Universidade de São Paulo Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz"

Distribuições das classes Kumaraswamy generalizada e exponenciada: propriedades e aplicações

Antonio Carlos Ricardo Braga Junior

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba 2013

Antonio Carlos Ricardo Braga Junior Bacharel em Estatística

Distribuições das classes Kumaraswamy generalizada e exponenciada: propriedades e aplicações

versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Orientadora:

Profa Dra CLARICE GARCIA B. DEMÉTRIO

Coorientador:

Prof. Dr. GAUSS MOUTINHO CORDEIRO

Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Ciências. Área de concentração: Estatística e Experimentação Agronômica

Piracicaba

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação DIVISÃO DE BIBLIOTECA - DIBD/ESALQ/USP

Braga Junior, Antonio Carlos Ricardo
Distribuições das classes Kumaraswamy generalizada e exponenciada:
propriedades e aplicações / Antonio Carlos Ricardo Braga Junior. - - versão revisada
de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011. - - Piracicaba, 2013. 133 p. il.

Tese (Doutorado) - - Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", 2013.

1. Análise de sobrevivência 2. Distribuições (Probabilidade) 3. Modelos de regressão 4. Máxima verossimilhança 1. Título

CDD 519.532 B813d

"Permitida a cópia total ou parcial deste documento, desde que citada a fonte – O autor"

DEDICATÓRIA

Aos meus pais,

Antonio Carlos Ricardo Braga e Rosalina Muniz de Souza Braga, pelo amor incondicional, por sempre depositarem confiança e me incentirarem a continuar nos momentos difíceis.

À minha noiva,

Aline Teixeira Amorim, por todo amor, apoio e carinho dados em cada dia.

Ao meu irmão,

Luiz Henrique Muniz Braga, pela amizade, incentivo, apoio e por fazer parte da minha vida.

À minha tia,

Edite Muniz de Souza, por ser a minha segunda mãe e sempre transmitir muita paz e serenidade.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, pois sem Ele nada é possível.

Aos meus pais, Antonio Carlos Ricardo Braga (in memorian) e Rosalina Muniz de Souza Braga, pela luz da vida, pelo apoio, incentivos e amor ao longo de toda a minha existência. Sem eles as trilhas da vida seriam muito mais difíceis.

Ao meu irmão Luiz Henrique, que sempre me deu apoio e por fazer parte da minha vida.

À minha noiva Aline Teixeira Amorim, pelo grande apoio, grande amor, grande carinho e incentivos nos momentos difíceis da vida.

Ao casal de primos Rose Muniz e Tiago Egydio por todo o fundamental apoio e incentivo durante esses últimos anos, transmitindo sempre uma palavra de paz e segurança. Sem eles, o período de doutorado teria sido mais difícil.

À família Amorim que me recebeu de braços abertos e torcem por mim de coração.

À Profa. Dra. Clarice Garcia Borges Demétrio pela orientação, pela confiança em mim depositada, pelos conselhos nos momentos adversos durante o doutorado, que foram cruciais para o desenvolvimento e conclusão desse trabalho.

Ao Prof. Dr. Gauss Moutinho Cordeiro, pelo apoio desde a época da minha graduação, sempre incentivando e, principalmente, pela oportunidade de poder trabalhar ao seu lado.

Aos amigos professores do Instituto Multidisciplinar em Saúde por sempre torcerem por mim em todos os momentos.

Aos amigos Marcelino, Rodrigo e Renato pela ajuda, grande amizade e ensinamentos no desenvolvimento desse trabalho.

Aos amigos do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, em especial a Alessandra dos Santos, Eduardo Monteiro, Elisângela Oliveira, Edilan Quaresma, Epaminondas Couto, Fernanda Rizzato, Maria Joseane, Mariana Urbano, Marina Maestre, Maurício Lordelo, Maria Cristina, Natália Martins, Patrícia Paranaíba, Renata Alcarde, Simone Sartório e Tiago Almeida, pelos momentos de convívio e amizade.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Estatística e Experimentação Agronômica, Dr. Carlos Tadeu, Dr. César Gonçalves de Lima, Dra. Clarice

Garcia Borges Demétrio, Dr. Décio Barbin, Dr. Edwin Ortega, Dra. Roseli Aparecida Leandro, Dr. Sílvio Zocchi, Dra. Taciana Villela Savian e Dr. Vitor Ozaki por todos os ensinamentos e amizade.

Aos alunos do curso de Pós-Graduação em Estatística e Experimentação Agronômica da ESALQ/USP, pelo prazer da convivência.

Aos verdadeiros amigos de infância, Marcos Franco Assis e Welton Lefundes Tomé, que desde sempre me acompanharam e são como irmãos.

Aos meus tios e tias por sempre acreditarem na minha capacidade, em especial, Elísia Muniz de Souza.

Aos meus primos e primas pela motivação e amizade.

À minha afilhada e prima, Lorena Muniz, pelas conversas, carinho e amizade.

Ao meu sobrinho, Caio Braga, por tornar os momentos em família mais leves e alegres.

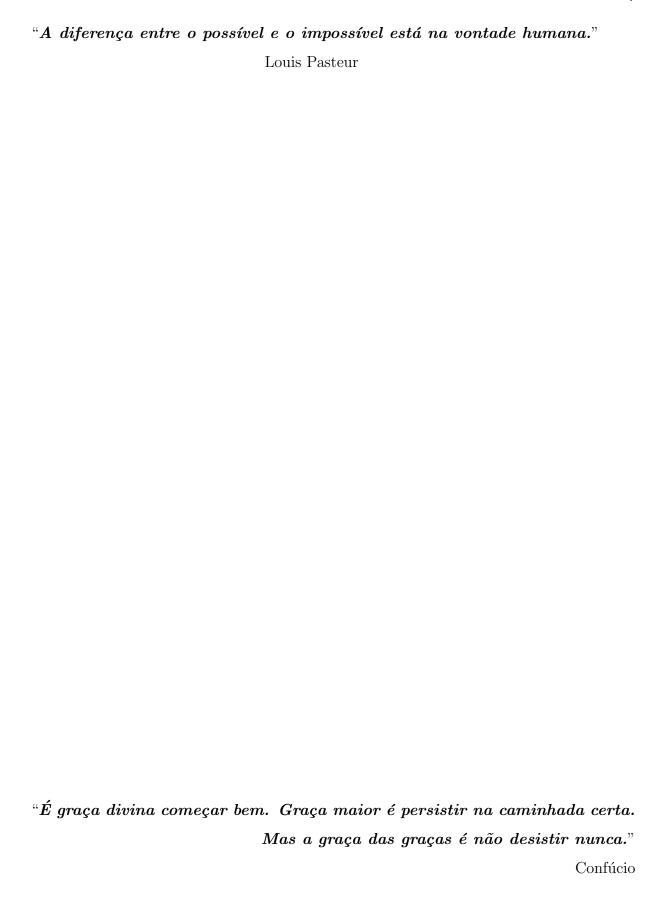
À minha cunhada, Andrea Leite, por ser uma pessoa sempre alegre e por fazer meu irmão muito feliz.

Às secretárias Luciane Brajão e Solange Paes de Assis Sabadin, pelo apoio, amizade, ajuda e confiança depositada em mim, que foram muito importantes nesse período de doutorado.

Aos funcionários do Departamento de Ciências Exatas da ESALQ/USP, Eduardo Bonilha, Jorge Alexandre Wiendl e Rosni Honofre Aparecido Pinto pela ajuda e apoio técnico.

À CAPES pela concessão de bolsa de estudos durante o ano de 2011.

A todos os educadores que passaram pela minha vida e também àqueles que direta ou indiretamente contribuíram para conclusão deste trabalho, em especial Prof. Cribari, Prof. Klaus, Profa. Rosana, Profa. Lia Terezinha, Profa. Giovana e Prof. Gilênio. A vocês eu agradeço muito.



SUMÁRIO

RESUMO	11
ABSTRACT	13
LISTA DE FIGURAS	15
LISTA DE TABELAS	19
1 INTRODUÇÃO	21
2 DESENVOLVIMENTO	23
2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência	23
2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência	24
2.1.2 O estimador de Kaplan-Meier	25
2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência	26
2.2 Distribuição Weibull modificada	26
2.3 Distribuição gama generalizada	27
2.4 Distribuição gama generalizada geométrica	29
2.5 Classes de distribuições generalizadas	30
2.5.1 Classe de distribuições Marshall e Olkin	31
2.5.2 Classe de distribuições exponenciadas	32
2.5.3 Classe de distribuições estendidas	34
2.5.4 Classe de distribuições betas	37
2.5.5 Classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas	38
2.6 Modelo de regressão	39
2.6.1 Modelo de regressão locação-escala	40
2.7 Inferência estatística	41
2.7.1 Método de máxima verossimilhança	41
2.7.2 Análise bayesiana	42
2.8 Estatísticas AIC, BIC e CAIC	46
3 ALGUMAS NOVAS PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO KUMA-	
RASWAMY WEIBULL MODIFICADA	49
3.1 Propriedades gerais	55
3.1.1 Medidas quantílicas	55
3.1.2 Momentos	56
3.1.3 Momentos incompletos	59

3.1.4 Função geradora de momentos
3.1.5 Desvios médios
3.1.6 Função quantílica
3.2 Estimação de máxima verossimilhança
3.3 Estudo de simulação
3.4 Análise bayesiana
3.5 Aplicação
3.5.1 Análise dos tempos de vida de componentes industriais
3.6 Generalização Multivariada
4 DISTRIBUIÇÃO GAMA GENERALIZADA GEOMÉTRICA EXPO-
NENCIADA
4.1 Distribuição gama generalizada geométrica exponenciada
4.2 Propriedades gerais
4.2.1 Momentos
4.2.2 Função geradora de momentos
4.2.3 Desvios médios
4.2.4 Confiabilidade
4.2.5 Estatísticas de ordem
4.3 Estimação por máxima verossimilhança
4.4 Análise bayesiana
4.5 Distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada
4.5.1 Momentos
4.5.2 Modelo de regressão para a distribuição log-gama generalizada geométrica ex-
ponenciada
4.5.3 Estimação por máxima verossimilhança
4.5.4 Análise bayesiana
4.6 Aplicação
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS
5.1 Conclusões
5.2 Pesquisas futuras
REFERÊNCIAS
APÊNDICES

RESUMO

Distribuições das classes Kumaraswamy generalizada e exponenciada: propriedades e aplicações versão revisada de acordo com a resolução CoPGr 6018 de 2011

Recentemente, Cordeiro e de Castro (2011) apresentaram uma classe generalizada baseada na distribuição Kumaraswamy (Kw-G). Essa classe de distribuições modela as formas de risco crescente, decrescente, unimodal e forma de U ou de banheira. Uma importante distribuição pertencente a essa classe é a distribuição Kumaraswamy Weibull modificada (KwMW) proposta por Cordeiro; Ortega e Silva (2013). Com isso foi utilizada essa distribuição para o desenvolvimento de algumas novas propriedades e análise bayesiana. Além disso, foi desenvolvida uma nova distribuição de probabilidade a partir da distribuição gama generalizada geométrica (GGG) que foi denominada de gama generalizada geométrica exponenciada (GGGE). Para a nova distribuição GGGE foram calculados os momentos, a função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e as estatísticas de ordem. Desenvolveu-se o modelo de regressão log-gama generalizada geométrica exponenciada. Para a estimação dos parâmetros, foram utilizados os métodos de máxima verossimilhança e bayesiano e, finalmente, para ilustrar a aplicação da nova distribuição foi analisado um conjunto de dados reais.

Palavras-chave: Análise de sobrevivência; Weibull modificada; gama generalizada geométrica; Máxima verossimilhança; Modelo de regressão

ABSTRACT

Distributions of the generalized Kumaraswamy and exponentiated classes: properties and applications

Recently, Cordeiro and de Castro (2011) showed a generalized class based on the Kumaraswamy distribution (Kw-G). This class of models has crescent risk forms, decrescent, unimodal and U or bathtub form. An important distribution belonging to this class the Kumaraswamy modified Weibull distribution (KwMW), proposed by Cordeiro; Ortega e Silva (2013). Thus this distribution was used to develop some new properties and bayesian analysis. Furthermore, we develop a new probability distribution from the generalized gamma geometric distribution (GGG) which it is called generalized gamma geometric exponentiated (GGGE) distribution. For the new distribution we calculate the moments, moment generalized gamma geometric exponentiated regression model. The methods used to estimate the model parameters are: maximum likelihood and bayesian. Finally, we illustrate the potentiality of the new distribution by means of an application to a real data set.

Keywords: Survival analysis; Modified Weibull; generalized gamma geometric; Maximum likelihood; Regression model

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 -	Exemplos ilustrativos de alguns gráficos TTT	25
Figura 2 -	Gráfico da função densidade da distribuição KwMW para alguns valores	
	de parâmetros. (a) Para $b=1,5,\alpha=0,2,\gamma=0,5$ e $\lambda=0,5.$ (b) Para	
	$a=3,\alpha=0,2,\gamma=0,5$ e $\lambda=0,5.$ (c) Para alguns valores de todos os	
	parâmetros	50
Figura 3 -	(a) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KwMW para	
	diferentes valores de a . (b) Gráfico da função de sobrevivência da dis-	
	tribuição KwMW para diferentes valores de b	51
Figura 4 -	Funções risco da distribuição KwMW. (a) Gráfico da função risco na	
	forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c)	
	Gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente	51
Figura 5 -	Relações com algumas distribuições	54
Figura 6 -	Assimetria de Bowley e curtose de Moors da distribuição KwMW como	
	função de a para valores selecionados de b	57
Figura 7 -	Assimetria de Bowley e curtose de Moors da distribuição KwMW como	
	função de b para valores selecionados de a	57
Figura 8 -	Gráficos da assimetria da distribuição KwMW. (a) Em função de b para	
	valores selecionados de a . (b) Em função de a para valores selecionados	
	de b	58
Figura 9 -	Gráficos da curtose da distribuição KwMW. (a) Em função de b para	
	valores selecionados de a . (b) Em função de a para valores selecionados	
	de b	59
Figura 10	-Curvas de Lorenz para a distribuição KwMW. (a) Para $a=$	
	$10,40,150,350$ e $b=1,1,~\alpha=1,1,~\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001$. As cur-	
	vas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de a . (b)	
	Para $a=20$ e $b=1,2,10,60,\alpha=1,1,\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001.$ As curvas	
	de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de b	63

Figura 11	-Curvas de Bonferroni para a distribuição KwMW. (a) Para $a =$	
	$10,40,150,350$ e $b=1.1,~\alpha=1,1,~\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001.$ As cur-	
	vas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de a . (b)	
	Para $a=20$ e $b=1,2,10,60,\alpha=1,1,\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001.$ As curvas	
	de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de b	34
Figura 12	-Histogramas para os 10000 valores simulados das EMVs baseados em	
	$n=50.$ (a) Para $a.$ (b) Para $b.$ (c) Para $\alpha.$ (d) Para $\gamma.$ (e) Para λ	70
Figura 13	-Histogramas para os 10000 valores simulados das EMVs baseados em	
	$n=500.$ (a) Para $a.$ (b) Para $b.$ (c) Para $\alpha.$ (d) Para $\gamma.$ (e) Para λ	71
Figura 14	-Curva TTT para os dados de Aarset	74
Figura 15	-Função de sobrevivência para os modelos ajustados e função de sobre-	
	vivência empírica estimada pelo método de Kaplan-Meier	75
Figura 16	-Funções de densidades estimadas dos modelos e histograma para os dados 7	75
Figura 17	-Estimativas das funções densidade marginais <i>a posteriori</i> para os	
	parâmetros do modelo KwMW	76
Figura 18	-Gráfico da função densidade da distribuição GGGE para diferentes va-	
	lores de parâmetros	30
Figura 19	-Gráfico da função de sobrevivência da distribuição GGGE para diferen-	
	tes valores de λ	31
Figura 20	-Funções risco da distribuição GGGE. (a) Gráfico da função risco na	
	forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c)	
	Gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente	32
Figura 21	- Assimetria e curtose da distribuição GGGE como função do parâmetro λ	37
Figura 22	-Gráfico da função densidade da distribuição LGGGE: (a) Para alguns	
	valores de λ . (b) Para alguns valores de λ . (c) Para alguns valores de p ,	
	$q \in \lambda$) 9
Figura 23	- Assimetria e curtose da distribuição LGGGE como função do parâmetro $\lambda 10$)1
Figura 24	-Curva TTT para os dados de tempo de permanência no Japão 10)8
Figura 25	-Função de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições	
	GGGE, GGG e WG com sobrevivência empírica para os dados de tempo	
	de permanência no Japão)Q

Figura 26	5 - Estimativas	das	$\operatorname{fun} \tilde{\operatorname{coes}}$	${\it densidade}$	marginais	a	posteriori	para	os	
	parâmetros	do m	odelo GC	GGE para o	s dados de	ten	npo de perr	nanên	cia	
	no Japão .									110

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 -	Resultados da simulação de Monte Carlo: média e raiz quadrada do erro
	quadrático médio das estimativas dos parâmetros do modelo KwMW
	(Valores verdadeiros utilizados: $a=10,5,b=2,5,\alpha=3,5,\gamma=2,5$ e
	$\lambda = 2,5) \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots $
Tabela 2 -	EMVs dos parâmetros dos modelos KwMW, KwW, MW, W, E e B-
	S para os dados de tempo de vida de componentes industriais, cor-
	respondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores de AIC, BIC e
	CAIC 74
Tabela 3 -	Sumários <i>a posteriori</i> dos parâmetros do modelo KwMW 76
Tabela 4 -	Alguns submodelos da distribuição GGGE
Tabela 5 -	EMVs dos parâmetros dos modelos GGGE, GGG e WG para os dados
	de tempo de permanência no Japão, correspondentes erros-padrão (entre
	parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC
Tabela 6 -	TRV para os dados de tempo de permanência no Japão
Tabela 7 -	Sumário a posteriori dos parâmetros do modelo GGGE para os dados
	de tempo de permanência no Japão

1 INTRODUÇÃO

A análise de sobrevivência é uma das áreas da estatística que mais cresceu nas últimas décadas. A razão desse crescimento é o desenvolvimento e aprimoramento de técnicas estatísticas combinados com computadores cada vez mais eficientes (COLO-SIMO; GIOLO, 2006). Uma evidência quantitativa desse sucesso é o número de aplicações em diversos campos, como medicina, biologia, saúde pública, epidemiologia, engenharia, economia e estudos demográficos.

Os dados em análise de sobrevivência referem-se ao tempo até a ocorrência de um evento de interesse. Este tempo é denominado tempo de falha e apresenta algumas características especiais. A primeira é que a variável resposta que não é negativa, geralmente, apresenta distribuição assimétrica positiva, não sendo, portanto, adequado assumir que tenha distribuição normal. A segunda característica é a presença de dados censurados, isto é, para alguns elementos em estudo não se conhece o tempo de falha exato. Sabe-se apenas que o tempo de falha ocorreu depois ou antes do valor registrado.

É comum a ocorrência de dados censurados, uma vez que nem sempre é possível verificar a ocorrência do evento de interesse para todas as observações em teste. É comum que a variável resposta (tempo até a ocorrência do evento de interesse) esteja relacionada com covariáveis que explicam a sua variabilidade. Para estudar o efeito dessas covariáveis sobre a variável resposta deve-se utilizar um modelo de regressão apropriado para dados censurados (SILVA, 2009). Os modelos de regressão assumem que os dados seguem uma distribuição de probabilidade. Na análise de sobrevivência, as distribuições clássicas associadas à variável resposta são as distribuições exponencial, Weibull, lognormal, log-logística e gama generalizada (LAWLESS, 2003), entre outras.

Por outro lado, nos últimos anos tem crescido muito a generalização e/ou a modificação de algumas distribuições utilizadas em análise de sobrevivência. Existem diferentes formas de se modificar uma distribuição de probabilidade, sendo que algumas das classes de generalizações mais trabalhadas são as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997), as distribuições exponenciadas apresentadas, inicialmente, por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008) e as distribuições betas que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002).

Recentemente, Cordeiro e de Castro (2011) apresentaram uma classe gene-

ralizada baseada na distribuição Kumaraswamy (KUMARASWAMY, 1980), que modela as formas de risco crescente, decrescente, unimodal e forma de U ou de banheira. Apresentaram ainda duas formas de expandir a função densidade de probabilidade (fdp) de uma distribuição Kumaraswamy generalizada em termos de uma série de potências ponderada.

Nesse contexto, o objetivo deste trabalho foi desenvolver algumas novas propriedades para uma distribuição pertencente à classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas, denominada distribuição Kumaraswamy Weibull modificada (CORDEIRO; ORTEGA; SILVA, 2013), formulada a partir da composição da distribuição Kumaraswamy e da distribuição Weibull modificada. Outro objetivo foi propor uma nova distribuição denominada gama generalizada geométrica exponenciada, formulada a partir da distribuição gama generalizada geométrica. Essas duas distribuições, objeto desse estudo, devido à sua flexibilidade em acomodar muitas formas da função risco, são importantes distribuições de probabilidade, pois podem ser utilizadas em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. Assim, o trabalho está organizado da seguinte maneira: no Capítulo 2 é apresentada uma revisão sobre análise de sobrevivência. No Capítulo 3 é apresentada a distribuição Kumaraswamy Weibull modificada. Alguns de seus submodelos são apresentados, as propriedades matemáticas da distribuição são estudadas. A distribuição é aplicada a um conjunto de dados reais. No Capítulo 4 apresenta-se a nova distribuição gama generalizada geométrica exponenciada, bem como suas propriedades matemáticas. O modelo de regressão para a distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada é apresentado. A análise de um conjunto de dados reais é feita pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiano. Por fim, o Capítulo 5 relata as principais conclusões e descreve o direcionamento da continuidade deste trabalho.

2 DESENVOLVIMENTO

Nesta seção, é feita uma revisão sucinta sobre análise de sobrevivência, sobre algumas classes de generalizações de distribuições, sobre os modelos de regressão e sobre os métodos inferenciais para análise de dados de sobrevivência, formando o embasamento teórico necessário para o entendimento do trabalho relacionado ao objetivo da pesquisa.

2.1 Conceitos básicos em análise de sobrevivência

A análise de sobrevivência é caracterizada pelo fato de que a variável resposta é composta de dois fatores: o tempo até a ocorrência de um evento de interesse e, frequentemente, pelo indicador de censura (COLOSIMO; GIOLO, 2006). O evento em estudo é denominado falha e o tempo até a sua ocorrência é chamado de tempo de falha. A censura é o registro parcial do tempo de falha, podendo ser, entre outros motivos, devido à perda ou retirada de um elemento do estudo.

A censura é dita ser do tipo I quando ocorre devido ao término do estudo após um período de tempo pré-determinado e, do tipo II quando ocorre devido ao término do estudo após um número de falhas fixado previamente. O tipo de censura mais comum em situações práticas é chamada de aleatória e ocorre quando um elemento deixa o estudo sem que o evento de interesse tenha ocorrido.

Todos esses tipos de censura são conhecidos como de censura à direita, pois a falha ocorre sempre à direita do tempo registrado. Existem ainda outros mecanismos de censura, como por exemplo, as censuras à esquerda, em que o tempo registrado é maior do que o tempo de falha; e censura intervalar, na qual não se sabe o tempo exato de falha e a única informação disponível é que o tempo de falha ocorreu em um certo intervalo de tempo.

Seja X uma variável aleatória não negativa que representa o tempo de vida de um elemento, e seja C uma variável aleatória independente de X, que representa o tempo de censura associado a esse elemento. Assim, os dados observados são representados por $x = \min(X, C)$ e δ , o indicador de censura, é definido por

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{, se } X \le C \\ 0 & \text{, se } X > C \end{cases}$$

em que $\delta = 0$ indica censura e $\delta = 1$ indica falha.

A distribuição de probabilidade da variável aleatória X pode ser especificada por meio da função densidade de probabilidade, da função de sobrevivência ou da função risco, sendo as três formas equivalentes.

2.1.1 Distribuição do tempo de sobrevivência

Seja X uma variável aleatória não negativa, que representa o tempo de vida de um indivíduo proveniente de uma dada população homogênea. A função densidade de probabilidade, f(x), é definida por

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x},$$

em que $F(x) = P(X \le x)$ é a função distribuição acumulada (fda) de X. No contexto da análise de sobrevivência, a função f(x) pode ser interpretada como a probabilidade de um indivíduo sofrer o acontecimento de interesse no intervalo de tempo Δx e possui duas propriedades:

$$f(x) \ge 0$$
 e $\int_0^\infty f(x)dx = 1$.

A função de sobrevivência, S(x), é definida como sendo a probabilidade de ocorrência do acontecimento de interesse após o instante x, ou seja,

$$S(x) = P(X > x) = \int_{x}^{\infty} f(x)dx = 1 - F(x),$$

em que $\lim_{x\to 0} S(x) = 1$ e $\lim_{x\to \infty} S(x) = 0$.

Em termos clínicos, por exemplo, a função de sobrevivência representa a probabilidade de um indivíduo sobreviver além do instante x.

A função risco, h(x), representa o risco instantâneo no instante x condicional à sobrevivência até o tempo x. Define-se da seguinte forma:

$$h(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \le X \le x + \Delta x \mid X \ge x)}{\Delta x} = \frac{f(x)}{S(x)}.$$

Uma forma empírica de determinar o comportamento da função risco é por meio da construção do gráfico do tempo total em teste (curva TTT), proposto por Aarset (1987). A curva TTT, para dados não censurados, é obtida construindo um gráfico de

$$G\left(\frac{r}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{r} X_{i:n} + (n-r)X_{r:n}}{\sum_{i=1}^{n} X_{i:n}} \quad versus \quad \frac{r}{n}$$

em que r = 1, ..., n e $X_{i:n}, i = 1, ..., n$ são estatísticas de ordem da amostra (MUDHOL-KAR; SRIVASTAVA; KOLLIA, 1996).

Esse gráfico apresenta uma reta diagonal se o risco for constante (reta A), uma curva convexa se a função risco é decrescente (curva B) e côncava se o risco é crescente (curva C), e uma curvatura inicialmente convexa e depois côncava (curva D) se o risco é em forma de "U", e no caso reverso (curva E) se o risco é unimodal. A Figura 1 ilustra as diversas formas que a curva TTT pode apresentar.

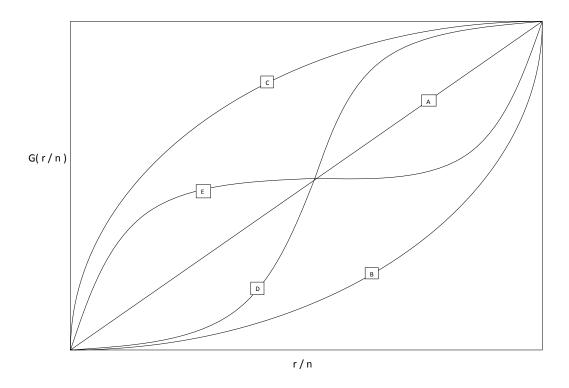


Figura 1 - Exemplos ilustrativos de alguns gráficos TTT

2.1.2 O estimador de Kaplan-Meier

Kaplan e Meier (1958) propuseram um estimador não-paramétrico para a função de sobrevivência, quando se tem a presença de dados censurados. Esse estimador é designado por estimador de Kaplan-Meier ou estimador produto-limite.

O estimador considera na sua construção um número de intervalos de tempo igual ao número de falhas distintas e os intervalos têm como limites os tempos de falha da amostra.

O estimador de Kaplan-Meier é definido como

$$\widehat{S}(x) = \prod_{j:x_{(j) \le x}} \left(\frac{n_j - d_j}{n_j} \right) = \prod_{j:x_{(j) \le x}} \left(1 - \frac{d_j}{n_j} \right),$$

em que $x_{(1)}, x_{(2)}, \ldots, x_{(k)}$ representam os k tempos de falha distintos e ordenados, d_j é o número de falhas em $x_{(j)}, j = 1, \ldots, k$, e n_j é o número de indivíduos sob risco em $x_{(j)}$, ou seja, os indivíduos que não falharam e não foram censurados até o instante imediatamente anterior a $x_{(j)}$.

2.1.3 A função de verossimilhança em análise de sobrevivência

Usando-se o método de estimação de máxima verossimilhança é possível incorporar as censuras, presentes em muitos dados de tempo de vida.

Considere uma amostra de variáveis aleatórias independentes X_1, X_2, \ldots, X_n de tempos de sobrevivência. Supondo que os dados consistem de n pares observados $(x_1, \delta_1), (x_2, \delta_2), \ldots, (x_n, \delta_n)$ em que x_i é o tempo de falha ou censura, δ_i é o indicador de censura cuja distribuição envolve um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$. Nesse caso, a função de verossimilhança considerando censura não informativa é dada por:

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} [f(x_i, \boldsymbol{\theta})]^{\delta_i} [S(x_i, \boldsymbol{\theta})]^{1-\delta_i},$$

em que $f(x_i)$ e $S(x_i)$ são as funções densidade de probabilidade e de sobrevivência para cada variável aleatória X_i , respectivamente. Observe que a contribuição de cada observação não censurada é a sua função de densidade e cada observação censurada contribui com a função de sobrevivência.

2.2 Distribuição Weibull modificada

A distribuição Weibull modificada (MW), que possui três parâmetros $\alpha>0$, $\gamma>0$ e $\lambda>0$, foi introduzida por Lai; Xie e Murthy (2003) e despertou o interesse de diversos pesquisadores pelo fato de representar uma família paramétrica que possui como casos particulares outras distribuições que são utilizadas na análise de dados de tempo de vida. Além disso, possui como importante característica uma função de risco que acomoda formas de risco crescente ($\gamma \geq 1$), decrescente e não-monótona ($0 < \gamma < 1$), como aquelas em forma de U.

Os parâmetros α e γ controlam a escala e a forma da distribuição, respectivamente. Ainda, o parâmetro λ funciona como um fator de aceleração do tempo de sobrevida, ou seja, à medida que o tempo aumenta, ele funciona como um fator de fragilidade na sobrevivência do indivíduo.

Seja X uma variável aleatória com distribuição MW proposta por Lai; Xie e Murthy (2003), cuja função de densidade, denotada por $g_{\alpha,\gamma,\lambda}(x)$, é dada por

$$g_{\alpha,\gamma,\lambda}(x) = \alpha x^{\gamma-1}(\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}, \ x > 0.$$
 (1)

Denota-se por $X \sim \text{MW}(\alpha, \gamma, \lambda)$.

A distribuição MW é uma família paramétrica que possui alguns casos particulares. Quando $\lambda=0$ na equação (1), tem-se uma distribuição Weibull. Adicionalmente, quando $\gamma=1$ tem-se uma distribuição exponencial e quando $\gamma=2$ tem-se uma distribuição Rayleigh.

As funções de distribuição acumulada G(x), de sobrevivência S(x) e de risco h(x) são expressas, respectivamente, por

$$G(x) = P[X \le x] = 1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\},\tag{2}$$

$$S(x) = 1 - G(x) = \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}$$
 e

$$h(x) = \frac{g(x)}{S(x)} = \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp(\lambda x).$$

Algumas outras propriedades da distribuição MW podem ser encontradas em Lai; Xie e Murthy (2003).

2.3 Distribuição gama generalizada

A distribuição gama generalizada (GG) foi introduzida por Stacy (1962) e despertou o interesse de diversos pesquisadores pelo fato de representar uma família paramétrica que possui como casos particulares a distribuição exponencial quando $\tau = k = 1$ na equação (3), se $\tau = 1$ obtém-se a distribuição gama. Para k = 1 tem-se a distribuição Weibull, para $\alpha = 1/\lambda$, $\tau = 2$ e k = 1 obtém-se a distribuição Rayleigh; outros submodelos podem ser vistos, por exemplo, em Lawless (2003). Desta forma, a distribuição GG faz com que a mesma seja útil, por exemplo, na discriminação de modelos probabilísticos.

