A distribuição Kumaraswamy normal: propriedades, modelos de regressão linear e diagnóstico

Elizabete Cardoso Machado

TESE APRESENTADA
AO
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Estatística

Orientadora: Profa. Dra. Denise Aparecida Botter Coorientadora: Profa. Dra. Mônica Carneiro Sandoval

Durante parte do desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da CAPES

São Paulo, Maio de 2019

A distribuição Kumaraswamy normal: propriedades, modelos de regressão linear e diagnóstico

Esta versão definitiva da tese contém as correções e alterações sugeridas pela comissão julgadora durante a defesa realizada por Elizabete Cardoso Machado no dia 28/05/2019

Comissão Julgadora:

- Denise Aparecida Botter (Orientadora) IME-USP
- Gilberto Alvarenga Paula IME-USP
- Mário de Castro Andrade Filho- ICMC-USP
- Artur José Lemonte UFRN
- Filidor Edilfonso Vilca Labra- UNICAMP

Dedicatória

As mulheres que são capazes de mudar o mundo não precisam mostrar nada além da sua inteligência.

Rita Levi Montalcini

Agradecimentos

A Deus, pelo dom da vida, por me guiar durante essa longa caminhada e por sempre me dar força para continuar diante de tantos obstáculos pelos quais tive que passar.

Aos meus pais, meus guerreiros, Maria de Fátima e Cesário pelas lições de vida, pelo incentivo, e principalmente por terem me transmitido os verdadeiros valores da vida: humildade, caráter, honestidade e respeito ao próximo.

Ao meu noivo Bruno Guerra pelo imensurável amor, pela compreensão, pela paciência, pelas palavras de incentivo nas horas mais difíceis, suas palavras foram muito importantes para a concretização deste sonho.

As minhas irmãs: Valderina, Erisvalda e Francisca das Chagas por todo amor, incentivo e carinho.

As minhas amadas sobrinhas, Jennifer (pelas chamadas de vídeos que me motivavam a voltar logo para casa) e Sther pelo carinho incondicional.

A toda a minha família, em especial, meus cunhados Paulo e Marcos pela amizade e torcida.

A Oldênia Guerra e família pela torcida, incentivo e carinho.

As pessoas queridas que estiveram envolvidas na minha formação, meus eternos professores. Agradeço a grande contribuição que deram para a minha vida, pois o conhecimento é para a vida toda. Deixo aqui minha imensa gratidão e carinho.

A minha orientadora Denise Aparecida Botter e coorientadora Mônica Carneiro Sandoval por terem aceitado me orientar em um momento de transição em minha vida. Não poderia ter tido melhor orientação. Obrigada pela confiança em mim depositada e pelos conhecimentos compartilhados

Ao professor Dr. Gauss Montinho Cordeiro pela enorme contribuição neste trabalho de tese.

A Terezinha Késsia e ao professor Dr. Joelson Campos (UFCG) pela enorme ajuda no R, sem a ajuda de vocês as coisas teriam sido bem mais difícil.

Aos demais amigos, que sempre me apoiaram.

Aos meus amigos do doutorado, em especial, Antonio Marcos, Daniel Dataka, Hérica, Agatha, Andressa cerqueira e Guaraci.

Aos professores que aceitaram participar da banca pelas sugestões que irão aprimorar cada vez mais este trabalho.

Aos professores do IME-USP por suas contribuições à minha formação.

Aos professores e amigos do departamento de Estatística da UFPI pelo apoio e torcida.

À CAPES pela concessão de bolsa durante um ano.

A todos os envolvidos diretamente ou indiretamente na construção deste trabalho.

Resumo

No presente trabalho, são estudadas propriedades de uma distribuição pertencente à classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas, denominada Kumaraswamy normal, formulada a partir da distribuição Kumaraswamy e da distribuição normal. Algumas propriedades estudadas são: expansão da função densidade de probabilidade em série de potências, função geradora de momentos, momentos, função quantílica, entropia de Shannon e de Rényi e estatísticas de ordem. São construídos dois modelos de regressão lineares do tipo localização-escala para a distribuição Kumaraswamy normal, um para dados sem censura e o outro com a presença de observações censuradas. Os parâmetros dos modelos são estimados pelo método de máxima verossimilhança e algumas medidas de diagnóstico, como influência global, influência local e resíduos são desenvolvidos. Para cada modelo de regressão é realizada uma aplicação a um conjunto de dados reais.

Palavras-chave: Função geradora; Distribuição Kumaraswamy normal; classe Lehmann; Desvio medio; Função quantílica.

Abstract

In this work, properties of a distribution belonging to the class of generalized Kumaraswamy distributions, called Kumaraswamy normal, are studied. The Kumaraswamy normal distribution is formulated from the Kumaraswamy distribution and from the normal distribution. Some properties studied are: expansion of the probability density function in power series, moment generating function, moments, quantile function, Shannon and Rényi entropy, and order statistics. Two location-scale linear regression models are constructed for the Kumaraswamy normal distribution, one for datas uncensored and the other with the presence of censoreds observations. The parameters of these models are estimated by the maximum likelihood method and some diagnostic measures such as global influence, local influence and residuals are developed. For each regression model an application is made to a real data set.

Keywords: Generating function; Kumaraswamy normal distribution; Lehmann classes; Mean deviation; Moment; Quantile function.



Sumário

Lista de Figuras xv						
Li	sta d	le Tabelas	vii			
1	Introdução					
	1.1 1.2	Objetivos				
2	A d	istribuição Kumaraswamy normal	5			
	2.1	Introdução	5			
	2.2	Expansões úteis	7			
	2.3	Momentos	8			
	2.4	Série de potências quantílica	13			
	2.5	Funções geradoras	15			
	2.6	Momentos incompletos	17			
	2.7	Momentos ponderados por probabilidade	18			
	2.8	Estatísticas de ordem	19			
	2.9	Entropias	20			
	2.10	Estimação	24			
	2.11	Estudo de simulação	26			
	2.12	Aplicação	26			
		2.12.1 Dados de monóxido de carbono	26			
3	Modelo de regressão Kumaraswamy normal					
	3.1	Introdução	29			
	3.2	O modelo de regressão Kumaraswamy normal	29			
	3.3	Análise de diagnóstico	31			
		3.3.1 Influência global	31			
		3.3.2 Influência local	31			
	3.4	Análise de resíduos	33			
	3.5	Aplicação	33			
		3.5.1 Falhas da fotocopiadora	33			
4	Mo	delo de regressão Kumaraswamy normal com presença de censura	39			
	4.1	Introdução	39			
	4.2	Modelo de regressão Kumaraswamy normal com censura	39			

	4.3	Análise de diagnóstico	41
		4.3.1 Influência local	41
	4.4	Análise de resíduos	42
	4.5	Aplicação	43
		4.5.1 Dados de transplante de coração em Stanford	43
5	Con	asiderações finais	49
	5.1	Pesquisas futuras	49
A			51
	A.1	Elementos da matriz de informação observada $J(\theta)$	51
	A.2	Elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ - Modelo de regressão KwN	53
	A.3	Elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ -Modelo de regressão KwN com	
		censura	55
	A.4	Dados de transplante de coração em Stanford	57
R	eferê:	ncias Bibliográficas	61

Lista de Figuras

2.1	Grafico da função densidade da distribuição $KwN(a,b,0,1)$ para alguns valores dos	
	parâmetros a e b	7
2.2	Assimetria de Bowley (a) e curtose de Moors (b) da distribuição KwN para $0 < b < 3$	
	e $a \in \{1/8, 1/2, 3/4, 1, 5, 10\}$	14
2.3	Assimetria de Bowley (a) e curtose de Moors (b) da distribuição KwN para $0 < a < 3$	
	e $b \in \{1/8, 1/2, 3/4, 1, 5, 10\}$	15
2.4	Gráfico boxplot para os dados de monóxido de carbono.	27
2.5	(a) Densidades estimadas dos modelos KwN e normal para os dados de monóxido de	
	carbono. (b) Funções de distribuição acumuladas estimadas e a fda empírica para os	
	dados de monóxido de carbono	28
3.1	Gráfico dos resíduos quantílicos versus valores ajustados para o modelo de regressão	
	KwN	35
3.2	Gráfico de envelope simulado dos resíduos quantílicos para o modelo de regressão KwN.	35
3.3	Gráfico da distância de Cook generalizada para o modelo de regressão KwN	36
3.4	Gráfico de $ d_{max} $ contra índice da observação considerando o esquema de perturbação	
	da ponderação de casos	36
4.1	Gráficos dos resíduos deviance modificado versus valores ajustados para o modelo de	
	regressão KwN	45
4.2	Gráfico de probabilidade normal com envelope simulado dos resíduos deviance mo-	
	dificado para o modelo de regressão KwN com censura	46
4.3	Gráfico de $ d_{max} $ contra índice da observação considerando o esquema de perturbação	
	da ponderação de casos.	46



Lista de Tabelas

2.1	Média e EQM das estimativas dos parâmetros da distribuição KwN de acordo com o tamanho amostral.	26
2.2	Medidas descritivas	27
2.3	Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrões dos parâmetros	
	para os modelos de regressão KwN, beta normal (BN), exponenciada normal (Exp-N)	
	e normal ajustados aos dados de CO e valores dos critérios de informação	28
2.4	Testes RV	28
3.1	Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros	
	para os modelos de regressão KwN, LTII-N, Exp-N e normal ajustados aos dados do	
	tempo entre falhas da fotocopiadora e valores dos critérios de informação	35
3.2	Mudanças relativas	36
3.3	Mudanças relativas	37
3.4	Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros	
	para os modelos de regressão KwN, ajustados aos dados do tempo entre falhas da	
	fotocopiadora sem as observações	37
4.1	Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros	
	para os modelos de regressão KwN, LTII-N, Exp-N e normal ajustados aos dados de	
	transplante de coração em Stanford	45
4.2	Critérios de informação	45
4.3	Mudanças relativas	47
4.4	Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros	
	para os modelos de regressão KwN, ajustados aos dados de transplante de coração	
	em Stanford sem as observações #26 e #91	47
A.1	Dados de transplante de coração em Stanford	57
A.2	Continuação da Tabela anterior	59
A.3	Continuação da Tabela anterior	60



Capítulo 1

Introdução

As classes de distribuições generalizadas têm despertado o interesse de muitos pesquisadores motivados pela busca de novas distribuições que se ajustem melhor a fenômenos reais. A forma generalizada de uma distribuição flexibiliza de forma satisfatória a modelagem de dados que apresentam assimetria (SOUZA et al., 2016).

Essa nova gama de distribuições dá-se principalmente em virtude da adição de novos parâmetros a distribuições clássicas, tais como a distribuição normal (Eugene et al., 2002). Tahir e Nadarajah (2015) e Tahir e Cordeiro (2016) apresentaram uma revisão abrangente sobre as principais classes de distribuições generalizadas desenvolvidas até 2016.

Amoroso (1925) foi um dos primeiro autores a obter distribuições generalizadas contínuas, abordando em seu trabalho a distribuição gama generalizada. As classes de distribuições generalizadas mais estudadas nos últimos anos foram as exponencializadas, apresentadas inicialmente por Mudholkar et al. (1995), as obtidas pelo método desenvolvido por Marshall e Olkin (1997), as baseadas na distribuição beta (Eugene et al., 2002), as estendidas discutidas em Barros (2008) e as baseadas na distribuição Kumaraswamy, desenvolvidas por Cordeiro e de Castro (2011).

As propriedades da família exponencializada têm sido estudadas por diversos pesquisadores. Mudholkar e Srivastava (1993) obtiveram a distribuição Weibull exponencializada, Gupta et al. (1998) desenvolveram a classe geral de distribuições exponenciais, Gupta e Kundu (1999) introduziram a distribuição exponencial generalizada, Nadarajah (2005) definiu a distribuição Pareto exponencializada, Nadarajah e Kotz (2006) introduziram a distribuição beta exponencializada, Nadarajah (2006) estudou a distribuição Gumbel exponencializada e Nadarajah (2011) discutiu as propriedades da distribuição exponencial exponencializada.

Desde 2002, diversas distribuições pertencentes à classe de distribuições beta generalizadas (beta-G) surgiram na literatura como, por exemplo, a distribuição beta logística proposta por Ojo e Olapade (2003), a distribuição beta Gumbel introduzida por Nadarajah e Kotz (2004), a distribuição beta exponencial desenvolvida por Nadarajah e Kotz (2006), a distribuição beta exponencial generalizada exponencializada introduzida por Barreto-Souza et al. (2010), a distribuição beta half-normal generalizada proposta por Pescim et al. (2010), a distribuição beta generalizada estudada por (Eugene et al. , 2002) e a distribuição beta Fréchet definida por (Nadarajah e Kotz , 2004).

Barros (2008) apresentou a função de distribuição acumulada, função de densidade de probabilidade e os momentos de várias distribuições estendidas, porém não fez nenhuma aplicação mostrando a eficiência dessas novas distribuições. As distribuições introduzidas por ele foram:

exponencial estendida, uniforme estendida, Weibull estendida, Pareto estendida, logística padrão estendida, qui-quadrado estendida, gama estendida, Fréchet estendida e Gumbel estendida.

