dejanske uteži nižje oziroma lažje od njene nominalne vrednosti, lahko pa se zgodi tudi najslabši možni primer, ko vse uteži zavzamejo zgornjo mejo intervala. Dopustno rešitev, kjer je  $J \subseteq N$  lahko formuliramo na naslednji način:

$$\sum_{j \in J} w_j + \sum_{j \in \hat{J}} \overline{w}_j \leq c, \quad \forall \hat{J} \subseteq J \text{ in } |\hat{J}| \leq \Gamma$$

## 5 Pristop z dinamičnim programiranjem

Naj bo  $\bar{z}(d, s, j)$  najvišji dobiček za dopustno rešitev s skupno težo  $d$ , kjer so upoštevani samo elementi iz množice  $\{1, \dots, j\} \in N$  in samo  $s$  izmed njih doseže zgornjo mejo  $\hat{w}_j$ . Naj bo  $z(d, j)$  največji dobiček za dopustno rešitev s skupno težo  $d$ , kjer so upoštevani samo elementi iz množice  $\{1, \dots, j\} \in N$  in naj jih samo  $\Gamma$  spremeni težo iz nominalne na zgornjo mejo  $\hat{w}_j$ . Torej velja  $d = 0, 1, \dots, c$ ;  $s = 0, 1, \dots, \Gamma$  in  $j = 0, 1, \dots, n$ . Ključna lastnost pravilnosti tega pristopa je predpostavka, da so predmeti razvrščeni po padajoči teži  $\hat{w}_j$ . Problem lahko zapišemo z naslednjimi rekurzivnimi zvezami:

$$\bar{z}(d, s, j) = \max\{\bar{z}(d, s, j-1), \bar{z}(d - \hat{w}_j, s-1, j-1) + p_j\}$$

za  $d = 0, \dots, c$ ;  $s = 1, \dots, \Gamma$  in  $j = 1, \dots, n$ .

$$z(d, j) = \max\{z(d, j-1), z(d - w_j, j-1) + p_j\}$$

za  $d = 0, \dots, c$ ;  $j = \Gamma + 1, \dots, n$ .

Začetna vrednost je  $\bar{z}(d, s, 0) = -\infty$  za  $d = 0, \dots, c$  in  $s = 0, \dots, \Gamma$ . Nato nastavimo  $\bar{z}(0, 0, 0) = 0$ . Oba zapisa sta med seboj povezana z enakostjo  $z(d, \Gamma) = \bar{z}(d, \Gamma, \Gamma)$  za vsak  $d$ . Optimalno vrednost robustnega problema nahrbtnika dobimo kot:

$$z^* = \max \begin{cases} \max\{z(d, n) \mid d = 1, \dots, c \\ \max\{\bar{z}(d, s, n) \mid d = 1, \dots, c; s = 1, \dots, \Gamma - 1 \} \end{cases}$$

kjer porabimo tudi celotno kapaciteto nahrbtnika  $c^* \leq c$ .

Algoritem dinamičnega programiranja je sestavljen iz dveh korakov. V prvem koraku dobimo optimalno rešitev, ki vsebuje največ  $\Gamma$  elementov s povečano težo. V drugem koraku pa nato dobljeno rešitev lahko razširimo z dodatnimi elementi z nespremenjeno težo. Algoritem lahko razdelimo na dva koraka, ker razvrstitev predmetov po padajoči teži  $\bar{w}_j$  zagotavlja, da so v vsaki rešitvi elementi z najmanjšimi indeksi (torej tisti, ki so bili v nahrbtnik položeni prej) tisti, ki bodo dosegli večjo težo.

## **6 Viri in literatura**

### **Literatura**

- [1] Michele Monaci, Ulrich Pferschy, Paolo Serafini  
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0305054813001342>