Nos últimos anos, diversos trabalhos envolvendo a distribuição GG foram propostos, entre os quais destacam-se, por exemplo, Nadarajah e Gupta (2007), que usaram a distribuição com aplicações em dados de seca. Ali; Woo e Nadarajah (2008) derivaram a distribuição exata do produto X_1X_2 em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes com distribuição GG, provenientes dos resultados de dados de seca. Ortega; Paula e Bolfarine (2008) compararam três tipos de resíduos baseados no componente de deviance no modelo de regressão GG usando observações censuradas. Nadarajah (2008a) apresentou um estudo sobre o uso da distribuição GG em engenharia elétrica e eletrônica. Cox (2008) discutiu e comparou a família F-generalizada com o modelo GG. Malhotra; Sharma e Kaler (2009) modelaram o sinal wireless por meio da distribuição GG e analisaram o desempenho do sinal. Ainda, Cordeiro; Ortega e Silva (2011) propuseram a distribuição gama generalizada exponenciada.

A função densidade de probabilidade da distribuição GG proposta por Stacy (1962) é dada por

$$g(x) = \frac{\tau}{\alpha \Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right], \quad x > 0,$$
 (3)

em que $\alpha>0$ é o parâmetro de escala, $\tau>0$ e k>0 são os parâmetros de forma e $\Gamma(k)$ é a função gama, definida por:

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} \exp(-x) dx.$$

Se X é uma variável aleatória positiva com distribuição GG com parâmetros α, τ e k, então denota-se que $X \sim \mathrm{GG}(\alpha, \tau, k)$.

Vários trabalhos estudaram as propriedades da distribuição GG, dentre os quais destacam-se Stacy e Mihram (1965), Prentice (1974), Farewell e Prentice (1977) e Lawless (1980, 2003). A média e a variância da distribuição GG são dadas por

$$E(X) = \frac{\alpha \Gamma\left(\frac{\tau k + 1}{\tau}\right)}{\Gamma(k)} \quad \text{e} \quad V(X) = \frac{\alpha^2}{\Gamma(k)} \left\{ \Gamma\left(\frac{\tau k + 2}{\tau}\right) - \frac{\left[\Gamma\left(\frac{\tau k + 1}{\tau}\right)\right]^2}{\Gamma(k)} \right\}.$$

A função de distribuição acumulada G(x), função de sobrevivência S(x) e função risco h(x) são expressas, respectivamente, por

$$G(x) = P[X \le x] = \frac{\gamma(k, (x/\alpha)^{\tau})}{\Gamma(k)} = \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}} w^{k-1} \exp(-w) dw = \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right], \quad (4)$$

$$S(x) = 1 - G(x) = 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]$$
 e

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{x^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]}{\int_{0}^{\infty} x^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] dx},$$

em que $\gamma(k,x) = \int_0^x w^{k-1} e^{-w} dw$ é a função gama incompleta e $\gamma_1(k,x)$ é a razão da função gama incompleta, definida por $\gamma_1(k,x) = \gamma(k,x)/\Gamma(k)$, que é facilmente implementada em vários pacotes estatísticos como R (*R Core Team*, 2011), SAS (SAS, 2008), entre outros.

2.4 Distribuição gama generalizada geométrica

A distribuição gama generalizada geométrica (GGG), que possui quatro parâmetros $\alpha > 0$, $\tau > 0$, k > 0 e $0 , foi introduzida por Ortega; Cordeiro e Pascoa (2011). Suponha que <math>\{Y_i\}_{i=1}^Z$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid) que possuem função de distribuição acumulada gama generalizada (GG) definida na equação (4).

Seja Z uma variável aleatória geométrica com função de probabilidade dada por $P(z;p)=(1-p)p^{z-1}$ para $Z\in\mathbb{N}$ e $p\in(0,1)$. Seja $X=\min(\{Y_i\}_{i=1}^Z)$. Então, fazendose uso da distribuição do mínimo, encontra-se a função de distribuição acumulada de X, representada por

$$F_X(x|z) = 1 - [1 - F_X(x)]^z = 1 - \left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)\right]\right\}^z$$
 (5)

Derivando a expressão (5) com relação a x, encontra-se a função densidade de probabilidade de x condicionada a Z=z. Assim,

$$f(x|z;\alpha,\tau,k) = \frac{z\tau}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{z-1}.$$

Como x e z são independentes, tem-se que a função densidade de probabilidade conjunta de x e z é dada por

$$f(x, z; \alpha, \tau, k, p) = f(x|z; \alpha, \tau, k)P(z; p)$$

$$= \frac{z\tau}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{z - 1} (1 - p)p^{z - 1}.$$

Portanto, a função densidade de probabilidade marginal de $x, f(x; \theta)$ em que $\theta^{\top} = (\alpha, \tau, k, p)$ é

$$f(x; \boldsymbol{\theta}) = \sum_{z=1}^{\infty} f(x; z, \alpha, \tau, k, p)$$

$$= \frac{(1-p)\tau}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \sum_{z=1}^{\infty} p^{z-1} z \left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{z-1},$$

notando que

$$\sum_{z=1}^{\infty} p^{z-1} z \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\}^{z-1} = \left\{ 1 - p \left(1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right) \right\}^{-2}.$$

Então, para x>0, a função de densidade da distribuição gama generalizada geométrica (GGG) com quatro parâmetros é dada por

$$f(x; \alpha, \tau, k, p) = \frac{\tau(1-p)}{\alpha \Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left\{1 - p\left(1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right)\right\}^{-2}.$$
 (6)

A função de distribuição acumulada correspondente à (6) é

$$F(x; \alpha, \tau, k, p) = \frac{\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]}{1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\}}.$$
 (7)

A variável aleatória X com função de densidade (6) é denotada por $X \sim \mathrm{GGG}(\alpha,\tau,k,p).$

As funções de sobrevivência e risco correspondentes à (6) são

$$S(x; \alpha, \tau, k, p) = 1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}$$

e

$$h(x; \alpha, \tau, k, p) = \frac{\frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-2}}{1 - \left\{\gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}},$$

respectivamente.

2.5 Classes de distribuições generalizadas

Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de famílias de distribuições de probabilidade obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganho na modelagem de dados e a capacidade de incorporar um grande número de submodelos.

Adota-se o termo distribuição base para a família de distribuições a ser generalizada, e denota-se por G(x) a fda da distribuição base, e por g(x) a sua fdp.

Algumas das classes de generalizações mais estudadas nos últimos anos são as famílias de distribuições exponenciadas apresentadas, inicialmente, por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995); as famílias de distribuições obtidas pelo método desenvolvido

por Marshall e Olkin (1997); as distribuições betas que receberam maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002); as distribuições estendidas discutidas por Barros (2008); e, recentemente, as distribuições Kumaraswamy generalizadas, desenvolvidas por Cordeiro e de Castro (2011). Nas subseções seguintes, essas classes de distribuições serão discutidas e os principais trabalhos apresentados.

2.5.1 Classe de distribuições Marshall e Olkin

Marshall e Olkin (1997) apresentaram um método para obter generalizações de distribuições de probabilidade assumindo um novo parâmetro, v > 0, definido por

$$S^*(x) = \frac{vS(x)}{1 - (1 - v)S(x)} = \frac{vS(x)}{G(x) + vS(x)}, \qquad v > 0$$
(8)

em que G(x) e S(x) são a fda e a função de sobrevivência da distribuição base, respectivamente, e $S^*(x)$ é a função de sobrevivência da nova família de distribuição, agora com o parâmetro adicional v. Observa-se que se v = 1, então, $S^*(x) = S(x)$.

Se a distribuição base tem fdp g(x) e função risco h(x), então, a nova fdp correspondente a $S^*(x)$ é obtida por

$$f^*(x) = \frac{vg(x)}{[G(x) + vS(x)]^2}$$
(9)

e a função risco por

$$h^*(x) = \frac{h(x)}{1 - (1 - v)S(x)} = \frac{h(x)}{G(x) + vS(x)}.$$

Marshall e Olkin (1997) modificaram a distribuição exponencial, atribuindo o nome de distribuição exponencial com dois parâmetros, que pode servir como concorrente de outras distribuições de dois parâmetros já conhecidas, como as distribuições Weibull, gama e lognormal. A mesma modificação foi realizada com a distribuição Weibull, a qual é denominada de Weibull com três parâmetros. Ainda, desenvolveram as versões bivariadas dessas distribuições.

A distribuição Weibull com três parâmetros, obtida por Marshall e Olkin (1997), foi estudada por Zhang e Xie (2007), que destacam que uma das propriedades importantes dessa distribuição é que sua função risco modela formas crescente, decrescente e, ainda, não monótona e tem como caso particular a distribuição Weibull para v=1. A caracterização do modelo é baseada no gráfico de probabilidade Weibull (WPP) (ZHANG;

XIE, 2007). Os autores apresentam um procedimento de estimação de parâmetros com base no WPP e, adicionalmente, desenvolvem um método de estimação por máxima verossimilhança.

Utilizando o método apresentado por Marshall e Olkin (1997), Thomas e Jose (2004) propuseram as distribuições Marshall-Olkin semi-Pareto bivariada (MO-BSP) e Marshall-Olkin Pareto bivariada (MO-BP), e estudaram várias características dessas distribuições. Os modelos de séries temporais autorregressivos de primeira ordem e de k-ésima ordem foram desenvolvidos, tendo a distribuição MO-BSP como distribuição marginal estacionária.

Ghitany; Al-Awadhi e Alkhalfan (2007) investigaram as propriedades da inclusão de um novo parâmetro pelo método de Marshall e Olkin (1997), baseado na distribuição Pareto de segundo tipo. Os autores mostraram que a distribuição proposta pode ser expressa como uma distribuição de mistura do modelo exponencial. Condições simples e suficientes para o comportamento das funções de densidade e risco são fornecidas e a estimação de máxima verossimilhança foi utilizada para a distribuição proposta quando ajustada a dados censurados aleatoriamente.

Ainda, Rao; Ghitany e Kantam (2009) desenvolveram um plano de teste de confiabilidade para não rejeição ou rejeição de muitos produtos submetidos a inspeção, em que o tempo de vida segue a distribuição exponencial com dois parâmetros de Marshall-Olkin.

2.5.2 Classe de distribuições exponenciadas

A classe de distribuições exponenciadas é obtida elevando-se ao expoente θ ($\theta > 0$) a fda de uma distribuição base, isto é,

$$F(x) = G(x)^{\theta} . {10}$$

Consequentemente, a fdp é dada por $f(x) = \theta g(x)G(x)^{\theta-1}$. A função de sobrevivência e a função de risco são dadas, respectivamente, por

$$S(x) = 1 - G(x)^{\theta}$$
 e $h(x) = \frac{\theta g(x)G(x)^{\theta-1}}{1 - G(x)^{\theta}}$.

O ganho dessa classe de distribuições é que a inclusão desse novo parâmetro θ aumenta a flexibilidade da distribuição base.

Como elementos dessa classe de distribuições, cita-se a Weibull exponenciada, apresentada por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995), que é a generalização da distribuição Weibull com parâmetros $\alpha>0$ e $\gamma>0$. A distribuição Weibull exponenciada apresenta diferentes formas da função risco, como por exemplo, formas crescente, decrescente, de banheira e unimodal, obtidas de quatro regiões do espaço paramétrico determinados pelas equações $\alpha=1$ e $\theta\alpha=1$. A distribuição Weibull exponenciada é indicada para análise de dados em que o risco não é monótono e pode ser utilizada para testar a qualidade do ajuste da distribuição Weibull como submodelo. Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995) estudaram cinco conjuntos de dados, dentre esses um em que uma falha é considerada quando da ocorrência de quebra abrupta do motor ou quando a potência máxima produzida foi menor do que a porcentagem considerada normal para este tipo de motor. Ainda, dados de um experimento clínico de câncer de cabeça e pescoço são analisados pelos autores, utilizando a distribuição Weibull exponenciada.

Gupta e Kundu (1999) propuseram a distribuição exponencial generalizada (que é uma modificação da distribuição exponencial) com parâmetros de escala $\lambda>0$ e locação $\mu\in\mathbb{R}$, cuja fda é dada por $G(t)=1-e^{-(t-\mu)/\lambda}$. Os autores também estudaram diferentes propriedades dessa distribuição, que é um caso particular da distribuição Weibull exponenciada proposta por Mudholkar; Srivastava e Freimer (1995) quando o parâmetro de locação é igual a zero. Gupta e Kundu (1999) observam que essa família possui algumas características interessantes que são similares àquelas das distribuições gama e Weibull. Dessa forma, esse modelo pode ser usado como alternativa aos modelos gama e Weibull em diversas situações. Um conjunto de dados de testes sobre a resistência de rolamentos de esfera, citado em Lawless (1982), foi analisado e o ajuste da distribuição exponencial generalizada foi melhor do que o das ditribuições Weibull e gama com três parâmetros.

Algumas das propriedades da distribuição exponencial exponenciada discutida por Gupta; Gupta e Gupta (1998) foram estudadas por Gupta e Kundu (2001). Esta distribuição tem dois parâmetros (escala e forma) similar às distribuições Weibull e gama, podendo substituí-las. O modelo proposto foi ajustado a dois conjuntos de dados reais de tempo de falha e seus resultados foram comparados com os resultados dos modelos Weibull e gama. O primeiro conjunto de dados refere-se à resistência de rolamentos de esfera, citado em Lawless (1982), e o segundo conjunto refere-se ao tempo de falha de

sistema de condicionamento de ar de um avião, citado em Linhart e Zucchini (1986). O modelo exponencial exponenciado ajustou-se melhor ao primeiro conjunto de dados e o modelo Weibull ajustou-se melhor ao outro conjunto de dados.

Nadarajah e Kotz (2006) discutiram algumas distribuições exponenciadas e estendidas (que serão tratadas na próxima seção) e propuseram a distribuição gama padrão exponenciada, que é a generalização da distribuição gama padrão, cuja fda é $G(x) = \gamma(\alpha, x)/\Gamma(\alpha)$, em que $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x x^{\alpha-1}e^{-x}dx$ é a função gama incompleta, elevando-se G(x) à potência θ e desenvolveram matematicamente algumas propriedades estatísticas de cada distribuição. A fdp e a fda foram derivadas na forma de expansão em série para a distribuição gama padrão exponenciada e o comportamento da fdp e da função risco, em função dos parâmetros foi discutido. Nadarajah e Kotz (2006) mostraram que a distribuição gama padrão exponenciada modela formas decrescente, unimodal e constante para a função risco e apresentaram a função geradora de momentos e os principais momentos dessa distribuição.

Carrasco; Ortega e Cordeiro (2008) definiram e estudaram a distribuição Weibull modificada generalizada que modela formas da função risco monótonas e não monótonas, que são comuns em problemas de tempo de vida e tem como submodelos as distribuições Weibull, valor extremo, Weibull exponenciada, Rayleigh generalizada e Weibull modificada, dentre outras. Os autores também apresentaram duas representações dos momentos em série infinita e a fdp das estatísticas de ordem foi obtida. A estimação dos parâmetros foi obtida pelo método de máxima verossimilhança e a matriz de informação observada foi apresentada.

Por fim, Alkasasbeh e Raqab (2009) estudaram a distribuição logística generalizada, definida por Balakrishnan e Leng (1988), e consideraram a estimação de máxima verossimilhança dos parâmetros, assim como outros cinco procedimentos de estimação e compararam o desempenho desses procedimentos por meio de extensiva simulação numérica.

2.5.3 Classe de distribuições estendidas

A classe de distribuições estendidas apresentada por Lehmann (1952) é uma variação das distribuições exponenciadas em que se eleva ao expoente ω , ($\omega > 0$) a função

de sobrevivência (1 - G(x)), ao invés da fda, ou seja,

$$F(x) = 1 - [1 - G(x)]^{\omega}, \tag{11}$$

e, portanto, $f(x) = \omega g(x)[1 - G(x)]^{\omega - 1}$. As funções de sobrevivência e a função de risco são dadas, respectivamente, pelas equações

$$S(x) = [1 - G(x)]^{\omega}$$
 e $h(x) = \frac{\omega g(x)}{1 - G(x)}$.

A característica principal dessa classe é a maior flexibilidade, devido ao parâmetro adicional ω , e por possuir forma fechada para as funções de densidade acumulada e de sobrevivência. Porém, observa-se que o parâmetro ω atua apenas de forma multiplicativa na função risco, e, portanto, não modifica a forma básica da função risco da distribuição base.

Barros (2008) estudou a classe de distribuições estendidas, e demonstrou a consistência dessa nova generalização. A fdp, a fda e os momentos de várias distribuições estendidas são descritas, porém, não foi desenvolvido nenhum tratamento mais detalhado das distribuições apresentadas e nenhuma aplicação mostrando a eficiência dessas novas distribuições foi apresentada.

As distribuições discutidas por Barros (2008) foram as distribuições exponencial estendida, uniforme estendida, Weibull estendida, Pareto estendida, logística padrão estendida, qui-quadrado estendida, gama estendida, Fréchet estendida e Gumbel estendida.

Entretanto, observa-se que algumas distribuições modificadas de acordo com a equação (11) não geram distribuições novas. Como é o caso da distribuição exponencial estendida, obtida pela substituição da fda da distribuição exponencial com parâmetro α na equação (11), e obtendo-se novamente a distribuição exponencial com parâmetro $\alpha\omega$, cuja fda passa a ser dada por $F(x)=1-e^{-(\alpha\omega)x},\ \alpha,\ \omega>0$.

A distribuição uniforme estendida é a generalização da distribuição uniforme no intervalo (0,1), pela equação (11), e resulta na distribuição beta, com parâmetros $\alpha=1$ e ω , em que sua fda é dada por $G(x)=1-(1-x)^{\omega}$.

A distribuição Weibull, com parâmetros $\alpha > 0$ e $\lambda > 0$, gera a distribuição Weibull estendida que se resume à distribuição Weibull, com parâmetros $\alpha \omega^{-1/\lambda}$ e λ , cuja fda é $F(x) = 1 - \exp[-\omega(x/\alpha)^{\lambda}]$.

A distribuição Pareto, com parâmetros k>0 e $\alpha>0$, gera a distribuição Pareto com parâmetros k e $\alpha\omega$ sobre a generalização das distribuições estendidas, cuja fda é $F(x)=1-(k/x)^{\alpha\omega}$. A distribuição logística padrão estendida é a generalização da distribuição logística, com parâmetros $\mu=0$ e $\sigma=1$, e resulta na distribuição logística generalizada tipo II de parâmetros ω e 1, com fda dada por $F(x)=1-[e^{-\omega x}/(1+e^x)^{\omega}]$, $x\in\mathbb{R}$.

Diferentemente das distribuições descritas, as distribuições estendidas quiquadrado, gama, Fréchet e Gumbel, discutidas por Barros (2008), geraram novas distribuições com o parâmetro adicional ω , sendo que as distribuições Fréchet estendida e Gumbel estendida foram apresentadas por Nadarajah e Kotz (2006) com o nome de distribuições Fréchet exponenciada e Gumbel exponenciada.

Nesse mesmo enfoque, Nadarajah e Kotz (2006) propuseram duas novas distribuições, a distribuição Gumbel exponenciada e a Fréchet exponenciada, porém, essas distribuições apresentam a mesma estrutura das distribuições estendidas. A distribuição Fréchet exponenciada (Fréchet estendida) é uma generalização da Fréchet padrão pela classe de distribuições estendidas. Nadarajah e Kotz (2006) apresentaram essa distribuição e discutiram a forma da fdp e da função risco. Além disso, representaram a fdp como forma de mistura, desenvolveram a expressão para os momentos e destacaram a importância dessa distribuição em aplicações abrangendo testes de vida acelerados tais como em dados de terremoto, inundação, corridas de cavalo, precipitação, fila em supermecardo e velocidade do vento. Nadarajah (2006) apresentou um tratamento detalhado das propriedades da distribuição Gumbel exponenciada, apresentando as formas analíticas da fdp e da função risco. O autor também calculou o n-ésimo momento e a distribuição assintótica das estatísticas de ordem, investigou a variação das medidas de assimetria e curtose. Por fim, discutiu a estimação pelo método de máxima verossimilhança e ilustrou sua aplicação com dados de precipitação em Orlando, Florida, Estados Unidos.

Por último, Barros (2008) desenvolveu os momentos, a função geradora de momentos e a função característica para a distribuição qui-quadrado estendida. A distribuição gama estendida foi proposta, e apresentada a expressão para a fdp e a fda na forma fechada e na forma de expansão em série.

2.5.4 Classe de distribuições betas

A classe de distribuições betas, que recebeu maior atenção após o trabalho de Eugene; Lee e Famoye (2002), é uma generalização baseada na distribuição beta, que considera G(x) para definir a fda da distribuição beta generalizada, a qual é expressa como sendo

$$F(x) = \frac{1}{B(a,b)} \int_{0}^{G(x)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw , \qquad (12)$$

em que a>0 e b>0 são dois parâmetros de forma e B(a,b) é a função beta, definida por $B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$. A fdp é dada por

$$f(x) = \frac{1}{B(a,b)}g(x)G(x)^{a-1}[1 - G(x)]^{b-1} , x > 0 .$$

Observe que a integral na equação (12) é a função beta incompleta,

$$B_{G(x)}(a,b) = \int_0^{G(x)} w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw.$$

A desvantagem dessa classe é que essa integral muitas vezes não tem solução analítica, devido à fda G(x), ou depende de funções especiais, como a função B(a,b), necessitando, portanto, de abordagens numéricas. Consequentemente, a função de sobrevivência também requer procedimentos numéricos para ser obtida.

Alguns autores trabalharam com essa classe de distribuições. Dentre eles, podem-se citar Ojo e Olapade (2003), que consideraram a distribuição beta logística, denominada por eles de logística generalizada (distribuição desenvolvida, inicialmente, por George e Ojo, 1980) e provaram alguns teoremas que caracterizam essa distribuição, além de definirem uma generalização da distribuição log-logística (beta log-logística), determinaram seus momentos e estabeleceram algumas relações entre a log-logística generalizada e outras distribuições.

Nadarajah e Kotz (2004) propuseram a distribuição beta Gumbel, apresentaram a forma analítica da fdp e função de risco, calcularam a expressão para o *n*-ésimo momento e a distribuição assintótica das estatísticas de ordem, investigaram a variação das medidas de assimetria e curtose e discutiram o método de estimação de máxima verossimilhança.

Da mesma forma, Nadarajah e Kotz (2005) generalizaram a distribuição exponencial, denominando-a distribuição beta exponencial. As propriedades matemáticas

da distribuição beta exponencial foram discutidas e as expressões para a função geradora de momentos e a função característica foram derivadas. Os primeiros momentos, a variância, a assimetria e a curtose foram apresentados. Também desenvolveram as expressões para o desvio médio em relação à média e em relação à mediana, as entropias de Rényi e Shannon e a distribuição das estatísticas de ordem. A estimação pelo método de máxima verossimilhança e o processo de simulação foram discutidos e uma expressão para a matriz de informação esperada foi apresentada.

Barreto-Souza; Santos e Cordeiro (2009) propuseram a distribuição beta exponencial generalizada exponenciada, que é a generalização da distribuição exponencial generalizada exponenciada proposta por Gupta e Kundu (1999). Essa distribuição tem como casos particulares as distribuições beta exponencial e exponencial generalizada. A fdp como mistura de densidades da distribuição exponencial generalizada foi expressa, a função geradora de momentos e os momentos foram derivados e a estimação de parâmetros pelo método de máxima verossimilhança foi discutida e a matriz de informação esperada obtida.

Na mesma abordagem, Pescim et al. (2010) propuseram a chamada distribuição beta semi-normal generalizada, que é a generalização da distribuição semi-normal generalizada apresentada por Cooray e Ananda (2008) e que inclui como casos especiais as distribuições semi-normal e a semi-normal generalizada. As expressões para a fdp e para fda foram derivadas e os momentos foram obtidos, assim como o método de estimação de máxima verossimilhança foi utilizado. A matriz de informação esperada foi calculada, bem como outras propriedades de interesse. A utilidade dessa nova distribuição foi ilustrada por meio de um conjunto de dados reais mostrando a maior flexibilidade na análise de dados positivos em relação às distribuições semi-normal generalizada, semi-normal, Weibull e beta Weibull.

2.5.5 Classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas

A classe de distribuições Kw-G, recentemente proposta por Cordeiro e de Castro (2011), baseia-se na generalização da distribuição Kumaraswamy (Kw) proposta por Kumaraswamy (1980) para variáveis restritas. A fda da distribuição Kumaraswamy é dada por

$$F(x) = 1 - (1 - x^a)^b, \quad 0 < x < 1 \quad e \quad a, b > 0.$$
 (13)

Substituindo a variável aleatória x por G(x), na equação (13), obtém-se a classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas, cuja fda é dada por

$$F(x) = 1 - \{1 - G(x)^a\}^b, \quad 0 < G(x) < 1, \tag{14}$$

em que a > 0 e b > 0 são os novos parâmetros de forma.

As fdp, função de sobrevivência e função risco são dadas, respectivamente, por

$$f(x) = abg(x)G(x)^{a-1}[1 - G(x)^{a}]^{b-1},$$

$$S(x) = [1 - G(x)^{a}]^{b} \quad \text{e} \quad h(x) = \frac{abg(x)G(x)^{a-1}}{1 - G(x)^{a}}.$$
(15)

Os momentos podem ser obtidos pelo cálculo da integral

$$\mu'_{k} = \int_{0}^{\infty} ab[1 - G(x)^{a}]^{b-1}G(x)^{a-1}g(x)x^{k}dx$$

$$= b\int_{0}^{1} \{G^{-1}(u^{1/a})\}^{k}(1-u)^{b-1}du, \qquad (16)$$

sendo que a transformação usada na integral em (16) foi $u=G(x)^a$; o que implica em $G^{-1}[(u)^{1/a}]=x$.

A grande vantagem da classe de distribuições Kumaraswamy é possuir forma fechada para a sua fdp e fda, ou seja, pode ser escrita de forma analítica, diferentemente da classe de distribuições beta. Essa classe modela formas de risco constante, crescente, decrescente, unimodal e em forma de U. Outra propriedade da classe de distribuições Kumaraswamy generalizada é possuir como caso particular a classe de distribuições exponenciadas quando b=1, a classe de distribuições estendidas quando a=1 e as distribuições bases G(x) quando a=1 e b=1.

Podemos citar alguns importantes trabalhos nessa área, como por exemplo, Cordeiro e de Castro (2011), que propuseram as distribuições Kw-gama, Kw-Gumbel, Kw-gaussiana inversa, Kw-normal e Kw-Weibull, e Santana (2010) que apresentou as distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística.

2.6 Modelo de regressão

Na prática, é comum a ocorrência de situações em que uma ou mais covariáveis estão relacionadas aos tempos de sobrevivência, isto é, os tempos de falha são influenciados por covariáveis que, por exemplo, na área das ciências biomédicas podem ser a idade, a altura, um tipo de tumor cancerígeno, a quantidade de hemoglobina no sangue, etc.

Considere X uma variável aleatória e seja $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_p)^T$ um vetor formado por p variáveis explanatórias (quantitativas ou qualitativas). Um modo de estabelecer uma relação entre X e \mathbf{t} é por meio da utilização de modelos de regressão. No contexto dos dados de sobrevivência, uma maneira de incluir as covariáveis na análise é realizada usando-se a classe de modelos de locação e escala, também conhecidos como modelos de tempo de vida acelerado. Existe uma vasta literatura sobre modelos de regressão locação-escala como, por exemplo, Cox e Oakes (1984), Kalbfleisch e Prentice (2002) e Lawless (2003).

2.6.1 Modelo de regressão locação-escala

Assumindo censura à direita, o modelo de locação-escala é dado da seguinte forma:

$$Y = \mu + \sigma Z,\tag{17}$$

supondo que Y pertence à família de distribuições que se caracteriza pelo fato de ter um parâmetro de locação μ , $(-\infty < \mu < \infty)$, e um parâmetro de escala σ $(0 < \sigma < \infty)$.

As distribuições que pertencem a essa família têm função densidade de probabilidade da forma

$$f(y; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} g\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right), \quad -\infty < y < \infty$$

e função de sobrevivência $G(\frac{y-\mu}{\sigma})$.

Considerando a transformação $Y = \log(X)$, tem-se que o parâmetro de locação μ depende do vetor de covariáveis \mathbf{t} , denotado por $\mu(\mathbf{t}) = \mathbf{t}^T \boldsymbol{\beta}$, em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos. O modelo de regressão que relaciona Y e o vetor de variáveis explicativas \mathbf{t} é o modelo de locação-escala, que pode ser escrito da forma

$$Y = \mu(\mathbf{t}) + \sigma Z,$$

em que Z é um erro aleatório.

Observa-se que esse modelo é log-linear para X, portanto, é um modelo de regressão linear para Y. Outra característica desse modelo é que o vetor de variáveis explicativas \mathbf{t} tem efeito multiplicativo em X. Além disso, a função de sobrevivência para Y dado \mathbf{t} , tem a forma $G\left(\frac{y-\mu(\mathbf{t})}{\sigma}\right)$, em que G(z) é a função de sobrevivência de Z. Lawless (2003) apresenta mais detalhes dessa classe de modelos, além de vários modelos usando distribuições de probabilidade para X comumente usadas em análise de sobrevivência.

Na presença de censura intervalar, os dados observados consistem de um intervalo $(\log(u_i), \log(v_i))$ para cada indivíduo, sendo que esses intervalos são conhecidos e incluem y_i com probabilidade um, ou seja, $P[\log(u_i) \leq y_i \leq \log(v_i)] = 1$, e se $\log(v_i) = \infty$, então, o logaritmo do tempo é censurado à direita para y_i .

2.7 Inferência estatística

Assumindo um modelo paramétrico como adequado para a análise dos dados, deseja-se fazer inferências com base nesse modelo. Em geral, essa análise torna-se mais complicada quando se necessita incorporar dados censurados, mesmo quando o mecanismo de censura é simples. O objetivo desta seção é apresentar o método de máxima verossimilhança e uma abordagem bayesiana para estimação e testes no modelo proposto.

2.7.1 Método de máxima verossimilhança

Sejam $(y_1, \delta_1), (y_2, \delta_2), \dots, (y_n, \delta_n), n$ observações independentes em que $Y_i = \log(X_i)$, representa o logaritmo do tempo de falha ou censura, para todo $i = 1, 2, \dots, n$. Assim sendo, o logaritmo da função de verossimilhança, considerando uma amostra completa, é dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in F} \log \left[f(y_i) \right] + \sum_{i \in C} \log \left[S(y_i) \right], \tag{18}$$

em que f(y) e S(y) são as funções de densidade e de sobrevivência da variável aleatória Y, $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor de parâmetros e F e C denotam os conjuntos de observações não censuradas e censuradas, respectivamente. Para obter os estimadores de máxima verossimilhança é preciso derivar $l(\boldsymbol{\theta})$ em relação ao vetor de parâmetros desconhecido $\boldsymbol{\theta}$. Portanto, esses estimadores são obtidos resolvendo o sistema de equações

$$\mathbf{U}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}.$$

Porém, para obter as estimativas de máxima verossimilhança para os parâmetros, é necessária a utilização de métodos iterativos, como os algoritmos de otimização Newton-Raphson e quase Newton, pois, geralmente, esse sistema é não linear.

As propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são necessárias para construir intervalos de confiança e testar hipóteses sobre os parâmetros do modelo, utilizando o fato de que $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ tem distribuição normal assintótica multivariada sob certas condições de regularidade com média $\boldsymbol{\theta}$ e matriz de variâncias e covariâncias dada pelo inverso da matriz de informação de Fisher $(I(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $I(\boldsymbol{\theta}) = E\left[\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})\right]$, tal que, $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta}) = -\left\{\frac{\partial^2 l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^T}\right\}$.

Como não é trivial calcular a matriz de informação $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ devido às observações censuradas, pode-se usar o negativo da matriz hessiana, $-\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$, avaliada em $\boldsymbol{\theta} = \widehat{\boldsymbol{\theta}}$, que é um estimador consistente para $I(\boldsymbol{\theta})$. Portanto, a distribuição assintótica para $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ é especificada por $\widehat{\boldsymbol{\theta}}^{\top} \sim N_{(d)}\{\boldsymbol{\theta}^{\top}; \ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})^{-1}\}$, em que $\ddot{\mathbf{L}}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada e d é o número de parâmetros do modelo.

Diversos autores utilizaram o método de máxima verossimilhança no contexto da análise de sobrevivência para estimar os parâmetros de distribuições, dentre eles, Nadarajah e Kotz (2005) trabalharam com as distribuições beta exponencial. Mais recentemente, Silva, Ortega e Cordeiro (2010) e Pescim et al. (2010) utilizaram esse método para estimar os parâmetros das distribuições beta Weibull modificada e beta generalizada semi-normal, respectivamente.