Com respeito à classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas, Cordeiro e de Castro (2011) introduziram as distribuições Kw-gama, Kw-Gumbel, Kw-gaussiana inversa, Kw-normal (KwN) e Kw-Weibull. de Pascoa et al. (2011) apresentaram a distribuição Kumaraswamy-gama generalizada, Santana (2010) propôs as distribuições Kumaraswamy-logística e Kumaraswamy-logística e Paranaíba (2012) propôs a distribuição Kumaraswamy-Burr XII.

As distribuições generalizadas também desempenham um papel importante em análise de sobrevivência Uma das razões é que a generalização de uma distribuição conhecida pode permitir ao modelo resultante acomodar formas não monótonas para a função de taxa de risco.

Inicialmente, o objetivo era centrado na obtenção das propriedades dessas novas distribuições e, mais recentemente, os estudiosos do tema passaram a incorporar modelos de regressão a elas. Nos trabalhos de Gupta e Kundu (2001), Nadarajah e Kotz (2004), Nadarajah e Kotz (2006) e Andrade et al. (2015) foram investigadas propriedades tais como expansão para função de densidade e função de distribuição, função quantílica, momentos, momentos incompletos, função geradora de momentos, assimetria, curtose, desvio médio, entropia e estimação. Já os trabalhos de Silva et al. (2010), Hashimoto et al. (2010), De Santana et al. (2012) e Cruz et al. (2016) abordam modelos de regressão.

1.1 Objetivos

Um dos objetivos deste trabalho é estudar as propriedades de uma distribuição pertencente à classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas (Cordeiro e de Castro , 2011), denominada Kumaraswamy normal, formulada a partir da distribuição Kumaraswamy e da distribuição normal. Outro objetivo é construir dois modelos de regressão lineares do tipo localização-escala para a distribuição Kumaraswamy normal, um sem censura e o outro com a presença de censura.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em cinco capítulos. No Capítulo 2, fazemos um estudo aprofundado da distribuição KwN. Várias propriedades estruturais desta distribuição são derivadas, tais como a expansão da função densidade de probabilidade em série de potências, duas expressões para os momentos, função quantílica, função geradora de momentos, momentos incompletos, dois tipos de entropia, Shannon e Rényi e as estatísticas de ordem. No Capítulo 3, propomos um modelo de regressão linear do tipo localização-escala que denominamos de modelo de regressão Kumaraswamy normal (modelo de regressão KwN). Estimamos os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança e fornecemos algumas medidas de diagnóstico, como influência global, influência local e resíduos. No Capítulo 4, definimos um modelo de regressão linear do tipo localização-escala para dados censurados que denominamos de modelo de regressão KwN com censura. Os parâmetros do modelo foram estimados usando o método de máxima verossimilhança. Fornecemos também algumas medidas de diagnóstico, como influência local e resíduos. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as considerações finais. É importante ressaltar que no final de cada capítulo aplicamos a distribuição, discutida ao longo deste trabalho, a conjuntos de dados reais e comparamos os ajustes

com os de outros modelos. Os gráficos apresentados nesta tese foram produzidos utilizando-se o ambiente de programação R em sua versão 3.3.0 para o sistema operacional Windows que se encontra disponível gratuitamente no endereço http://www.r-project.org. Para mais detalhes ver Ihaka e Gentleman (1996) e Cribari-Neto e Zarkos (2003).

Capítulo 2

A distribuição Kumaraswamy normal

Neste capitulo, estudamos a distribuição Kumaraswamy normal (Cordeiro e de Castro , 2011), que é obtida considerando a distribuição normal como base na família Kumaraswamy-G e apresentamos algumas propriedades estruturais, tais como a função quantílica, momentos ordinários e incompletos e dois tipos de entropia. Consideramos a estimação dos parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança e realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo com o objetivo de avaliar esses estimadores. Também ilustramos a utilidade da distribuição por meio de uma aplicação a dados reais. O modelo apresenta melhores ajustes que outros modelos sob a mesma distribuição base e também com relação a outros modelos amplamente utilizados.

2.1 Introdução

Na última década foram publicadas novas famílias de distribuições contínuas que podem ser úteis para os estatísticos aplicados, generalizando distribuições existentes, por meio da adição de novos parâmetros obtendo-se modelos mais flexíveis. Elas podem servir como alternativas viáveis para outras distribuições na modelagem de dados reais que surgem em vários campos da ciência, como as ciências biológicas, hidrologia, medicina, meteorologia e engenharia, entre outras.

A adição de novos parâmetros de forma para expandir um modelo em uma família maior, a fim de fornecer distribuições assimétricas ou com caudas mais pesadas, desempenha um papel fundamental na teoria de distribuições. Por exemplo, para uma função de distribuição acumulada (fda) contínua G(x), Cordeiro e de Castro (2011) propuseram a distribuição Kumaraswamy-G (Kw-G) tendo fda F(x) dada por

$$F(x) = 1 - \{1 - G(x)^a\}^b, \qquad x \in \mathbb{R},$$
(2.1)

em que a > 0 e b > 0 são dois parâmetros de forma.

Para b=1, temos a distribuição Lehmann tipo I (LTI) ou a classe exponenciadas-G (exp-G) com parâmetro a. Para a=1, obtém-se a classe de distribuições Lehmann tipo II (LTII) com parâmetro b (Lehmann , 1953). Cada novo modelo Kw-G pode ser obtido a partir de uma distribuição G especificada. A fda G(x) é um caso especial de (2.1) quando a=b=1.

A função densidade de probabilidade (fdp) correspondente à (2.1) é

$$f(x) = a b g(x) G(x)^{a-1} \left\{ 1 - G(x)^a \right\}^{b-1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
(2.2)

em que g(x) = dG(x)/dx.

A distribuição Kumaraswamy-normal (KwN), objetivo de estudo de nosso trabalho, é definida pela fda

$$F(x) = 1 - \left\{ 1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^a \right\}^b, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

em que $\mu \in \mathbb{R}$ é um parâmetro de localização, $\sigma > 0$ é um parâmetro de escala, a > 0 e b > 0 são parâmetros de forma, e $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão.

A partir das equações (2.2) e (2.3), a função de sobrevivência da distribuição KwN é dada por

$$S(x) = P(X > x) = \left[1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^a\right]^b, \quad x \in \mathbb{R},$$

e a função de risco é expressa por

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{a b \phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{a-1}}{1 - \Phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{a}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
 (2.4)

A variável aleatória com f
da (2.3) é denotada por $X \sim \text{KwN}(a,b,\mu,\sigma)$. Para $\mu=0$ e $\sigma=1$, temos a distribuição KwN padrão.

Seja Z com distribuição KwN (a,b,0,1). Então, $X=\mu+\sigma Z$ tem distribuição KwN (a,b,μ,σ) . Daqui em diante, podemos trabalhar apenas com a variável aleatória Z tendo distribuição KwN padrão, uma vez que as propriedades matemáticas de X podem ser determinadas imediatamente a partir das de Z. A fda de Z segue de (2.3) com $\mu=0$ e $\sigma=1$ como

$$F(x) = 1 - \{1 - \Phi(x)^a\}^b, \qquad x \in \mathbb{R}.$$
 (2.5)

Assim, a fdp de Z é dada por

$$f(x) = a b \phi(x) \Phi(x)^{a-1} \left\{ 1 - \Phi(x)^a \right\}^{b-1}, \qquad x \in \mathbb{R},$$
(2.6)

em que $\phi(\cdot)$ é a função densidade da distribuição normal padrão. Um dos principais benefícios da distribuição KwN é a sua capacidade de adaptação a dados reais assimétricos que podem não ser devidamente ajustados por distribuições existentes. Esta distribuição permite uma maior flexibilidade de suas caudas e pode ser amplamente aplicada em muitas áreas de engenharia e biologia. Os parâmetros a e b governam a assimetria e controlam as caudas mais pesadas/leves como forma de fornecer um modelo mais flexível (Figura 2.1). Além disso, pode ser adicionada entropia para o centro da densidade KwN. Note que $\phi(x)$ é uma função densidade simétrica, mas a densidade f(x) será assimétrica.

A equação (2.5) tem propriedades tratáveis especialmente para simulações, uma vez que a função quantílica (fq) de Z tem uma forma simples, ou seja, $z = Q(u) = Q_{SN}([1 - (1 - u)^{1/b}]^{1/a})$, em que $Q_{SN}(u) = \Phi^{-1}(u)$ é a fq da distribuição normal padrão. Assim, podemos gerar variáveis KwN padronizadas por $z = Q_{SN}([1 - (1 - U)^{1/b}]^{1/a})$, em que U é uma variável uniforme no intervalo (0,1).

Propriedade 2.1: Se $X \sim KwN(a, b, \mu, \sigma^2)$, então $Y = cX \sim KwN(a, b, c\mu, c\sigma)$.

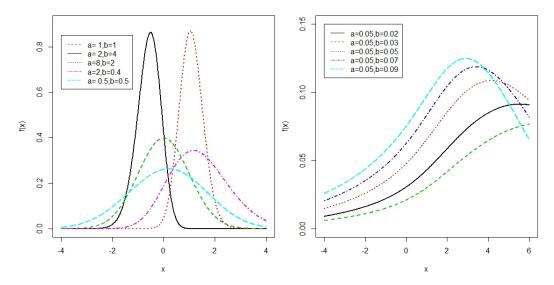


Figura 2.1: Gráfico da função densidade da distribuição KwN(a,b,0,1) para alguns valores dos parâmetros a e b.

Demonstração.

$$\begin{split} \Pr(Y \leq y) &= \Pr(cX \leq y) = \Pr(X \leq y/c) \\ &= 1 - \left\{1 - \Phi\left(\frac{\frac{y}{c} - \mu}{\sigma}\right)^{a}\right\}^{b} \\ &= 1 - \left\{1 - \Phi\left(\frac{y - c\mu}{c\sigma}\right)^{a}\right\}^{b}, \end{split}$$

ou seja, $cX \sim KwN(a, b, c\mu, c\sigma)$.

2.2 Expansões úteis

Nesta seção, obtemos expansões úteis para (2.6) utilizando o conceito de distribuições exponenciadas. A fdp e fda das distribuições exponenciadas normais (com parâmetro a>0) são dadas por $h_a(x)=a\,\phi(x)\,\Phi(x)^{a-1}$ e $H_a(x)=\Phi(x)^a$, respectivamente. As propriedades de várias distribuições exponenciadas têm sido estudadas por alguns autores nos últimos anos (Mudholkar *et al.*, 1995); (Nadarajah e Gupta, 2007).

Para qualquer número real $d \in |z| < 1$, a expansão binomial generalizada é definida por

$$(1-z)^d = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{d}{k} z^k.$$
 (2.7)

Aplicando a série de potências (2.7) à equação (2.5), a fda de Z pode ser escrita como

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \binom{b}{j+1} \Phi(x)^{(j+1)a} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+1} \binom{b}{j+1} H_{(j+1)a}(x).$$

Diferenciando F(x), a fdp de Z em (2.6) pode ser expressa como

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^{j} b\binom{b-1}{j}}{(j+1)} h_{(j+1)a}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} w_{j} h_{(j+1)a}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} w_{j} (j+1)a \phi(x) \Phi(x)^{(j+1)a-1}$$

$$= \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} t_{j} \Phi(x)^{(j+1)a-1}, \qquad (2.8)$$

em que $w_j = (-1)^j b\binom{b-1}{j}/(j+1)$ e $t_j = (j+1) a w_j$.

Em seguida, derivamos uma expansão para $\Phi(x)^{\alpha}$ (para algum $\alpha > 0$ real) escrevendo $\Phi(x)^{\alpha} = \{1 - [1 - \Phi(x)]\}^{\alpha}$ e usando (2.7) duas vezes. Obtemos a série de potências convergente

$$\Phi(x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{k+i} {\alpha \choose i} {i \choose k} \Phi(x)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} s_{k}(\alpha) \Phi(x)^{k}, \qquad (2.9)$$

em que

$$s_k(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{k+i} {\alpha \choose i} {i \choose k}.$$

Combinando (2.8) e (2.9) e trocando somas, podemos reescrever f(x) como

$$f(x) = \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} t_j \sum_{k=0}^{\infty} s_k [(j+1)a - 1] \Phi(x)^k$$

= $\phi(x) \sum_{k=0}^{\infty} v_k \Phi(x)^k$, (2.10)

em que $v_k = \sum_{j=0}^{\infty} t_j \ s_k[(j+1)a - 1].$

As equações (2.8) e (2.10) são séries assintóticas convergentes. As quantidades entre parênteses nessas equações funcionam como correções para a função de densidade KwN. Estes são os principais resultados desta seção.