2.7.2 Análise bayesiana

Considere que $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^{\top}$ seja um vetor de n observações e $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d)$ o vetor de parâmetros. Um dos objetivos da estatística é procurar estimar os parâmetros populacionais com base nas n observações obtidas por amostragem ou experimentação. Uma metodologia muito utilizada para esse fim é a inferência bayesiana.

Na inferência bayesiana as n observações são associadas a funções de densidade de probabilidade $f(\mathbf{X}|\boldsymbol{\theta})$, em que $\boldsymbol{\theta}$ indexa a família de distribuições das observações.

O verdadeiro valor de θ é desconhecido e para a inferência bayesiana também é considerado uma variável aleatória. Nesse contexto, θ possui uma distribuição associada. Na análise bayesiana, a informação disponível a priori é muito importante e essa informação é traduzida em forma de uma distribuição de probabilidade, denotada por

 $\pi(\boldsymbol{\theta})$, chamada distribuição a priori.

A distribuição a priori deve representar, probabilisticamente, o conhecimento que se tem sobre o parâmetro θ . Essa distribuição pode ser informativa ou não informativa. As distribuições a priori informativas são utilizadas quando se tem algum conhecimento prévio sobre o parâmetro, e as não informativas são usadas quando se tem pouca ou nenhuma informação sobre o parâmetro.

A informação a priori combinada com a função dos dados, conhecida como função de verossimilhança $L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$, resulta na distribuição a posteriori $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$, e essa é obtida por meio do teorema de Bayes, dada por

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) = \frac{L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})\pi(\boldsymbol{\theta})}{\int_{\Theta} L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})\pi(\boldsymbol{\theta})d\boldsymbol{\theta}},$$
(19)

em que Θ denota o espaço paramétrico de $\boldsymbol{\theta}$. O denominador funciona como uma constante normalizadora que não depende de $\boldsymbol{\theta}$.

Assim, (19) pode ser reescrita como

$$\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) \propto L(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})\pi(\boldsymbol{\theta}).$$

Por meio do teorema de Bayes é possível atualizar a informação a respeito do parâmetro, e utilizá-lo para quantificar esse aumento de informação, sendo um elemento essencial na análise bayesiana, pois toda a inferência é feita a partir da distribuição a posteriori.

Considerando o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, é necessário obter a distribuição marginal a posteriori para cada parâmetro θ_i , $i=1,2,\cdots,d$, obtida por meio de integração da função densidade conjunta a posteriori

$$\pi(\theta_i|\mathbf{X}) = \int \cdots \int \pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X}) d\theta_i. \tag{20}$$

No entanto, a resolução analítica da integral em (20) é, em geral, impraticável. Uma das alternativas é a utilização de métodos numéricos, dentre os quais destacam-se os métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), que têm como objetivo simular um passeio aleatório no espaço do parâmetro θ , o qual converge para uma distribuição estacionária, que é a distribuição marginal a posteriori de θ .

Os métodos MCMC utilizam a simulação estocástica podendo considerar as distribuições condicionais completas *a posteriori* de cada parâmetro para gerar amostras que convergem para a densidade marginal, com o aumento do número dessas amostras.

A distribuição condicional completa do parâmetro $\boldsymbol{\theta}$ é denotada por $\pi(\theta_i|\boldsymbol{\theta}_{-i},\mathbf{X})$, e é obtida considerando que, na função densidade *a posteriori* conjunta os demais parâmetros $\boldsymbol{\theta}_{-i}$ são fixados e, assim, a expressão se torna menos complexa, já que as constantes podem ser desconsideradas.

Quando a expressão da distribuição condicional completa tem uma forma conhecida, é utilizado o método de simulação amostrador de Gibbs, e quando a condicional completa tem uma forma desconhecida, é utilizado o algoritmo Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970) para gerar a distribuição a posteriori de $\boldsymbol{\theta}$.

O algoritmo de Metropolis-Hastings usa a ideia de gerar um valor de uma distribuição auxiliar, o qual é aceito com uma dada probabilidade. Esse mecanismo de correção garante a convergência da cadeia para a distribuição de equilíbrio.

Para iniciar o algoritmo de Metropolis-Hasting, um valor inicial para $\boldsymbol{\theta}$ é dado, $\boldsymbol{\theta}^0$. A seguir, suponha que o algoritmo encontra-se na iteração m e que se deseja obter uma nova observação θ_i^m de $f(x) = \pi(x|\boldsymbol{\theta}_{-i}^m, \mathbf{X})$ em que x representa um valor de θ_i . Procede-se da seguinte maneira:

- (i) amostra-se um ponto y de $q(z_m, y)$ em que z_m denota o valor atual de θ_j e $q(z_m, y)$ é uma distribuição proposta (função de transição apropriada),
- (ii) amostra-se um ponto $u \sim U[0,1]$; caso $u \leq \alpha(z_m,y)$ faça $z_{m+1} = y$, caso contrário, faz-se $z_{m+1} = z_m$, em que $\alpha(z_m,y) = \min \left\{ 1, \frac{f(y)q(z_m|y)}{f(z_m)q(y|z_m)} \right\}$.

Repetem-se esses passos até que a convergência da cadeia seja atingida. A distribuição proposta q(z,y) deve ser de fácil simulação e garantir uma convergência rápida para a distribuição alvo $\pi(\boldsymbol{\theta}_{-i}^m|\boldsymbol{\theta}_{-i}^m,\mathbf{X})$ (CHIB; GREENBERG, 1995).

A ideia principal dos algoritmos MCMC é que à medida que o número de iterações aumenta, a cadeia gerada se aproxima da distribuição de equilíbrio, ou seja, da distribuição marginal a posteriori desejada de cada parâmetro. Assim, é necessário monitorar a convergência das sequências geradas pela cadeia de Markov. Existem vários critérios propostos com esse intuito e uma possibilidade é utilizar o método proposto por Gelman e Rubin (1992). Esses autores propuseram um método de simulação baseado em várias cadeias de Markov simuladas a partir de vários pontos iniciais. O método de Gelman e Rubin está baseado na construção de l cadeias independentes, cada uma partindo de valores iniciais distintos. Além disso, para cada parâmetro devem ser descartadas as primeiras iterações para eliminar o efeito do valor inicial e, para evitar os problemas de

correlação, deve-se considerar um espaçamento entre as iterações sucessivas. Desse modo, obtém-se uma amostra final $\boldsymbol{\theta}^{(v,s)} = (\boldsymbol{\theta}_1^{(v,s)}, \boldsymbol{\theta}_2^{(v,s)}, \cdots, \boldsymbol{\theta}_d^{(v,s)})^{\top}$, em que v denota a v-ésima cadeia e s denota a s-ésima réplica na v-ésima cadeia, $s = (1, \cdots, m)$ e $v = (1, \cdots, l)$.

Para verificar a convergência a partir do método de Gelman e Rubin, considere que U represente qualquer um dos componentes do vetor de parâmetro θ . Para cada parâmetro de interesse calculam-se

$$\overline{u}_{v_{\cdot}} = \frac{1}{m} \sum_{s=1}^{m} u_{vs} \text{ e } s_{v}^{2} = \frac{1}{m-1} \sum_{s=1}^{m} (u_{vs} - \overline{u}_{v_{\cdot}})^{2},$$

a média e a variância, respectivamente, de U para cada a cadeia $v=1,\cdots,l$.

A seguir, calculam-se a variância entre as cadeias e a variância intracadeias, respectivamente, dadas por

$$B = \frac{m}{l-1} \sum_{v=1}^{l} (\overline{u}_{v.} - \overline{u}_{..})^{2} \text{ e } W = \sum_{v=1}^{l} \frac{s_{v}^{2}}{l},$$

em que $\overline{u}_{\cdot \cdot} = \frac{1}{l} \sum_{v=1}^{l} \overline{u}_{v \cdot}$.

A variância de U é estimada como a média ponderada de W e B

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{m-1}{m}W + \frac{1}{m}B.$$

Tem-se que a distribuição aproximada de U é t de Student com parâmetro de locação $\widehat{\mu}=\overline{u}_{..}$, parâmetro de escala $\sqrt{\widehat{V}}=\sqrt{\widehat{\sigma^2}+B/lm}$ e número de graus de liberdade $gl=2\widehat{V}^2/\widehat{var}(\widehat{V})$ em que

$$\widehat{var}(\widehat{V}) = \left(\frac{m-1}{m}\right)^2 \frac{1}{l} \widehat{var}(s_v^2) + \left(\frac{l+1}{vs}\right)^2 \frac{2}{l-1} B^2 + 2 \frac{(l-1)(m-1)}{l^2 m} \left[\widehat{cov}(s_v^2, \overline{u}_{v.}^2) - 2 \overline{u}..\widehat{cov}(s_v^2, \overline{u}_{v.}^2)\right]$$

e as variâncias e as covariâncias são estimadas a partir dos l valores amostrais de $s_v^2, \, \overline{u}_v$. e \overline{u}_v^2 .

A convergência é monitorada calculando o fator de redução de escala que é definido como

$$\sqrt{\widehat{R}} = \sqrt{\left(\frac{\widehat{V}}{W}\right)} \frac{gl}{gl-2},$$

em que \widehat{R} mede o fator de redução que sofreria o parâmetro de escala da distribuição t de Student para U se a simulação continuasse.

À medida que o tamanho da amostra, n, cresce, \widehat{R} converge para 1. Na prática, assume-se convergência quando \widehat{R} está próximo de 1 e as iterações selecionadas para compor a amostra final são independentes e identicamente distribuídas (GELMAN; RUBIN, 1992). Portanto, quando o fator de redução potencial de escala apresenta um valor elevado, não haveria razão para acreditar que um maior número de simulações proporcionaria uma melhora na inferência sobre a distribuição desejada.

A distribuição marginal a posteriori de um parâmetro θ_i contém toda a informação probabilística a respeito desse parâmetro. No entanto algumas vezes é necessário resumir a informação contida nessa distribuição por meio de alguns valores numéricos. Um caso simples é a estimação pontual de θ_i , em que se resume a distribuição marginal a posteriori por meio de um único número, $\hat{\theta}_i$. É importante, também, associar alguma informação sobre o quão precisa é a especificação desse número. As medidas de incerteza mais usuais são a variância e o coeficiente de variação para a média a posteriori, a medida de informação observada para a moda a posteriori e a distância entre quartis para a mediana a posteriori (EHLERS, 2007).

A própria ideia de estimação pontual de parâmetros conduz, no cenário bayesiano, a tomar como estimativas os pontos críticos da distribuição a posteriori. Um resumo de $\pi(\boldsymbol{\theta}|\mathbf{X})$ mais informativo do que qualquer estimativa pontual é obtido de uma região do espaço paramétrico, que contenha uma parte substancial da massa probabilística a posteriori, chamada de intervalo de credibilidade (IC).

Em análise de sobrevivência, existem vários trabalhos utilizando a abordagem bayesiana. Cancho; Bolfarine e Achcar (1999) apresentaram a análise bayesiana para a distribuição Weibull exponenciada. Silva et al. (2008) aplicaram a metodologia bayesiana para o modelo de regressão log-Burr XII.

2.8 Estatísticas AIC, BIC e CAIC

Alguns critérios comuns na literatura podem ser utilizados para seleção de modelos. Esses critérios levam em consideração a complexidade do modelo. São critérios que, essencialmente, penalizam a função verossimilhança pelo número de parâmetros do modelo e, eventualmente, o tamanho da amostra. Essa penalização é feita subtraindo-se do valor da função verossimilhança uma determinada quantidade que expressa o quão complexo é o modelo.

Akaike (1974) propôs utilizar a informação de Kullback-Leibler para a seleção de modelos. O autor estabeleceu uma relação entre a função de verossimilhança maximizada e a informação de Kullback-Leibler desenvolvendo, então, o chamado critério de informação de Akaike (AIC). Liang e Zou (2007) propuseram uma versão melhorada (CAIC), em que é considerada uma ponderação entre o número de parâmetros e o tamanho amostral.

O critério de informação bayesiano (BIC), também chamado de critério de Schwarz (1978), é um critério de avaliação de modelos definido em termos da probabilidade a posteriori, sendo assim chamado porque Schwarz forneceu um argumento bayesiano para prová-lo. Segundo esses critérios, o melhor modelo será aquele que apresentar menor valor para AIC, BIC e CAIC.

Considerando uma amostra aleatória $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)^{\mathsf{T}}$ de tamanho n e o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, as estatísticas AIC, BIC e CAIC podem ser calculadas por

$$AIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + 2d,$$

$$BIC = -2l(\boldsymbol{\theta}) + d\log(n)$$

$$e CAIC = AIC + \frac{2(d+2)(d+3)}{n-d-3},$$

em que $l(\theta)$ é o logaritmo da função de verossimilhança maximizada e d representa o número de parâmetros estimados do modelo.

Cordeiro e de Castro (2011) e Silva; Ortega e Cordeiro (2010) utilizaram a estatística AIC para comparar uma nova família de distribuições generalizadas e o modelo beta Weibull modificada com outros submodelos, respectivamente. Pescim et. al (2010) utilizaram as estatísticas AIC, BIC e CAIC para o mesmo propósito, mas comparando-os com o modelo beta generalizada semi normal.

3 ALGUMAS NOVAS PROPRIEDADES DA DISTRIBUIÇÃO KUMA-RASWAMY WEIBULL MODIFICADA

Seja $G(x; \alpha, \gamma, \lambda)$ a fda da distribuição MW (LAI; XIE; MURTHY, 2003) apresentada na Seção 2.2. A distribuição Kumaraswamy Weibull modificada (CORDEIRO; ORTEGA; SILVA, 2012), denotada por KwMW, é uma composição baseada na classe de distribuições Kumaraswamy proposta por Cordeiro e de Castro (2011), apresentada na seção 2.5.5 e na distribuição $G(x; \alpha, \gamma, \lambda)$. Substituindo, na equação (14), G(x) pela fda da distribuição MW obtém-se, então, a distribuição KwMW com cinco parâmetros $a>0, b>0, \alpha>0, \gamma>0$ e $\lambda>0$, cujas funções fda e fdp, para x>0, são definidas, respectivamente, pelas equações

$$F(x) = 1 - \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^b, \tag{21}$$

е

$$f(x) = a b \alpha (\gamma + \lambda x) x^{\gamma - 1} \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a - 1}$$
$$\times \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^{b - 1}. \tag{22}$$

A Figura 2 apresenta o gráfico da fdp da distribuição KwMW para diferentes valores de parâmetros, em que se observa uma grande flexibilidade da mesma.

Se X é uma variável aleatória positiva com densidade dada pela equação (22), pode-se escrever, então, que $X \sim \text{KwMW}(a, b, \alpha, \gamma, \lambda)$.

As funções de sobrevivência S(x) e de risco h(x) para a variável aleatória X, com distribuição de probabilidade $\mathrm{KwMW}(a,b,\alpha,\gamma,\lambda)$ são dadas, respectivamente, por

$$S(x) = 1 - F(x) = \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^b$$
 (23)

е

$$h(x) = a b \alpha (\gamma + \lambda x) x^{\gamma - 1} \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a - 1}$$
$$\times \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a}\}^{-1}. \tag{24}$$

Uma característica da distribuição KwMW é que sua função risco acomoda as formas crescente, decrescente, unimodal e forma de banheira. Na Figura 3, tem-se em (a) o gráfico da função de sobrevivência da distribuição KwMW para diferentes valores

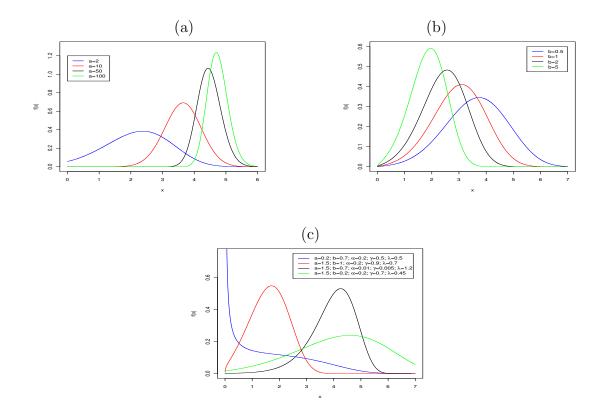


Figura 2 - Gráfico da função densidade da distribuição KwMW para alguns valores de parâmetros. (a) Para $b=1,5,~\alpha=0,2,~\gamma=0,5$ e $\lambda=0,5.$ (b) Para a=3, $\alpha=0,2,~\gamma=0,5$ e $\lambda=0,5.$ (c) Para alguns valores de todos os parâmetros

de a e em (b) o gráfico da função de sobrevivência da distribuição KwMW para diferentes valores de b. Na Figura 4, tem-se em (a) o gráfico da função risco em forma de banheira, (b) o gráfico da função risco na forma unimodal e em (c) o gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente.

As assíntotas das equações (21), (22) e (24) são dadas por

$$F(x) \sim a \left[1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}\right]^{a}$$

quando $x \to 0$,

$$1 - F(x) \sim \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^b$$

quando $x \to \infty$,

$$f(x) \sim a b \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a - 1}$$

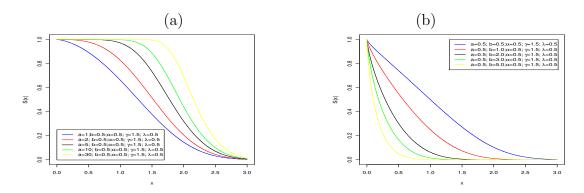


Figura 3 - (a) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KwMW para diferentes valores de a. (b) Gráfico da função de sobrevivência da distribuição KwMW para diferentes valores de b

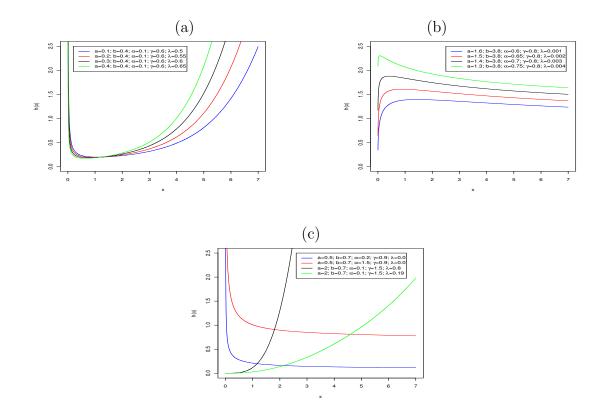


Figura 4 - Funções risco da distribuição KwMW. (a) Gráfico da função risco na forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c) Gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente

quando $x \to 0$,

$$f(x) \sim a b \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^{b - 1}$$

quando $x \to \infty$,

$$h(x) \sim a b \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a - 1}$$
quando $x \to 0$,

$$h(x) \sim a b \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} \{1 - [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^a\}^{-1}$$
quando $x \to \infty$.

As formas da fdp (22) e da função risco (24) podem ser descritas analiticamente. Os pontos críticos da fdp da distribuição KwMW são as raízes da equação:

$$\frac{g'(x)}{g(x)} + (a-1)\frac{g(x)}{G(x)} = a(b-1)\frac{g(x)G^{a-1}(x)}{1 - G^a(x)},$$
(25)

em que g(x) e G(x) são dados por (1) e (2), respectivamente. Pode existir mais de uma raiz para (25). Se $x=x_0$ é a raiz de (25) então, isso corresponde a um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão dependendo se $\lambda(x_0) < 0$, $\lambda(x_0) > 0$ ou $\lambda(x_0) = 0$, em que

$$\lambda(x) = \frac{g(x)g''(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)} + (a-1)\frac{G(x)g'(x) - g^2(x)}{G^2(x)}$$
$$-a(b-1)\frac{G^{a-2}(x)\left\{(a-1)g^2(x) + G(x)g'(x)\right\}}{1 - G^a(x)} - a^2(b-1)\frac{G^{2a-2}(x)g^2(x)}{\left\{1 - G^a(x)\right\}^2},$$

$$g'(x) = \alpha x^{\gamma - 2} \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}$$
$$\times \{(\gamma - 1)(\gamma + \lambda x) + x(\lambda + \gamma + \lambda x)[\lambda - \alpha(\gamma + \lambda x)x^{\gamma - 1} \exp(\lambda x)]\}$$

e

$$g''(x) = \alpha x^{\gamma-2} \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} \Big\{ (\gamma - 1)(\gamma + \lambda x) + x(\lambda + \lambda x + \gamma) \\ \times \Big[\lambda - \alpha x^{\gamma-1} \exp(\lambda x)(\gamma + \lambda x) \Big] \Big\} \Big\{ x^{-1}(\gamma - 2) + \Big[\lambda - \alpha x^{\gamma-1} \gamma \exp(\lambda x) \\ - \alpha x^{\gamma} \lambda \exp(\lambda x) \Big] + \Big\{ (\gamma - 1)\lambda + (\lambda + \lambda x + \gamma) \Big[\lambda - \alpha x \gamma - 1 \exp(\lambda x)(\gamma + \lambda x) \Big] \\ + x\lambda \Big[\lambda - \alpha x^{\gamma-1} \exp(\lambda x)(\gamma + \lambda x) \Big] + x(\lambda + \gamma + \lambda x) \Big[- \alpha x^{\gamma-2}(\gamma - 1) \exp(\lambda x) \\ \times (\gamma + \lambda x) - \alpha x^{\gamma-1} \lambda \exp(\lambda x)(\gamma + \lambda x) - \alpha x^{\gamma-1} \exp(\lambda x)\lambda \Big] \Big\} \Big\}.$$

Os pontos críticos da função risco são as raízes da equação

$$\frac{g'(x)}{g(x)} + (a-1)\frac{g(x)}{G(x)} = -a\frac{g(x)G^{a-1}(x)}{1 - G^a(x)}.$$
 (26)

Também pode existir mais de uma raiz para (26). Se $x = x_0$ é uma raiz de (26), então, isso corresponde a um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão dependendo se $\lambda(x_0) < 0$, $\lambda(x_0) > 0$ ou $\lambda(x_0) = 0$, em que

$$\lambda(x) = \frac{g(x) g''(x) - (g'(x))^2}{g^2(x)} + (a-1) \frac{G(x)g'(x) - g^2(x)}{G^2(x)}$$
$$-a \frac{G^{a-2}(x) \{(a-1)g^2(x) + G(x)g'(x)\}}{1 - G^a(x)} - a^2 \frac{G^{2a-2}(x)g^2(x)}{\{1 - G^a(x)\}^2}.$$

A distribuição KwMW possui como casos especiais muitas distribuições bastante conhecidas. Para $\lambda=0$, ela se reduz à Kumaraswamy Weibull (KwW). Se b=1, tem-se a Weibull modificada generalizada (GMW). Se $\gamma=1$, e $\lambda=0$, tem-se a Kumaraswamy exponencial (KwE). Se a=1 e b=1, tem-se a distribuição Weibull modificada (MW). Para b=1 e $\lambda=0$ produz-se a distribuição Weibull generalizada (GW). Se $\gamma=1$, b=1 e $\lambda=0$ tem-se como caso especial a distribuição exponencial generalizada (GE). Para $\gamma=2$, $\lambda=0$ e b=1, ela reduz-se à distribuição Rayleigh generalizada (GR). Na Figura 5 são apresentados alguns modelos especiais da distribuição KwMW, em que se têm alguns submodelos bem conhecidos não definidos anteriormente, bem como as distribuições Kumaraswamy Rayleigh modificada (KwMR), Kumaraswamy exponencial modificada (KwME), Rayleigh modificada generalizada (GMR), exponencial modificada (GME), Kumaraswamy Rayleigh (KwR), Rayleigh modificada (MR), exponencial modificada (ME), Rayleigh (R), Weibull (W) e exponential (E).

Seja g(x) a função de densidade proposta por Lai; Xie e Murthy (2003) da distribuição MW $(\alpha, \gamma, \lambda)$, definida na equação (1). Cordeiro e de Castro (2011) derivaram a função densidade da distribuição Kumaraswamy generalizada (Kw-G). Para b>0 real não-inteiro, usando representação em séries para $\{1-G(x)^a\}^{b-1}$, tem-se

$$\{1 - G(x)^a\}^{b-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{b-1}{i} G(x)^{ai},$$

em que o coeficiente binomial está definido para qualquer real. Assim, pode-se escrever a função densidade da Kw-G como

$$f(x) = g(x) \sum_{i=0}^{\infty} w_i \ G(x)^{a(i+1)-1}, \tag{27}$$

em que $w_i = w_i(a, b) = (-1)^i a \, b \, {b-1 \choose i}$ e $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i}{a(i+1)} = 1$.

A função densidade da distribuição KwMW é obtida, substituindo-se a fdp

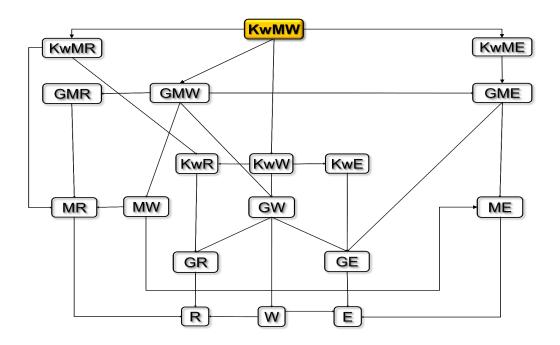


Figura 5 - Relações com algumas distribuições

da distribuição MW, g(x), e a fda da distribuição MW, G(x), em (27), tal que

$$f(x) = \alpha x^{\gamma - 1} (\gamma + \lambda x) \exp\{\lambda x - \alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} \sum_{i=0}^{\infty} w_i [1 - \exp\{-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\}]^{a(i+1)-1}.(28)$$

Se a é um número inteiro, a equação (28) pode ser reduzida a

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{(i+1)a-1} a_{i,k} \ g_{(k+1)\alpha,\gamma,\lambda}(x), \tag{29}$$

em que $a_{i,k} = (-1)^{i+k} a \, b \, {i \choose i} {i+1 \choose k} / (k+1) \, e \, g_{(k+1)\alpha,\gamma,\lambda}(x)$ é a função densidade de uma variável aleatória que tem distribuição MW com parâmetros $(k+1)\alpha$, γ e λ . A equação (29) mostra que a fdp da distribuição KwMW pode ser expressa como uma combinação linear de funções densidades de uma distribuição MW. Aqui, $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{(i+1)a-1} a_{i,k} = 1$.

Se b é um número inteiro, o índice i na soma anterior vai até b-1. Por outro lado, se a é um número real não-inteiro, pode-se expandir $G(x)^{(i+1)a-1}$ como segue

$$G(x)^{(i+1)a-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{j} (-1)^{j+r} \binom{(i+1)a-1}{j} \binom{j}{r} G(x)^{r}.$$

Então, a função densidade f(x) em (27) pode ser reescrita como

$$f(x) = g(x) \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{j} w_{i,j,r} \ G(x)^{r}, \tag{30}$$

em que os coeficientes $w_{i,j,r}$ são dados por

$$w_{i,j,r} = w_{i,j,r}(a,b) = (-1)^{i+j+r} a b \binom{(i+1)a-1}{j} \binom{b-1}{i} \binom{j}{r}$$
(31)

e satisfazem $\sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{j} \frac{w_{i,j,r}}{(r+1)} = 1$. Substituindo $\sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{j} \text{ por } \sum_{r,i=0}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty}$, obtém-se

$$f(x) = g(x) \sum_{r=0}^{\infty} a_r G(x)^r,$$
 (32)

em que $a_r = \sum_{r,i=0}^{\infty} \sum_{j=r}^{\infty} w_{i,j,r}$. Aqui, $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_r}{(r+1)} = 1$.

A função densidade da distribuição KwMW pode ser obtida substituindo-se (2) e (1) em (30)

$$f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \ g_{(s+1)\alpha,\gamma,\lambda}(x), \tag{33}$$

em que

$$b_s = \sum_{r=s}^{\infty} \frac{(-1)^s \binom{r}{s} a_r}{(s+1)}.$$
 (34)

A equação (33) mostra que a função densidade da distribuição KwMW pode ser expressa como uma combinação linear de funções densidades de distribuições MW com parâmetros $(s+1)\alpha$, γ , λ , sendo que $\sum_{s=0}^{\infty} b_s = 1$. Assim, algumas propriedades matemáticas da distribuição KwMW podem ser obtidas diretamente das propriedades já estabelecidas para a distribuição MW. Se b é um número inteiro, o índice i na equação (33) vai até b-1.

3.1 Propriedades gerais

3.1.1 Medidas quantílicas

As funções quantílicas são amplamente utilizadas em estatística e, frequentemente, são encontradas tabuladas para alguns percentis chave, a saber, 0,90; 0,95 e 0,99. A função quantílica da distribuição KwMW pode ser obtida por inversão da função de distribuição acumulada. O efeito dos parâmetros de forma a e b sobre a assimetria e a curtose da distribuição KwMW pode ser baseado em medidas quantílicas. Uma das primeiras medidas de assimetria sugeridas é a assimetria de Bowley (KENNEY; KEEPING, 1962), definida por

$$B = \frac{Q(3/4) + Q(1/4) - 2Q(1/2)}{Q(3/4) - Q(1/4)}.$$

Já a curtose de Moors (MOORS, 1998) é baseada nos octis e é dada por

$$M = \frac{Q(7/8) - Q(5/8) + Q(3/8) - Q(1/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}.$$

Essas medidas são menos sensíveis a valores discrepantes e elas existem mesmo para distribuições que não possuem momentos. Para distribuições simétricas unimodais, curtose positiva indica caudas pesadas em relação à distribuição normal. Já a curtose negativa indica caudas mais leves. Pelo fato de M ser baseado em octis, ela não é sensível a variações de valores nas caudas ou variações em torno da mediana. Claramente, M>0 e, além disso, existe uma boa concordância com as medidas de curtose usuais para algumas distribuições.

Nas Figuras 6 e 7 são apresentadas as medidas B e M como funções de a e b para alguns valores dos parâmetros da distribuição KwMW. Os gráficos indicam que essas medidas podem ser muito sensíveis a ambos os parâmetros de forma, indicando a importância da distribuição KwMW. Na Figura 6 foram utilizados os valores $\alpha=0,2,$ $\gamma=1,7$ e $\lambda=0,45,$ já na Figura 7 foram utilizados os valores $\alpha=0,2,$ $\gamma=0,7$ e $\lambda=0,45.$

3.1.2 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, como por exemplo, tendência central, dispersão, assimetria e curtose, podem ser estudadas por meio dos momentos. Nesta seção, uma expansão é determinada para os momentos da distribuição KwMW. Seja $E(X^k)$ o k-ésimo momento ordinário da distribuição KwMW.

Os momentos da distribuição KwMW podem ser calculados a partir de uma combinação linear ponderada infinita dessas quantidades para distribuições Weibull modificadas.