2.3 Momentos

Algumas das características interessantes de uma distribuição são aquelas que podem ser estudadas através dos momentos, por exemplo, dispersão, assimetria e curtose. Por isso, precisa-se enfatizar a necessidade e a importância dos momentos em qualquer análise estatística. Nesta seção, derivamos duas representações para o r-ésimo momento ordinário da distribuição KwN padrão, definido por $\mu'_r = E(Z^r)$. Os momentos ordinários de $X \sim \text{KwN}(a,b,\mu,\sigma)$ são imediatamente obtidos a partir dos momentos ordinários de $Z \sim \text{KwN}(a,b,0,1)$ por $E(X^r) = E[(\mu + \sigma Z)^r] = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \mu^{r-k} \sigma^k E(Z^k)$.

Definição 2.1. O r-ésimo momento ordinário de uma variável aleatória Y com fdp f(y) é dado por

$$E(Y^r) = \int_{-\infty}^{\infty} y^r f(y) dy.$$
 (2.11)

Definição 2.2. O r-ésimo momento central de uma variável aleatória Y com fdp f(y) é dado por

$$E((y-\mu)^r) = \int_{-\infty}^{\infty} (y-\mu)^r f(y) dy.$$

Definição 2.3. A função geradora de cumulantes de uma variável aleatória Y com fdp f(y) \acute{e} dada por

$$g(t) = \log[E(\exp(tX))].$$

O r-ésimo cumulante de Y é o coeficiente k_r na expressão de g(t) em série de Taylor dada por $\sum_{r=1}^{\infty} \frac{k_r t^r}{r!}.$

Teorema 2.1. Para uma variável aleatória $Z \sim KwN(a, b, 0, 1)$, o r-ésimo momento ordinário é

$$\mu_r' = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \, \tau_{r,k},$$

em que $\tau_{r,k}$ é o (r,k)-ésimo momento ponderado por probabilidade (PWM) (para r e k inteiros positivos) da distribuição normal padrão.

Demonstração. De fato, a quantidade μ'_r pode ser derivada a partir de (2.10) e da definição em (2.11) como

$$\mu'_{r} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{r} \sum_{k=0}^{\infty} v_{k} \Phi(x)^{k} \phi(x) dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} v_{k} \int_{-\infty}^{\infty} x^{r} \Phi(x)^{k} \phi(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k} \tau_{r,k},$$
(2.12)

em que $\tau_{r,k}$ é dado por

$$\tau_{r,k} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, \Phi(x)^k \, \phi(x) dx.$$

Agora, fornecemos uma expressão para $\tau_{r,k}$. A f
da da distribuição normal padrão pode ser escrita como

 $\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \right\}, \quad x \in \mathbb{R},$

em que erf(x) é a série de potências para a função erro definida por

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)m!}.$$

Como estamos integrando no intervalo do raio de convergência em torno de 0, a série de potências para $\operatorname{erf}(x)$ também converge para todos os valores reais. Para pequenos valores de |x|, particularmente aqueles menores do que 1, a convergência desta série é bastante rápida com um pequeno número de termos. No entanto, quando |x| é grande, a convergência pode ser bastante lenta, pelo menos inicialmente.

Usando a expansão binomial dada em (2.7) e trocando termos, obtemos

$$\tau_{r,k} = \frac{1}{2^k \sqrt{2\pi}} \sum_{p=0}^k {k \choose p} \int_{-\infty}^\infty x^r \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{k-p} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2^k \sqrt{2\pi}} \sum_{p=0}^k {k \choose p} I(k,p), \qquad (2.13)$$

em que
$$I(k,p) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^{k-p} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$
.

Com base na série de potências para $\operatorname{erf}(x)$ acima, obtemos $\tau_{r,k}$ a partir de resultados de Nadarajah (2008, Equações (9) - (11)). Primeiro, necessitamos da função Lauricella do tipo A definida por

$$F_A^{(n)}(a; b_1, \dots, b_n; c_1, \dots, c_n; x_1, \dots, x_n) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1+\dots+m_n} (b_1)_{m_1} \dots (b_n)_{m_n}}{(c_1)_{m_1} \dots (c_n)_{m_n}} \frac{x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}}{m_1! \dots m_n!}.$$
(2.14)

Usando a série de potências para a função erro, temos

$$I(k,p) = \int_{-\infty}^{\infty} x^{r} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right) \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m} x^{2m+1}}{2^{m+\frac{1}{2}} (2m+1)m!}\right]^{k-p} dx$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{k-p} \sum_{m_{1}=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-p}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_{1}+\dots+m_{k-p}}}{2^{m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{k-p}{2}} (2m_{1}+1)\dots(2m_{k-p}+1)m_{1}!\dots m_{k-p}!}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(m_{1}+\dots+m_{k-p})+r+k-p} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{k-p} \sum_{m_{1}=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-p}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_{1}+\dots+m_{k-p}}}{2^{m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{k-p}{2}} (2m_{1}+1)\dots(2m_{k-p}+1)m_{1}!\dots m_{k-p}!}$$

$$\times 2^{m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{r+k-p+1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{x^{2}}{2}\right)^{(m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{r+k-p+1}{2})-1} \exp\left(-\frac{x^{2}}{2}\right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\right)^{k-p} 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m_{1}=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-p}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{r+k-p+1}{2}}-1}{2^{k-p}(m_{1}+\frac{1}{2})\dots(m_{k-p}+\frac{1}{2})m_{1}!\dots m_{k-p}!}$$

$$\times \Gamma\left(m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{r+k-p+1}{2}\right)$$

$$= \pi^{\frac{k-p}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}} \sum_{m_{1}=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-p}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m_{1}+\dots+m_{k-p}}}{(m_{1}+\frac{1}{2})\dots(m_{k-p}+\frac{1}{2})m_{1}!\dots m_{k-p}!}$$

$$\times \Gamma\left(m_{1}+\dots+m_{k-p}+\frac{r+k-p+1}{2}\right), \qquad (2.15)$$

para r+k-p par. Agora, usando o fato de que $(f)_k=\Gamma(f+k)/\Gamma(f)$ e a definição em (2.14),

podemos simplificar (2.15) para

$$I(k,p) = \pi^{\frac{p-k}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}} \Gamma\left(\frac{r+k-p+1}{2}\right) \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{k-p}=0}^{\infty} \frac{(r+k-p+1)_{m_1+\dots+m_{k-p}}(-1)^{m_1+\dots+m_{k-p}}}{(m_1+\frac{1}{2})\dots(m_{k-p}+\frac{1}{2})m_1!\dots m_{k-p}!}$$

$$= \pi^{\frac{p-k}{2}} 2^{\frac{r+1}{2}+k-p} \Gamma\left(\frac{r+k-p+1}{2}\right)$$

$$\times F_A^{k-p} \left(\frac{r+k-p+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right). \tag{2.16}$$

Combinando (2.13) e (2.16), se r + k - p é par, podemos escrever

$$\tau_{r,k} = 2^{r/2} \pi^{-(k+1/2)} \sum_{p=0}^{k} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{p} \binom{k}{p} \Gamma\left(\frac{r+k-p+1}{2}\right) \times F_{A}^{(k-p)} \left(\frac{r+k-p+1}{2}; \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}; -1, \dots, -1\right), \tag{2.17}$$

em que os termos de $\tau_{r,k}$ desaparecem quando r+k-p é ímpar. Então, os momentos de Z podem ser determinados a partir da equação (2.12) e das quantidades $\tau_{r,k}$ em (2.17).

Ao longo deste trabalho, aplicamos a equação de Gradshteyn e Ryzhik (2008, Seção 0.314) para uma série de potências gerada para qualquer inteiro positivo k, dada por

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m\right)^k = \sum_{m=0}^{\infty} c_{k,m} x^m, \tag{2.18}$$

em que $c_{k,0}=a_0^k$ e os coeficientes $c_{k,m}$ (para $m=1,2,\ldots$) são determinados recursivamente a partir da equação

$$c_{k,m} = (ka_0)^{-1} \sum_{n=1}^{m} [n(k+1) - m] a_n c_{k,m-n}.$$

A segunda fórmula para μ_r' baseia-se na fq da distribuição normal padrão e é descrita no Teorema a seguir.

Teorema 2.2. Se $Z \sim KwN(a, b, 0, 1)$, então a partir da fq da distribuição normal padrão o r-ésimo momento ordinário de Z pode ser escrito como

$$\mu_r' = \sum_{\substack{n,l,k=0\\l}}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-l} (\sqrt{2\pi})^n f_{r,n} v_k}{l+k+1} \binom{n}{l}.$$

Demonstração. Com efeito, segue da equação em (2.10) e da definição em (2.11) que

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \sum_{k=0}^{\infty} v_k \, \Phi(x)^k \, \phi(x) dx.$$

Sendo $u = \Phi(x)$, segue que $x = \Phi^{-1}(u)$. Dessa forma, trocando a soma e a integral podemos reescrever μ'_r acima em termos de $Q_{SN}(u) = \Phi^{-1}(u)$ como

$$\mu_r' = \sum_{k=0}^{\infty} v_k \int_0^1 Q_{SN}(u)^r u^k du.$$
 (2.19)

A fq da distribuição normal padrão pode ser expandida em uma série de potências convergente (ver Steinbrecher , 2002)

$$Q_{SN}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i v^{2i+1}, \qquad (2.20)$$

em que $v = \sqrt{2\pi}(u - 1/2)$ e os b_i 's são determinados recursivamente a partir de

$$b_{i+1} = \frac{1}{2(2i+3)} \sum_{r=0}^{i} \frac{(2r+1)(2i-2r+1) b_r b_{i-r}}{(r+1)(2r+1)}.$$

Aqui, $b_0 = 1$, $b_1 = 1/6$, $b_2 = 7/120$, $b_3 = 127/7560$,...

Podemos reescrever (2.20) como

$$Q_{SN}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \, v^n, \tag{2.21}$$

em que os coeficientes d'_n s são dados por $d_n=0$ para $i=0,2,4,\ldots$ e $d_n=b_{(n-1)/2}$ para $n=1,3,5,\ldots$

Em seguida, baseado em (2.18) e (2.21), podemos escrever $Q_{SN}(u)^r = (\sum_{n=0}^{\infty} d_n v^n)^r = \sum_{n=0}^{\infty} f_{r,n} v^n$, em que $f_{r,n} = (na_0)^{-1} \sum_{i=1}^{n} [i(r+1) - n] d_i f_{kr,n-i}$ (para $n \ge 0$) e $f_{0,n} = d_0^n$.

Segue das equações (2.19) e (2.20) que

$$\mu'_{r} = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k} \int_{0}^{1} \sum_{n=0}^{\infty} f_{r,n} v^{n} u^{k} du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{r,n} v_{k} \int_{0}^{1} v^{n} u^{k} du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{r,n} v_{k} \int_{0}^{1} [\sqrt{2\pi} (u - 1/2)]^{n} u^{k} du$$

Usando o resultado $\int_0^1 (u-1/2)^n u^k du = \sum_{l=0}^\infty \frac{(-1/2)^{n-l}}{l+k+1} \binom{n}{l}$, obtemos

$$\mu'_{r} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-l} (\sqrt{2\pi})^{n} f_{r,n} v_{k}}{l+k+1} \binom{n}{l}$$
$$= \sum_{n,l,k=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-l} (\sqrt{2\pi})^{n} f_{r,n} v_{k}}{l+k+1} \binom{n}{l}.$$

Portanto, μ'_r é expresso como

$$\mu_r' = \sum_{\substack{n,l,k=0}}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-l} (\sqrt{2\pi})^n f_{r,n} v_k}{l+k+1} \binom{n}{l}. \tag{2.22}$$

As equações (2.12) e (2.22) são os principais resultados desta seção. Elas podem ser calculadas usando plataformas analíticas como MATHLAB e MATHEMATICA com 20 ou 30 termos. As expansões algébricas estabelecidas para determinar os momentos de Z destas equações podem ser mais eficientes do que computá-las pela integração numérica de (2.6), que pode ser propensa a erros de arredondamento, entre outros.

Os momentos centrais (μ_s) e cumulantes (κ_s) de Z são determinados a partir dos momentos ordinários como $\mu_s = \sum_{k=0}^s {s \choose k} (-1)^k \mu_1'^s \mu_{s-k}'$ e $\kappa_s = \mu_s' - \sum_{k=1}^{s-1} {s-1 \choose k-1} \kappa_k \mu_{s-k}'$, respectivamente, em que $\kappa_1 = \mu_1'$. Os coeficientes de assimetria $(\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2})$ e curtose $(\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2)$ de Z são apenas o terceiro e quarto cumulantes padronizados. Elas são importantes para derivar expansões de Edgeworth para a fda e fdp da soma padronizada e da média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas seguindo a distribuição KwN padrão.

O r-ésimo momento fatorial de Z é $\mu'_{(r)} = E(Z^{(r)}) = E[Z(Z-1) \times \cdots \times (Z-r+1)] = \sum_{l=0}^r s(r,l) \, \mu'_r$, em que $s(r,l) = (l!)^{-1} [d^l l^{(r)}/dx^l]_{x=0}$ é o número de Stirling do primeiro tipo (Abramowitz e Stegun , 1965).

2.4 Série de potências quantílica

A função quantílica é útil para obter várias propriedades matemáticas de distribuições. Em alguns casos, basta inverter a fda para obter a função quantílica. No entanto, para outras distribuições, essa solução não é possível. Nesses casos, pode-se adotar métodos de série de potências para a obtenção da função quantílica.