Seja $X \sim \text{KwMW}(a,b,\alpha,\gamma,\lambda)$. O k-ésimo momento em relação à origem segue de (33) e é obtido da expressão

$$E(X^k) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \ \tau_k(j), \tag{35}$$

em que $\tau_k(j) = \int_0^\infty x^k g_{(j+1)\alpha,\gamma,\lambda}(x) d(x)$ denota o k-ésimo momento da distribuição MW com parâmetros $(j+1)\alpha$, γ e λ . Carrasco; Ortega e Cordeiro (2008) obtiveram uma representação infinita para o k-ésimo momento da distribuição MW com esses parâmetros,

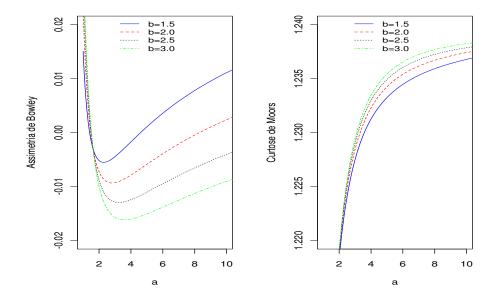


Figura 6 - Assimetria de Bowley e curtose de Moors da distribuição KwMW como função de a para valores selecionados de b

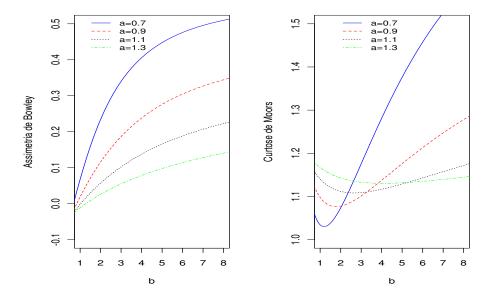


Figura 7 - Assimetria de Bowley e curtose de Moors da distribuição KwMW como função de b para valores selecionados de a

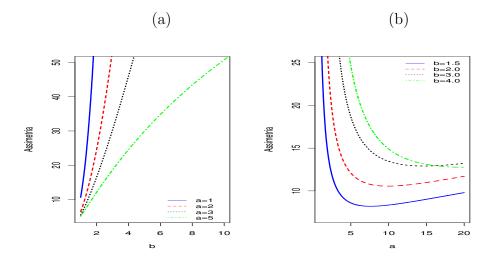


Figura 8 - Gráficos da assimetria da distribuição KwMW. (a) Em função de b para valores selecionados de a. (b) Em função de a para valores selecionados de b

dada por

$$\tau_k(j) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \frac{A_{i_1, \dots, i_k} \Gamma(s_k/\gamma + 1)}{[(j+1)\alpha]^{s_k/\gamma + 1}},$$
(36)

em que $A_{i_1,...,i_k} = a_{i_1} \dots a_{i_k}$ e $s_k = i_1 + \dots + i_k$, e

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1}i^{i-2}}{(i-1)!} \left(\frac{\lambda}{\gamma}\right)^{i-1}.$$

Os momentos da distribuição KwMW, os quais são obtidos diretamente de (35) e (36), são os principais resultados desta seção. As medidas de assimetria e curtose podem ser calculadas, utilizando as seguintes equações (NADARAJAH; KOTZ, 2004)

Coeficiente de assimetria(X) =
$$\frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E^3(X)}{Var^{3/2}(X)}.$$

Coeficiente de curtose(X) =
$$\frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)}{Var^2(X)}.$$

As representações gráficas dessas medidas quando $\alpha=1,1,\ \gamma=0,9$ e $\lambda=0,2,$ em função de b para valores selecionados de a, e em função de a para valores selecionados de b, são apresentados nas Figuras 8 e 9, respectivamente.

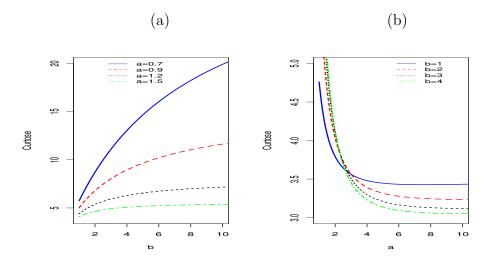


Figura 9 - Gráficos da curtose da distribuição KwMW. (a) Em função de b para valores selecionados de a. (b) Em função de a para valores selecionados de b

3.1.3 Momentos incompletos

As respostas para muitas questões importantes em economia exigem mais do que apenas saber a média de uma distribuição, mas a sua forma também. Isso, é claro, não só no estudo da econometria e distribuição de renda, mas em outras áreas. Momentos incompletos da distribuição de renda formam blocos de construção naturais para medir desigualdade, por exemplo, a curva de Lorenz, Pietra e medidas de desigualdade de Gini dependem dos momentos incompletos da distribuição de renda.

O r-ésimo momento incompleto para a distribuição KwMW segue de (33) obtendo a expressão

$$m_r(y) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \ t_r(j),$$
 (37)

em que $t_r(j) = \int_0^y x^r g_{(j+1)\alpha,\gamma,\lambda}(x) d(x)$ denota o r-ésimo momento incompleto da distribuição MW com parâmetros $(j+1)\alpha$, $\gamma \in \lambda$.

O r-ésimo momento incompleto da distribuição MW com parâmetros $(j+1)\alpha,\,\gamma$ e λ pode ser expresso por

$$t_r(j) = (j+1)\alpha \int_0^y x^{r+\gamma-1}(\gamma+\lambda x) \exp(\lambda x) \exp\{-(j+1)\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\} dx.$$
 (38)

Seja $z = x^{\gamma} \exp(\lambda x)$. Pode-se inverter essa relação para obter x em termos de z quando

 λ e γ são positivos, por

$$x = \frac{\gamma}{\lambda} F\left(\frac{\lambda z^{1/\gamma}}{\gamma}\right),\tag{39}$$

em que

$$F(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} k^{k-2} w^k}{(k-1)!}.$$

Portanto, pode-se expressar x em termos de z da equação (39) por

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} d_k \, z^{k/\gamma},$$

em que

$$d_k = \frac{\gamma a_k \lambda^k}{\lambda \gamma^k}$$
 e $a_k = \frac{(-1)^{k+1} k^{k-2}}{(k-1)!} (\lambda/\gamma)^{k-1}$.

Mudando a variável x por z, a última integral em (38) torna-se

$$I = \int_0^{y^{\gamma} \exp(\lambda y)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{k/\gamma} \right)^r \exp\{-(j+1)\alpha z\} dz.$$
 (40)

Mas

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} d_k \, z^{k/\gamma}\right)^r = \sum_{k_1, \dots, k_r=1}^{\infty} D_{k_1, \dots, k_r} \, z^{s_r/\gamma},$$

em que $D_{k_1,\dots,k_r}=d_{k_1}\dots d_{k_r}$ e $s_r=k_1+\dots+k_r$. Então, (75) pode ser reescrita como

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} D_{k_1,\dots,k_r} \int_0^{y^{\gamma} \exp(\lambda y)} z^{s_r/\gamma} \exp\{-(j+1)\alpha z\} dz.$$
 (41)

Substituindo, $t = (j+1)\alpha z$ em (41), obtém-se

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k_1, \dots, k_r} \gamma(s_r / \gamma + 1, (j+1)\alpha y^{\gamma} e^{\lambda y})}{\{(j+1)\alpha\}^{s_r / \gamma + 1}}.$$

Retornando à (38) produz-se

$$t_r(j) = (j+1)\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_{k_1,\dots,k_r} \gamma(s_r/\gamma + 1; (j+1)\alpha y^{\gamma} e^{\lambda y})}{\{(j+1)\alpha\}^{s_r/\gamma + 1}}.$$
 (42)

Substituindo (42) em (37) obtém-se a expressão para calcular o r-ésimo momento incompleto da distribuição KwMW por

$$m_r(y) = \alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (j+1)b_j \frac{D_{k_1,\dots,k_r} \gamma(s_r/\gamma + 1, (j+1)\alpha y^{\gamma} e^{\lambda y})}{\{(j+1)\alpha\}^{s_r/\gamma + 1}}.$$
 (43)

3.1.4 Função geradora de momentos

Seja X uma variável aleatória KwMW $(a, b, \alpha, \gamma, \lambda)$, com função densidade (22). A função geradora de momentos (fgm) de X, dada pela expressão $M(t) = E[\exp(tX)]$, é expressa como

$$M(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} E(X^k),$$

em que $E(X^k)$ é dada por (35). Agora, apresenta-se outra representação para M(t) que pode ser expressa a partir da equação (33) como uma soma ponderada infinita dada por

$$M(t) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \ M_s(t),$$

em que $M_s(t)$ é a f
gm da distribuição MW($(s+1)\alpha, \gamma, \lambda$) e b_s é definida por (34).

Nadarajah; Cordeiro e Ortega (2011) mostraram que a fgm da distribuição MW pode ser escrita como

$$M_s(t) = -t \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n\lambda - t\gamma)^{n-1}}{n! \gamma^n \{(s+1)\alpha\}^{n/\gamma}} \Gamma\left(\frac{n}{\gamma} + 1\right).$$

Então, a fgm de X é dada por

$$M(t) = \sum_{s,n=0}^{\infty} \frac{b_s t \gamma (-1)^{n+1} (n\lambda - t\gamma)^{n-1}}{n! \gamma^n \{(s+1)\alpha\}^{n/\gamma}} \Gamma\left(\frac{n}{\gamma} + 1\right).$$

3.1.5 Desvios médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média ou em relação à mediana. Se X é uma variável aleatória com distribuição KwMW e fda F(x), então, o desvio médio em relação à média $\mu = E(X)$ e o desvio médio em relação à mediana M são definidos, respectivamente, por

$$\delta_1(X) = \int_0^\infty |x - \mu| f(x) dx$$
 e $\delta_2(X) = \int_0^\infty |x - M| f(x) dx$.

O desvio médio em relação à média pode ser simplificado como

$$\delta_1 = 2\mu F(\mu) - 2m_1(\mu_1). \tag{44}$$

Similarmente, o desvio médio em relação à mediana pode ser simplificado como

$$\delta_2 = \mu - 2m_1(M),\tag{45}$$

em que $m_1(p) = \int_0^p x f(x) d(x)$ representa o primeiro momento incompleto. Claramente, $m_1(p)$ é obtido diretamente de (43) com r = 1.

Logo, δ_1 e δ_2 são dados, respectivamente, por

$$\delta_1 = 2\mu F(\mu) - 2\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (j+1)b_j \frac{D_{k_1} \gamma(k_1/\gamma + 1, (j+1)\alpha \mu^{\gamma} e^{\lambda \mu})}{\{(j+1)\alpha\}^{k_1/\gamma + 1}},$$

e

$$\delta_2 = \mu - 2\alpha \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (j+1)b_j \frac{D_{k_1} \gamma(k_1/\gamma + 1, (j+1)\alpha M^{\gamma} e^{\lambda M})}{\{(j+1)\alpha\}^{k_1/\gamma + 1}}.$$

As curvas de Bonferroni e Lorenz (BONFERRONI, 1930) têm aplicações não somente na área de economia em estudos de renda e pobreza, mas em outros campos como confiabilidade, demografia, seguros e medicina. Para a variável aleatória X, elas são definidas, respectivamente, por

$$B(p) = \frac{1}{p\mu} \int_0^q x f(x) dx = \frac{m_1(q)}{p\mu} \quad \text{e} \quad L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^q x f(x) dx = \frac{m_1(q)}{\mu}, \tag{46}$$

em que $\mu = E(X)$ e $q = F^{-1}(p)$ é a função quantílica da variável aleatória X, 0 . $Então, substituindo <math>m_1(q)$ em (46), podem-se reduzir as curvas, respectivamente, a

$$B(p) = \frac{\alpha}{p\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (j+1)b_j \frac{D_{k_1} \gamma(k_1/\gamma + 1, (j+1)\alpha q^{\gamma} e^{\lambda q})}{\{(j+1)\alpha\}^{k_1/\gamma + 1}}$$

e

$$L(p) = \frac{\alpha}{\mu} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (j+1)b_j \frac{D_{k_1} \gamma(k_1/\gamma + 1, (j+1)\alpha q^{\gamma} e^{\lambda q})}{\{(j+1)\alpha\}^{k_1/\gamma + 1}}.$$

A curva de Lorenz é apresentada na Figura 10 para a=6,10,20,50,100 e b=1,1, $\alpha=1,1,$ $\gamma=1,1$ e $\lambda=0,01$. A curva de Bonferroni é apresentada na Figura 11 para a=5,10,20,30,50 e b=2,0, $\alpha=0,5,$ $\gamma=0,5$ e $\lambda=0,1$. A área entre a curva de Bonferroni e B(p)=1 é conhecida como *índice de concentração de Bonferroni*, B(X), e é dado por

$$B(X) = \int_0^1 \{1 - B(p)\} dp = 1 - \int_0^1 B(p) dp.$$

A área entre a curva de Lorenz e L(p)=p é conhecida como área de concentração. O *índice de concentração de Gini*, C(X), é duas vezes essa área e é dado por

$$C(X) = 2\int_{0}^{1} \{p - L(p)\} dp = 1 - 2\int_{0}^{1} L(p) dp.$$
(a)
(b)

Figura 10 - Curvas de Lorenz para a distribuição KwMW. (a) Para a=10,40,150,350 e b=1,1, $\alpha=1,1,$ $\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001$. As curvas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de a. (b) Para a=20 e b=1,2,10,60, $\alpha=1,1,$ $\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001$. As curvas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de b

3.1.6 Função quantílica

<u>(</u>e

A função quantílica de uma distribuição de probabilidade tem muitas utilidades, tanto na teoria quando em aplicações de probabilidade. Seja F(x) a fda. A função quantílica pode ser usada para gerar valores de uma variável aleatória tendo F(x) como sua função de distribuição. Esse fato serve como base de um método para simular amostras de uma distribuição arbitrária com a ajuda de um gerador de números aleatórios.

Seja x=Q(u), a função quantílica da distribuição KwMW. Tomando-se $t=x^{\gamma}\exp(\lambda x)$, pode-se obter x em termos de t por

$$Q(u) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i t^{i/\gamma}, \tag{47}$$

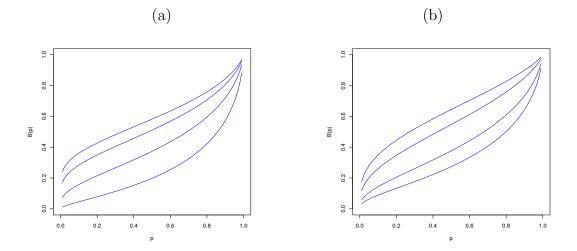


Figura 11 - Curvas de Bonferroni para a distribuição KwMW. (a) Para a=10,40,150,350 e $b=1.1,~\alpha=1,1,~\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001$. As curvas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de a. (b) Para a=20 e b=1,2,10,60, $\alpha=1,1,~\gamma=0,3$ e $\lambda=0,0001$. As curvas de baixo para cima correspondem ao aumento dos valores de b

em que

$$a_i = \frac{(-1)^{i+1}i^{i-2}}{(i-1)}(\lambda/\gamma)^{i-1}.$$

Considerando que $t = x^{\gamma} \exp(\lambda x)$ e invertendo (21), tem-se

$$t = -\alpha^{-1} \log \left\{ 1 - \left[1 - (1 - u)^{1/b} \right]^{1/a} \right\}. \tag{48}$$

Expandindo (48), tem-se

$$t = -\alpha^{-1} \log \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} v_k u^k \right\}, \tag{49}$$

em que $v_k = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+k} {\binom{1/a}{j}} {\binom{j/b}{k}}.$

Pela aplicação da expansão

$$\log(1-z) = -\sum_{l=1}^{\infty} \frac{z^{l}}{l} = -z \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^{l}}{l+1},$$

para $z \in (0,1)$, pode-se reescrever (49) por

$$t = \alpha^{-1} \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{v_k u^k \left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k u^k\right)^l}{l+1}.$$
 (50)

Pela aplicação de uma equação de Gradshteyn e Ryzhik (2007) para uma série de potências elevada a um inteiro positivo l, pode-se escrever

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} v_k \, u^k\right)^l = \sum_{k=0}^{\infty} c_{l,k} \, u^k. \tag{51}$$

De (50) e (51), tem-se

$$t = \alpha^{-1} \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{c_{l,k} \, v_k \, u^{2k}}{l+1},\tag{52}$$

em que os coeficientes $c_{l,k}$ (para $k=1,2,\ldots$) podem ser determinados da equação recorrente

$$c_{l,k} = (k v_0)^{-1} \sum_{m=1}^{k} (l m - k + m) v_m c_{l,k-m},$$

e $c_{l,0}=v_0^l$. O coeficiente $c_{l,k}$ pode ser obtido de $c_{l,0},\ldots,c_{l,k-1}$ e, então, de v_0,\ldots,v_k .

Se X é uma variável aleatória com distribuição KwMW e fda dada por (21), então, a função quantílica é dada por (47) em que t é apresentado em (52).

Simulações de Monte Carlo empregam funções quantílicas para gerar valores de uma variável aleatória não uniforme. Uma amostra de uma distribuição KwMW pode ser obtida, aplicando-se uma amostra da distribuição uniforme na função quantílica. Ainda, podem-se obter a mediana e os quantis 25 e 75 substituindo-se em (47) valores de u iguais a 0.5, 0.25 e 0.75, respectivamente.

3.2 Estimação de máxima verossimilhança

Seja X uma variável aleatória com distribuição KwMW com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}=(a,b,\alpha,\gamma,\lambda)^{\top}$. Aqui são apresentados os estimadores de máxima verossimilhança considerando uma amostra completa, que é o cenário apresentado na seção de aplicação deste trabalho. O logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ da distribuição KwMW é dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = n \log(ab\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \log(\gamma + \lambda x_i) + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) + \sum_{i=1}^{n} [\lambda x_i + \log(t_i)] + (a - 1) \sum_{i=1}^{n} \log(1 - t_i) + (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \log[1 - (1 - t_i)^a],$$
(53)

em que $t_i = \exp[-\alpha x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i)].$

As derivadas de primeira ordem de (53) em relação aos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ são dadas por

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^{n} \log(1 - t_i) - (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^a \log(1 - t_i)}{1 - (1 - t_i)^a},$$

$$U_b(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \log[1 - (1 - t_i)^a],$$

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\alpha} - \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} - a(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-1} x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}},$$

$$U_{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\gamma + \lambda x_{i}} + \sum_{i=1}^{n} \log(x_{i}) - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) \log(x_{i}) + \alpha(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} - a\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-1} x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}},$$

е

$$U_{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\gamma + \lambda x_i} + \sum_{i=1}^{n} x_i [1 + \log(t_i)] - (a - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \log(t_i) t_i}{1 - t_i} + a(b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a - 1} x_i \log(t_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a}.$$

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido, numericamente, a partir da solução das equações não lineares

$$U_a(\boldsymbol{\theta}) = U_b(\boldsymbol{\theta}) = U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = U_{\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = U_{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Para a estimação intervalar e testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo é necessária a matriz 5×5 de informação observada

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{a,a} & J_{a,b} & J_{a,\alpha} & J_{a,\gamma} & J_{a,\lambda} \\ J_{b,a} & J_{b,b} & J_{b,\alpha} & J_{b,\gamma} & J_{b,\lambda} \\ J_{\alpha,a} & J_{\alpha,b} & J_{\alpha,\alpha} & J_{\alpha,\gamma} & J_{\alpha,\lambda} \\ J_{\gamma,a} & J_{\gamma,b} & J_{\gamma,\alpha} & J_{\gamma,\gamma} & J_{\gamma,\lambda} \\ J_{\lambda,a} & J_{\lambda,b} & J_{\lambda,\alpha} & J_{\lambda,\gamma} & J_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são apresentados no Apêndice B.

Sob condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por

$$\sqrt{n}(\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \sim N_5(0, I(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

em que $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada. Essa distribuição é aproximada quando $\mathbf{I}(\boldsymbol{\theta})$ é substituído por $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})$, isto é, a matriz de informação observada estimada em $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$. A distribuição normal multivariada $N_5(0,\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1})$ pode ser utilizada na construção de intervalos de confiança aproximados para os parâmetros individuais e para as funções de sobrevivência e risco. De fato, o intervalo de confiança assintótico com nível de significância ζ , para cada parâmetro θ_r é obtido por meio da expressão

$$ICA(\theta_r, 100(1-\zeta)\%) : \left(\hat{\theta}_r - z_{\zeta/2}\sqrt{\frac{\hat{j}^{\theta_r, \theta_r}}{n}}, \hat{\theta}_r + z_{\zeta/2}\sqrt{\frac{\hat{j}^{\theta_r, \theta_r}}{n}}\right),$$

em que, $\hat{j}^{\theta_r,\theta_r}$ é o r-ésimo elemento diagonal de $\mathbf{J}(\widehat{\boldsymbol{\theta}})^{-1}$, para $r=1,\ldots,5$ e $z_{\zeta/2}$ é o quantil $1-\zeta/2$ da distribuição normal padrão.

A estatística da razão de verossimilhanças (LR) é útil para testar o ajuste da distribuição KwMW e para compará-la com alguns de seus submodelos. Por exemplo, pode-se usar a estatística LR para checar se o ajuste, usando a distribuição KwMW, é estatisticamente superior ao ajuste usando as distribuições MW e W para um determinado conjunto de dados. Assim, testes de hipóteses do tipo $H_0: \theta = \theta_0$ versus $H_1: \theta \neq \theta_0$, em que θ_0 é um vetor especificado, podem ser realizados usando a estatística LR. Por exemplo, o teste de $H_0: \lambda = 0$ versus $H_1: H_0$ não é verdade, é equivalente a comparar a distribuição KwW com a distribuição KwMW para o qual a estatística LR se reduz a

$$w = 2 \left[\ell(\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{\alpha}, \widehat{\gamma}, \widehat{\lambda}) - \ell(\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}, 0) \right],$$

em que \hat{a} , \hat{b} , $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$ e $\hat{\lambda}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e \tilde{a} , \tilde{b} , $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\gamma}$ são os estimadores sob H_0 . Contudo, foram utilizadas as estatísticas AIC, BIC e CAIC para a seleção dos modelos.

3.3 Estudo de simulação

Para avaliar o desempenho dos estimadores de máxima verossimilhança para os parâmetros $a,\ b,\ \alpha,\ \gamma$ e λ do modelo KwMW foi realizado um estudo de simulação de Monte Carlo. Todos os resultados foram obtidos a partir de 10000 repetições de

Monte Carlo e as simulações foram realizadas utilizando o programa computacional R (R Core Team, 2011). Em cada repetição, uma amostra aleatória de tamanho n é gerada da distribuição KwMW($a, b, \alpha, \gamma, \lambda$). O método BFGS (veja, por exemplo, PRESS et al., 1992), que tem sido utilizado por diversos autores, foi empregado para maximizar o logaritmo da verossimilhança $l(\theta)$. Foram geradas amostras com tamanhos n=50, n=100, n=300 e n=500 e os verdadeiros valores utilizados no processo de geração foram fixados em $a=10,5; b=2,5; \alpha=3,5; \gamma=2,5$ e $\lambda=2,5$.

A Tabela 1 apresenta a média e a raiz quadrada do erro quadrático médio (REQM) dos estimadores de máxima verossimilhança para cada tamanho amostral. Considerando-se os dados da Tabela 1, o REQM para EMV de a, b, α, γ e λ diminui à medida que o tamanho da amostra aumenta, como esperado. Note que existe um viés maior para pequenas amostras na estimativa dos parâmetros da distribuição KwMW.

As Figuras 12 e 13 apresentam os histogramas para os 10000 valores simulados das estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros a, b, α , γ e λ , considerando-se tamanhos amostrais iguais a 50 e 500, respectivamente. Nota-se que, com o aumento do tamanho amostral de 50 para 500, as distribuições das estimativas dos parâmetros ficam mais concentradas em torno dos valores fixados inicialmente.

3.4 Análise bayesiana

Considere a distribuição KwMW (22) e a função de verossimilhança (53) para os parâmetros a, b, α, γ e λ . Para uma análise bayesiana, assumem-se as seguintes distribuições a priori para a, b, α, γ e λ :

$$a \sim \Gamma(a_1,b_1), \quad a_1 \quad {\rm e} \quad b_1 \quad {\rm conhecidos},$$
 $b \sim \Gamma(a_2,b_2), \quad a_2 \quad {\rm e} \quad b_2 \quad {\rm conhecidos},$ $\alpha \sim \Gamma(a_3,b_3), \quad a_3 \quad {\rm e} \quad b_3 \quad {\rm conhecidos},$ $\gamma \sim \Gamma(a_4,b_4), \quad a_4 \quad {\rm e} \quad b_4 \quad {\rm conhecidos},$ ${\rm e} \quad \lambda \sim \Gamma(a_5,b_5), \quad a_5 \quad {\rm e} \quad b_5 \quad {\rm conhecidos},$

Tabela 1 - Resultados da simulação de Monte Carlo: média e raiz quadrada do erro quadrático médio das estimativas dos parâmetros do modelo KwMW (Valores verdadeiros utilizados: $a=10,5,\,b=2,5,\,\alpha=3,5,\,\gamma=2,5$ e $\lambda=2,5$)

n	parâmetro	média	REQM
50	a	11,6704	9,0340
	b	4,6927	6,0056
	α	4,3568	3,1482
	γ	4,1065	3,7580
	λ	4,4326	4,1014
100	a	10,8372	6,4256
	b	3,7767	4,3980
	α	4,0180	2,5704
	γ	3,2403	1,6572
	λ	3,6422	2,6645
300	a	10,6686	4,9804
	b	3,2871	3,2566
	α	3,9600	2,2652
	γ	2,9083	0,8231
	λ	3,1789	2,1311
500	a	10,4484	3,9874
	b	2,8526	2,3479
	α	3,8154	1,5560
	γ	2,8120	0,7360
	λ	3,0286	1,8689

em que $\Gamma(a_i,b_i)$ denota uma distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade dada por

$$f(v; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} v^{a_i - 1} \exp(-vb_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que v > 0, $a_i > 0$ e $b_i > 0$.

Assumindo independência a priori entre os parâmetros a, b, $\alpha,~\gamma$ e $\lambda,$ a

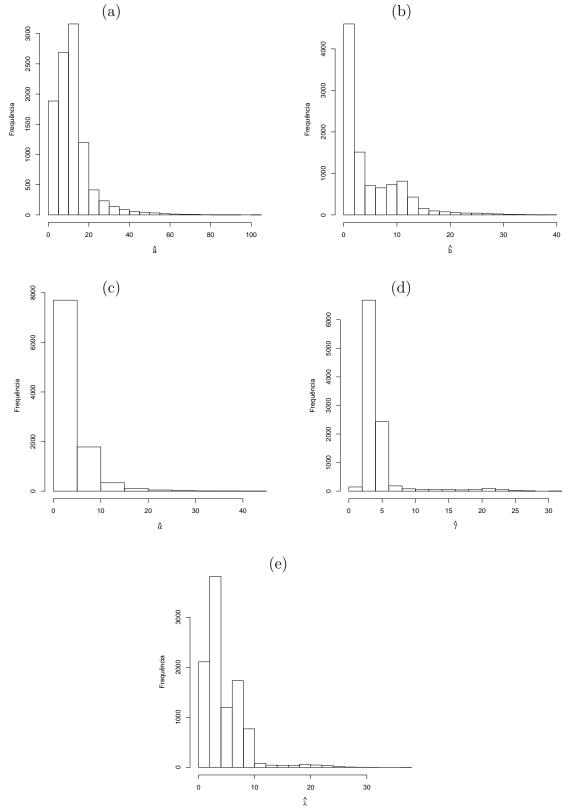


Figura 12 - Histogramas para os 10000 valores simulados das EMVs baseados em n=50. (a) Para a. (b) Para b. (c) Para α . (d) Para γ . (e) Para λ

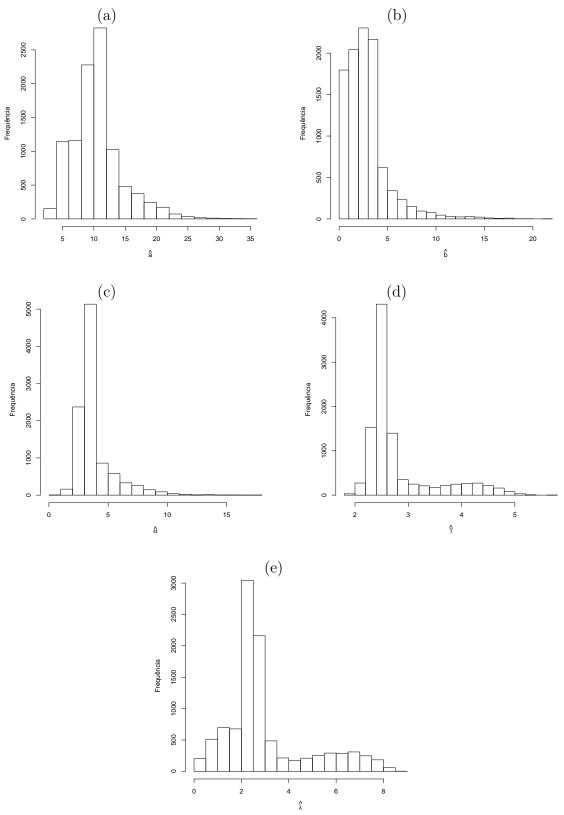


Figura 13 - Histogramas para os 10000 valores simulados das EMVs baseados em n=500. (a) Para a. (b) Para b. (c) Para α . (d) Para γ . (e) Para λ

distribuição conjunta a posteriori para esses parâmetros é dada por

$$\pi(a, b, \alpha, \gamma, \lambda | x) \propto (ab\alpha)^n \exp\left[\lambda \sum_{i=1}^n x - \alpha \sum_{i=1}^n x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \prod_{i=1}^n (\gamma + \lambda x) x^{\gamma - 1}$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a - 1} \left(1 - \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^a\right)^{b - 1}$$

$$\times \pi(a, b, \alpha, \gamma, \lambda).$$
(54)

As funções densidades marginais a posteriori dos parâmetros a, b, α , γ e λ não são facilmente obtidas porque a integração da densidade a posteriori conjunta (54) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970), descrito na seção 2.7.2.

O algoritmo Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970) permite simular observações de distribuições a partir das funções densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais completas para os parâmetros a, b, α , γ e λ :

$$\pi(a|x,b,\alpha,\gamma,\lambda) \propto (a)^n \prod_{i=1}^n \left\{ 1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \right\}^a \left(1 - \left\{ 1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \right\}^a \right)^{b-1} \times \pi(a),$$

$$\pi(b|x, a, \alpha, \gamma, \lambda) \propto (b)^n \prod_{i=1}^n (1 - \{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\}^a)^b \times \pi(b),$$

$$\pi(\alpha|x, a, b, \gamma, \lambda) \propto (\alpha)^n \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^n x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \prod_{i=1}^n \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a-1}$$

$$\times \prod_{i=1}^n \left(1 - \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^a\right)^{b-1} \times \pi(\alpha),$$

$$\pi(\gamma|x, a, b, \alpha, \lambda) \propto \exp\left[-\alpha \sum_{i=1}^{n} x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \prod_{i=1}^{n} (\gamma + \lambda x) x^{\gamma} \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a-1} \times \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a}\right)^{b-1} \times \pi(\gamma),$$

е

$$\pi(\lambda|x, a, b, \alpha, \gamma) \propto \exp\left[\lambda \sum_{i=1}^{n} x - \alpha \sum_{i=1}^{n} x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right] \prod_{i=1}^{n} (\gamma + \lambda x) \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a-1} \times \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \left\{1 - \exp\left[-\alpha x^{\gamma} \exp(\lambda x)\right]\right\}^{a}\right)^{b-1} \times \pi(\lambda).$$

Para as análises descritivas das estimativas dos parâmetros do modelo KwMW foi utilizado o pacote BOA (Bayesian Output Analysis) do programa estatístico R (*R Core Team*, 2011).

3.5 Aplicação

Nesta seção do trabalho é apresentado um conjunto de dados que está relacionado com as ciências dos materiais, para ilustrar o uso da distribuição de probabilidade Kumaraswamy Weibull modificada. Todos os resultados foram obtidos com auxílio dos pacotes estatísticos computacionais R (*R Core Team*, 2011) e SAS versão 9.2 (SAS, 2008).

3.5.1 Análise dos tempos de vida de componentes industriais

Para ilustrar a aplicação da distribuição KwMW foi utilizado um conjunto de dados apresentado em Aarset (1987). Os dados referem-se ao tempo de vida de 50 dispositivos industriais e já foram analisados por Mudholkar; Srivastava e Kollia (1996) e Wang (2000).

A curva TTT, definida na seção 2.1.1, para este conjunto de dados é apresentada na Figura 14 e indica uma função risco na forma de U, sugerindo que a distribuição KwMW pode ser usada para a análise desses dados.

Na Tabela 2 podem ser vistas as EMVs (com os correspondentes errospadrão) dos parâmetros, além dos valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC para alguns modelos: Kumaraswamy Weibull (KwW), Weibull modificada (MW), Weibul (W), exponencial (E) e Birnbaum-Saunders (B-S), que não é um submodelo da distribuição KwMW. Os resultados da Tabela 2 indicam que o modelo KwMW tem os menores valores de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados, portanto, pode ser escolhido como o melhor modelo. Os códigos na linguagem SAS são apresentados no Apêndice D.

Além disso, as funções de sobrevivência e de densidades estimadas para os diferentes modelos ajustados são representadas, graficamente, nas Figuras 15 e 16, respectivamente, onde pode ser observado que a distribuição KwMW apresenta um bom ajuste se comparado ao ajuste dos outros modelos probabilísticos alternativos.