A fq de Z é dada por $z = Q(u) = Q_{SN}([1 - (1 - u)^{1/b}]^{1/a})$ (ver Seção 2.1). Os efeitos dos parâmetros de forma adicionais a e b na assimetria e curtose de Z podem ser baseados em medidas quantílicas. A assimetria de Bowley (Kenney e Keeping , 1962) é dada por

$$B = \frac{Q(3/4) + Q(1/4) - 2Q(1/2)}{Q(3/4) - Q(1/4)}.$$

A curtose de Moors (Moors, 1988) é dada por

$$M = \frac{Q(3/8) - Q(1/8) + Q(7/8) - Q(5/8)}{Q(6/8) - Q(2/8)}.$$

Estas medidas são pouco sensíveis a outliers e existem mesmo para distribuições sem momentos. Nas Figuras 2.2 e 2.3 exibimos gráficos destas medidas como funções dos parâmetros a e b da distribuição KwN, respectivamente. Estes gráficos mostram que ambas as medidas são muito sensíveis dependendo dos valores fixados para os parâmetros de forma.

Expandindo o binômio em v na equação (2.21), temos

$$Q_{SN}(u) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i} (2\pi)^{i/2} (-1/2)^{i-m} d_i \binom{i}{m} u^m.$$

Permutando $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{i} \text{ por } \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty}$, obtemos

$$Q_{SN}(u) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m u^m,$$

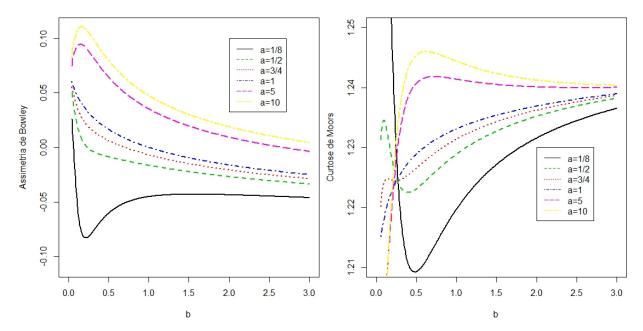


Figura 2.2: Assimetria de Bowley (a) e curtose de Moors (b) da distribuição KwN para 0 < b < 3 e $a \in \{1/8, 1/2, 3/4, 1, 5, 10\}$.

em que $p_m = \sum_{i=m}^{\infty} (2\pi)^{i/2} (-1/2)^{i-m} d_i \binom{i}{m}$.

Com base na última equação, a f
q de ${\cal Z}$ torna-se

$$Q(u) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \left[1 - (1-u)^{1/b}\right]^{m/a}.$$

Usando (2.7) duas vezes, obtemos

$$[1 - (1 - u)^{1/b}]^{m/a} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m/a}{k} (1 - u)^{k/b}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m/a}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{k/b}{j} u^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+j} \binom{m/a}{k} \binom{k/b}{j} u^j = \sum_{j=0}^{\infty} \nu_{j,m} u^j$$

em que $\nu_{j,m} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+j} \binom{m/a}{k} \binom{k/b}{j}$. Então, podemos reescrever Q(u) como

$$Q(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \eta_j \, u^j, \tag{2.23}$$

em que $\eta_j = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \, \nu_{j,m}$.

A equação (2.23) indica que a função quantílica da distribuição KwN pode ser expressa como uma série de potências. Assim, várias propriedades matemáticas de Z podem ser dadas em termos de integrais sobre (0, 1). De fato, seja $W(\cdot)$ uma função integrável na reta real. Podemos escrever

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) f(x) dx = \int_{0}^{1} W\left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j} u^{j}\right) du.$$
 (2.24)

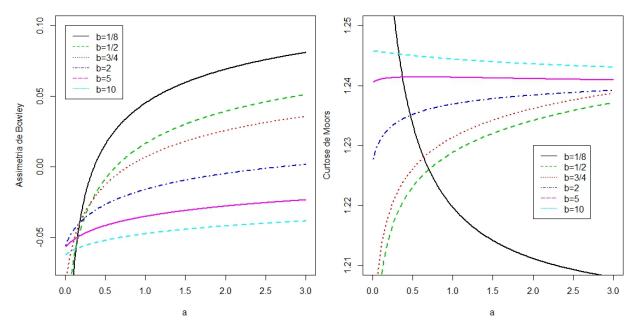


Figura 2.3: Assimetria de Bowley (a) e curtose de Moors (b) da distribuição KwN para 0 < a < 3 e $b \in \{1/8, 1/2, 3/4, 1, 5, 10\}$.

Com efeito,

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} W(x) dF(x).$$

Fazendo a mudança de variável F(x) = u, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,f(x)dx \quad = \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(x)\,dF(x) = \int_{0}^{1} W(F^{-1}(u))du$$

Lembrando que $F^{-1}(u) = Q(u)$ e substituindo a equação (2.23) na última integral acima, obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} W(x) f(x) dx = \int_{0}^{1} W\left(\sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j} u^{j}\right) du.$$

As equações (2.23) e (2.24) são os principais resultados desta seção. Elas são muito úteis para determinar várias propriedades estruturais da KwN usando funções especiais $W(\cdot)$. Além disso, a integral do lado direito é geralmente mais simples do que a integral do lado esquerdo. Apresentamos aplicações das expressões (2.23) e (2.24) para obter funções geradoras e momentos incompletos nas duas seções a seguir.

2.5 Funções geradoras

A função geradora de momentos (fgm), se existir, determina de forma unívoca a distribuição da variável aleatória, ou seja, existe uma única distribuição com função geradora M(t). Por outro lado, se duas variáveis possuem uma mesma função geradora, então possuem uma mesma distribuição. Aqui, obtemos a fgm da distribuição KwN (a, b, 0, 1).

Definição 2.4. A função geradora de momentos de uma variável aleatória Y é definida por

$$M(t) = E[\exp(tY)], \qquad t \in \mathbb{R}.$$
 (2.25)

Teorema 2.3. Se $Z \sim KwN(a, b, 0, 1)$, então a fgm de Z é dada por

$$M(t) = \exp(\eta_0 t) \sum_{k=0}^{\infty} s_k t^k,$$

em que $s_k = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,k}/(n+1)!$ (para $k \ge 0$) e as quantidades $B_{n,k} = B_{n,k}(\eta_1, 2\eta_2, \dots, (n-k+1)! \eta_{n-k+1})$ podem ser facilmente determinadas.

Demonstração. A partir da Definição 2.4 e das equações (2.23) e (2.24), podemos escrever

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(t x) f(x) dx$$

$$= \int_{0}^{1} \exp\left(t \sum_{j=0}^{\infty} \eta_{j} u^{j}\right) du$$

$$= \exp(\eta_{0} t) \int_{0}^{1} \exp\left(t \sum_{j=1}^{\infty} \eta_{j} u^{j}\right) du. \tag{2.26}$$

Os polinômios exponenciais parciais de Bell são definidos por Comtet (1974) como

$$\exp\left(t\sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \frac{u^j}{j!}\right) = \sum_{n k=0}^{\infty} \frac{B_{n,k}}{n!} u^n t^k,$$
 (2.27)

em que

$$B_{n,k} = B_{n,k}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n-k+1}) = \sum \frac{n! \, \eta_1^{c_1} \, \eta_2^{c_2} \, \dots \, \eta_{n-k+1}^{c_{n-k+1}}}{c_1! \, c_2! \dots c_{n-k+1}! \, (1!)^{c_1} (2!)^{c_2} \dots (n-k+1)!^{c_{n-k+1}}},$$

e a soma ocorre sobre todos os inteiros $c_1, c_2, \ldots \geq 0$ que verificam $c_1 + 2c_2 + 3c_3 + \cdots = n$ e $c_1 + c_2 + c_3 + \cdots = k$. Estes polinômios podem ser computados como $\mathsf{BellY[n,k,\{1,\ldots,n-k+1\}]}$ no $\mathsf{MATHEMATICA}$ e como $\mathsf{IncompleteBellB(n,k,z[1],z[2],\ldots,z[n-k+1])}$ no MAPLE .

Aplicando (2.27) à equação (2.26) e trocando a ordem da soma e da integral, obtemos por integração simples

$$M(t) = \exp(\eta_0 t) \int_0^1 \sum_{n,k=0}^\infty \frac{B_{n,k}}{n!} u^n t^k du$$

$$= \exp(\eta_0 t) \sum_{n,k=0}^\infty \frac{B_{n,k}}{n!} t^k \int_0^1 u^n du$$

$$= \exp(\eta_0 t) \sum_{n,k=0}^\infty \frac{B_{n,k}}{(n+1)n!} t^k$$

$$= \exp(\eta_0 t) \sum_{n,k=0}^\infty \frac{B_{n,k} t^k}{(n+1)!} = \exp(\eta_0 t) \sum_{k=0}^\infty s_k t^k.$$
(2.28)

A equação (2.28) dá a fgm de Z como uma função exponencial multiplicada por um polinômio infinito em t. É o resultado principal desta seção. Para a maioria das aplicações práticas, o grau mais alto do polinômio em (2.28) poderia ser 6.

A função geradora acumulada (fga) de Z é dada por $K(t) = \log[M(t)]$. As aproximações do ponto de sela são as principais aplicações da fga em Estatística e fornecem fórmulas de aproximação altamente precisas para a função densidade da soma e da média de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid). Sejam Z_1, \ldots, Z_n variáveis aleatórias KwN iid com fga comum K(t). Seja $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$ e $K^{(j)}(\lambda) = d^j K(\lambda)/d\lambda^j$ (para $j \geq 1$). Definimos $\hat{\lambda}$ a partir da equação (não linear usual) $K^{(1)}(s, \hat{\lambda}) = s/n$ e $z = \{s - nK^{(1)}(\lambda)\}/\sqrt{nK^{(2)}(\lambda)}$.

As funções de densidade de S_n e $\overline{Z}_n = S_n/n$ podem ser expressas como aproximações de ponto de sela de Daniels dadas por

$$f_{S_n}(s) = \frac{\exp\{nK(\hat{\lambda}) - s\hat{\lambda}\}}{\sqrt{2n\pi K^{(2)}(\hat{\lambda})}} \{1 + N(\hat{\lambda}) + O(n^{-2})\}$$

е

$$f_{\overline{Z}_n}(z) = \left\{\frac{n}{2\pi K^{(2)}(\hat{\lambda})}\right\}^{1/2} \exp[n\{K(\hat{\lambda}) - \hat{\lambda}z\}]\{1 + M(\hat{\lambda}) + O(n^{-2})\},$$

em que

$$N(\lambda) = \frac{3\gamma_2(\lambda) - 5\gamma_1(\lambda)^2}{24n},$$

 $\gamma_1(\lambda) = K^{(3)}(\lambda)/K^{(2)}(\lambda)^{3/2}$ e $\gamma_2(\lambda) = K^{(4)}(\lambda)/K^{(2)}(\lambda)^2$ são o terceiro e o quarto cumulantes padronizados de Z, respectivamente. O leitor que desejar mais detalhes pode consultar o livro de Cordeiro (1999, Seção 3.5). As aproximações para $f_{S_n}(s)$ e $f_{\overline{Z}_n}(z)$ normalmente darão bons resultados na prática.

2.6 Momentos incompletos

Definição 2.5. O r-ésimo momento incompleto de uma variável aleatória Y é definido por

$$m_r(q) = \int_{-\infty}^q y^r f(y) dy.$$

Vamos obter os momentos incompletos da variável aleatória $Z \sim \text{KwN}(a, b, 0, 1,)$. Com base na equação (2.24), podemos escrever

$$m_r(q) = \int_0^{F(q)} \left(\sum_{j=0}^\infty \eta_j \, u^j \right)^r du.$$

Usando (2.18) e após a integração, obtemos

$$m_r(q) = \int_0^{F(q)} \left(\sum_{j=0}^\infty \eta_j u^j \right)^r du = \sum_{j=0}^\infty \frac{\delta_{r,j}}{j+1} F(q)^{j+1}, \tag{2.29}$$

em que (para $r \ge 0$) $\delta_{r,0} = \eta_0^r$, $\delta_{r,j} = (r\eta_0)^{-1} \sum_{n=1}^j [n(r+1) - j] \eta_n \delta_{r,j-n}$, para $j \ge 1$.

A dispersão de Z pode ser avaliada pela totalidade dos desvios em relação à média e à mediana. Esses desvios são conhecidos como desvios médios em torno da média $(\delta_1 = E|Z - \mu_1'|)$ e da mediana $(\delta_2 = E|Z - M|)$, em que $\mu_1' = E(Z)$ é a média e $M = Q(0.5) = \Phi^{-1}([1 - 0.5^{1/b}]^{1/a})$ é a mediana. Eles podem ser expressos em termos do primeiro momento incompleto, dados por

$$\delta_1 = 2\mu_1' F(\mu_1') - 2m_1(\mu_1')$$
 e $\delta_2 = \mu_1' - 2m_1(M)$,

respectivamente, em que $m_1(q)$ é obtido a partir de (2.29) com r=1.

2.7 Momentos ponderados por probabilidade

O (r, j)-ésimo momento ponderado por probabilidade (PWM), para r e j inteiros positivos, da distribuição KwN padrão, denotado por $\rho_{r,j}$, é dado por

$$\rho_{r,j} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r F(x)^j f(x) dx. \tag{2.30}$$

A partir da equação (2.8), obtemos

$$F(x) = \Phi(x)^a \sum_{m=0}^{\infty} e_m \, \Phi(x)^{m \, a},$$

em que $e_m = (-1)^{m+1} {b \choose m+1}$.

Então, usando (2.18), podemos escrever

$$F(x)^{j} = \Phi(x)^{ja} \left(\sum_{m=0}^{\infty} e_m \, \Phi(x)^{ma} \right)^{j} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{j,m} \, \Phi(x)^{(j+m)a},$$

em que $f_{j,m}$ (para $m=1,2,\ldots$) segue recursivamente a partir de $f_{j,m}=(j\,e_0)^{-1}\sum_{n=1}^m[n(j+1)-m]\,e_n\,f_{j,m-n}$ (para $m\geq 1$) e de $f_{j,0}=e_0^j$.

Além disso, obtemos de (2.9)

$$F(x)^{j} = \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{k,j} \,\Phi(x)^{k}, \qquad (2.31)$$

em que $\kappa_{k,j} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{j,m} \, s_k((j+m) \, a)$ (para $k \geq 0$ e $j \geq 1$).

Inserindo (2.10) e (2.31) na equação (2.30), obtemos

$$\rho_{r,j} = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \sum_{k=0}^{\infty} \kappa_{k,j} \, \Phi(x)^k \sum_{m=0}^{\infty} \phi(x) \, v_m \, \Phi(x)^m \, du$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_{k,j} \, v_m \, \int_{-\infty}^{\infty} x^r \phi(x) \, \Phi(x)^{k+m} \, du$$

$$= \sum_{k,m=0}^{\infty} \kappa_{k,j} \, v_m \, Q_{SN}(u)^r \, u^{k+m} \, du.$$

Fazendo $u = \Phi(x)$, podemos rescrever $\rho_{r,j}$ como

$$\rho_{r,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \kappa_{k,j} v_m \int_0^1 Q_{SN}(u)^r u^{k+m} du$$
$$= \sum_{k,m=0}^{\infty} \kappa_{k,j} v_m \int_0^1 Q_{SN}(u)^r u^{k+m} du.$$

Como provado logo após a equação (2.21), podemos escrever $Q_{SN}(u)^r = \sum_{n=0}^{\infty} f_{r,n} v^n$. Assim,

$$\rho_{r,j} = \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa_{k,j} v_m f_{r,n} \int_0^1 [\sqrt{2\pi} (u - 1/2)]^n u^{k+m} du$$

$$= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \kappa_{k,j} v_m f_{r,n} (\sqrt{2\pi})^n \int_0^1 (u - 1/2)^n u^{k+m} du$$

$$= \sum_{k,m,n=0}^{\infty} \kappa_{k,j} v_m f_{r,n} (\sqrt{2\pi})^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-s}}{s+k+m+1} \binom{n}{s}.$$

Finalmente, obtém-se

$$\rho_{r,j} = \sum_{k,m,n,s=0}^{\infty} \frac{(-1/2)^{n-s} (\sqrt{2\pi})^n \kappa_{k,j} v_m f_{r,n}}{s+k+m+1} \binom{n}{s}.$$

O limite infinito, no exemplo acima, pode ser alterado por um número nem tão elevado como 20.

2.8 Estatísticas de ordem

Suponha que Z_1, \ldots, Z_n seja uma amostra aleatória da distribuição KwN padrão e sejam $Z_{1:n} < \cdots < Z_{n:n}$ as estatísticas de ordem correspondentes. Segundo Cordeiro e de Castro (2011), podemos escrever a função densidade $f_{i:n}(x)$ da *i*-ésima estatística de ordem $Z_{i:n}$ (para $i = 1, \ldots, n$) como

$$f_{i:n}(x) = \phi(x) \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \Phi(x)^{a(k+1)+r-1}, \qquad (2.32)$$

em que

$$q_{r,k} = \sum_{i=0}^{n-i} \frac{(-1)^j \binom{n-i}{j} w_k p_{r,i+j-1}}{B(i, n-i+1)},$$

e as quantidades $p_{r,u}(a,b)$ (para $r,u=0,1,\ldots$) são dadas por

$$p_{r,u}(a,b) = \sum_{k=0}^{u} (-1)^k \binom{u}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=r}^{\infty} (-1)^{mr+l} \binom{kb}{m} \binom{ma}{l} \binom{l}{r}.$$

Usando a equação (2.9), podemos reescrever (2.32) como

$$f_{i:n}(x) = \phi(x) \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \sum_{j=0}^{\infty} s_j [a(k+1) + r - 1] \Phi(x)^j$$

$$= \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} s_j [a(k+1) + r - 1] \Phi(x)^j$$

$$= \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \Phi(x)^j, \qquad (2.33)$$

em que $\pi_j = \sum_{r,k=0}^{\infty} q_{r,k} \, s_j [a(k+1) + r - 1]$ e $s_j [a(k+1) + r - 1]$ é dado em (2.9).

A equação (2.33) para a função densidade das estatísticas de ordem KwN é o principal resultado desta seção. Seguindo resultados semelhantes aos das Seções 3.3 e 3.4, pode-se obter os momentos ordinários, incompletos e função geradora de momentos das estatísticas de ordem KwN. Por exemplo, o r-ésimo momento de $Z_{i:n}$ vem da equação (2.33) como

$$E(Z_{i:n}^r) = \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, \phi(x) \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, \Phi(x)^j \, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \int_{-\infty}^{\infty} x^r \, \phi(x) \, \Phi(x)^j \, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \, \tau_{r,j}, \qquad (2.34)$$

em que $\tau_{r,j}$ é facilmente obtido a partir da equação (2.17). Então, os momentos ordinários das estatísticas de ordem de Z são funções lineares simples dos PWMs das distribuições normais.

2.9 Entropias

A entropia é uma medida de incerteza associada a uma variável aleatória. A entropia de uma variável aleatória X é definida em termos de sua função de densidade f(x). Considere uma variável aleatória $X \sim \text{KwN}(a, b, \mu, \sigma)$.

Proposição 2.4. A entropia de Shannon é dada por

$$I_{S}(X) = \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{ab}\right) + \frac{1}{2\sigma^{2}}[E(X^{2}) - 2\mu E(X) + \mu^{2}] - ab\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {b-1 \choose k} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \times \left[(a-1)B(a(k+1), n+1) + \frac{(b-1)}{a(n+k+1)} \right].$$

Demonstração. A medida de entropia de Shannon é definida por

$$I_S(X) = -E[\log f(X)]$$

A partir da função densidade da distribuição $\text{KwN}(a, b, \mu, \sigma^2)$, temos

$$I_{S}(X) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log f(x) dx$$

$$= -\log \left(\frac{ab}{\sigma}\right) - (a-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] dx -$$

$$-(b-1) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{a}\right] dx - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right] dx.$$

A primeira das três integrais pode ser expressa em termos da função beta. Usando expansão em série de Taylor para a função logarítmica, obtemos

$$\log\left[1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^n$$

е

$$\log \left\{ 1 - \left[1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right] \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left[1 - \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) \right]^n.$$

Consequentemente, as integrais anteriores podem ser escritas como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^n dx$$

$$= \frac{ab}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^n$$

$$\times \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^{a-1} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^a \right]^{b-1} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \frac{ab}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{b-1}{k} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\times \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{a(k+1)-1} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right]^n dx.$$

Na última igualdade, fazendo a mudança de variável $u=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {b-1 \choose k} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \int_{0}^{1} u^{a(k+1)-1} (1-u)^{n} du$$

$$= ab \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {b-1 \choose k} \frac{(-1)^{n+k}}{n} B(a(k+1), n+1).$$

Analogamente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[1 - \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^a \right] dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left[\Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{an} dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \left[1 - \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^a \right] dx = \frac{a b}{\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \binom{b-1}{k}$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \Phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{a(n+k+1)-1} \phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) dx$$

$$= a b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \binom{b-1}{k}$$

$$\times \int_{0}^{1} u^{a(n+k+1)-1} du$$

$$= a b \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n a(n+k+1)} \binom{b-1}{k}.$$

Podemos escrever a última integral como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \log \phi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left\{ \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + \log \left[\exp \left(-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2} \right) \right] \right\} dx$$
$$= -\log(\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2\sigma^2} [E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2],$$

em que $E(X^2)$ e E(X) seguem dos resultados da Seção 3.3. Finalmente, a entropia de Shannon é dada por

$$I_{S}(X) = \log\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{ab}\right) + \frac{1}{2\sigma^{2}}[E(X^{2}) - 2\mu E(X) + \mu^{2}] - ab\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} {b-1 \choose k} \frac{(-1)^{n+k}}{n} \times \left[(a-1)B(a(k+1), n+1) + \frac{(b-1)}{a(n+k+1)} \right].$$

Proposição 2.5. A entropia de Rényi é dada por

$$\mathcal{J}_{R}(c) = \frac{1}{1-c} \log \left[\frac{(a\,b)^{c}}{(\sqrt{2\pi})^{c-1}\sigma^{2c-1}} \right] + \frac{1}{1-c} \log \left[\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s} \sum_{k_{1},\dots,k_{j}=0}^{\infty} \frac{S_{r}(c)}{2^{s}(\sqrt{c})^{2m_{j}+j}} {s \choose j} \right] \times A(k_{1},\dots,k_{j}) \frac{(2m_{j}+j)!}{2^{(2m_{j}+j)/2}[(2m_{j}+j)/2]!} \delta_{\{2,4,6,\dots\}}(2m_{j}+j) \right],$$

em que $S_r(c) = (-1)^r \binom{(b-1)c}{r}$.

Demonstração. A medida de entropia de Rényi é definida por

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c} \log \left[\int_{-\infty}^{\infty} f^c(x) dx \right], c > 0, c \neq 1.$$
 (2.35)

Observe que quando $c \to 1$, a entropia de Rényi converge para a entropia de Shannon. A partir da função densidade da distribuição $\text{KwN}(a, b, \mu, \sigma^2)$, temos

$$f^c(x) = \left(\frac{a\,b}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\right)^c \left[\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]^{(a-1)c} \left[1 - \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^a\right]^{(b-1)c} \exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Ao expandir o binômio e alterar termos, obtemos

$$f^{c}(x) = \left(\frac{ab}{\sqrt{2\pi}\sigma^{2}}\right)^{c} \exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right] \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^{r} {\binom{(b-1)c}{r}} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{ar+c(a-1)}$$
$$= C(x) \sum_{r=0}^{\infty} S_{r}(c) \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{ar+c(a-1)},$$

em que $S_r(c) = (-1)^r \binom{(b-1)c}{r}$ e

$$C(x) = \left(\frac{a b}{\sqrt{2\pi}\sigma^2}\right)^c \exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right].$$

Então, a integral em (2.35) pode ser expressa como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{c}(x)dx = \sum_{r=0}^{\infty} S_{r}(c) \int_{-\infty}^{\infty} C(x)\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{ar+c(a-1)} dx$$
$$= \left(\frac{ab}{\sqrt{2\pi}\sigma^{2}}\right)^{c} \sum_{s=0}^{\infty} S_{r}(c) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{c}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{2}\right] \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{ar+c(a-1)} dx.$$

Seja

$$A_R(c) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{c}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^{ar+c(a-1)} dx.$$

A entropia de Rényi pode ser determinada como

$$\mathcal{J}_R(c) = \frac{1}{1-c} \log \left[\left(\frac{a b}{\sqrt{2\pi} \sigma^2} \right)^c \sum_{r=0}^{\infty} S_r(c) A_R(c) \right]. \tag{2.36}$$

Fixando $t = (x - \mu)/\sigma$, $A_R(c)$ se reduz a

$$A_R(c) = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right) \Phi(t)^s dt,$$

em que s = ar + c(a - 1).