Considerando a abordagem bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições a priori não informativas, já que os parâmetros assumem apenas valores positivos: $a \sim \Gamma(0,01;0,01), b \sim \Gamma(0,01;0,01), \alpha \sim \Gamma(0,01;0,01), \gamma \sim \Gamma(0,01;0,01)$ e $\lambda \sim$

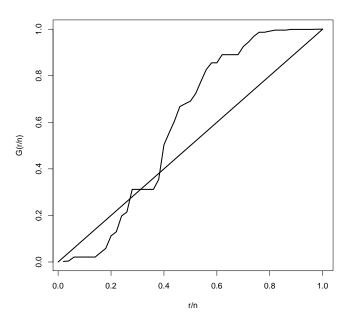


Figura 14 - Curva TTT para os dados de Aarset

Tabela 2 - EMVs dos parâmetros dos modelos KwMW, KwW, MW, W, E e B-S para os dados de tempo de vida de componentes industriais, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores de AIC, BIC e CAIC

Model	a	b	α	γ	λ	AIC	CAIC	BIC
KwMW	0,09067	0,4265	1e-8	2,9140	0,07492	447,6	448,9	457,1
	(0,02744)	(0,1410)	(0,0000)	(0,3654)	(0,01798)			
KwW	0,07002	0,2378	1e-8	4,5096	0	453,0	453,9	460,6
	(0,02647)	(0,08308)	(0,0000)	(0,09881)	(-)			
MW	1	1	0,0624	0,3548	0,02332	460,3	460,8	466,0
	(-)	(-)	(0,02672)	(0,1127)	(0,004843)			
Weibull	1	1	0,02703	0,9490	0	486,0	486,3	489,8
	(-)	(-)	(0,01389)	(0,1196)	(-)			
Exponencial	1	1	0,02189	1	0	484,2	484,3	486,1
	(-)	(-)	(0,003096)	(-)	(-)			
	α	β						
Birnbaum-	2,7455	7,1876	(-)	(-)	(-)	510,9	511,2	514,8
Saunders	(0,3018)	(1,5583)	(-)	(-)	(-)			

 $\Gamma(0,01;0,01)$.

Foram, então, geradas duas cadeias paralelas e independentes, com tamanho 50000, para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hastings (HASTINGS, 1970), desconsiderando as primeiras 5000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 4500. Para monitorar a convergência

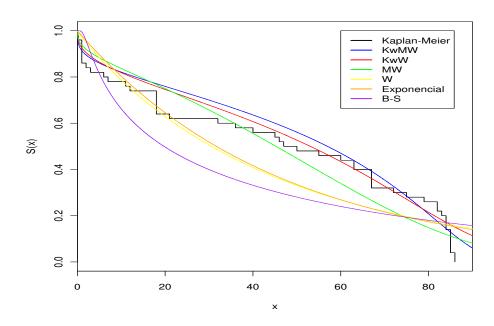


Figura 15 - Função de sobrevivência para os modelos ajustados e função de sobrevivência empírica estimada pelo método de Kaplan-Meier

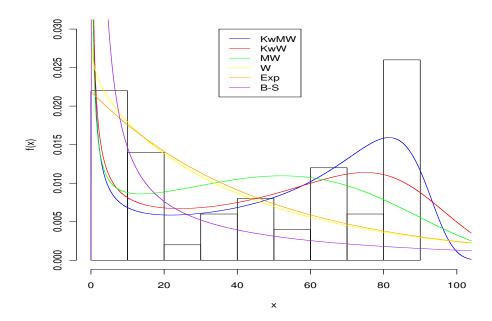


Figura 16 - Funções de densidades estimadas dos modelos e histograma para os dados

das amostras foi usado o fator de redução da escala \hat{R} , desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 3 apresenta os sumários *a posteriori* para os parâmetros do modelo KwMW e os valores do fator de redução da escala.

Tabela 3 - Sumários a posteriori dos parâmetros do modelo KwMW

Parâmetro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	\hat{R}
\overline{a}	0,0911	0,234	(0,0470; 0,1375)	0,9997
b	0,4264	0,0200	(0,3875; 0,4651)	0,9998
α	7,9239e-07	6,0408e-07	(2,2485e-10; 1,94100e-06)	1,0005
γ	2,9142	0,0253	(2,8656; 2,9635)	1,0009
λ	0,0752	0,0249	(0,0255; 0,1230)	1,0003

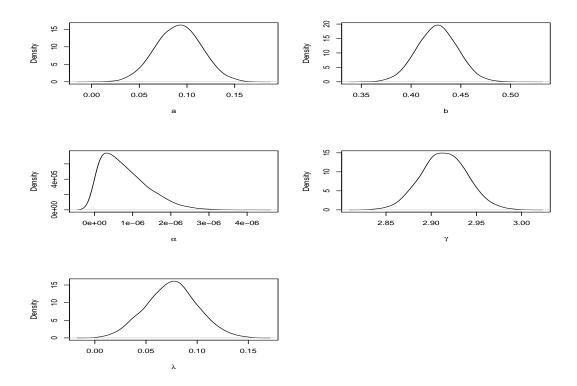


Figura 17 - Estimativas das funções densidade marginais $a\ posteriori$ para os parâmetros do modelo KwMW

Nota-se em todos os casos que os valores de \hat{R} estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que os valores para a média *a posteriori* (Tabela 3) são similares aos valores obtidos para o modelo KwMW apresentados na Tabela 2. Além disso, a Figura 17 apresenta as funções densidades marginais *a posteriori* aproximadas a partir do histograma, considerando as 4500 observações amostrais geradas, em que podemos visualizar a convergência das cadeias.

3.6 Generalização Multivariada

A distribuição KwMW pode ser generalizada para os casos bivariado e multivariado de uma forma natural. Considere o caso bivariado. Seja $G(x_1, x_2)$ a função distribuição acumulada bivariada em $(0, \infty) \times (0, \infty)$ com função densidade conjunta representada por $g(x_1, x_2)$. Ainda, $g_i(x_i)$, i = 1, 2 representam as funções densidade marginais e $G_i(x_i)$, i = 1, 2 representam as suas funções de distribuição acumulada marginais.

Pode-se definir a distribuição KwMW bivariada como

$$F(x_1, x_2) = 1 - [1 - G^a(x_1, x_2)]^b$$
(55)

para a > 0 e b > 0, em que $G(x_1, x_2)$ é a distribuição padrão MW dada por

$$G(x_1, x_2) = 1 + \exp\{-[(\alpha_1 x_1^{\gamma_1} \exp(\lambda_1 x_1))^{\frac{1}{\delta}} + (\alpha_2 x_2^{\gamma_2} \exp(\lambda_2 x_2))^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta}\}$$
$$-\exp[-\alpha_1 x_1^{\gamma_1} \exp(\lambda_1 x_1)] - \exp[-\alpha_2 x_2^{\gamma_2} \exp(\lambda_2 x_2)]$$

para $\alpha_i > 0$, $\gamma_i > 0$ e $\lambda_i > 0$, para i = 1, 2. A função de densidade da distribuição Weibull pode ser representada por

$$g(x_1, x_2) = -\frac{1}{\delta x_1 x_2} \{ (\gamma_1 + q_1)(\gamma_2 + q_2) \exp(-q_1 - q_2)(p_1)^{\frac{1}{\delta}} (p_2)^{\frac{1}{\delta}} \\ \times \exp\{q_2 - [(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta} + q_1 \} \{ (\delta - 1)[(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta - 2} \\ -\delta[(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{2\delta - 2} \},$$

em que $p_i = \alpha_i x_i^{\gamma_i} \exp(q_i)$ and $q_i = \lambda_i x_i$. O parâmetro $0 < \delta \le 1$ mede a associação entre X_1 e X_2 e elas são independentes quando $\delta = 0$. A função densidade marginal g_i e função acumulada G_i para i = 1, 2 são, então, dadas por

$$g_i(x_i) = \alpha_i x_i^{\gamma_i - 1} (\gamma_i + \lambda_i x_i) \exp\{\lambda_i x_i - \alpha_i x_i^{\gamma_i} \exp(\lambda_i x_i)\} \ \text{e} \ G_i(x_i) = 1 - \exp\{-\alpha_i x_i^{\gamma_i} \exp(\lambda_i x_i)\}.$$

As funções de densidade marginais f_i para i=1,2 e as funções distribuições acumulada marginais F_i para i=1,2 da distribuição KwMW bivariadas são dada por

$$f_i(x) = a b g_i(x) G_i(x)^{a-1} \left[1 - G_i(x)^a\right]^{b-1}$$
(56)

e

$$F_i(x) = 1 - [1 - G_i(x)^a]^b. (57)$$

As funções distribuições acumulada condicionais de F são

$$F(x_2|x_1) = \frac{1 - [1 - G^a(x_1, x_2)]^b}{1 - [1 - G_1^a(x_1)]^b} \quad \text{e} \quad F(x_1|x_2) = \frac{1 - [1 - G^a(x_1, x_2)]^b}{1 - [1 - G_2^a(x_2)]^b}.$$
 (58)

A função de densidade conjunta bivariada para a distribuição KwMW é reduzida à forma

$$f(x_1, x_2) = \frac{a b G^{a-2}(x_1, x_2) [A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2) + C(x_1, x_2)]}{[1 - G^a(x_1, x_2)]^{b-1}},$$

em que

$$A(x_{1}, x_{2}) = \frac{a(b-1) G^{a}(x_{1}, x_{2})}{[1 - G^{a}(x_{1}, x_{2})]} \frac{\partial G(x_{1}, x_{2})}{\partial x_{1}} \frac{\partial G(x_{1}, x_{2})}{\partial x_{2}},$$

$$B(x_{1}, x_{2}) = (a-1) \frac{\partial G(x_{1}, x_{2})}{\partial x_{1}} \frac{\partial G(x_{1}, x_{2})}{\partial x_{2}},$$

$$C(x_{1}, x_{2}) = g(x_{1}, x_{2})G(x_{1}, x_{2}),$$

$$\frac{\partial G(x_{1}, x_{2})}{\partial x_{1}} = -\frac{1}{x_{1}} \{ [(p_{1})^{\frac{1}{\delta}} + (p_{2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta-1} \exp\{-[(p_{1})^{\frac{1}{\delta}} + (p_{2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta}\} (p_{1})^{\frac{1}{\delta}} \gamma_{1} + [(p_{1})^{\frac{1}{\delta}} + (p_{2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta-1} \exp\{-[(p_{1})^{\frac{1}{\delta}} + (p_{2})^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta}\} (p_{1})^{\frac{1}{\delta}} q_{1} - \alpha_{1} x_{1}^{\gamma_{1}} (\gamma_{1} + q_{1}) \exp(q_{1} - p_{1}) \}$$

e

$$\frac{\partial G(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{1}{x_2} \{ [(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta - 1} \exp\{-[(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta}\} (p_2)^{\frac{1}{\delta}} \gamma_2 + [(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta - 1} \exp\{-[(p_1)^{\frac{1}{\delta}} + (p_2)^{\frac{1}{\delta}}]^{\delta}\} (p_2)^{\frac{1}{\delta}} q_2 - \alpha_2 x_2^{\gamma_2} (\gamma_2 + q_2) \exp(q_2 - p_2) \}.$$

As funções de densidade marginais de F são dadas por:

$$f(x_1|x_2) = \frac{[1 - G_2^a(x_2)]^{b-1}G^{a-2}(x_1, x_2)[A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2) + C(x_1, x_2)]}{[1 - G_2^a(x_1, x_2)]^{b-1}g_2(x_2)G_2^{a-1}(x_2)}$$

e

$$f(x_2|x_1) = \frac{[1 - G_1^a(x_1)]^{b-1}G^{a-2}(x_1, x_2)[A(x_1, x_2) + B(x_1, x_2) + C(x_1, x_2)]}{[1 - G_1^a(x_1, x_2)]^{b-1}g_1(x_1)G_1^{a-1}(x_1)}$$

4 DISTRIBUIÇÃO GAMA GENERALIZADA GEOMÉTRICA EXPONENCIADA

A distribuição gama generalizada (GG) foi introduzida por Stacy (1962) e é um modelo muito popular para analisar dados assimétricos. Possui como submodelos distribuições amplamente utilizadas na análise de dados de tempo de vida, como as distribuições Weibull, gama e Rayleight. Diversos autores nos últimos anos têm concentrado seus esforços na generalização de família de distribuições de probabilidade, obtendo, dessa forma, maior flexibilidade e, consequentemente, ganhado na modelagem de dados e na capacidade de incorporar um grande número de submodelos nas distribuições generalizadas. Seguindo essa ideia, Ortega; Cordeiro e Pascoa (2011) propuseram a distribuição gama generalizada geométrica (GGG) que possui quatro parâmetros. A distribuição GGG foi obtida seguindo a ideia de Adamidis e Loukas (1998) para um processo de mistura de distribuições.

O objetivo deste capítulo é propor uma extensão da distribuição gama generalizada geométrica. Essa nova distribuição denominada de gama generalizada geométrica exponenciada (GGGE) inclui algumas distribuições como casos particulares, tais como a distribuição gama generalizada geométrica (GGG), quando $\lambda=1$. Devido à sua flexibilidade para acomodar muitas formas para a função risco, pode ser utilizada em uma grande variedade de problemas na análise de dados de sobrevivência. O restante do capítulo está organizado da seguinte forma. Na seção 4.1 a distribuição gama generalizada geométrica e alguns de seus submodelos são apresentados. As propriedades matemáticas da nova distribuição são apresentadas na seção 4.2. Estimação pelos métodos de máxima verossimilhança e bayesiana estão presentes nas seções 4.3 e 4.4. Por fim, a análise de um conjunto de dados reais é dada na seção 4.6.

4.1 Distribuição gama generalizada geométrica exponenciada

Seja G(x) a função de distribuição acumulada da distribuição GGG definida na equação (7). A função de distribuição acumulada (fda) da distribuição GGGE pode ser obtida elevando G(x) à potência λ . Desta forma, $F(x) = [G(x)]^{\lambda}$, que possui cinco parâmetros, $\alpha > 0$, k > 0, $\tau > 0$, $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$, é dada pela expressão

$$F(x) = \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda}, x > 0.$$
 (59)

A função densidade de probabilidade da distribuição GGGE pode ser obtida derivando-se a expressão (59), de modo que

$$f(x) = \frac{\lambda \tau (1-p)}{\alpha \Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} \times \left(1-p\left\{1-\gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)}, x > 0.$$
(60)

Ainda, se X é uma variável aleatória positiva com função densidade dada pela equação (60), então, $X \sim GGGE(\alpha, \tau, k, p, \lambda)$.

As funções de sobrevivência S(x) e de risco h(x) correspondentes são:

$$S(x) = 1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda}$$

е

$$h(x) = \frac{\frac{\lambda \tau(1-p)}{\alpha \Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} \left(1-p\left\{1-\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)}}{1-\left\{\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1-p\left\{1-\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}^{\lambda}},$$

respectivamente.

A Figura 18 apresenta o gráfico da fdp da distribuição GGGE para diferentes valores de parâmetros, em que se observa uma grande flexibilidade da mesma.

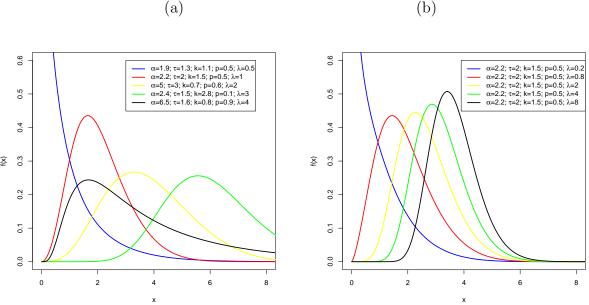


Figura 18 - Gráfico da função densidade da distribuição GGGE para diferentes valores de parâmetros

Uma característica da distribuição GGGE é que sua função risco acomoda as formas crescente, decrescente, unimodal e forma de banheira. Na Figura 19 tem-se o gráfico da função de sobrevivência da distribuição GGGE para diferentes valores de λ . Na Figura 20 tem-se em (a) o gráfico da função risco na forma de banheira, (b) o gráfico da função risco na forma unimodal e em (c) o gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente.

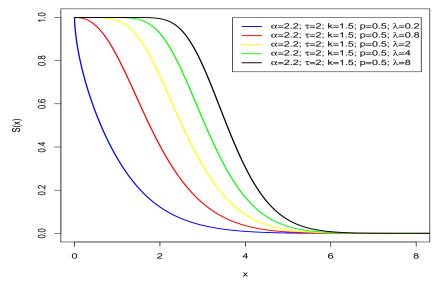


Figura 19 - Gráfico da função de sobrevivência da distribuição GGGE para diferentes valores de λ

A distribuição GGGE, por ser mais geral, apresenta algumas distribuições como casos particulares, a saber: a distribuição gama generalizada geométrica (GGG) surge quando $\lambda=1$. A distribuição Weibull geométrica (WG)(BARRETO-SOUZA; MO-RAIS; CORDEIRO, 2011) é obtida de (59) para $\lambda=1$ e k=1. Para $\lambda=\tau=1$, obtém-se a distribuição gama geométrica com três parâmetros (α,k,p) . A distribuição GG é a distribuição limite (o limite é definido em termos da convergência em distribuição) da distribuição GGGE quando $\lambda=1$ e $p\to 0^+$. Por outro lado, se $\lambda=1$ e $p\to 1^-$, tem-se a distribuição de uma variável aleatória Y tal que P(Y=0)=1. Assim, o parâmetro p pode ser interpretado como um parâmetro de degeneração. Para $\lambda=\tau=k=1$ em (59) tem-se a distribuição exponencial geométrica (EG). Quando $p\to 0^+$ (e $\lambda=k=1$), obtém-se a distribuição Weibull. Alguns submodelos da distribuição GGGE são listados na Tabela 4.

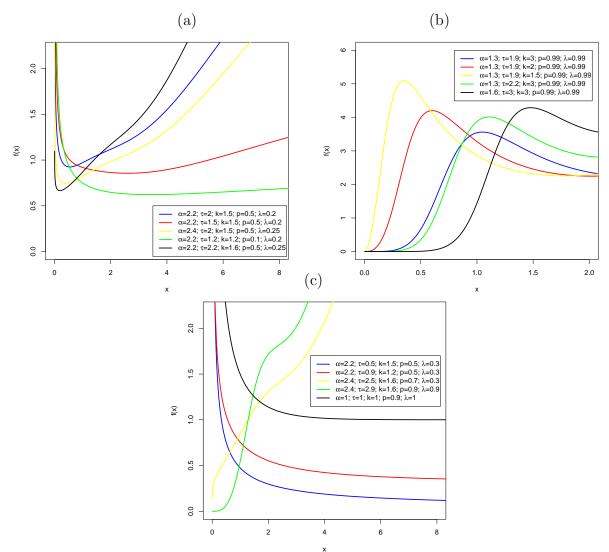


Figura 20 - Funções risco da distribuição GGGE. (a) Gráfico da função risco na forma de banheira. (b) Gráfico da função risco na forma unimodal. (c) Gráfico da função risco nas formas crescente e decrescente

4.2 Propriedades gerais

Para determinar algumas propriedades da distribuição GGGE, a função densidade de probabilidade (60) pode ser reescrita na forma de combinação linear da distribuição GG. Então, para |z|<1 e $\rho>0$, considere a seguinte série de potências:

$$(1-z)^{-\rho} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho+j)}{\Gamma(\rho)j!} z^j.$$
(61)

Dessa forma, escrevendo a quantidade $\left\{1 - p\left(1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right)\right\}^{-(\lambda+1)}$ na forma de uma expansão dada em (61), a função densidade de probabilidade da distribuição

Tabela 4 - Alguns	submodelos (da distribuição	GGGE
-------------------	--------------	-----------------	------

Distribuição		α	k	p	λ
Gama generalizada geométrica		α	k	p	1
Gama geométrica	1	α	k	p	1
Qui-quadrado geométrica	1	2	$\frac{n}{2}$	p	1
Exponencial geométrica		α	1	p	1
Weibull geométrica	au	α	1	p	1
Rayleigh geométrica		α	1	p	1
Maxwell geométrica	2	α	$\frac{3}{2}$	p	1
Semi normal geométrica	2	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	p	1

 $GGGE(\alpha, \tau, k, p, \lambda)$ é expressa por

$$f(x) = \frac{\lambda \tau (1-p)}{\alpha \Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} \times \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda+j)\Gamma(\lambda+j)}{\lambda \Gamma(\lambda)j!} p^j \left\{1-\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^j.$$
(62)

Considere, agora, a seguinte expansão em série:

$$(1-z)^{b-1} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l \Gamma(b)}{\Gamma(b-1) \, l!} \, z^l, \tag{63}$$

que é válida para |z|<1 e b>0 um número real e não inteiro. Assim, a quantidade $\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1}$ da equação (62) pode ser reescrita usando a expansão dada em (63). Logo,

$$f(x) = \frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l}(\lambda+j)\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(\lambda-l)l!j!} \times p^{j} \left\{1-\gamma_{1}\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{j+l}.$$
(64)

Usando a expansão binomial na quantidade $\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{j+l}$ da expressão (64), a função densidade de probabilidade pode ser reescrita na forma

$$f(x) = \frac{\tau(1-p)}{\alpha\Gamma(k)} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \sum_{l,j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j+l} \frac{(-1)^{l+m}(\lambda+j)\Gamma(\lambda+j)}{l! \, j! \, \Gamma(\lambda-l)}$$

$$\times \binom{l+j}{m} p^{j} \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{m}.$$
(65)

Portanto, utilizando o resultado em (112)(Apêndice A) na expressão (65), a função densidade de probabilidade pode ser escrita como combinação linear da distribuição

GG, da forma:

$$f(x) = \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x), \quad x > 0,$$
 (66)

em que $g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x)$ tem distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(m+1)+q)$ e os coeficientes de ponderação w(m,q) são dados por

$$w_{m,q} = \frac{(1-p)(-1)^{l+m} p^{j} (\lambda + j) \Gamma(\lambda + j) \Gamma[k(m+1) + q] c_{m,q}}{\Gamma(k)^{m+1} \Gamma(\lambda - l) l! j!} {l! \choose m}.$$
 (67)

Os coeficientes $c_{m,q}$ são determinados a partir da relação de recorrência em (111)(Apêndice A). A equação (66) mostra que a função densidade da distribuição GGGE pode ser escrita em termos de uma combinação linear de densidades GG.

4.2.1 Momentos

Algumas das principais características de uma distribuição, tais como, tendência, dispersão, assimetria e curtose, podem ser definidas por meio dos momentos. Assim, o r-ésimo momento ordinário da distribuição $GG(\alpha, \tau, k)$ (STACY, 1962) é obtido da seguinte forma:

$$\mu'_{r,GG} = \frac{\alpha^r \Gamma(k+r/\tau)}{\Gamma(k)}.$$

Considerando a função densidade de probabilidade (66), o r-ésimo momento ordinário da distribuição GGGE, obtido a partir dos momentos da distribuição GG $(\alpha, \tau, k(m+1) + q)$ é dado por

$$\mu'_r = \alpha^r \sum_{l,i,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} \frac{\Gamma[k(m+1) + q + r/\tau]}{\Gamma[k(m+1) + q]}.$$

Uma outra representação para o r-ésimo momento da distribuição GGGE com função densidade de probabilidade (60) é obtida, desenvolvendo-se a seguinte expressão:

$$\mu_r' = \frac{\lambda \tau (1 - p) \alpha^{r-1}}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau k + r - 1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau\right] \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau\right]^{\lambda - 1} \times \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}\right)^{-(\lambda + 1)} dx.$$
(68)

Assim, fazendo a mudança de variável $w = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}$ em (68), tem-se

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r \lambda (1-p)}{\Gamma(k)} \int_0^\infty w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w) \gamma_1(k,w)^{\lambda-1} \{1 - p \left[1 - \gamma_1(k,w)\right]\}^{-(\lambda+1)} dw. \quad (69)$$

Dessa forma, escrevendo a quantidade $\{1 - p[1 - \gamma_1(k, w)]\}^{-(\lambda+1)}$ da expressão (69), na forma de uma expansão dada em (61), tem-se

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r (1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda+j)\Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(\lambda)j!} p^j \int_0^{\infty} w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w)$$

$$\times \gamma_1(k,w)^{\lambda-1} \left[1 - \gamma_1(k,w)\right]^j dw.$$
(70)

A quantidade $\gamma_1(k,w)^{\lambda-1}$ da equação (70) pode ser reescrita usando a expansão dada em (63) e, dessa forma

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r (1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{l,j=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (\lambda+j) \Gamma(\lambda+j) p^j}{\Gamma(\lambda-l) l! j!} \times \int_0^{\infty} w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w) \left[1 - \gamma_1(k,w)\right]^{j+l} dw.$$
(71)

Usando a expansão binomial no termo $\left[1-\gamma_1(k,w)\right]^{j+l}$ a expressão (71) pode ser reescrita como

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r (1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{l,j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j+l} \frac{(-1)^{l+m} (\lambda+j) \Gamma(\lambda+j) p^j}{\Gamma(\lambda-l) l! j!} {j \choose m}$$
$$\times \int_0^{\infty} w^{k+\frac{r}{\tau}-1} \exp(-w) \gamma_1(k,w)^m dw.$$

Portanto, o r-ésimo momento ordinário da distribuição GGGE é dado por

$$\mu_r' = \frac{\alpha^r (1-p)}{\Gamma(k)} \sum_{l,j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j+l} w_{l,j,m} I\left(k, \frac{r}{\tau}, m\right)$$

$$\tag{72}$$

em que

$$w_{l,j,m} = \frac{(-1)^{l+m} (\lambda + j) \Gamma(\lambda + j) p^j}{\Gamma(\lambda - l) l! j!} {j + l \choose m}$$

е

$$I\left(k, \frac{r}{\tau}, m\right) = \int_0^\infty w^{k + \frac{r}{\tau} - 1} \exp(-w) \gamma_1(k, w)^m dw.$$
 (73)

Nota-se que, para a integral definida em (73), a função gama incompleta denotada por $\gamma_1(k, w)$, pode ser reescrita por meio de uma expansão em série de potência dada em (112)(Apêndice A). Assim, $I\left(k, \frac{r}{\tau}, m\right)$ é dada por

$$I\left(k, \frac{r}{\tau}, m\right) = \int_0^\infty w^{k + \frac{r}{\tau} - 1} \exp(-w) \left[\frac{w^k}{\Gamma(k)} \sum_{l=0}^\infty \frac{(-w)^l}{(k+l)l!} \right]^m dw. \tag{74}$$

Segundo Nadarajah (2008b), a integral (74) é determinada de acordo com alguns resultados em termos da função de Lauricella do tipo A (EXTON, 1978; AARTS, 2011) definida por

$$F_A^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!},$$

em que $(a)_i = a(a+1)\cdots(a+i-1)$ é um fatorial ascendente, supondo que $(a)_0 = 1$. Rotinas numéricas para o cálculo direto da função de Lauricella do tipo A estão disponíveis, vide Exton (1978) e Trott (2006). Portanto,

$$I\left(k, \frac{r}{\tau}, m\right) = k^{-m} \Gamma\left(r/\tau + k(m+1)\right) \times F_A^{(m)}\left(r/\tau + k(m+1); k, \dots, k; k+1, \dots, k+1; -1, \dots, -1\right).$$
(75)

As medidas de assimetria e curtose são calculadas utilizando-se as seguintes equações (NADARAJAH; KOTZ, 2004):

Coeficiente de assimetria(X) =
$$\frac{E(X^3) - 3E(X)E(X^2) + 2E^3(X)}{Var^{3/2}(X)}.$$
 Coeficiente de curtose(X) =
$$\frac{E(X^4) - 4E(X)E(X^3) + 6E(X^2)E^2(X) - 3E^4(X)}{Var^2(X)}.$$

As representações gráficas dessas medidas, em função de λ para valores selecionados de p, são apresentadas na Figura 21.

4.2.2 Função geradora de momentos

Seja X uma variável aleatória $\mathrm{GGGE}(\alpha,\tau,k,p,\lambda)$, com função densidade (66). Então, a função geradora de momentos (fgm) definida por $M(s)=E[\exp(sX)]$ é obtida da função de distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k)$. Assim, a fgm da distribuição GG é determinada da seguinte forma:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\alpha^{\tau k} \Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(sx) \, x^{\tau k - 1} \exp\{-(x/\alpha)^\tau\} dx.$$

Então, substituindo $u = x/\alpha$, tem-se

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \int_0^\infty \exp(\alpha s u) \, u^{\tau k - 1} \exp(-u^{\tau}) du. \tag{76}$$

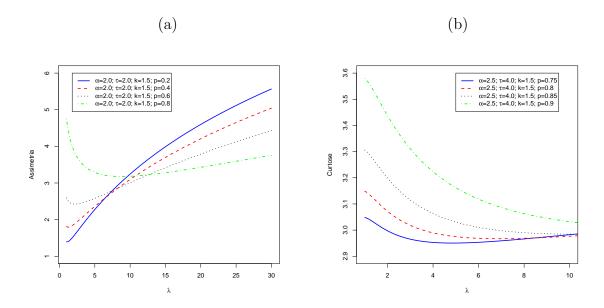


Figura 21 - Assimetria e curtose da distribuição GGGE como função do parâmetro λ

Note que o termo $\exp(\alpha su)$ pode ser expandido em série de Taylor. Assim, utilizando essa expansão, a função (76) é escrita como

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{\tau}{\Gamma(k)} \sum_{d=0}^{\infty} \frac{(\alpha s)^d}{d!} \int_0^{\infty} u^{\tau k + d - 1} \exp(-u^{\tau}) du.$$
 (77)

Por outro lado, a integral da fgm de expressão (77) é calculada como

$$\int_{0}^{\infty} u^{\tau k + d - 1} \exp(-u^{\tau}) du = \tau^{-1} \Gamma(k + d/\tau). \tag{78}$$

Portanto, para $\tau>0$ e considerando o resultado da expressão (78), a f
gm da distribuição GG é dada por

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)} \sum_{d=0}^{\infty} \Gamma\left(\frac{d}{\tau} + k\right) \frac{(\alpha s)^d}{d!}.$$
 (79)

Assim, utilizando o resultado em (66), a fgm da distribuição GGGE é dada por

$$M(s) = \sum_{l,j,q,d=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} M_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(s).$$

Logo,

$$M(s) = \sum_{l,j,q,d=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \frac{w_{m,q}}{\Gamma[k(m+1)+q]} \Gamma(\frac{d}{\tau} + k(m+1) + q) \frac{(\alpha s)^d}{d!}.$$

No entanto, para $\tau>1$, o somatório da f
gm de expressão (79) pode ser escrito em termos da função Wright hipergeométrica generalizada (WRIGHT, 1935) definida por

$${}_{p}\Psi_{q}\left[\begin{array}{c} (\alpha_{1},A_{1}),\cdots,(\alpha_{p},A_{p})\\ (\beta_{1},B_{1}),\cdots,(\beta_{q},B_{q}) \end{array};x\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(\alpha_{j}+A_{j}d)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma(\beta_{j}+B_{j}d)} \frac{x^{d}}{d!}.$$
(80)

A função definida em (80) existe se $1 + \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{j=1}^{p} A_j > 0$. Dessa forma, utilizando o resultado em (80) para reescrever o somatório da fgm (79), a fgm da distribuição GG é dada por:

$$M_{\alpha,\tau,k}(s) = \frac{1}{\Gamma(k)} {}_{1}\Psi_{0} \begin{bmatrix} (k,1/\tau) \\ - \end{bmatrix}; \alpha s$$
 (81)

Sabendo-se que a fgm da distribuição GG é dada pela equação (81), a fgm da distribuição GGGE é obtida da seguinte forma:

$$M(s) = \sum_{l,j,q,d=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \frac{w_{m,q}}{\Gamma[k(m+1)+q]} {}_{1}\Psi_{0} \begin{bmatrix} (k,1/\tau) \\ - \end{bmatrix}; \alpha s$$
(82)

4.2.3 Desvios médios

A quantidade de dispersão em uma população pode ser medida pela totalidade dos valores absolutos dos desvios em relação à média (no caso de uma distribuição simétrica) ou em relação à mediana (no caso de uma distribuição assimétrica). Se X é uma variável aleatória com distribuição GGGE com média $\mu'_1 = \mu = E(X)$ e mediana m_1 , então, o desvio médio em relação à média e o desvio médio em relação à mediana são definidos, respectivamente, por:

$$\delta_1 = \int_0^\infty |x - \mu_1'| f(x) dx$$
 e $\delta_2 = \int_0^\infty |x - m| f(x) dx$.