Combinando as equações (2) e (9) de Castellares et al. (2013), $A_R(c)$ pode ser escrita como

$$A_R(c) = \frac{\sigma}{2^s} \sum_{j=0}^s \sum_{k_1,...,k_s=0} {s \choose j} A(k_1,...,k_j) \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m_j+j} \exp\left(-\frac{ct^2}{2}\right) dt,$$

com
$$a_k = [(-1)^k 2^{(1-2k)/2}]/(\sqrt{\pi}(2k+1)k!), A(k_1, ..., k_j) = a_{k_1}...a_{k_j} \in m_j = k_1 + ... + k_j.$$

Definindo a integral

$$J_c(m_j + j) = \int_{-\infty}^{\infty} t^{2m_j + j} \exp\left(-\frac{(\sqrt{ct})^2}{2}\right) dt,$$

podemos reescrever $A_R(c)$ como

$$A_R(c) = \frac{\sigma}{2^s} \sum_{j=0}^s \sum_{k_1,\dots,k_j=0}^\infty {s \choose j} A(k_1,\dots,k_j) J_c(m_j+j).$$
 (2.37)

Fazendo $u = \sqrt{c}t$, obtemos

$$J_c(m_j + j) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{c})^{2m_j + j}} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2m_j + j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du.$$

Usando o $(2m_j + j)$ -ésimo momento da variável aleatória normal padrão, temos

$$J_c(m_j+j) = \frac{\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{c})^{2m_j+j}} \frac{(2m_j+j)!}{2^{(2m_j+j)/2}[(2m_j+j)/2]!} \delta_{\{2,4,6,\ldots\}}(2m_j+j),$$

em que

$$\delta_A(l) = \begin{cases} 1, se & l \in A, \\ 0, se & l \notin A. \end{cases}$$

Finalmente, inserindo (2.37) em (2.35), obtemos

$$\mathcal{J}_{R}(c) = \frac{1}{1-c} \log \left[\frac{(a\,b)^{c}}{(\sqrt{2\pi})^{c-1}\sigma^{2c-1}} \right] + \frac{1}{1-c} \log \left[\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{s} \sum_{k_{1},\dots,k_{j}=0}^{\infty} \frac{S_{r}(c)}{2^{s}(\sqrt{c})^{2m_{j}+j}} {s \choose j} \right] \times A(k_{1},\dots,k_{j}) \frac{(2m_{j}+j)!}{2^{(2m_{j}+j)/2}[(2m_{j}+j)/2]!} \delta_{\{2,4,6,\dots\}}(2m_{j}+j) \right].$$

2.10 Estimação

Várias abordagens para a estimação pontual de parâmetros foram propostas na literatura. Dentre as mais conhecidas temos, o método dos momentos, o método dos mínimos quadrados e o método de máxima verossimilhança, sendo o método de máxima verossimilhança o mais comumente empregado. Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) possuem propriedades desejáveis que podem ser usadas, por exemplo, para construir intervalos de confiança para os parâmetros de um modelo. Nesta seção, vamos determinar os EMV dos parâmetros da distribuição KwN (a, b, μ, σ) .

Considere X_1, \ldots, X_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição KwN (a, b, μ, σ^2) . A função de verossimilhança para o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (a, b, \mu, \sigma^2)^{\top}$ é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_{i}, \boldsymbol{\theta})$$

$$= \left(\frac{a b}{\sigma^{2} \sqrt{2\pi}}\right)^{n} \prod_{i=1}^{n} [\Phi(z_{i})]^{a-1} \prod_{i=1}^{n} [1 - \Phi(z_{i})^{a}]^{b-1} \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{z_{i}^{2}}{2}\right), \qquad (2.38)$$

em que $z_i = (x_i - \mu)/\sigma$.

A função de log-verossimilhança pode ser expressa como

$$\ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(a) + n \log(b) - n \log(\sigma^2) - \frac{n}{2} \log(2\pi) + \sum_{i=1}^{n} \{(a-1) \log[\Phi(z_i)] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \}.$$
(2.39)

A equação (2.39) pode ser maximizada diretamente usando a linguagem R (função optim), SAS (PROC NLMIXED) ou Ox (função MaxBFGS).

Então, os componentes do vetor escore $U(\theta)$ são dados por

$$U_{a}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \log[\Phi(z_{i})] - \frac{(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\},$$

$$U_{b}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \log[1 - \Phi(z_{i})^{a}],$$

$$U_{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma} \left\{ z_{i} - \frac{(a-1)\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} + \frac{a(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\},$$

е

$$U_{\sigma}(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left\{ z_{i}^{2} - z_{i} \phi(z_{i}) \left[\frac{(a-1)}{\Phi(z_{i})} - \frac{a(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right] \right\}.$$

Sob certas condições de regularidade, segue o resultado assintótico

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \sim N_4(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1}),$$

em que $K(\boldsymbol{\theta})$ é a matriz de informação esperada.

A distribuição normal multivariada $N_4(0, K(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados e regiões de confiança para os parâmetros do modelo. Quando a obtenção de $K(\boldsymbol{\theta})$ é difícil, essa matriz pode ser aproximada pela matriz de informação observada $J(\boldsymbol{\theta})$ dada por

$$J(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{a\mu} & J_{a\sigma} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{b\mu} & J_{b\sigma} \\ J_{\mu a} & J_{\mu b} & J_{\mu \mu} & J_{\mu \sigma} \\ J_{\sigma a} & J_{\sigma b} & J_{\sigma \mu} & J_{\sigma \sigma} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz $J(\theta)$ são dados no Apêndice A.

A comparação da distribuição KwN com alguns de seus modelos especiais pode ser baseada em estatísticas da razão de verossimilhanças (RV). Podemos calcular os valores máximos da função log-verossimilhança irrestrita e restrita para construir a estatística RV para testar alguns submodelos da distribuição KwN. Por exemplo, o teste de $H_0: a=b=1$ versus $H_1: H_0$ não é verdadeira é equivalente a comparar as distribuições KwN e normal e então a estatística RV reduz a $w=2\{\ell(\hat{a},\hat{b},\hat{\mu},\hat{\sigma})-\ell(1,1,\tilde{\mu},\tilde{\sigma})\}$, em que $\hat{a},\hat{b},\hat{\mu}$ e $\hat{\sigma}$ são os EMVs sob H_1 e $\tilde{\mu}$ e $\tilde{\sigma}$ são os estimadores sob H_0 . A hipótese nula é rejeitada se $w>\chi^2_{1-\alpha}(1)$, em que $\chi^2_{1-\alpha}(1)$ é o quantil $1-\alpha$ da distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade e α é o coeficiente de significância do teste .

2.11 Estudo de simulação

Um estudo de simulação de Monte Carlo foi realizado para verificar o comportamento dos estimadores de máxima verosimilhança da distribuição KwN. As simulações são realizadas através da geração de observações a partir da distribuição KwN utilizando o método de transformação inversa. Foram geradas amostras com tamanhos n=30, n=50, n=100 e n=200 e os valores dos parâmetros foram fixados em $a=18, b=10, \mu=0, 1$ e $\sigma=40$.

Para cada combinação de n, a, b, μ e σ , foram simuladas 2000 amostras. A Tabela 2.1 apresenta os valores das estimativas dos parâmetros e o erro quadrático médio (EQM) para cada tamanho amostral. Como podemos ver, os resultados são satisfatórios, ou seja, à medida que o tamanho da amostra aumenta, as estimativas são mais próximas aos valores verdadeiros de a, b, μ e σ e os valores de EQM diminuem, na maioria dos casos, como era esperado.

Tabela 2.1: I	Média e EQM das	s estimativas dos	parâmetros da distr	ribuição KwN de	e acordo com o	tamanho amostral.
---------------	-----------------	-------------------	---------------------	-----------------	----------------	-------------------

\overline{n}	Parâmetro	Média	EQM
	a	17,8737	0,0159
30	b	$10,\!1014$	$0,\!0102$
	μ	$0,\!0005$	$0,\!0098$
	σ	$39,\!8374$	$0,\!0264$
	a	17.8912	0,0118
50	b	$10,\!1025$	$0,\!0105$
	μ	0.0006	$0,\!0098$
	σ	39.8427	$0,\!0350$
-	a	17,8727	0,0111
100	b	10,0816	$0,\!0066$
	μ	$0,\!0007$	$0,\!0099$
	σ	$39,\!8786$	$0,\!0147$
	a	17,8929	0,0119
200	b	$10,\!0037$	$0,\!0054$
	μ	0,0008	$0,\!0097$
	σ	$39,\!8945$	$0,\!0105$

2.12 Aplicação

Nesta seção, usamos um conjunto de dados reais para ilustrar a utilidade da distribuição KwN. Estimamos os parâmetros desse modelo por máxima verossimilhança usando a linguagem R. A descrição do conjunto de dados é dada na Seção 2.12.1.

2.12.1 Dados de monóxido de carbono

Os dados referem-se a medições de monóxido de carbono (CO) feitas em várias marcas de cigarros em 1994. Os dados foram coletados pela Comissão Federal do Comércio (CFC), uma agência independente do governo dos Estados Unidos, cuja principal missão é a promoção da proteção do consumidor. Durante três décadas, a CFC regularmente lançou relatórios sobre o teor de nicotina e alcatrão dos cigarros. Os relatórios indicam que os níveis de nicotina, em média, se mantiveram

estáveis desde 1980. O endereço eletrônico http://www.ftc.gov/reports/tobacco inclui os conjuntos de dados e algumas informações sobre a fonte dos dados, o comportamento e as crenças dos fumantes acerca dos conteúdos de nicotina, alcatrão e monóxido de carbono nos cigarros. O conjunto de dados CO pode ser encontrado em http://home.att.net/ rdavis2 / cigra.html. Na Tabela 2.2, listamos algumas estatísticas resumo para os dados de CO. Pela Tabela 2.2 e Figura 2.4 notamos que esse conjunto de dados tem a mediana maior do que a média, que sugere que a distribuição é assimétrica, um fato reforçado pelo valor negativo do coeficiente de assimetria.

Tabela 2.2: Medidas descritivas

Média	Mediana	Desvio padrão	Variância	${ m Assimetria}$	Curtose	Mínimo	Máximo
11,34	12	4,06	$16,\!55$	-0,48	-0,23	0,05	22

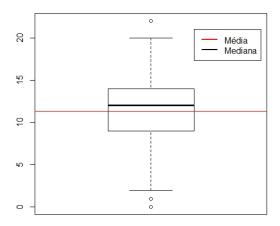


Figura 2.4: Gráfico boxplot para os dados de monóxido de carbono.

Apresentamos na Tabela 2.3 as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo, seus erros padrão estimados e os valores dos critérios de informação AIC (critério de informação de Akaike), BIC (critério de informação bayesiano) e CAIC (critério de informação de Akaike corrigido). Os critérios de informação AIC, BIC e CAIC apresentam os valores mais baixos para a distribuição KwN, o que indica que essa distribuição é mais apropriada para ajustar esses dados do que as distribuições normal, beta-normal, exponencial normal e skew normal. Os histogramas, as funções de densidade e distribuições estimadas das distribuições KwN e normal são exibidas na Figura 2.5.

Utilizamos a estatística da razão de verossimilhanças (RV) para testar os modelos encaixados. Os resultados são apresentados na Tabela 2.4. Observemos que rejeitamos a hipótese nula em todos os três testes da razão de verossimilhanças em favor da distribuição KwN. Observamos ainda que

Tabela 2.3: Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrões dos parâmetros para os modelos de regressão KwN, beta normal (BN), exponenciada normal (Exp-N) e normal ajustados aos dados de CO e valores dos critérios de informação

Distribuição		$\operatorname{Par\^{a}metros}$					Critérios		
Distribuição	a	b	μ	σ	AIC	CAIC	BIC		
KwN	0,2242	0,0730	11,8209	1,2921	1929,1	1929,2	1944,5		
	(0,0420)	(0,0262)	(1,1516)	(0,1306)					
BN	0,2232	$3,\!1108$	$18,\!4546$	2,9305	1932,9	1933,0	1948,3		
	(0,0906)	(0.4851)	(0,4680)	(0,5866)					
Exp-N	0,08012	1	$17,\!24835$	1,57333	1934,5	1934,6	1946,0		
	(0,04323)	-	(0,75514)	(0,35754)					
Normal	1	1	$11,\!3425$	$4,\!0626$	1950,3	$1950,\!4$	1958,1		
	-	-	(0,2181)	(0,1544)					
		λ	μ	σ					
Skew Normal		0,0063	11,3222	4,0626	1952,3	1952,4	1963,8		
		(1,6075)	(5,2118)	(0,1562)					

a rejeição é significativa, o que evidencia a necessidade dos parâmetros extras no modelo proposto na modelagem desses dados reais.

Tabela 2.4: Testes RV

Monóxido de Carbono	Hipóteses	Estatística w	valor- p
KwN versus BN(1,b)	H_0 : $a=1$ versus $H_1: a \neq 1$	4,3	0,0042
KwN versus Exp-N	H_0 : $b=1$ versus $H_1: b \neq 1$	5,4	$0,\!0003$
KwN versus Normal	H_0 : $a = b = 1$ versus H_1 : $a \neq 1$ ou $b \neq 1$	$23,\!2$	< 0,0001

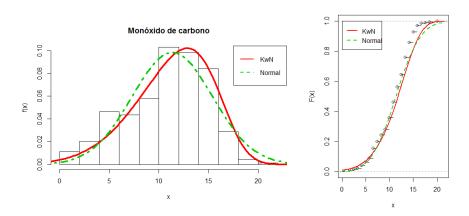


Figura 2.5: (a) Densidades estimadas dos modelos KwN e normal para os dados de monóxido de carbono. (b) Funções de distribuição acumuladas estimadas e a fda empírica para os dados de monóxido de carbono.

Capítulo 3

Modelo de regressão Kumaraswamy normal

Neste capítulo apresentamos o modelo de regressão Kumaraswamy normal. Estimamos os parâmetros do modelo pelo método de máxima verossimilhança e discutimos medidas de influência global e local sob três esquemas de pertubação. Apresentamos também o resíduo quantílico. Concluímos o capítulo com uma aplicação do modelo proposto a dados reais.

3.1 Introdução

Como sabemos, os modelos de regressão lineares normais são geralmente aplicados para descrever dados simétricos por meio de funções lineares de parâmetros desconhecidos. No entanto, nem sempre os dados estão de acordo com o modelo normal devido à falta de simetria e/ou à presença de caudas pesadas/leves. Como uma alternativa, propomos um novo modelo de regressão com base no modelo Kumaraswamy normal.

O modelo proposto é baseado na suposição de que a resposta tem distribuição Kumaraswamy normal discutida no Capítulo 2.

3.2 O modelo de regressão Kumaraswamy normal

Com base na distribuição KwN, propomos um modelo de regressão linear do tipo localizaçãoescala que relaciona a variável resposta y_i com o vetor de variáveis explicativas $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, ..., x_{ip})^{\top}$, da seguinte forma

$$y_i = \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} + \sigma z_i, \ i = 1, ..., n, \tag{3.1}$$

em que os erros aleatórios z_i têm distribuição dada em (2.5) independentes, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p)^{\top}$, $\sigma > 0$, a > 0 e b > 0 são parâmetros desconhecidos. Se, em (2.5), a = b = 1, o modelo em (3.1) é o modelo de regressão normal.

A partir da equação (2.3), a função log-verossimilhança para o vetor de parâmetros η =

 $(a,b,\sigma,\boldsymbol{\beta}^{\top})^{\top}$ pode ser expressa como

$$\ell(\boldsymbol{\eta}) = n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i=1}^{n} \{(a-1)\log[\Phi(z_i)] + (b-1)\log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \},$$
(3.2)

em que $z_i = (y_i - \mathbf{x}^{\top} \boldsymbol{\beta})/\sigma$. O EMV $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ de $\boldsymbol{\eta}$ pode ser obtido maximizando a função log-verossimilhança dada em (3.2). Por exemplo, podemos maximizar esta função usando a linguagem R (função optim), SAS (PROC NLMIXED) ou Ox (função MaxBFGS). Os componentes do vetor escore $U(\boldsymbol{\eta})$ são dados por

$$U_{a}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{n}{a} + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \log[\Phi(z_{i})] - \frac{(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\},$$

$$U_{b}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^{n} \log[1 - \Phi(z_{i})^{a}],$$

$$U_{\sigma}(\boldsymbol{\eta}) = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n} \left\{ z_{i}^{2} - z_{i}\phi(z_{i}) \left[\frac{(a-1)}{\Phi(z_{i})} - \frac{a(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right] \right\},$$

е

$$U_{\beta_j}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n z_i \, x_{ij} - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n \phi(z_i) x_{ij} \left\{ \frac{(a-1)}{\Phi(z_i)} - \frac{a(b-1)\Phi(z_i)^{a-1}}{[1-\Phi(z_i)^a]} \right\},\,$$

em que j = 1, ..., p.

Sob condições gerais de regularidade, a distribuição assintótica de $\hat{\eta}$ é

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta} \sim N_{p+3}(0, K(\boldsymbol{\eta})^{-1}),$$

em que $K(\eta)^{-1}$ é a inversa da matriz de informação esperada. A matriz $K(\eta)^{-1}$ pode ser aproximada pela inversa da matriz de informação observada $J(\eta)$ dada por

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{a\sigma} & J_{a\beta_1} \dots J_{a\beta_p} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{b\sigma} & J_{b\beta_1} \dots J_{b\beta_p} \\ J_{\sigma a} & J_{\sigma b} & J_{\sigma \sigma} & J_{\sigma\beta_1} \dots J_{\sigma\beta_p} \\ J_{\beta_1 a} & J_{\beta_1 b} & J_{\beta_1 \sigma} & J_{\beta_1 \beta_1} \dots J_{\beta_1 \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{\beta_p a} & J_{\beta_p b} & J_{\beta_p \sigma} & J_{\beta_p \beta_1} \dots J_{\beta_p \beta_p} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz $J(\eta)$ são dados no Apêndice B.

Portanto, um intervalo de confiança assintótico $100(1-\alpha)\%$ para cada parâmetro η_i é dado por

$$ICA_i = \left(\hat{\eta}_i - z_{\alpha/2}\sqrt{-\widehat{J}^{i,i}}, \hat{\eta}_i + z_{\alpha/2}\sqrt{-\widehat{J}^{i,i}}\right),$$

em que $-\widehat{J}^{i,i}$ é o i-ésimo elemento da diagonal da matriz $[J(\eta)]^{-1}$, avaliado em $\hat{\eta}$ e $z_{\alpha/2}$ é o quantil

 $\alpha/2$ da distribuição normal padrão.

3.3 Análise de diagnóstico

A fim de avaliar a sensibilidade dos EMVs, a influência global e a influência local sob três esquemas de perturbação são agora discutidas.

3.3.1 Influência global

A primeira ferramenta para realizar a análise de sensibilidade é a influência global a partir da delação de casos (ver Cook , 1977). A delação de casos é uma abordagem comum para estudar o efeito de excluir a *i*-ésima observação do conjunto de dados. A deleção de casos para o modelo (3.1) é dada por

$$y_l = \mathbf{x}_l^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} + \sigma z_l, \ l = 1, ..., n, \ l \neq i.$$
(3.3)

A seguir, uma quantidade com o subíndice "(i)" significa a quantidade original com a i-ésima observação excluída. $l_{(i)}(\boldsymbol{\eta})$ é a função de log-verossimilhança para o modelo (3.3) e seja $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)} = (\hat{a}_{(i)}, \hat{b}_{(i)}, \hat{\sigma}_{(i)}, \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(i)}^{\top})^{\top}$ a estimativa correspondente de $\boldsymbol{\eta}$. A idéia básica para avaliar a influência da i-ésima observação no EMV $\hat{\boldsymbol{\eta}} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma}, \hat{\boldsymbol{\beta}}^{\top})^{\top}$ é comparar a diferença entre $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}$. Se a exclusão de uma observação influir seriamente nas estimativas, deve ser dada mais atenção a essa observação. Portanto, se $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)}$ estiver longe de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$, então a i-ésima observação pode ser considerada como influente. A primeira medida de influência global é conhecida como distância de Cook generalizada sendo expressa por

$$GD_i(\hat{\boldsymbol{\eta}}) = (\hat{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)})^{\top} \{-\hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})\}(\hat{\boldsymbol{\eta}} - \hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)}),$$

em que $\hat{\mathbf{J}}(\boldsymbol{\eta})$ é a matriz $\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})$ avaliada em $\hat{\boldsymbol{\eta}}$.

Outra alternativa é avaliar os valores de $GD_i(\hat{\boldsymbol{\beta}})$ e de $GD_i(\hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma})$ que revelam o impacto da *i*-ésima observação nas estimativas de $\boldsymbol{\beta}$ e de $(a, b, \sigma)^{\top}$, respectivamente. Outra medida bem conhecida da diferença entre $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ é o afastamento da verossimilhança, dado por

$$LD_i(\hat{\boldsymbol{\eta}}) = 2\left\{l(\hat{\boldsymbol{\eta}}) - l(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{(i)})\right\}.$$

Além disso, também podemos calcular $\hat{\beta}_j - \hat{\beta}_{j(i)}$ (j = 1, ..., p) para detectar a diferença entre $\hat{\beta}$ e $\hat{\beta}_{(i)}$.

Podem ser construídos gráficos das medidas GD_i e LD_i versus a ordem das observações, o que torna possível a identificação de potenciais observações influentes.

3.3.2 Influência local

Outra abordagem defendida por Cook (1986) é ponderar as observações em vez de removêlas. Uma medida sugerida por Cook definida como $LD(\boldsymbol{\omega}) = 2\{\ell(\hat{\boldsymbol{\eta}}) - \ell(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{\omega}})\}$ é chamada de afastamento da verossimilhança, em que $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{\omega}}$ denota o estimador de máxima verossimilhança sob o modelo pertubado e $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_n)^{\top}$ é o vetor de pertubação aplicado ao modelo. Dessa forma, se a distância entre $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{\boldsymbol{\omega}}$ permanecer "pequena" quando $\boldsymbol{\omega}$ varia, temos a indicação de que o modelo ajustado é estável no que diz respeito ao esquema de pertubação utilizado. A curvatura normal para $\boldsymbol{\eta}$ na direção d (ver Cook , 1986) é dada por $C_{\mathbf{d}}(\boldsymbol{\eta}) = 2|\mathbf{d}^{\top}\boldsymbol{\Delta}^{\top}[\mathbf{J}(\boldsymbol{\eta})]^{-1}\boldsymbol{\Delta}\mathbf{d}|$, em que

 Δ é uma matriz $(p+3) \times n$ e depende do esquema de pertubação usado, cujos elementos são $\Delta_{ji} = (\partial^2 \ell(\eta | \omega)/\partial \eta_j \partial \omega_i), i = 1, \dots, p+3$ e $j = 1, \dots, n$, com todas as quantidades sendo avaliadas em $\omega = \omega_0$ e $\eta = \hat{\eta}$, em que ω_0 é o vetor de não pertubação do modelo. Assim, $C_{\mathbf{d}_{max}}$ é o maior autovalor da matriz $\mathbf{B} = -\mathbf{\Delta}^{\top}[\mathbf{J}(\eta)]^{-1}\mathbf{\Delta}$, e d_{max} o corresponde autovetor.

Para algumas formas de perturbação, apresentadas a seguir, calculou-se a matriz

$$\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_{ji})_{(p+3)\times n} = \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \eta_i \partial \omega_i}\right), i = 1, \dots, p+3 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n.$$

Para o modelo em (3.1), temos

• Ponderação de casos

Nesse esquema o objetivo é avaliar se as contribuições das observações com diferentes pesos afetarão as EMV de η . Para o nosso modelo, a função de log-verossimilhança perturbada é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega}) = n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] \sum_{i=1}^{n} \omega_i + \sum_{i=1}^{n} \omega_i \{(a-1)\log[\Phi(z_i)] + (b-1)\log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \},$$

em que $0 \le \omega_i \le 1$ e $\omega_0 = (1, ..., 1)^{\top}$ é o vetor de não pertubação. Os elementos da matriz $\Delta = (\Delta_a^{\top}, \Delta_b^{\top}, \Delta_{\sigma}^{\top}, \Delta_{\beta}^{\top})$ são obtidos numericamente.

• Perturbação na variável resposta

O interesse nesse esquema é detectar a sensibilidade do modelo quando a variável resposta é submetida a uma perturbação aditiva dada por $Y_i = y_i + \omega_i S_y$, em que S_y é um fator de escala que pode ser a estimativa do desvio padrão da resposta observada Y e $\omega_i \in \mathbb{R}$. A função logverossimilhança perturbada pode ser expressa como

$$\ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega}) = n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i=1}^{n} \{(a-1)\log[\Phi(z_i^*)] + (b-1)\log[1 - \Phi(z_i^*)^a] - \frac{z_i^{*2}}{2} \},$$

em que $z_i^* = [(y_i + \omega_i S_y) - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}]/\sigma$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \dots, 0)^{\top}$ é o vetor de não perturbação. Os elementos da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_a^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_b^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_\sigma^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top})$ são obtidos numericamente.

• Perturbação em uma variável explicativa

O objetivo nesse tipo de pertubação é avaliar a sensibilidade do modelo sob pequenas pertubações em uma variável explicativa. Considere agora uma perturbação aditiva em uma determinada variável explicativa contínua, digamos X_q , definida por $x_{iq\omega} = x_{iq} + \omega_i S_q$, em que S_q é um fator de escala e $\omega_i \in \mathbb{R}$. A função log-verossimilhança perturbada tem a seguinte forma

$$\ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega}) = n[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i=1}^{n} \{(a-1)\log[\Phi(z_i^{**})] + (b-1)\log[1 - \Phi(z_i^{**})^a] - \frac{z_i^{**2}}{2} \},$$

em que $z_i^{**} = (y_i - \mathbf{x}_i^{*T}\boldsymbol{\beta})/\sigma$, $\mathbf{x}_i^{*T}\boldsymbol{\beta} = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + ... + \beta_q (x_{iq} + \omega_i S_q) + \cdots + \beta_p x_{ip}$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \ldots, 0)^{\top}$ é o vetor de não pertubação. Os elementos da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_a^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_b^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_\sigma^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top})$ são obtidos numericamente.

3.4 Análise de resíduos

A fim de estudar as suposições dos erros, bem como a presença de *outliers*, consideramos o resíduo quantílico.