O desvio médio em relação à média e em relação à mediana podem ser simplificados como:

$$\delta_1 = 2\mu_1' F(\mu_1') - 2I(\mu_1') \in \delta_2 = \mu_1' - 2I(m_1), \tag{83}$$

em que $F(\mu'_1)$ é obtido por meio da expressão (59) e a função $I(m_1)$ é definida por:

$$I(m_1) = \int_0^{m_1} x f(x) dx.$$

Assim, considerando f(x) como sendo a função densidade de probabilidade definida em (66), tem-se

$$I(m_1) = \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} \int_0^{m_1} x g_{(\alpha,\tau,[k(m+1)+q])}(x) dx$$
$$= \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} J(\alpha,\tau,[k(m+1)+q],m_1). \tag{84}$$

Por outro lado, a integral definida em (84) é escrita da forma que se segue, considerando $u=x/\alpha,$

$$J(\alpha, \tau, [k(m+1) + q], m_1) = \frac{\tau \alpha}{\Gamma([k(m+1) + q])} \int_0^{m_1/\alpha} u^{\tau[k(m+1) + q]} \exp(-u^{\tau}) du.$$

Dessa forma, utilizando a mudança de variável $w=u^{\tau}$, a integral em $J(\alpha,\tau,[k(m+1)+q],m_1)$ é determinada em termos da função gama incompleta, ou seja,

$$J(\alpha, \tau, [k(m+1) + q], m_1) = \frac{\alpha}{\Gamma([k(m+1) + q])} \int_0^{(m_1/\alpha)^{\tau}} w^{[k(m+1) + q] + \tau^{-1} - 1} \exp(-w) dw$$
$$= \frac{\alpha}{\Gamma([k(m+1) + q])} \gamma([k(m+1) + q] + \tau^{-1}, (m_1/\alpha)^{\tau}).$$
(85)

Portanto, substituindo o resultado obtido em (85) na expressão (84), tem-se

$$I(m_1) = \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \frac{\alpha w_{m,q}}{\Gamma([k(m+1)+q])} \gamma(k(m+1)+q+\tau^{-1},(m_1/\alpha)^{\tau}).$$

O resultado é análogo para $I(\mu'_1)$.

4.2.4 Confiabilidade

Trabalhos que envolvem modelos de resistência-tensão possuem o interesse na estimação da confiabilidade denotada por $R = Pr(X_2 < X_1)$, em que X_1 e X_2 são variáveis aleatórias independentes que pertencem à mesma família univariada de distribuições. A forma algébrica para a confiabilidade tem sido elaborada para a maioria das distribuições padrões conhecidas. No entanto, existem ainda muitas outras distribuições (incluindo generalizações de distribuições conhecidas na literatura) para as quais a forma de R não foi proposta. Assim, a medida de confiabilidade da distribuição GGGE é determinada considerando a confiabilidade expressa por Silva; Ortega e Cordeiro (2010), ou seja,

$$R = \int_0^\infty f(x)F(x)dx,$$

em que f(x) é a função densidade de probabilidade expandida (66) e F(x) é a função de distribuição acumulada (59). Dessa forma, tem-se

$$R = \int_0^\infty \sum_{l,j,q=0}^\infty \sum_{m=0}^{\infty} w_{m,q} \frac{\tau}{\alpha \Gamma[k(m+1)+q]} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \times \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda} \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-\lambda} dx.$$

Utilizando a expansão (61) na quantidade $\left(1 - p\left\{1 - \gamma_1\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-\lambda}$, a confiabilidade é dada por

$$R = \int_{0}^{\infty} \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} \frac{\tau}{\alpha \Gamma[k(m+1)+q]} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \times \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda} \sum_{b=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\lambda+j)p^{b}}{\Gamma(\lambda)j!} \left\{1 - \gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^{b} dx.$$
(86)

Ainda, considerando a expansão binomial no termo $\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^b$, a expressão (86) é dada por

$$R = \int_{0}^{\infty} \sum_{l,j,q=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} w_{m,q} \frac{\tau}{\alpha \Gamma[k(m+1)+q]} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l,j=0}^{b} \frac{(-1)_{1}^{l} \Gamma(\lambda+j)}{\Gamma(\lambda)j!} \binom{b}{l_{1}} \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda+l_{1}} dx.$$

$$(87)$$

Utilizando a expansão (112) (Apêndice A) no termo $\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda + l_1}$ da expressão anterior tem-se

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda + l_1} = \sum_{c=0}^{\infty} \frac{(-1)^c (\lambda + l_1) \Gamma(\lambda + l_1)}{(\lambda + l_1 + c) \Gamma(\lambda + l_1 + c) c!} \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\}^c$$

Aplicando a expansão binomial na expresão anterior, obtém-se

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda + l_1} = \sum_{c=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{c} \frac{(-1)^{c+r} (\lambda + l_1) \Gamma(\lambda + l_1)}{(\lambda + l_1 + c) \Gamma(\lambda + l_1 + c) c!} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^r$$

Portanto, (87) pode ser escrita como

$$R = \sum_{l,j,q,b,c=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \sum_{l_1=0}^{b} \sum_{r=0}^{c} \frac{\tau(-1)^{l_1+c+r} p^b(\lambda+l_1) \Gamma(\lambda+j) \Gamma(\lambda+l_1) w_{m,q}}{\alpha(\lambda+l_1+c) \Gamma(\lambda) \Gamma[k(m+1)+q] \Gamma(\lambda+l_1+c) j! c!} \times \int_{0}^{\infty} \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau[k(m+1)+q]-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^r dx.$$
(88)

Dessa forma, subtituindo $w = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}$ em (88) tem-se

$$R = \sum_{l,j,q,b,c=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j+l} \sum_{l=0}^{b} \sum_{r=0}^{c} v(\alpha, \tau, k, p, \lambda) w_{m,q} I[k(m+1), q, r],$$

em que

$$v(\alpha, \tau, k, p, \lambda) = \frac{\tau(-1)^{l_1 + c + r} p^b(\lambda + l_1) \Gamma(\lambda + j) \Gamma(\lambda + l_1)}{\alpha(\lambda + l_1 + c) \Gamma(\lambda) \Gamma[k(m+1) + q] \Gamma(\lambda + l_1 + c) j! c!},$$

е

$$I[k(m+1), q, r] = \int_0^\infty w^{k(m+1)+q-1} \exp(-w) \gamma_1(k, w)^r dw.$$

Usando a função Lauricella do tipo A (definida na sub-seção 4.2.1), a última integral pode ser reescrita como

$$I[k(m+1),q,r] = [k(m+1)]^{-r}\Gamma[q+k(m+r+1)] \times F_A^{(l)}(q+k(m+r+1);k(m+1),\dots,k(m+1);k(m+1)+1,\dots,k(m+$$

4.2.5 Estatísticas de ordem

A função densidade de probabilidade $f_{i:n}(x)$ da i-ésima estatística de ordem, para $i=1,\ldots,n,$ das variáveis aleatórias $X_1,\ldots,X_n,$ é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) F(x)^{i-1} \{1 - F(x)\}^{n-i}, \tag{90}$$

em que $f(\cdot)$ é uma função densidade de probabilidade, $F(\cdot)$ é uma função de distribuição acumulada e $B(\cdot, \cdot)$ denota a função beta. Observa-se que a quantidade $[1 - F(x)]^{n-i}$ em (90) pode ser escrita na forma de uma expansão binomial da seguinte maneira:

$$[1 - F(x)]^{n-i} = \sum_{j_1=0}^{n-i} {n-i \choose j_1} (-1)^{j_1} F(x)^{j_1}.$$

Assim,

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) \sum_{j_1=0}^{n-i} {n-i \choose j_1} (-1)^{j_1} F(x)^{i+j_1-1}.$$

Porém, se F(x) é a função de distribuição acumulada da distribuição GGGE definida em (59), tem-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \left\{ 1 - \left[1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda} \right] \right\}^{i+j_1-1}. \tag{91}$$

Portanto, usando a expansão binomial na expressão (91), obtém-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} (-1)^{l_1} \binom{i+j_1-1}{l_1} \left\{ 1 - \left(\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right)^{\lambda} \right\}^{l_1}.$$

Novamente, usando a expansão binomial no termo $\left\{1 - \left(\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right)^{\lambda}\right\}^{l_1}$, tem-se

$$F(x)^{i+j_{1}-1} = \sum_{l_{1}=0}^{i+j_{1}-1} \sum_{s=0}^{l_{1}} (-1)^{l_{1}+s} \binom{i+j_{1}-1}{l_{1}} \binom{l_{1}}{s} \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda s} \times \left(1 - p\left\{1 - \gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-\lambda s}.$$
(92)

Aplicando a expansão (61) na quantidade $\left(1-p\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-\lambda s}$ da equação (92), tem-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} \sum_{s=0}^{l_1} \sum_{a=0}^{\infty} \frac{p^a(-1)^{l_1+s} \Gamma(\lambda s + a)}{\Gamma(\lambda s) a!} {i+j_1-1 \choose l_1} {l_1 \choose s} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau} \right]^{\lambda s} \times \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau} \right] \right\}^a.$$

$$(93)$$

Expandindo o termo $\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}^a$ da expressão (93), obtém-se

$$F(x)^{i+j_{1}-1} = \sum_{l_{1}=0}^{i+j_{1}-1} \sum_{s=0}^{l_{1}} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{a} \frac{p^{a}(-1)^{l_{1}+s+b} \Gamma(\lambda s + a)}{\Gamma(\lambda s) a!} \binom{i+j_{1}-1}{l_{1}} \binom{l_{1}}{s} \binom{a}{b} \times \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{b+\lambda s}.$$

Usando o resultado obtido na equação (107) (Apêndice A), tem-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} \sum_{s=0}^{l_1} \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{a} \frac{p^a(-1)^{l_1+s+b} \Gamma(\lambda s + a)}{\Gamma(\lambda s) a!} {i+j_1-1 \choose s} {a \choose b}$$

$$\times \sum_{r=0}^{\infty} s_r(\lambda) \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau} \right]^r,$$

em que

$$s_r(\lambda) = \sum_{c=r}^{\infty} (-1)^{c+r} {\lambda s + b \choose c} {c \choose r}.$$

Logo,

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} \sum_{s=0}^{l_1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{l_1+s} \binom{i+j_1-1}{l_1} \binom{l_1}{s} \omega_r(p,\lambda,b,s,a) \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^r,$$

em que

$$\omega_r(p,\lambda,b,s,a) = \sum_{a=0}^{l_1} \sum_{b=0}^{a} \frac{p^a(-1)^b \Gamma(\lambda s + a) s_r(\lambda)}{\Gamma(\lambda s) a!} \binom{a}{b}.$$

Para $r = 0, 1, \ldots$, tem-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{l_1=0}^{i+j_1-1} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{l_1} \binom{i+j_1-1}{l_1} \nu_r(p,\lambda,l_1,b,s,a) \, \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau} \right]^r,$$

em que os coeficientes $\nu_r(p,\lambda,l_1,b,s,a)$ são definidos por

$$\nu_r(p, \lambda, l_1, b, s, a) = \sum_{s=0}^{l_1} (-1)^s \binom{l_1}{s} \omega_r(p, \lambda, b, s, a).$$

Intercalando as somas, obtém-se

$$F(x)^{i+j_1-1} = \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{r,i+j_1-1}(\lambda) \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^r,$$

em que os coeficientes $\rho_{r,u}(\lambda)$ são calculados por

$$\rho_{r,u}(\lambda) = \sum_{l_1=0}^{u} (-1)^{l_1} \binom{u}{l_1} \sum_{a=0}^{l_1} \sum_{b=0}^{a} \sum_{s=0}^{l_1} \frac{p^a(-1)^{b+s} \Gamma(\lambda s + a) s_r(\lambda)}{\Gamma(\lambda s) a!} \binom{a}{b} \binom{l_1}{s}. \tag{94}$$

Para $r,u=0,1,\ldots$, a função densidade de probabilidade da estatística de ordem da distribuição GGGE é dada por

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} f(x) \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} {n-i \choose j_1} \sum_{r=0}^{\infty} \rho_{r, i+j_1-1}(\lambda) \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\tau} \right]^r.$$

Usando a densidade (66), $f_{i:n}(x)$ pode ser escrita como

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{l,j,q,r=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \sum_{j_1=0}^{n-i} (-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1} w_{m,q} \rho_{r,i+j_1-1}(\lambda) \times \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^r g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x).$$
(95)

Pela aplicação da expansão (112)(Apêndice A) na expressão (95), a função densidade $f_{i:n}(x)$ é expressa por

$$f_{i:n}(x) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{l,j,q,r,v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \sum_{j_1=0}^{n-i} \frac{(-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1}}{\Gamma(k)^r \alpha^{\tau(kr+v)}} c_{r,v} w_{m,q} \rho_{r,i+j_1-1}(\lambda) \times x^{\tau(kr+v)} g_{\alpha,\tau,k(m+1)+q}(x),$$

em que as quantidades $w_{m,q}$ e $\rho_{r,i+j-1}(\lambda)$ são definidas em (67) e (94), $c_{r,v}$ é calculado recursivamente por (111)(Apêndice A). Dessa forma, o s-ésimo momento de $X_{i:n}$ é obtido

a partir do $s+\tau(kr+v)$ -ésimo momento fracionário da distribuição $\mathrm{GG}(\alpha,\tau,k(m+1)+q)$. Logo,

$$E(X_{i:n}^{s}) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} \sum_{l,j,q,r,v=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l+j} \sum_{j_1=0}^{n-i} \frac{(-1)^{j_1} \binom{n-i}{j_1}}{\Gamma(k)^r \alpha^{\tau(kr+v)}} c_{r,v} w_{m,q} \rho_{r,i+j_1-1}(\lambda) \times \frac{\alpha^{s+\tau(kr+v)} \Gamma(k(m+1)+q+[s+\tau(kr+v)]/\tau)}{\Gamma(k(m+1)+q)}.$$

4.3 Estimação por máxima verossimilhança

Seja X uma variável aleatória com distribuição GGGE com vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \tau, k, p, \lambda)^{\top}$. Supondo que os dados consistam de n observações independentes $x_i = \min(X_i, C_i)$ para $i = 1, \dots, n$, o logaritmo da função de verossimilhança, considerando a distribuição GGGE, é dado por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = r \log \left[\frac{\lambda \tau (1-p)}{\alpha \Gamma(k)} \right] - \sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} + (\tau k - 1) \sum_{i \in F} \log \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)$$

$$+ (\lambda - 1) \sum_{i \in F} \log \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} - (\lambda + 1) \sum_{i \in F} \log \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)$$

$$+ \sum_{i \in C} \log \left(1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda} \right), \tag{96}$$

em que r é o número de falhas e F e C denotam o conjunto de observações não censuradas e censuradas, respectivamente.

As derivadas de primeira ordem de (96) em relação aos parâmetros em $\boldsymbol{\theta}$ são dadas por

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r}{\alpha} + \left(\frac{-r}{\alpha}\right)(\tau k - 1) + \frac{\tau}{\alpha} \sum_{i \in F} u_i + (\lambda - 1) \sum_{i \in F} \frac{(-\tau)u_i^k \exp(-u_i)}{\alpha \Gamma(k) \gamma_1(k, u_i)}$$
$$-(\lambda - 1) \sum_{i \in F} \frac{(-\tau)pg_i u_i^k \exp(-u_i)}{\alpha \Gamma(k)} + \sum_{i \in C} \frac{(-\lambda)[\gamma_1(k, u_i)]^{\lambda - 1}}{1 - \gamma_1(k, u_i)g_i}$$
$$\times \left\{ \frac{(-\tau)g_i u_i^k \exp(-u_i)}{\alpha \Gamma(k)} \left[\frac{1}{\gamma_1(k, u_i)} + p\gamma_1(k, u_i) \right] \right\},$$

$$U_{\tau}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{\tau} - \frac{1}{\tau} \sum_{i \in F} u_{i} \log(u_{i}) + \frac{k}{\tau} \sum_{i \in F} \log(u_{i}) + (\lambda - 1) \sum_{i \in F} \frac{u_{i}^{k} \log(u_{i}) \exp(-u_{i})}{\tau \Gamma(k) \gamma_{1}(k, u_{i})}$$
$$-(\lambda + 1) \sum_{i \in F} \frac{p g_{i} u_{i}^{k} \log(u_{i}) \exp(-u_{i})}{\tau \Gamma(k)} + \sum_{i \in F} \frac{(-\lambda) \gamma_{1}(k, u_{i})^{\lambda - 1}}{1 - [\gamma_{1}(k, u_{i}) g_{i}]^{\lambda}}$$
$$\times \left[\frac{u_{i}^{k} g_{i} \log(u_{i}) \exp(-u_{i})}{\tau \Gamma(k)} (1 - p g_{i}) \right],$$

$$U_{k}(\boldsymbol{\theta}) = -r\psi(k) + \sum_{i \in F} \log(u_{i}) + (\lambda - 1) \sum_{i \in F} -\psi(k) + \frac{w_{i}}{\gamma_{1}(k, u_{i})}$$

$$+p(\lambda + 1) \sum_{i \in F} g_{i}[-\psi(k)\gamma_{1}(k, u_{i}) + w_{i}]$$

$$-\lambda \sum_{i \in C} \frac{[g_{i}\gamma_{1}(k, u_{i})]^{\lambda - 1}}{1 - [g_{i}\gamma_{1}(k, u_{i})]^{\lambda}} \{g_{i}[-\psi(k)\gamma_{1}(k, u_{i}) + w_{i}][1 + pg_{i}\gamma_{1}(k, u_{i})]\},$$

$$U_p(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{r}{(1-p)} - (\lambda+1) \sum_{i \in F} g_i q_i + \sum_{i \in C} \frac{(-\lambda)[\gamma_1(k, u_i)]^{\lambda-1}}{1 - [\gamma_1(k, u_i)g_i]^{\lambda}} \gamma_1(k, u_i) (-q_i g_i^2)$$

е

$$U_{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{r}{\lambda} + \sum_{i \in F} \log[\gamma_{1}(k, u_{i})] - \sum_{i \in F} \log\{1 - p[1 - \gamma_{1}(k, u_{i})]\}$$
$$+ \sum_{i \in C} \frac{\log[\gamma_{1}(k, u_{i})g_{i}]}{1 - [\gamma_{1}(k, u_{i})g_{i}]^{\lambda}} \{-[\gamma_{1}(k, u_{i})g_{i}]^{\lambda}\},$$

em que

$$u_i = \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\tau}, \quad q_i = [-1 + \gamma_1(k, u_i)], \quad g_i = \frac{1}{\{1 - p[1 - \gamma_1(k, u_i)]\}}, \quad \omega_i = \frac{[\dot{\gamma}(k, u_i)]_k}{\Gamma(k)}$$

$$[\dot{\gamma}(k, u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 1),$$

 $\psi(.)$ é a função digama e $J(u_i, k+n-1, 1)$ é definido no Apêndice C.

Consequentemente, o estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ é obtido numericamente a partir das equações não lineares,

$$U_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = U_{\tau}(\boldsymbol{\theta}) = U_{k}(\boldsymbol{\theta}) = U_{p}(\boldsymbol{\theta}) = U_{\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = 0.$$

Devido à presença de censura, a realização de testes de hipóteses e construção de intervalos de confiança são baseados na teoria assintótica dos EMV. Assim, sob certas condições de regularidade, a distribuição assintótica dos EMV é dada por $N_5(\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada, obtida de

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} J_{\alpha,\alpha} & J_{\alpha,\tau} & J_{\alpha,k} & J_{\alpha,p} & J_{\alpha,\lambda} \\ J_{\tau,\alpha} & J_{\tau,\tau} & J_{\tau,k} & J_{\tau,p} & J_{\tau,\lambda} \\ J_{k,\alpha} & J_{k,\tau} & J_{k,k} & J_{k,p} & J_{k,\lambda} \\ J_{p,\alpha} & J_{p,\tau} & J_{p,k} & J_{p,p} & J_{p,\lambda} \\ J_{\lambda,\alpha} & J_{\lambda,\tau} & J_{\lambda,k} & J_{\lambda,p} & J_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix},$$

cujos elementos são apresentados no Apêndice C.

O teste da razão de verossimilhanças (TRV) é útil para comparar a distribuição GGGE com alguns de seus submodelos. Por exemplo, o teste de $H_0: \lambda = 1$ versus $H_1: H_0$ não é verdade, é equivalente a comparar a distribuição GGG com a distribuição GGGE para o qual a estatística w é dada por

$$w = 2 \left[\ell(\widehat{\alpha}, \widehat{\tau}, \widehat{k}, \widehat{p}, \widehat{\lambda}) - \ell(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\tau}, \widetilde{k}, \widetilde{p}, 1) \right],$$

em que $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\tau}$, \widehat{k} , \widehat{p} e $\widehat{\lambda}$ são os estimadores de máxima verossimilhança sob H_1 e $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\tau}$, \widetilde{k} e \widetilde{p} são os estimadores sob H_0 .

4.4 Análise bayesiana

Considere a distribuição GGGE (60) e a função de verossimilhança (96) para os parâmetros α , τ , k, p e λ . Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte função densidade conjunta a priori

$$\pi(\alpha, \tau, k, p, \lambda) \propto \pi(\alpha) \times \pi(\tau) \times \pi(k) \times \pi(p) \times \pi(\lambda),$$

em que $\alpha \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $\tau \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $k \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $p \sim \text{Be}(a, b)$ e $\lambda \sim \Gamma(a_4, b_4)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} \upsilon^{a_i - 1} \exp(-\upsilon b_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que v>0, $a_i>0$ e $b_i>0$. Be(a,b) denota a distribuição beta com média $\frac{a}{a+b}$, variância $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(v; a, b) = \frac{1}{B(a, b)} v^{a-1} (1 - v)^{b-1},$$

em que $v \in (0,1)$, a > 0 e b > 0. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros α , τ , k, p e λ , a distribuição conjunta a posteriori para α , τ , k, p e λ é dada por:

$$\pi(\alpha, \tau, k, p, \lambda | x) \propto \left[\frac{\lambda \tau (1 - p)}{\alpha^{\tau k} \Gamma(k)} \right]^{\tau} \exp \left[-\sum_{i \in F} \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right]$$

$$\times \prod_{i \in F} x_i^{\tau k - 1} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda - 1} \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-(\lambda + 1)}$$

$$\times \prod_{i \in C} 1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda}$$

$$\times \pi(\alpha, \tau, k, p, \lambda).$$

$$(97)$$

As densidades marginais a posteriori dos parâmetros α , τ , k, p e λ não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade conjuta a posteriori (97) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hastings, descrito na sub-seção 2.7.2.

O algoritmo Metropolis-Hastings permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais a posteriori. Assim, para o uso de tal algoritmo consideram-se as seguintes condicionais completas a posteriori para os parâmetros α , τ , k, p e λ :

$$\pi(\alpha|x,\tau,k,p,\lambda) \propto \left(\frac{1}{\alpha^{\tau k}}\right)^{r} \exp\left[-\sum_{i \in F} \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \times \prod_{i \in F} \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} \left(1-p\left\{1-\gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)} \times \prod_{i \in C} 1 - \left\{\gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1-p\left\{1-\gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}^{\lambda} \times \pi(\alpha),$$

$$\pi(\tau|x,\alpha,k,p,\lambda) \propto (\tau)^r \exp\left[-\sum_{i\in F} \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\tau\right] \times \prod_{i\in F} x_i^{\tau k} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\tau\right]^{\lambda-1} \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)} \times \prod_{i\in C} 1 - \left\{\gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\tau\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^\tau\right]\right\}\right)^{-1}\right\}^{\lambda} \times \pi(\tau),$$

$$\pi(k|x,\alpha,\tau,p,\lambda) \propto \left[\frac{1}{\alpha^{\tau k}\Gamma(k)}\right]^{r} \times \prod_{i \in F} x_{i}^{\tau k} \gamma_{1} \left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]^{\lambda-1} \left(1 - p\left\{1 - \gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)} \times \prod_{i \in C} 1 - \left\{\gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right] \left(1 - p\left\{1 - \gamma_{1}\left[k, \left(\frac{x_{i}}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}^{\lambda} \times \pi(k),$$

$$\pi(p|x,\alpha,\tau,k,\lambda) \propto (1-p)^r \prod_{i\in F} \left(1-p\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)} \times \prod_{i\in C} 1-\left\{\gamma_1\left[k,\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\left(1-p\left\{1-\gamma_1\left[k,\left(\frac{x_i}{\alpha}\right)^{\tau}\right]\right\}\right)^{-1}\right\}^{\lambda} \times \pi(p)$$

e

$$\pi(\lambda|x,\alpha,\tau,k,p) \propto (\lambda)^r \prod_{i \in F} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\tau \right]^{\lambda} \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\tau \right] \right\} \right)^{-\lambda} \times \prod_{i \in C} 1 - \left\{ \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\tau \right] \left(1 - p \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{x_i}{\alpha} \right)^\tau \right] \right\} \right)^{-1} \right\}^{\lambda} \times \pi(\lambda).$$

Para as análises descritivas para os parâmetros do modelo GGGE foi utilizado o software estatístico R (R Core Team, 2011), pacote BOA (Bayesian Output Analysis).

4.5 Distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada

Seja X uma variável aleatória com distribuição GGGE, com função densidade de probabilidade representada pela equação (60). Considere a transformação $Y = \log(X)$ e as reparametrizações $k = q^{-2}$, $\tau = (\sigma\sqrt{k})^{-1}$ e $\alpha = \exp\{\mu - \log(k)(\tau)^{-1}\}$. Nesse caso, por meio do método do jacobiano, a função densidade de probabilidade de Y pode ser escrita como:

$$f(y) = \frac{\lambda q(1-p)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})} \exp\left\{q^{-1}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - q^{-2}\exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\} \times \left(\gamma_1\left\{q^{-2}, q^{-2}\exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\right)^{\lambda-1} \times \left\{1 - p\left(1 - \gamma_1\left\{q^{-2}, q^{-2}\exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\right)\right\}^{-(\lambda+1)},$$
(98)

em que $-\infty < y < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$, q > 0, $p \in (0,1)$ e $\lambda > 0$. Para $\lambda = 1$ e $\lambda = q = 1$, obtêm-se as distribuições log-gama generalizada geométrica e log-Weibull geométrica, respectivamente. A variável transformada com função densidade de probabilidade (98) é denominada log-gama generalizada geométrica exponenciada (LGGGE) e segue a notação, $Y \sim \text{LGGGE}(\mu, \sigma, q, p, \lambda)$, em que $\mu \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de locação, $\sigma > 0$ é o parâmetro de escala e q, p e λ são parâmetros de forma. Assim, se

$$X \sim \text{GGGE}(\alpha, \tau, k, p, \lambda)$$
, então $Y = \log(X) \sim \text{LGGGE}(\mu, \sigma, q, p, \lambda)$.

Assumindo $\mu=0$ e $\sigma=1$, os gráficos da função densidade de probabilidade (98), para valores selecionados de λ e φ , quando $q<0,\ q>0$ e $q\to0$, podem ser observados na Figura 22.

A função de sobrevivência para a distribuição LGGGE é expressa, considerando o seguinte caso:

$$\begin{split} S(y) &= 1 - F(y) = P(Y > y) = P(\mu + \sigma Z > y) = P(Z > z) \\ &= \frac{\lambda q (1 - p) (q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma \Gamma(q^{-2})} \int_z^{\infty} \exp \left\{ q^{-1} u - q^{-2} \exp(qu) \right\} \left\{ \gamma_1 \left[q^{-2}, q^{-2} \exp(qu) \right] \right\}^{\lambda - 1} \\ &\times \left\{ 1 - p (1 - \gamma_1 \{ q^{-2}, q^{-2} \exp(qu) \}) \right\}^{-(\lambda - 1)} du. \end{split}$$

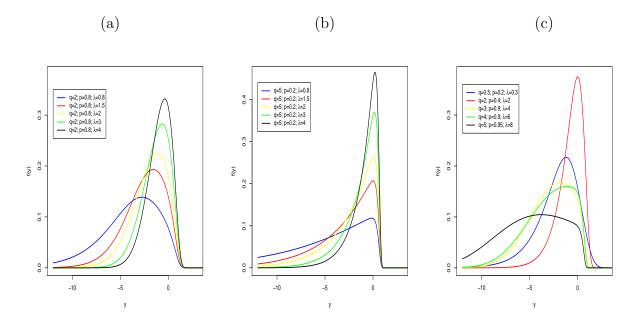


Figura 22 - Gráfico da função densidade da distribuição LGGGE: (a) Para alguns valores de λ . (b) Para alguns valores de λ . (c) Para alguns valores de p, q e λ

Portanto, sabendo que a integral da função de sobrevivência é uma função conhecida, tem-se:

$$S(y) = 1 - \left(\gamma_1 \left\{ q^{-2}, q^{-2} \exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\} \left\{1 - p\left(1 - \gamma_1 \left\{q^{-2}, q^{-2} \exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\right)\right\}^{-1}\right)^{\lambda}.(99)$$

4.5.1 Momentos

Se $Y \sim \text{LGGGE}(\mu, \sigma, q, p, \lambda)$, o r-ésimo momento, denotado por $\mu'_r = E(Y^r)$, da distribuição LGGGE é obtido, da seguinte forma:

$$\mu_r' = E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r \frac{\lambda q (1-p) (q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma \Gamma(q^{-2})} \exp\left\{q^{-1} \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) - q^{-2} \exp\left[q \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\} \times \left(\gamma_1 \left\{q^{-2}, q^{-2} \exp\left[q \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\right)^{\lambda-1} \times \left\{1 - p \left(1 - \gamma_1 \left\{q^{-2}, q^{-2} \exp\left[q \left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]\right\}\right)\right\}^{-(\lambda+1)} dy.$$

Considerando a mudança de variável $x=q^{-2}\exp\left[q\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]$ na equação anterior, resulta em,

$$\mu'_{r} = \int_{0}^{\infty} \frac{\lambda(1-p)}{\Gamma(q^{-2})} \left\{ \frac{\sigma}{q} [\log(x) + 2\log(q)] + \mu \right\}^{r} x^{q^{-2}-1} \exp(-x) \gamma_{1} (q^{-2}, x)^{\lambda-1} \times \left\{ 1 - p \left[1 - \gamma_{1} (q^{-2}, x) \right] \right\}^{-(\lambda+1)} dx.$$

obtém-se:

Por outro lado, escrevendo o termo $\{1 - p [1 - \gamma_1 (q^{-2}, x)]\}^{-(\lambda+1)}$, na forma da expansão definida em (61), obtém-se:

$$\mu_r' = \int_0^\infty \frac{\lambda(1-p)}{\Gamma(q^{-2})} \left\{ \frac{\sigma}{q} [\log(x) + 2\log(q)] + \mu \right\}^r x^{q^{-2}-1} \exp(-x) \gamma_1 \left(q^{-2}, x\right)^{\lambda-1}$$

$$\times \sum_{i=0}^\infty \frac{(\lambda+i)\Gamma(\lambda+i)p^i}{\lambda\Gamma(\lambda)i!} \left[1 - \gamma_1 \left(q^{-2}, x\right) \right]^i dx.$$
(100)

Escrevendo o termo $[1-\gamma_1\,(q^{-2},x)]^i$, na forma da expansão binomial, a equação (100), pode ser escrita como

$$\mu_r' = \int_0^\infty \frac{\lambda(1-p)}{\Gamma(q^{-2})} \left\{ \frac{\sigma}{q} [\log(x) + 2\log(q)] + \mu \right\}^r x^{q^{-2}-1} \exp(-x)$$

$$\times \sum_{i=0}^\infty \sum_{l=0}^i \frac{(-1)^l (\lambda+i) \Gamma(\lambda+i) p^i}{\lambda \Gamma(\lambda) i!} \binom{i}{l} \gamma_1 \left(q^{-2}, x\right)^{\lambda+l-1} dx.$$

Usando a expansão (107) do Apêndice A, para $\gamma_1(q^{-2}, x)^{\lambda+l-1}$, encontra-se:

$$\mu_r' = \int_0^\infty \frac{\lambda(1-p)}{\Gamma(q^{-2})} \left\{ \frac{\sigma}{q} [\log(x) + 2\log(q)] + \mu \right\}^r x^{q^{-2}-1} \exp(-x)$$

$$\times \sum_{i,m=0}^\infty \sum_{l=0}^i \frac{(-1)^l (\lambda+i) \Gamma(\lambda+i) p^i s_m(\lambda)}{\lambda \Gamma(\lambda) i!} \binom{i}{l} \gamma_1 \left(q^{-2}, x\right)^m dx.$$

Aplicando a expansão (112) do Apêndice A, para $\gamma_1 (q^{-2}, x)^m$, obtém-se:

$$\mu_r' = \int_0^\infty \frac{\lambda(1-p)}{\Gamma(q^{-2})} \left\{ \frac{\sigma}{q} [\log(x) + 2\log(q)] + \mu \right\}^r x^{q^{-2}-1} \exp(-x)$$

$$\times \sum_{i,m,d=0}^\infty \sum_{l=0}^i \frac{(-1)^l (\lambda+i) \Gamma(\lambda+i) p^i s_m(\lambda) c_{m,d}}{\lambda \Gamma(\lambda) \Gamma(q^{-2})^m i!} \binom{i}{l} x^{q^{-2}m+d} dx.$$

Por outro lado, usando o binômio de Newton em $\left\{\frac{\sigma}{q}[\log(x) + 2\log(q)] + \mu\right\}^r$

$$\mu_r' = \sum_{i,m,d=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{i} \sum_{c=0}^{r} \frac{(1-p)(\lambda+i)\Gamma(\lambda+i)(-1)^l p^i s_m(\lambda) c_{m,d}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(q^{-2})^{m+1} i!} {i \choose l} {r \choose c} \left[\frac{2\sigma}{q} \log(q) + \mu \right]^{r-c} \times \int_0^{\infty} \left(\frac{\sigma}{q} \right)^c \log(x) \exp(-x) x^{q^{-2}(m+1)+d-1} dx.$$

$$(101)$$

Observe que a integral da expressão em (101) é obtida em Prudnikov; Brychkov e Marichev (1986, volume 1, seção 2.6.21, integral 1). Portanto, os momentos da distribuição LGGGE podem ser escritos como:

$$\mu_r' = \sum_{i,m,d=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{i} \sum_{c=0}^{r} \frac{(1-p)(\lambda+i)\Gamma(\lambda+i)(-1)^l p^i s_m(\lambda) c_{m,d}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(q^{-2})^{m+1} i!} \binom{i}{l} \binom{r}{c} \left[\frac{2\sigma}{q} \log(q) + \mu \right]^{r-c} \times \left[\dot{\Gamma}(q^{-2}(m+1)+d) \right]^{\left(\frac{\sigma}{q}\right)^c},$$

em que
$$\dot{\Gamma}(w) = \frac{\partial \Gamma(w)}{\partial w}$$
.

Representações gráficas da assimetria e da curtose da distribuição LGGGE como função do parâmetro λ , para alguns valores de q e p com $\mu=0$ e $\sigma=1$, são dadas na Figura 23. Verifica-se, a partir desses gráficos, que a distribuição LGGGE comporta diversos valores para a assimetria e curtose.

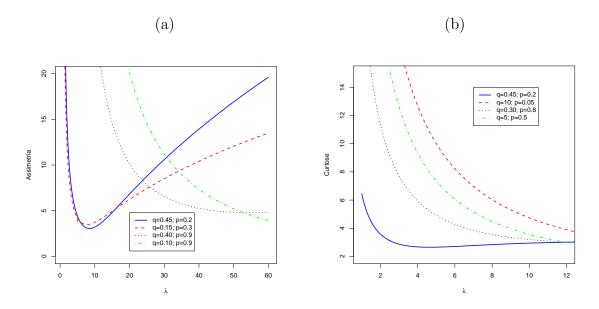


Figura 23 - Assimetria e curtose da distribuição LGGGE como função do parâmetro λ

4.5.2 Modelo de regressão para a distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada

Em muitas situações práticas, o tempo de vida é afetado por variáveis explanatórias, como nível de colesterol, pressão arterial, peso, entre outras. Os modelos de regressão são amplamente utilizados para estimar a função de sobrevivência para dados censurados. O modelo de regressão que fornece um bom ajuste para os dados de tempo de vida tende a produzir estimativas mais precisas para as quantidades de interesse. O modelo de locação e escala considerando Y dado x, tem distribuição LGGGE com função densidade de probabilidade dada pela expressão (98), e pode ser representado por:

$$Y_i = \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta} + \sigma Z_i, \quad i = 1, \dots, n,$$
(102)

em que $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^T$ é um vetor de parâmetros desconhecidos associado a cada covariável, $\mathbf{x}_i^T = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ é o vetor de covariáveis e Z_i é o erro aleatório.

A distribuição da variável aleatória Z pode ser obtida, utilizando-se a transformação de variáveis, que nesse caso é dada por:

$$f(z) = \frac{\lambda q(1-p)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})} \exp\left[q^{-1}z - q^{-2}\exp(qz)\right] \gamma_1 \left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz)\right]^{\lambda-1} \times \left(1 - p\left\{1 - \gamma_1 \left[q^{-2}, q^{-2}\exp(qz)\right]\right\}\right)^{-(\lambda+1)}$$
(103)

em que $z = \frac{y - \mathbf{x}^T \boldsymbol{\beta}}{\sigma}$.

O modelo LGGGE contém como casos particulares os seguintes modelos de regressão: para $\lambda=1$, obtém-se o modelo de regressão log-gama generalizada geométrica (LGGG); para q=1, tem-se o modelo de regressão log-Weibull geométrica exponenciada (LWGE) e o caso, em que $\lambda=q=1$, leva ao modelo de regressão log-Weibull geométrica (LWG).

4.5.3 Estimação por máxima verossimilhança

Considere uma amostra $(y_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (y_n, \mathbf{x}_n)$ de n observações independentes, em que a variável resposta é definida por $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$, e seja F o conjunto do logaritmo dos tempos de vida e C o conjunto do logaritmo dos tempos de censura. Assim, o logaritmo da função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (q, p, \lambda, \sigma, \boldsymbol{\beta}^T)^T$ para o modelo (102) tem a forma $l(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in F} l_i(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i \in C} l_i^{(c)}(\boldsymbol{\theta})$, em que $l_i(\boldsymbol{\theta}) = \log[f(y_i)], \ l_i^{(c)}(\boldsymbol{\theta}) = \log[S(y_i)], \ f(y_i)$ é a função densidade de probabilidade (98) e $S(y_i)$ é a função de sobrevivência (99). Dessa forma, o logaritmo da função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta}$ é:

$$l(\boldsymbol{\theta}) = v \log \left[\frac{\lambda q (1-p)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma \Gamma(q^{-2})} \right] + q^{-2} \sum_{i \in F} z_i - q^{-2} \sum_{i \in F} \exp(qz_i)$$

$$+ (\lambda - 1) \sum_{i \in F} \log \{ \gamma_1 [q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)] \}$$

$$- (\lambda + 1) \sum_{i \in F} \log (1 - p\{1 - \gamma_1 [q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)] \})$$

$$+ \sum_{i \in C} \log (1 - \{ \gamma_1 [q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)] (1 - p\{1 - \gamma_1 [q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)] \})^{-1} \}^{\lambda}), (104)$$

em que v é o número de observações não censuradas e $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T \boldsymbol{\beta})/\sigma$. As estimativas de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ podem ser obtidas pela maximização do logaritmo

da função de verossimilhança (104). Se $\hat{z}_i = (y_i - \mathbf{x}_i^T \hat{\boldsymbol{\beta}})/\hat{\sigma}$, o ajuste do modelo LGGGE é obtido por meio da função de sobrevivência estimada para y_i

$$\hat{S}(y_i; \hat{\lambda}, \hat{\varphi}, \hat{\sigma}, \hat{q}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^T) = 1 - \{ \gamma_1[q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)] (1 - p\{1 - \gamma_1[q^{-2}, q^{-2} \exp(qz_i)]\})^{-1} \}^{\lambda}.$$

Os intervalos de confiança e testes de hipótese para os parâmetros do modelo são realizados segundo como é descrito na sub-seção 2.7.1. Sobre certas condições de regularidade, a distribuição assintótica de $(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})$ é a normal multivariada $N_{p+4}(0, \ddot{L}(\boldsymbol{\theta})^{-1})$, em que $\ddot{L}(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação observada.

O teste da razão de verossimilhanças (TRV) é útil para comparar a distribuição LGGGE com alguns de seus submodelos. Considera-se a partição $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1^\top, \boldsymbol{\theta}_2^\top)^\top$, em que $\boldsymbol{\theta}_1$ é um subconjunto de parâmetros de interesse e $\boldsymbol{\theta}_2$ é um subconjunto de parâmetros restantes. A estatística w para testar a hipótese nula $H_0: \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ versus a hipótese alternativa $H_1: \boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_1^{(0)}$ é dada por $w = 2\{\ell(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - \ell(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})\}$, em que $\widetilde{\boldsymbol{\theta}}$ e $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ são as estimativas sob as hipóteses nula e alternativa, respectivamente. A estatística w é assintoticamente distribuida (para $n \to \infty$) como χ_k^2 , em que k é a dimensão do subconjunto de parâmetros $\boldsymbol{\theta}_1$ de interesse.

4.5.4 Análise bayesiana

Considere a distribuição LGGGE (103) e a função de verossimilhança (104) para os parâmetros q, p, λ , σ e β . Para uma análise bayesiana, assume-se a seguinte densidade conjunta *a priori*, dada por:

$$\pi(q, p, \lambda, \sigma, \beta) \propto \pi(q) \times \pi(p) \times \pi(\lambda) \times \pi(\sigma) \times \pi(\beta),$$

em que $q \sim \Gamma(a_1, b_1)$, $\lambda \sim \Gamma(a_2, b_2)$, $\sigma \sim \Gamma(a_3, b_3)$, $p \sim \text{Be}(a, b)$ e $\beta_s \sim N(\mu_s, \sigma_s^2)$, sendo $\Gamma(a_i, b_i)$ a distribuição gama com média a_i/b_i , variância a_i/b_i^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(\upsilon; a_i, b_i) = \frac{b_i^{a_i} \upsilon^{a_i - 1} \exp(-\upsilon b_i)}{\Gamma(a_i)},$$

em que v > 0, $a_i > 0$ e $b_i > 0$, Be(a, b) denota a distribuição beta com média $\frac{a}{a+b}$, variância $\frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$ e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(v; a, b) = \frac{1}{\text{Be}(a, b)} v^{a-1} (1 - v)^{b-1},$$

em que $v \in (0,1)$, a > 0 e b > 0. E $N(\mu_s, \sigma_s^2)$ denota a distribuição normal com média μ_s , variância σ_s^2 e função densidade de probabilidade dada por:

$$f(x; \mu_s, \sigma_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu_s)^2}{2\sigma_s^2}\right],$$

em que $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Todos os hiperparâmetros são especificados. Assumindo independência entre os parâmetros q, p, λ, σ e β , a distribuição conjunta *a posteriori* para q, p, λ, σ e β é dada por:

$$\pi(q, p, \lambda, \sigma, \boldsymbol{\beta}|y) \propto \left[\frac{\lambda q(1-p)(q^{-2})^{q^{-2}}}{\sigma\Gamma(q^{-2})}\right]^{v} \exp\left[q^{-1}\sum_{i\in F}\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]$$

$$\times \exp\left(-q^{-2}\sum_{i\in F}\exp\left\{q\left[\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)$$

$$\times \prod_{i\in F}\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2}\exp\left\{q\left[\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)^{\lambda-1}$$

$$\times \prod_{i\in F}\left\{1-p\left[1-\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2}\exp\left\{q\left[\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda+1)}$$

$$\times \prod_{i\in C}\left(1-\left\{\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2}\exp\left\{q\left[\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda+1)}$$

$$\times \left\{1-p\left[1-\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2}\exp\left\{q\left[\frac{(y_{i}-x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{\lambda}\right)$$

$$\times \pi(q, p, \lambda, \sigma, \boldsymbol{\beta}). \tag{105}$$

As densidades marginais a posteriori dos parâmetros q, p, λ , σ e β não são facilmente obtidas. Isso porque a integração da densidade a posteriori conjunta (105) é muito complexa. Uma alternativa para situações desse tipo é o uso do algoritmo Metropolis-Hastings, descrito na sub-seção 2.7.2.

O algoritmo Metropolis-Hastings permite simular observações de distribuições a partir das densidades condicionais *a posteriori*. Assim, para o uso de tal algoritmo, consideram-se as seguintes condicionais completas *a posteriori* para os parâmetros

 $q, p, \lambda, \sigma \in \boldsymbol{\beta}$:

$$\pi(q|y, p, \lambda, \sigma, \boldsymbol{\beta}) \propto \left[\frac{q(q^{-2})^{q^{-2}}}{\Gamma(q^{-2})} \right]^{v} \exp\left[q^{-1} \sum_{i \in F} \frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]$$

$$\times \exp\left(-q^{-2} \sum_{i \in F} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)$$

$$\times \prod_{i \in F} \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)^{\lambda - 1}$$

$$\times \prod_{i \in F} \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda + 1)}$$

$$\times \prod_{i \in C} \left(1 - \left\{\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]$$

$$\times \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T} \boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{\lambda}\right) \times \pi(q),$$

$$\pi(p|y,q,\lambda,\sigma,\boldsymbol{\beta}) \propto (1-p)^{\upsilon} \prod_{i\in F} \left\{ 1 - p \left[1 - \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{ q \left[\frac{(y_i - x_i^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right] \right\} \right) \right] \right\}^{-(\lambda+1)}$$

$$\times \prod_{i\in C} \left(1 - \left\{ \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{ q \left[\frac{(y_i - x_i^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right] \right\} \right) \right]$$

$$\times \left\{ 1 - p \left[1 - \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{ q \left[\frac{(y_i - x_i^T \boldsymbol{\beta})}{\sigma} \right] \right\} \right) \right] \right\}^{-1} \right\}^{\lambda} \right) \times \pi(p),$$

$$\pi(\lambda|y,q,p,\sigma,\boldsymbol{\beta}) \propto (\lambda)^{v} \prod_{i \in F} \gamma_{1} \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)^{\lambda}$$

$$\times \prod_{i \in F} \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-\lambda)}$$

$$\times \prod_{i \in C} \left(1 - \left\{\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]$$

$$\times \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{\lambda}\right) \times \pi(\lambda),$$

$$\pi(\sigma|y,q,p,\lambda,\boldsymbol{\beta}) \propto \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{v} \exp\left[q^{-1} \sum_{i \in F} \frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]$$

$$\times \exp\left(-q^{-2} \sum_{i \in F} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)$$

$$\times \prod_{i \in F} \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)^{\lambda - 1}$$

$$\times \prod_{i \in F} \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda + 1)}$$

$$\times \prod_{i \in C} \left(1 - \left\{\gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda + 1)}$$

$$\times \left\{1 - p\left[1 - \gamma_{1}\left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_{i} - x_{i}^{T}\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{\lambda} \right) \times \pi(\sigma)$$

е

$$\pi(\boldsymbol{\beta}|y,q,p,\lambda,\sigma) \propto \exp\left[q^{-1}\sum_{i\in F} \frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right] \exp\left(-q^{-2}\sum_{i\in F} \exp\left\{q\left[\frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)$$

$$\times \prod_{i\in F} \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)^{\lambda - 1}$$

$$\times \prod_{i\in F} \left\{1 - p\left[1 - \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-(\lambda + 1)}$$

$$\times \prod_{i\in C} \left(1 - \left\{\gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right\}\right)$$

$$\times \left\{1 - p\left[1 - \gamma_1 \left(q^{-2}, q^{-2} \exp\left\{q\left[\frac{(y_i - x_i^T\boldsymbol{\beta})}{\sigma}\right]\right\}\right)\right]\right\}^{-1}\right\}^{\lambda}\right) \times \pi(\boldsymbol{\beta}).$$

4.6 Aplicação

Impulsionado pelo desenvolvimento tecnológico, o crescimento econômico do Japão tornou-se atraente para os imigrantes. A emigração nipo-brasileira, iniciada em 1985, intensificou-se após junho de 1990 e, atualmente, a comunidade brasileira no Japão é a terceira maior comunidade de estrangeiros, com 312.979 pessoas, superada apenas pelos coreanos e pelos chineses (KAWAMURA, 1999).

Nos últimos anos a crise econômica mundial afetou severamente o Japão e repercutiu na inserção dos imigrantes no mercado de trabalho, levando a uma necessidade de reorientação profissional como condição para permanência no Japão, diferindo do trabalho inicial que dispensava maiores qualificações. De modo particular, o ingresso nos postos de trabalho em escolas brasileiras ou japonesas implica a qualificação ou requalificação profissional de muitos desses imigrantes.

A partir de uma solicitação do governo japonês ao governo brasileiro em 2008, a Universidade Federal do Mato Grosso (UFMT), por meio do programa Universidade Aberta do Brasil (UAB) em convênio com a Universidade Tokai, sediada na cidade de Hiratsu, no Japão, oferece um curso de Licenciatura em Pedagogia - Modalidade a Distância. O curso, que tem a duração de 4 anos, iniciou-se em 2009 e previa qualificar 300 professores brasileiros que atuam no Japão, em escolas brasileiras e japonesas.

Assim, este estudo busca identificar os fatores que influenciam no tempo de permanência no Japão dos alunos do curso de pedagogia oferecido pela UFMT/Tokai, pois sabe-se que o tempo de permanência pode ser afetado por variáveis regressoras ou covariáveis, sendo essas de suma importância para o modelo utilizado nesta análise.

Os dados foram obtidos por meio de uma pesquisa eletrônica (e-survey) (BABBIE, 1999), que buscou obter características, ações ou opiniões do grupo de alunos utilizando a internet como ferramenta. A pesquisa foi realizada no primeiro semestre de 2010, por meio de um sítio reservado apenas para acesso dos acadêmicos, em que foram obtidos 246 questionários. Desses, apenas 150 foram utilizados para análise, pois havia alunos de outras nacionalidades. Foi considerado como variável de estudo o tempo de permanência no Japão, sendo esse contado a partir da chegada pela primeira vez até o presente momento; foram censurados alunos que tenham retornado para o Brasil ao menos uma vez.

A curva TTT, definida na seção 2.1.1, para o conjunto de dados de tempo de permanência no Japão encontra-se na Figura 24 e indica uma função risco crescente. Assim, para analisar esse conjunto de dados, foi considerada a distribuição GGGE e algumas distribuições conhecidas.

Na Tabela 5, podem ser vistos as EMVs (e os correspondentes erros-padrão que estão entre parênteses) dos parâmetros e os valores das estatísticas de alguns modelos: gama generalizada geométrica exponenciada (GGGE), gama generalizada geométrica (GGG) e Weibull geométrica (WG). Esses resultados indicam que o modelo GGGE tem o menor valor de AIC, BIC e CAIC entre os modelos ajustados. Pode-se, portanto, ser escolhido como o modelo mais adequado. Os códigos na linguagem SAS são apresentados no Apêndice E.

Para ilustrar a utilização da distribuição GGGE para discriminação de modelos, comparou-se a distribuição GGGE com alguns de seus submodelos por meio do

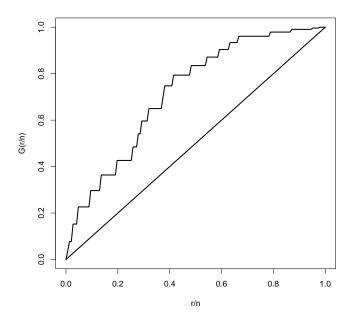


Figura 24 - Curva TTT para os dados de tempo de permanência no Japão

Tabela 5 - EMVs dos parâmetros dos modelos GGGE, GGG e WG para os dados de tempo de permanência no Japão, correspondentes erros-padrão (entre parênteses) e valores das estatísticas AIC, BIC e CAIC

Modelo	α	au	k	p	λ	AIC	BIC	CAIC
GGGE	14,8196	5,2993	14,5321	0,9681	0.0175	929, 4	944, 5	929,8
	(0,5031)	(0, 1737)	(0,5796)	(0,0708)	(0,0014)			
GGG	198, 95	3,9310	0,6568	0,9992	1	1018,6	1030,7	1018, 9
	(0,0181)	(1,4160)	(0, 2393)	(0,0004)	(-)			
WG	199, 14	2,5904	1	0,9993	1	1016, 7	1025, 8	1016, 9
	(0,0001)	(0, 1803)	(-)	(0,0003)	(-)			

TRV, como é apresentado na Tabela 6. Os resultados nessa tabela sugerem que o modelo GGGE produz um ajuste mais adequado a esses dados quando comparado com as outras duas distribuições.

O gráfico da Figura 25 ilustra a função de sobrevivência empírica obtida a partir do estimador não-paramétrico de Kaplan-Meier e as funções de sobrevivência estimadas das distribuições GGGE, GGG e WG, para os dados de tempo de permanência no Japão. Nota-se que a distribuição GGGE proporciona um ajuste satisfatório.

Modelo	Hipóteses	Estatística w	valor p
GGGE vs GGG	$H_0: \lambda = 1 \text{ vs } H_1: H_0 \text{ \'e falsa}$	91,2	< 0,0001
GGGE vs WG	$H_0: \lambda = k = 1 \text{ vs } H_1: H_0 \text{ \'e falsa}$	91,3	< 0,0001

Tabela 6 - TRV para os dados de tempo de permanência no Japão

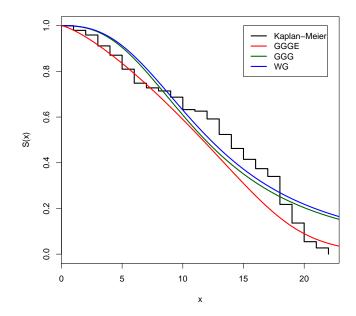


Figura 25 - Função de sobrevivência estimadas para os ajustes das distribuições GGGE, GGG e WG com sobrevivência empírica para os dados de tempo de permanência no Japão

Considerando agora uma análise bayesiana, foram adotadas as seguintes distribuições a priori pouco informativas: $\alpha \sim \Gamma(0,01;0,01), \ \tau \sim \Gamma(0,01;0,01), \ k \sim \Gamma(0,01;0,01), \ p \sim \text{Be}(0,5;0,5)$ e $\lambda \sim \Gamma(0,01;0,01)$.

Dessa forma, foram geradas duas cadeias paralelas e independentes com tamanho 100.000 para cada parâmetro usando o algoritmo de Metropolis-Hasting, desconsiderando as primeiras 10.000 iterações para eliminar o efeito dos valores iniciais. Além disso, considerou-se espaçamento de tamanho 10, para evitar problemas de correlação, obtendo-se uma amostra de tamanho 9.000. Para monitorar a convergência das amostras foi usado o fator de redução da escala \hat{R} , desenvolvido por Gelman e Rubin (1992). A Tabela 7 apresenta os sumários a posteriori para os parâmetros do modelo GGGE, além

de mostrar os valores do fator de redução da escala.

Tabela 7 - Sumário *a posteriori* dos parâmetros do modelo GGGE para os dados de tempo de permanência no Japão

Parâmetro	Média	Desvio padrão	HPD (95%)	\hat{R}
α	14,8206	0,0508	(14,7247;14,9213)	0,9996
au	5,3027	0,0007	(5,3016;5,3039)	1,0118
k	14,5385	0,0502	(14, 4422; 14, 6379)	0,9999
p	0,9671	0,0091	(0,9491;0,9842)	1,0007
λ	0,0173	0,0008	(0,0157;0,0190)	0,9997

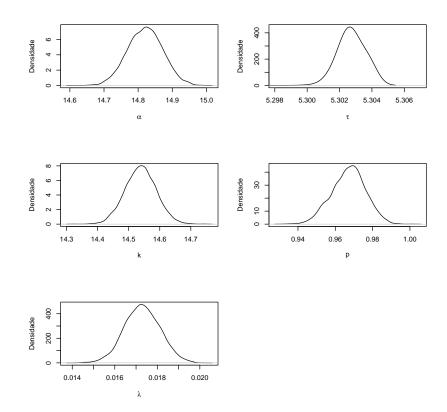


Figura 26 - Estimativas das funções densidade marginais *a posteriori* para os parâmetros do modelo GGGE para os dados de tempo de permanência no Japão

Nota-se, em todos os casos, que os valores de \hat{R} estão próximos de 1, indicando a convergência das cadeias. Pode-se observar que o valores para a média *a posteriori* (Tabela 7) são similares aos valores obtidos para o modelo GGGE apresentados na Tabela

5. Além disso, a Figura 26 apresenta as densidades marginais *a posteriori* aproximadas pelo histograma, considerando as 9.000 observações amostrais geradas. As densidades marginais apresentadas por meio da Figura 26 sugerem que a distribuição *a posteriori* apresenta uma tendência à simetria para os parâmetros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusões

Foram desenvolvidas novas propriedades para a distribuição de probabilidade Kumaraswamy Weibull modificada (KwMW) e desenvolvida a nova distribuição de probabilidade gama generalizada geométrica exponenciada (GGGE). As distribuições são versáteis para modelar a função risco nas formas crescente, decrescente, unimodal e forma de U. A função densidade de probabilidade da distribuição GGGE foi expressa como uma combinação linear de funções densidade de probabilidade da distribuição gama generalizada. Calcularam-se os momentos, a função geradora de momentos, os desvios médios, a confiabilidade e as distribuições das estatísticas de ordem. Desenvolveu-se o modelo de regressão para a distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada. As estimativas dos parâmetros são abordadas por dois métodos diferentes: o de máxima verossimilhança e o bayesiano. Obteve-se a matriz de informação observada para a distribuição GGGE. A utilidade dessas distribuições é ilustrada na análise de conjuntos de dados reais, usando as estatísticas AIC, BIC, CAIC, mostrando, assim, que essas distribuições proporcionam um ajuste mais adequado do que outros submodelos.

5.2 Pesquisas futuras

Dando continuidade a esta pesquisa, pretende-se desenvolver uma análise de diagnóstico (influência local e análise de resíduos) para o modelo de regressão para a distribuição log-gama generalizada geométrica exponenciada.

REFERÊNCIAS

AARSET, M.V. How to identify bathtub hazard rate. **Transactions on Reliability**, New York, v.36, p.106-108, 1987.

AARTS, R.M. Lauricella functions, www.mathworld.wolfram.com/LauricellaFunctions.html. From MathWorld - A Wolfram Web Resource, created by Eric W. Weisstein. Acesso em: dez. 2011.

ADAMIDIS, K.; LOUKAS, S. A life time distribution with decreasing failure rate. **Statistics** and **Probability Letters**, Amsterdam, v.39, p.35-42, 1998.

AKAIKE, H. A new look at the statistical model identification. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Boston, v.6, p.716-723, 1974.

ALKASASBEH, M.R.; RAQAB, M.Z. Estimation of the generalized logistic distribution parameters: Comparative study. **Statistical Methodology**, Oxford, v.6, p.262-279, 2009.

ALI, M.M.; WOO, J.; NADARAJAH, S. Generalized gamma variables with drought application. **Journal of the Korean Statistical Society**, Seul, v.37, p.37-45, 2008.

BABBIE, E. **Métodos de pesquisas de Survey/Earl Babbie;** tradução de Guilherme Cezarino - Belo Horizonte: Editora da UFMG, 1999. 519p. - (Coleção Aprender) Tradução de: Survey research methods.

BALAKRISHNAN, N.; LENG, M.Y. Order statistics from the type I generalized logistic distribution. **Communications in Statistics - Simulation and Computation**, London, v.17, n.1, p.25-50, 1988.

BARRETO-SOUZA, W.; SANTOS, A.H.S.; CORDEIRO, G.M. The beta generalized exponential distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, p.1-14, 2009.

BARRETO-SOUZA, W.; MORAIS, A.L.; CORDEIRO, G.M. The Weibull geometric distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.645-657, 2011.

BARROS, A.A.A. **Distribuições Exponencializadas e Estendidas**. 2008. 75p. Dissertação (Mestrado em Biometria e Estatística Aplicada) - Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008.

BONFERRONI, C.E. Elementi di Statistica Generale. Seeber, Firenze, 1930. 240p.

CANCHO, V.; BOLFARINE, H.; ACHCAR, J.A. A Bayesian analysis for the exponentiated Weibull distribution. **Journal of Applied Statistical Science**, New York, v.8, n.4, p.227-242, 1999.

CARRASCO, J.M.F.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. A generalized modified Weibull distribution for lifetime modeling. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.53, p.450-462, 2008.

CHIB, S.; GREENBERG, E. Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. **The American Statistician**, Washington, v.49, p.326-335, 1995.

COLOSIMO, E.A.; GIOLO, S.R. **Análise de Sobrevivência Aplicada.** São Paulo: Edgard Blucher, 2006. 370p.

COORAY, K.; ANANDA, M.M.A. A generalization of the half-normal distribution wit applications to lifetime data. Communications in Statistics - Theory and Methods, New York, v.37, p.1323-1337, 2008.

COX, C. The generalized F distribution: an umbrella for parametric survival analysis. **Statistics in Medicine**, New York, v.27, p.4301-4312, 2008.

CORDEIRO, G.M.; de CASTRO, M. A new family of generalized distributions. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, p.1-17, 2011.

CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M. SILVA, G. O. The exponentiated generalized gamma distribution with application to lifetime data. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.81, p.827-842, 2012.

CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; SILVA, G.O. The Kumaraswamy modified Weibull distribution: theory and applications. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, p.1-25, 2013.

COX, D.R.; OAKES, D. Analysis of Survival Data. New York. Chapman and Hall, 1984.

EHLERS, R.S. Introdução à Inferência Bayesiana, 2007. 97p.

EUGENE, N.; LEE, C.; FAMOYE, F. Beta-Normal distribution and its applications. Communications in Statistics - Theory and Methods, New York, v.31, p.497-512, 2002.

EXTON, H. Handbook of Hypergeometric Integrals: Theory, Applications, Tables, Computer Programs. New York: Halsted Press. 1978. 500p.

FAREWELL, V.T.; PRENTICE, R.L. A study of distributional shape in life testing. **Technometrics**, Wisconsin, v.19, p.69-75, 1977.

GELMAN, A.; RUBIN, D.B. Inference from iterative simulation using multiple sequences. **Statistical Science**, Hayward, v.7, p.457-472, 1992.

GEORGE, E.O.; OJO, M.O. On a generalization of the logistic distribution. **The Annals of Mathematical Statistics**, Hayward, v.32, n.2, p.161-169, 1980.

GHITANY, M.E.; AL-AWADHI, F.A.; ALKHALFAN, L.A. Marshall-Olkim extended lomax distribution and its application to censored data. Communications in Statistics - Theory and Methods, New York, v.36, p.1855-1866, 2007.

GRADSHTEYN, I.S.; RYZHIK, I.M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7th ed. London: Academic Press, 2007. 345p.

GUPTA, R.C.; GUPTA, P.L.; GUPTA, R.D. Modeling failure time data by Lehman alternatives. **Communications in Statistics - Theory an Methods**, New York, v.27, p.887-904, 1998.

GUPTA, R.D.; KUNDU, D. Generalized exponential distributions. **Australian & New Zealand Journal of Statistics**, Oxford, v.41, n.2, p.173-188, 1999.

GUPTA, R.D.; KUNDU, D. Exponentiated exponencial family: An alternative to gamma and Weibull distributions. **Biometrical Journal**, Berlin, v.43, n.1, p.117-130, 2001.

HASTINGS, W.K. Monte carlo sampling methods using Markov chains and theirs applications. **Biometrika**, London, v.57, n.1, p.97-109, 1970.

KALBFLEISH, J.D.; PRENTICE, R.L. The Statistical Analysis of Failure Time Data. John Wiley: New York, 2002.

KAWAMURA, L.K. Para Onde Vão os Brasileiros?: Imigrantes Brasileiros no Japão. Campinas: Editora da Unicamp, 1999. 236p.

KAPLAN, E.L.; MEIER, P. Nonparametric estimation from incomplete observations. **Journal of the American Statistical Association**, Boston, v.53, p.457-481, 1958.

KENNEY, J.F.; KEEPING, E. S. Mathematics of Statistics. 3rd ed. Princeton, NJ: Van Nostrand, 1962. 182p

KUMARASWAMY, P. A generalized probability density function for double-bounded random processes. **Journal of Hydrology**, New York, v.46, p.79-88, 1980.

LAI, C.D.; XIE, M.; MURTHY, D.N.P. A modified Weibull distribution **Transactions on Reliability**. London, v.52, p.33-37, 2003.

LAWLESS, J.F. Inference in the generalized gamma and log-gamma distributions. **Technometrics**, Wisconsin, v.22, p.409-419, 1980.

LAWLESS, J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. New York: Wiley, 1982. 630p.

LAWLESS, J.F. Statistical Models and Methods for Lifetime Data. 2nd ed. New York: Wiley, 2003. 630p.

LEHMANN, E.L. On the existence of least favorable distributions. **Annals of Mathematical Statistics**, Berkeley, v.23, p.408-416, 1952.

LIANG, H.; ZOU, G. Improved AIC selection strategy for survival analysis. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.2538-2548, 2007.

LINHART, H.; ZUCCHINI, W. Model Selection. New York: Wiley, 1986. 300p.

MALHOTRA, J.; SHARMA, A.K.; KALER, R.S. On the performance analysis of wireless receiver using generalized-gamma fading model. **Annals of Telecommunications**, Paris, v.64, p.147-153, 2009.

MARSHALL, A.W.; OLKIN, I. A new method for adding a parameter to a family of distributions with aplication to the esponential and Weibull families. **Biometrika**, London, v.3, n.84, p.641-652, 1997.

MOORS, J.J.A. A quantile alternative for kurtosis. **Journal of the Royal Statistical Society Ser. D.**, **The Statistician**, London, v.37, p.25-32, 1998.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; FREIMER, M. The exponentiated Weibull family: A reanalysis of the bus-motor-failure data. **Technometrics**, Alexandria, v.37, p.436-445, 1995.

MUDHOLKAR, G.S.; SRIVASTAVA, D.K.; KOLLIA, G.D. A generalization of the Weibull distribution with application to the analysis of survival data. **Journal of American Statistical Association**, New York, v.91, p.1575-1583, 1996.

NADARAJAH, S. The exponential Gumbel distribution with climate application. **Environmetrics**, New York, v.17, p.13-23, 2006.

NADARAJAH, S. On the use of the generalized gamma distribution. **International Journal of Electronic**, New York, v.95, p.1029-1032, 2008a.

NADARAJAH, S. Explicit expressions for moments of order statistics. **Statistics and Probability Letters**, Amsterdam, v.78, p.196-205, 2008b.

NADARAJAH, S.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M. General results for the beta-modified Weibull distribution. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, v. 1, p.1-22, 2011.

NADARAJAH, S.; GUPTA, A.K. A generalized gamma distribution with application to drought data. **Mathematics and Computers in Simulation**, Amsterdam, v.74, p.1-7, 2007.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta Gumbel distribution. **Mathematical Problems in Engineering**, New York, v.10, p.323-332, 2004.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The beta exponential distribution. **Reliability Engineering** and **System Safety**, Barking, v.91, p.689-697, 2005.

NADARAJAH, S.; KOTZ, S. The exponencial type distributions. **Acta Applicandae** Mathematicae: **An International Survey Journal on Applying Mathematics and Mathematical Applications**, Amsterdam, v.92, n.2, p.97-111, 2006.

OJO, M.O.; OLAPADE, A.K. On the generalized logistic and log-logistic distributions. **Kragujevac Journal Mathematics**, Ile-Ife, v.25, p.65-73, 2003.

- ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M.; PASCOA, M.A.R. The generalized gamma geometric distribution. **Journal of Statistical Theory and Applications**, New York, v. 10, p. 433-454, 2011.
- ORTEGA, E.M.M.; PAULA, G.A.; BOLFARINE, H. Deviance residuals in generalized log-gamma regression models with censored observations. **Journal of Statistical Computation and Simulation**, London, v.78, p.747-764, 2008.
- PESCIM, R.R.; DEMÉTRIO, C.G.B.; CORDEIRO, G.M.; ORTEGA, E.M.M.; URBANO, M.R. The beta generalized half-normal distribution. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.54, n.4, p.945-957, 2010.
- PRENTICE, R.L. A log-gamma model and its maximum likelihood estimation. **Biometrica**, London, v.61, p.539-544, 1974.
- PRESS, W.H.; TEULOSKY, S.A.; VETTERLING, W.T.; FLANNERY, B.P. Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. London: Prentice-Hall, 1992. p.185
- PRUDNIKOV, A.P.; BRYCHKOV, Y.A.; MARICHEV, O.I. **Integrals and Series**. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1986. p.527.
- R CORE TEAM. R: a language and environment for statistical computing. Vienna, Austria: R Foundation for Statistical Computing, 2011. Disponível em: http://www.R-project.org. Acesso em: 24 jun. 2011.
- RAO, G.S.; GHITANY, M.E.; KANTAM, R.R.L. Reliability test plans for Marshall-Olkim extended exponential distribution. **Applied Mathematical Sciences**, New York, v.3, n.55, p.2745-2755, 2009.
- SANTANA, T.V.F. **As distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística**. 2010. 103p. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agronômica) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2010.
- SAS Institute inc. SAS 9.2. Cary, NC, USA, 2008.
- SCHWARZ, G. Estimating the dimension of a model. **Annals of Statistics**, Philadelphia, v.6, p.461-464, 1978.
- SILVA, G.O. Modelos de regressão quando a função de taxa de falha não é monótona e o modelo probabilístico beta Weibull modificada. 2009. 207p. Tese (Doutorado em Agronomia) Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba, 2009.
- SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; CORDEIRO, G.M. The beta modified Weibull distribution. **Lifetime Data Analysis**, New York, v.16, p.409-430, 2010.
- SILVA, G.O.; ORTEGA, E.M.M.; GARIBAY, V.C.; BARRETO, M.L. Log-Burr XII regression models with censored data. **Computational Statistics and Data Analysis**, New York, v.52, p.3820-3842, 2008.

STACY, E.W. A generalization of the gamma distribution. **Annals of Mathematical Statistics**, Michigan, v.33, p.1187-1192, 1962.

STACY, E.W.; MIHRAM, G. A. Parameter estimation for a generalized gamma distribution. **Technometrics**, New York, v.7, p.349-358, 1965.

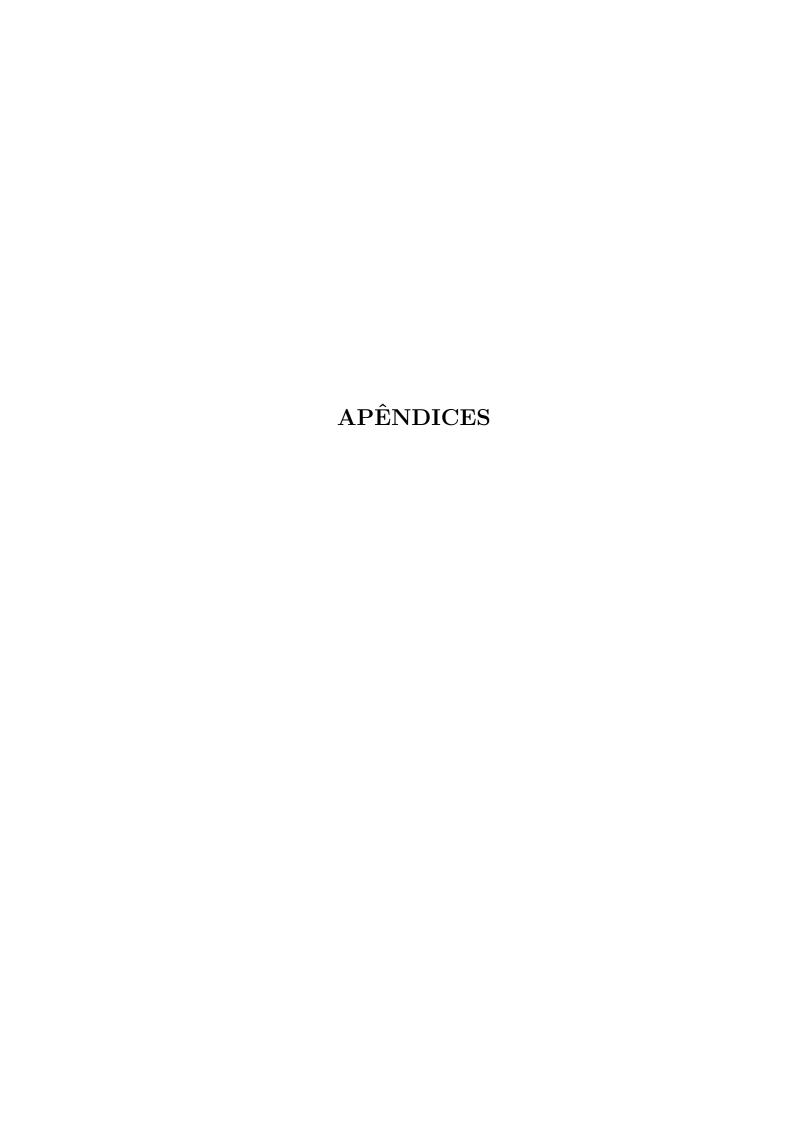
THOMAS, A.; JOSE, K.K. Bivariate semi-Pareto minification processes. **Metrika**, London, v.59, p.305-313, 2004.

TROTT, M. **The Mathematica Guidebook for Symbolics**. New York: Springer, 2006. 1 DVD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX).

ZHANG, T.; XIE, M. Failure data analysis with extended Weibull distribution. Communications in Statistical - Simulation and Computation, London, v.36, n.3, p.579-592, 2007.

WANG, F.K. A new model with bathtub-shaped failure rate using an additive Burr XII distribution. Reliability Engineering and System Safety, v.70, p.305-312, 2000.

WRIGHT, E.M. The asymptotic expansion of the generalized Bessel function. **Proceedings** of the London Mathematical Society, London, v.38, p.257-270, 1935.



APÊNDICE A

Uma expansão para $\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda-1}$ para todo $\lambda > 0$, um número real e não-inteiro, pode ser escrita como:

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda - 1} = \left(1 - \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\} \right)^{\lambda - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} {\binom{\lambda - 1}{j}} (-1)^j \left\{ 1 - \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right] \right\}^j,$$

que sempre converge para $0 < \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right] < 1$. Por isso,

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j} (-1)^{j+m} {\lambda - 1 \choose j} {j \choose m} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^m. \tag{106}$$

Substituindo $\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{j}$ por $\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{j=m}^{\infty}$ obtém-se:

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{j+m} \binom{\lambda - 1}{j} \binom{j}{m} \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^m.$$

Então,

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^{\lambda - 1} = \sum_{m=0}^{\infty} s_m(\lambda) \gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^m, \tag{107}$$

em que,

$$s_m(\lambda) = \sum_{j=m}^{\infty} (-1)^{j+m} {\binom{\lambda-1}{j}} {\binom{j}{m}}.$$
 (108)

Usando agora uma expansão em série para a relação da função gama incompleta dada por:

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right] = \frac{1}{\Gamma(k)} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau k} \sum_{q=0}^{\infty} \left[-\left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^q \frac{1}{(k+q)q!}. \tag{109}$$

Pela aplicação de uma equação na seção 0.314 de Gradshteyn e Ryzhik (2007) para séries de potências elevadas a potências, obtém-se para qualquer inteiro positivo m,

$$\left[\sum_{q=0}^{\infty} a_q \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau q}\right]^m = \sum_{q=0}^{\infty} c_{m,q} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\tau q}, \tag{110}$$

em que os coeficientes $c_{m,q}$ (para $q=1,2,\cdots$) satisfazem a relação de recorrência

$$c_{m,q} = (qa_0)^{-1} \sum_{r=1}^{q} (mr - q + r) a_r c_{m,q-r},$$
(111)

em que $c_{m,0}=a_0^m$ e $a_q=(-1)^q [(k+q)q!]^{-1}$. O coeficiente $c_{m,q}$ pode ser calculado a partir de $c_{q,0},\ldots,c_{q,d-1}$, também pode ser escrito explicitamente em função das quantidades a_0,\ldots,a_q usando software algébricos como Maple e Mathematica. Aqui, $c_{m,0}=k^{-m}$, $c_{m,1}=-m[(k+1)k^{m-1}]^{-1}$, $c_{m,2}=m[2(k+2)k^{m-1}]^{-1}+m(m-1)[2(k+1)^2k^{m-2}]^{-1}$, etc. Além disso, usando a equação (110), tem-se:

$$\gamma_1 \left[k, \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau} \right]^m = \frac{1}{\Gamma(k)^m} \sum_{q=0}^{\infty} c_{m,q} \left(\frac{t}{\alpha} \right)^{\tau(km+q)}, \tag{112}$$

em que os coeficientes $c_{m,q}$ são obtidos pela equação (111).

APÊNDICE B

Após a diferenciação de (53) para determinar as funções escore, os elementos da matriz de informação observada $J(\theta)$ para os parâmetros $(a, b, \alpha, \gamma, \lambda)$ são

$$J_{aa}(\boldsymbol{\theta}) = -(b-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^a \log^2(1-t_i)}{1-(1-t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{1-t_i}{1-(1-t_i)^a} \right\},\,$$

$$J_{ab}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^a \log(1-t_i)}{1-(1-t_i)^a},$$

$$J_{a\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - t_i} - (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-1} x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} - \alpha (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-1} x_i^{\gamma} \log(1 - t_i) \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{1 - t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \right\},$$

$$J_{a\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{\gamma} \log(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} - \alpha(b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a - 1} x_{i}^{\gamma} \log(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} - \alpha(b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a - 1} x_{i}^{\gamma} \log(1 - t_{i}) \log(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \left\{ 1 + \frac{1 - t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \right\},$$

$$J_{a\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - t_i} - \alpha (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a - 1} x_i^{\gamma + 1} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} - \alpha (b - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a - 1} \log(1 - t_i) x_i^{\gamma + 1} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{1 - t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \right\},$$

$$J_{bb}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{b^2},$$

$$J_{b\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -a \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^{a-1} x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i) t_i}{1-(1-t_i)^a},$$

$$J_{b\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = -a\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^{a-1} \log(x_i) x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i) t_i}{1-(1-t_i)^a},$$

$$J_{b\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = -a\alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^{a-1} x_i^{\gamma+1} \exp(\lambda x_i) t_i}{1-(1-t_i)^a},$$

$$J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -(a-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2\gamma} \exp(2\lambda x_i)t_i}{(1-t_i)^2} + a(b-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^{a-2}x_i^{2\gamma} \exp(2\lambda x_i)t_i}{1-(1-t_i)^a} - a^2(b-1)\sum_{i=1}^{n} \frac{(1-t_i)^{a-2}x_i^{2\gamma} \exp(2\lambda x_i)t_i^2}{1-(1-t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{(1-t_i)^a}{1-(1-t_i)^a} \right\},$$

$$J_{\alpha\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\gamma} \log(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) + (a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{\gamma} \log(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} - \alpha(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{2\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}}{(1 - t_{i})^{2}} - a^{2}\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}^{2}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \left\{ 1 + \frac{(1 - t_{i})^{2}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \right\} + \alpha\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} - \alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-1} x_{i}^{\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log(x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}},$$

$$J_{\alpha\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\gamma+1} \exp(\lambda x_{i}) + (a-1) \frac{x_{i}^{\gamma+1} \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} + \alpha(a-1) \frac{x_{i}^{2\gamma+1} \exp(2\lambda x_{i}) t_{i}}{(1 - t_{i})^{2}} - a^{2} \alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma+1} \exp(2\lambda x_{i}) t_{i}^{2}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \left\{ 1 + \frac{(1 - t_{i})}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \right\} + a\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma+1} \exp(2\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} - a(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-1} x_{i}^{\gamma+1} \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}},$$

$$J_{\gamma\gamma}(\boldsymbol{\theta}) = -(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(\gamma + \lambda x_{i})^{2}} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_{i}^{\gamma} \log^{2}(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) +$$

$$\alpha(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{\gamma} \log^{2}(x_{i}) \exp(\lambda x_{i}) t_{i}}{1 - t_{i}} - \alpha^{2}(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{i}^{2\gamma} \log^{2}(x_{i}) \exp(2\lambda x_{i}) t_{i}}{(1 - t_{i})^{2}} -$$

$$a^{2} \alpha^{2}(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log^{2}(x_{i}) t_{i}^{2}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \left\{ 1 + \frac{1 - t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} \right\} +$$

$$a\alpha^{2}(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-2} x_{i}^{2\gamma} \exp(2\lambda x_{i}) \log^{2}(x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}} -$$

$$a\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_{i})^{a-1} x_{i}^{\gamma} \exp(\lambda x_{i}) \log^{2}(x_{i}) t_{i}}{1 - (1 - t_{i})^{a}},$$

$$J_{\gamma\lambda}(\theta) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{(\gamma + \lambda x_i)^2} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma+1} \log(x_i) \exp(\lambda x_i) +$$

$$\alpha(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\gamma+1} \log(x_i) \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - t_i} - \alpha^2(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2\gamma+1} \log(x_i) \exp(2\lambda x_i) t_i}{(1 - t_i)^2} -$$

$$a^2 \alpha^2(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-2} x_i^{2\gamma+1} \exp(2\lambda x_i) \log(x_i) t_i^2}{1 - (1 - t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{1 - t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \right\} +$$

$$a\alpha^2(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-2} x_i^{2\gamma+1} \exp(2\lambda x_i) \log(x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} -$$

$$a\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-1} x_i^{2\gamma+1} \exp(\lambda x_i) \log(x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a},$$

$$J_{\lambda\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{(\gamma + \lambda x_i)^2} - \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i^{\gamma+2} \exp(\lambda x_i) +$$

$$\alpha(a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\gamma+2} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - t_i} - \alpha^2 (a-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{2\gamma+2} \exp(2\lambda x_i) t_i}{(1 - t_i)^2} -$$

$$a^2 \alpha^2 (b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-2} x_i^{2\gamma+2} \exp(2\lambda x_i) t_i^2}{1 - (1 - t_i)^a} \left\{ 1 + \frac{1 - t_i}{1 - (1 - t_i)^a} \right\} +$$

$$a\alpha^2 (b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-2} x_i^{2\gamma+2} \exp(2\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a} -$$

$$a\alpha(b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 - t_i)^{a-1} x_i^{\gamma+2} \exp(\lambda x_i) t_i}{1 - (1 - t_i)^a},$$

em que $t_i = \exp[-\alpha x_i^{\gamma} \exp(\lambda x_i)].$

APÊNDICE C

Após a diferenciação de (53), os elementos da matriz de informação observada $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta})$ para os parâmetros $(\alpha, \tau, k, p, \lambda)$ são

$$J_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{\alpha^2} (\tau k - 2) - \frac{\tau(1 - \tau)}{\alpha} \sum_{i \in F} u_i - \frac{\tau(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} \frac{u_i^k \exp(-u_i)}{\gamma_1(k, u_i)}$$

$$\times \left[\frac{(1 - \tau k)}{\alpha} + \frac{\tau u_i}{\alpha} \left(1 + \frac{u_i^{\lambda - 1} \exp(-u_i)}{\Gamma(k) \gamma_1(k, u_i)} \right) \right]$$

$$+ \frac{\tau p(\lambda - 1)}{\alpha^2 \Gamma(k)} \sum_{i \in F} u_i^k g_i \exp(-u_i) \left\{ -\frac{\tau}{\Gamma(k)} u_i^k \exp(-u_i) + [-1 + \tau(-k + u_i)] \right\},$$

$$J_{\alpha\tau}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{nk}{\tau} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i \in F} u_i [1 + \log(u_i)] + \frac{(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} \frac{u_i^k \exp(-u_i)}{\gamma_1(k, u_i)}$$

$$\times \left[-1 - \tau k \log(1/\alpha) + u_i \log(u_i) + \frac{1}{\Gamma(k)} u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i) \right] - \frac{p(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} u_i^k \exp(-u_i)$$

$$\times \left\{ g_i [-1 - \tau k \log(1/\alpha) + u_i \log(u_i)] - \frac{p}{\Gamma(k)} u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i) \right\},$$

$$\begin{split} J_{\alpha k}(\boldsymbol{\theta}) &= -\frac{n\tau}{\alpha} - \frac{\tau(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} u_i^k \exp(-u_i) \Big\{ -\frac{\Psi(k) + \log(u_i)}{\gamma_1(k, u_i)} - \Psi(k) \gamma_1(k, u_i) + \frac{1}{\Gamma(k)} [\dot{\gamma}(k, u_i)]_k \Big\} \\ &+ \frac{\tau p(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} u_i^k g_i \exp(-u_i) \Big\{ -\Psi(k) + \log(u_i) + p \Big[-\Psi(k) \gamma_1(k, u_i) + \frac{1}{\Gamma(k)} [\dot{\gamma}(k, u_i)]_k \Big] \Big\}, \end{split}$$

$$J_{\alpha p}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\tau(\lambda - 1)}{\alpha \Gamma(k)} \sum_{i \in F} u_i^k \exp(-u_i) \{g_i + pq_i\},$$

$$J_{\tau\tau}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\tau^2} - \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^n u_i [\log(u_i)]^2 - \frac{2p}{\tau \Gamma(k)} \sum_{i=1}^n u_i^k [\log(u_i)]^2 \exp(-u_i) g_i \Big[k - u_i - \frac{p u_i^k}{\Gamma(k)} \exp(u_i) g_i \Big],$$

$$J_{\tau k}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{n} \log(u_i) - \frac{2p}{\tau \Gamma(k)} \sum_{i=1}^{n} u_i^k \log(u_i) g_i \{-\psi(k) + \log(u_i) - p g_i [-\psi(k) \gamma_1(k, u_i) + \omega_i]\},$$

$$J_{\tau p}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{(\lambda+1)}{\tau \Gamma(k)} \sum_{i \in F} (g_i + pq_i) u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i),$$

$$J_{kk}(\boldsymbol{\theta}) = -n\psi'(k) + 2p \Big\{ \sum_{i=1}^{n} g_i(\psi'(k)\gamma_1(k, u_i) + \psi(k)g_i \{ [-\psi(k)\gamma_1(k, u_i) + \omega_i] [1 + pq_i \\ -p\gamma_1(k, u_i)] \} \Big) - \sum_{i=1}^{n} \frac{g_i}{\Gamma(k)} \Big(-\psi(k) [\dot{\gamma}(k, u_i)]_k + g_i \{ [\ddot{\gamma}(k, u_i)]_{kk} (1 + pq_i) - p\Gamma(k)\omega_i \\ [-\psi(k)\gamma_1(k, u_i) + \omega_i] \} \Big) \Big\},$$

$$J_{kp}(\boldsymbol{\theta}) = (\lambda + 1) \sum_{i \in F} (g_i + pq_i) [-\Psi(k)\gamma_1(k, u_i) + \omega_i],$$

$$J_{pp}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{(1-p)^2} - (\lambda - 1) \sum_{i \in F} q_i^2 + \lambda \sum_{i \in F} \frac{q_i \gamma_1(k, u_i)^{\lambda}}{1 - [g_i \gamma_1(k, u_i)]^{\lambda}} \left\{ \frac{\lambda g_i^{\lambda + 1} \gamma_1(k, u_i)^{\lambda}}{1 - [g_i \gamma_1(k, u_i)]^{\lambda}} + 2 \right\},$$

$$J_{\lambda\lambda}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{\lambda^2},$$

$$J_{\lambda p}(\boldsymbol{\theta}) = -\sum_{i \in F} g_i q_i,$$

$$J_{\lambda k}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i \in F} -\Psi(k) + \frac{\omega_i}{\gamma_1(k, u_i)} - p \sum_{i \in F} g_i [-\Psi(k)\gamma_1(k, u_i) + \omega_i],$$

$$J_{\lambda\tau}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\tau\Gamma(k)} \sum_{i \in F} \frac{u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i)}{\gamma_1(k, u_i)} - \frac{p}{\tau\Gamma(k)} \sum_{i \in F} g_i u_i^k \log(u_i) \exp(-u_i),$$

$$J_{\lambda\alpha}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\tau}{\alpha\Gamma(k)} \sum_{i \in F} \frac{u_i^k \exp(-u_i)}{\gamma_1(k, u_i)} - \frac{\tau p}{\alpha\Gamma(k)} \sum_{i \in F} g_i u_i^k \exp(-u_i),$$

em que

$$[\dot{\gamma}(k, u_i)]_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 1), \quad [\ddot{\gamma}(k, u_i)]_{kk} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} J(u_i, k+n-1, 2),$$

 $\psi'(.)$ é a derivada da função digama, u_i , g_i , ω_i e q_i seção 4.3. A função J(.,.,.) pode ser calculada a partir da integral dada por Prudnikov et al. (1986, vol 1, seção 2.6.3, integral 1)

$$J(a, p, 1) = \int_0^a x^p \log(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^2} [(p+1)\log(a) - 1].$$

$$J(a, p, 2) = \int_0^a x^p \log^2(x) dx = \frac{a^{p+1}}{(p+1)^3} \{ 2 - (p+1) \log(a) [2 - (p+1) \log(a)] \}.$$

APÊNDICE D

Programa SAS utilizado na aplicação da distribuição KwMW.

```
data lista1;
input t censur;
cards;
0.1 1
0.2 1
1 1
1 1
1 1
1 1
1 1
2 1
3 1
6 1
7 1
11 1
12 1
18 1
18 1
18 1
18 1
18 1
21 1
32 1
36 1
40 1
45 1
46 1
47 1
50 1
55 1
60 1
63 1
63 1
67 1
67 1
67 1
67 1
72 1
75 1
79 1
82 1
82 1
83 1
84 1
84 1
84 1
85 1
85 1
```

85 1

```
130
85 1
85 1
86 1
86 1
ods html;
  proc print data=lista1;
 run;
 ods html close;
 proc univariate data=lista1;
 proc lifetest graphics plots=(s,ls,lls);
  time t*censur(0);
  run;
 proc lifereg data=lista1;
     model t*censur(0)= / dist=llogistic;
run;
 proc means data=lista1;
run;
/*Ajuste da distribuição Exponencial*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms lambda=1;
bounds lambda>0;
logp=censur*(log(lambda)-lambda*t)+(1-censur)*(-lambda*t);
model t ~ general(logp);
run;
/*Ajuste da distribuição Weibull*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms alpha=0.55 gamma=2.5;
bounds alpha>0;
bounds gamma>0;
a=1;
b=1;
lambda=0;
logp=censur*(log(alpha)+log(gamma+lambda*t)+(gamma-1)*log(t)
+lambda*t-(alpha*(t**gamma))*exp(lambda*t));
model t ~ general(logp);
run;
/*Ajuste da distribuição Weibull modificada*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms alpha=0.02703 gamma=0.949 lambda=0.0005;
bounds alpha>0;
bounds gamma>0;
bounds lambda>0;
logp=censur*(log(alpha)+log(gamma+lambda*t)+(gamma-1)*log(t)
```

```
+lambda*t-(alpha*(t**gamma))*exp(lambda*t));
model t ~ general(logp);
run;
/*Ajuste da distribuição Kumaraswamy Weibull*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms a=10.5 b=0.5 alpha=0.238 gamma=0.4375;
bounds a>0;
bounds b>0;
bounds alpha>0;
bounds gamma>0;
lambda=0;
logp=censur*(log(a)+log(b)+log(alpha)+log(gamma+lambda*t)+(gamma-1)*log(t)
+lambda*t-(alpha*(t**gamma))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*ex
*exp(lambda*t)))+(b-1)*log(1-(1-exp(-(alpha*t**gamma)*exp(lambda*t)))**a));
model t ~ general(logp);
run;
/*Ajuste da distribuição Kumaraswamy Weibull modificada*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms a=1.8567 b=5.1564 alpha=0.0000000115 gamma=0.3548 lambda=0.02332;
bounds a>0;
bounds b>0;
bounds alpha>0;
bounds gamma>0;
bounds lambda>0;
logp=censur*(log(a)+log(b)+log(alpha)+log(gamma+lambda*t)+(gamma-1)*log(t)
+lambda*t-(alpha*(t**gamma))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(lambda*t)+(a-1)*log(1-exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*exp(-(alpha*(t**gamma)))*ex
*exp(lambda*t)))+(b-1)*log(1-(1-exp(-(alpha*t**gamma)*exp(lambda*t)))**a));
model t ~ general(logp);
run;
/*Ajuste da distribuição BIRNBAUM-SAUNDERS*/
proc nlmixed cov data=lista1;
parms alpha=1.5 beta=1.5;
bounds alpha>0;
bounds beta>0;
logp=censur*(-log(2*((2*3.1415926535)**0.5)*alpha*beta) + log(((beta/t)**(0.5))
+ ((beta/t)**(1.5))) - (1/(2*alpha**2))*((t/beta) + (beta/t) -2));
model t ~ general(logp);
run;
```

APÊNDICE E

Programa SAS utilizado na aplicação da distribuição GGGE.

```
data dados2;
input t censur ;
cards;
2 1
18 1
18 1
10 1
13 1
15 1
6 1
17 1
15 1
2 1
19 1
16 1
13 1
22 1
20 1
6 1
6 1
4 1
19 1
19 1
20 1
15 1
21 1
9 1
14 1
18 1
5 1
18 0
18 1
18 1
15 1
1 1
18 1
15 1
18 1
19 0
4 1
19 1
18 1
15 1
20 1
4 1
10 1
18 1
20 1
```

3 1

- 15 0
- 8 1
- 19 1
- 16 1
- 3 1
- 20 1
- 4 1
- 10 1
- 18 1
- 5 1
- 10 1
- 9 1
- 13 1
- 22 1
- 20 1
- 18 1
- 10 1
- 12 1
- 10 1
- 5 1
- 3 1
- 8 1
- 21 1
- 6 1
- 16 1
- 13 1
- 18 1 9 1
- 13 1
- 6 1
- 16 1
- 21 1
- 6 1
- 13 1
- 5 1
- 14 1
- 6 1
- 20 119 1
- 6 1
- 5 1
- 6 1
- 7 1
- 14 1
- 18 1
- 10 1 22 1
- 1 1
- 10 1
- 21 1
- 14 1

19 1

17 1

14 1

13 1

16 1

13 1

18 1

18 1

20 1

13 1

3 1

1 1

19 1

18 1

7 1

14 1

17 1

19 1

20 1

12 1

2 1 20 1

9 1

4 1

18 1

14 1

12 1

14 1

12 1

12 1

7 1

17 1

3 1

11 1

3 1

17 1

5 1 18 1

5 1

16 1

13 1

19 1

3 1

14 1

20 1

22 1 20 1

19 1 5 1

5 1

19 1

```
15 1
4 1
proc print data=dados2;
run;
/** DISTRIBUIÇÃO GAMA GENERALIZADA GEOMETRICA EXPONENCIADA**/
proc nlmixed cov data=dados2;
parms alfa=10 tau=3.7032 k=0.7025 p=0.001 lambda=0.9;
bounds alfa>0;
bounds tau>0;
bounds k>0;
bounds 0<p<1;
bounds lambda>0;
xx=probgam((t/alfa)**tau,k);
logp=censur*(log(((lambda*tau*(1-p))/(alfa*GAMMA(k)))*((t/alfa)**((tau*k)-1))
*(exp(-(t/alfa)**(tau)))*((xx)**(lambda-1))*((1-p*(1-xx))**(-(lambda+1)))))
+(1-censur)*(log(1-(xx*((1-p*(1-xx))**(-1)))**(lambda)));
model t ~ general(logp);
run;
/** DISTRIBUIÇÃO GENERALIZED GAMMA GEOMETRICA**/
proc nlmixed cov data=dados2;
parms alfa= 455.26 tau=2.5945 k=0.1 p=0.9999;
bounds alfa>0;
bounds tau>0;
bounds k>0;
bounds 0<p<1;
xx=probgam((t/alfa)**tau,k);
logp=censur*(log(((1*tau*(1-p))/(alfa*GAMMA(k)))*((t/alfa)**((tau*k)-1)))
*(exp(-(t/alfa)**(tau)))*((xx)**(1-1))*((1-p*(1-xx))**(-(1+1)))))
+(1-censur)*(log(1-(xx*((1-p*(1-xx))**(-1)))**(1)));
model t ~ general(logp);
run;
/** DISTRIBUIÇÃO WEIBULL GEOMETRICA**/
proc nlmixed cov data=dados2;
parms alfa=100 tau=10 p=0.9;
bounds alfa>0;
bounds tau>0;
bounds 0<p<1;
xx=probgam((t/alfa)**tau,1);
logp=censur*(log(((1*tau*(1-p))/(alfa*GAMMA(1)))*((t/alfa)**((tau*1)-1))
*(exp(-(t/alfa)**(tau)))*((xx)**(1-1))*((1-p*(1-xx))**(-(1+1)))))
+(1-censur)*(log(1-(xx*((1-p*(1-xx))**(-1)))**(1)));
model t ~ general(logp);
run;
```