O resíduo quantílico normalizado foi introduzido por Dunn e Smyth (1996) e é utilizado para avaliar a adequabilidade de ajustes de modelos de regressão. Neste trabalho, estes resíduos foram utilizados para verificar a qualidade do ajuste do modelo de regressão KwN. Como F(x) em (2.3) é contínua, então pelo Teorema da Transformação Integral, é também uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo (0,1). Nesse caso, os resíduos quantílicos normalizados são definidos como

$$r_{q,i} = \Phi^{-1}[F(y_i; \hat{\mu}, \hat{a}, \hat{b}, \hat{\sigma})],$$

em que $\Phi(.)$ denota a função de distribuição acumulada da distribuição normal padrão, $\hat{\mu} = \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\beta}}$ e \hat{a} , \hat{b} e $\hat{\sigma}$ denotam os estimadores de máxima verossimilhança de a, b e σ , respectivamente. Segundo os autores, se os parâmetros do modelo são consistentemente estimados, então $r_{q,i}$ converge para uma distribuição normal padrão. Dessa forma, espera-se que os valores desses resíduos em um gráfico QQ-plot estejam próximos de uma reta.

3.5 Aplicação

Nesta seção utilizamos um conjunto de dados reais para ilustrar o desempenho do modelo de regressão linear Kumaraswamy normal.

3.5.1 Falhas da fotocopiadora

Os dados analisados referem-se ao tempo entre falhas de uma fotocopiadora nos seus primeiros $4\frac{1}{2}$ anos de funcionamento, descritos em Murthy, Xie, e Jiang (2004, página 314). Os dados são formados por 41 valores durante este período.

O conjunto de dados foi analisado por meio de quatro modelos de regressão, os quais podem ser expressos da seguinte forma:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \sigma z_i, i = 1, ..., 41,$$

em que

- y_i : tempo entre a (i-1)-ésima falha e a i-ésima falha (em dias), i=2,...,41, sendo y_1 o tempo (em dias) até a primeira falha.
- x_i : número de cópias entre a (i-1)-ésima falha e a i-ésima falha, i=2,...,41, sendo x_1 o número de cópias até a primeira falha.

- z_i tem distribuição KwN padrão, Lehmann tipo II normal (LTII-N), Exp-N e normal.
- $y_i's$ são independentes, i = 1, 2, ..., 41.

A Tabela 3.1 apresenta, para cada modelo de regressão, as estimativas dos parâmetros com os respectivos erros padrãos (entre parênteses) e os valores numéricos dos critérios de informação AIC, CAIC e BIC. Os parâmetros foram estimados usando a linguagem R. O modelo de regressão KwN superou os modelos de regressão LTII-N, Exp-N e normal, apresentando os menores valores para os referidos critérios de informação, o que indica que o modelo de regressão KwN é o que melhor se ajusta aos dados.

Na Figura 3.1, apresentamos o gráfico dos resíduos quantílicos versus os valores ajustados. Notamos que não há nenhum resíduo alto (fora do intervalo [-3,3]).

Na Figura 3.2 temos o gráfico normal de probabilidade para os resíduos quantílicos com envelope simulado, o qual foi usado para verificar a qualidade do ajuste do modelo de regressão KwN. Através do mesmo notamos que o modelo de regressão KwN se encontra bem ajustado aos dados sob análise, pois todos os pontos estão dentro do envelope gerado. Fizemos esse mesmo gráfico para os demais modelos (LTII-N, Exp-N e normal), mas os mesmos não ficaram bem ajustados.

Apresentamos na Figura 3.3, o gráfico da distância de Cook generalizada. Como podemos ver as observações #2, #6 e #41 foram detectadas como sendo possíveis observações influentes. Com o intuito de analisar o impacto dessas observações nas estimativas dos parâmetros, realizamos uma análise confirmatória reajustando o modelo sem as observações consideradas influentes. Depois calculamos a mudança relativa em porcentagem das estimativas para os parâmetros do modelo, definida por

$$MR_{\eta}(i) = \left| \frac{\hat{\eta} - \hat{\eta}_{(i)}}{\hat{\eta}} \right| \times 100\%,$$

em que $\hat{\eta}$ denota a estimativa do parâmetro η considerando todas as observações e $\hat{\eta}_{(i)}$ denota a estimativa do parâmetro η após a retirada da observação i. As mudanças relativas para as observações #2, #6 e #41, individualmente e para as observações #2 e #41 conjuntamente estão apresentadas na Tabela 3.2.

Na Figura 3.4, construímos o gráfico de influência local para o esquema de perturbação ponderação de casos, por ser o mais comum, objetivando identificar observações influentes. Note que as observações #6 e #13 se apresentam como possíveis casos influentes. A observação #6 já havia sido detectada como possível observação influente por meio do gráfico da distância de Cook generalizada, mas como mostra a Tabela 3.2 a mesma não apresentou mudança relativa substancial individualmente. A mudança relativa para a observação #13 está disponível na Tabela 3.3, assim como a mudança relativa para as observações #2, #13 e #41, conjuntamente.

Na Tabela 3.4 apresentamos as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão KwN retirando essas observações. Notamos que não houve mudança inferencial com a retirada das observações #2, #6, #13 e #41. Portanto, nenhuma das observações deve ser descartada.

Tabela 3.1: Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros para os modelos de regressão KwN, LTII-N, Exp-N e normal ajustados aos dados do tempo entre falhas da fotocopiadora e valores dos critérios de informação

——————————————————————————————————————		Parâmetros						Critérios		
Distribuição	a	b	σ	β_0	β_1	AIC	CAIC	BIC		
KwN	0,5207	0,1514	7,7608	6,0462	0,7276	533,2	534,9	541,8		
	(0,0047)	(0,0236)	(0,0024)	(0,0222)	(0,0023)					
LTII-N	1	$0,\!1386$	$7,\!3063$	$10,\!5480$	$0,\!5551$	536,9	538,0	$543,\!8$		
	_	(0.0231)	(0,4368)	(1,0419)	(0,0026)					
Exp-N	0,5914	1	$12,\!0773$	$19,\!3516$	$0,\!9363$	$580,\!6$	581,7	587,4		
	(-)	-	(-)	(-)	(0.0946)					
Normal	1	1	18,87	$18,\!4167$	$0,\!8147$	602,1	602,7	607,2		
	-	=	(0,2413)	(4,4202)	(0,1228)					

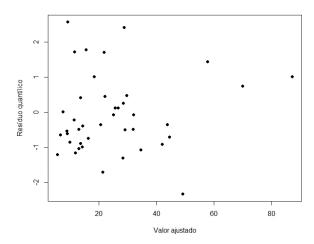


Figura 3.1: Gráfico dos resíduos quantílicos versus valores ajustados para o modelo de regressão KwN.

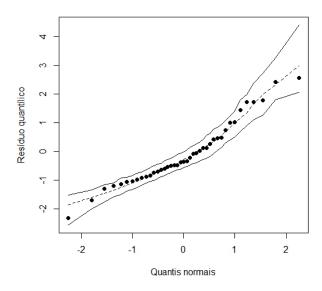


Figura 3.2: Gráfico de envelope simulado dos resíduos quantílicos para o modelo de regressão KwN.

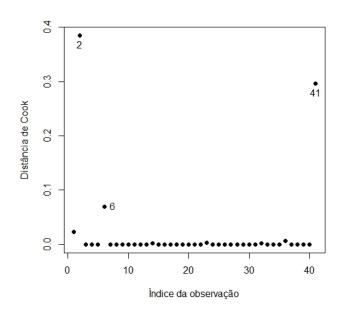


Figura 3.3: Gráfico da distância de Cook generalizada para o modelo de regressão KwN.

Tabela 3.2: Mudanças relativas

Observações	Parâmetros							
Observações	a	b	σ	β_0	β_1			
#2	37,99%	$6,\!55\%$	0,96%	$5,\!12\%$	5,98%			
#6	$3,\!32\%$	$11{,}15\%$	$4{,}06\%$	$2,\!17\%$	$2,\!10\%$			
#41	42,93%	$4,\!04\%$	0,99%	$4,\!50\%$	$4,\!50\%$			
#2 e $#41$	37,99%	$0,\!51\%$	$3,\!60\%$	$15{,}98\%$	$5{,}39\%$			

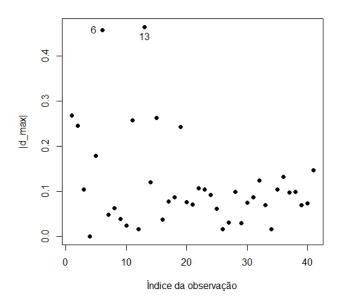


Figura 3.4: Gráfico de $|d_{max}|$ contra índice da observação considerando o esquema de perturbação da ponderação de casos.

Tabela 3.3: Mudanças relativas

Observações	Parâmetros						
Observações	a	b	σ	β_0	β_1		
#13	22,14%	$13,\!28\%$	0,01%	0,05%	0,05%		
#2, #13 e #41	29,02%	$10{,}59\%$	$3{,}38\%$	$29{,}43\%$	$3{,}14\%$		

Tabela 3.4: Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros para os modelos de regressão KwN, ajustados aos dados do tempo entre falhas da fotocopiadora sem as observações.

	a	b	σ	β_0	β_1
#2	0,6997	$0,\!1556$	7,6419	5,5366	0,6834
	(0,0046)	(0,0235)	(0,0024)	(0,0026)	(0,0023)
#6	0,5024	$0,\!1624$	$7,\!4028$	$5,\!6621$	0,7421
	(0,0041)	(0,0231)	(0,0023)	(0,0022)	(0,0021)
#13	0,6193	$0,\!1655$	7,7163	$5,\!4215$	0,7271
	(0,0042)	(0,0232)	(0,0021)	(0,0018)	(0,0022)
#41	0,7247	$0,\!1402$	$7,\!6393$	$5,\!6621$	$0,\!6941$
	(0,0045)	(0,0218)	(0,0022)	(0,0220)	(0,0021)
#2 e $#41$	0,6997	$0,\!1453$	$7,\!4383$	$6,\!2844$	$0,\!6876$
	(0,0040)	(0,0221)	(0,0021)	(0,0210)	(0,0018)
#2, #13 e #41	0,6542	$0,\!1615$	$7,\!4552$	$7,\!0131$	0,7039
	(0,0039)	(0,0216)	(0,0020)	(0,0209)	(0,0020

Capítulo 4

Modelo de regressão Kumaraswamy normal com presença de censura

Neste capitulo propomos o modelo de regressão KwN para dados censurados. Discutimos a estimação dos parâmetros do modelo e apresentamos medidas de influência local sob três esquemas de pertubação. Apresentamos também os resíduos martingal e deviance modificado. Aplicamos o novo modelo a dados reais.

4.1 Introdução

Estudos que envolvem uma resposta temporal, geralmente são de longa duração, e na maioria dos casos, existem unidades experimentais que não chegam ao evento de interesse, ou seja, há ocorrência de observações incompletas ou parciais, denominadas censuras. A importância da análise de sobrevivência reside na possibilidade de inserir na análise estatística a informação contida nos dados censurados.

Várias distribuições têm sido utilizadas na análise dados de sobrevivência nos últimos anos. Por exemplo, Leiva et al. (2007) fizeram um estudo de diagnóstico em um modelo de regressão com censura log-Birnbaum-Saunders. Carrasco et al. (2008) propuseram o modelo de regressão baseado em uma modificação da distribuição Weibull. Ortega et al. (2011) propuseram o modelo de regressão beta-Weibull.

4.2 Modelo de regressão Kumaraswamy normal com censura

Nesta seção, propomos o modelo de regressão linear KwN do tipo locação-escala com presença de censura aleatória dado por

$$y_i = \mathbf{x}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{\beta} + \sigma z_i, \ i = 1, ..., n, \tag{4.1}$$

em que $y_i = \min\{\log(t_i), \log(c_i)\}$, sendo t_i o tempo de falha e c_i o tempo de censura, $\mathbf{x}_i = (x_{i1}, ..., x_{ip})^{\top}$ o vetor de variáveis explicativas, z_i o erro aleatório com distribuição dada em (2.5) independentes, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_p)^{\top}$, $\sigma > 0$, a > 0 e b > 0 parâmetros desconhecidos.

Usando o modelo em (4.1), a função de sobrevivência de $Y_i|\mathbf{x}_i$ é dada por

$$S(y_i; \boldsymbol{\eta}) = \left[1 - \Phi\left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}}{\sigma}\right)^a\right]^b, \tag{4.2}$$

em que $\boldsymbol{\eta} = (a, b, \sigma, \boldsymbol{\beta}^{\top}).$

Assumindo censura não informativa (não carrega informações sobre os parâmetros) e definindo os conjuntos F, de indivíduos que falharam, e C, de indivíduos censurados, a função de verossimilhança, considerando os tempos de falha e de censura, pode ser expressa como

$$L(\eta) = \prod_{i \in F} f(y_i; \eta) \prod_{i \in C} S(y_i; \eta)$$

=
$$\prod_{i \in F} \left[\frac{a b}{\sigma} \phi(z_i) \Phi(z_i)^{a-1} \left\{ 1 - \Phi(z_i)^a \right\}^{b-1} \right] \prod_{i \in C} \left\{ [1 - \Phi(z_i)^a]^b \right\},$$

em que $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta})/\sigma$.

A função de log-verossimilhança é dado por

$$\ell(\eta) = \sum_{i \in F} \left\{ \log \left(\frac{ab}{\sigma^2 \sqrt{2\pi}} \right) + (a-1) \log[\Phi(z_i)] + (b-1) \log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \right\} + \sum_{i \in C} \log \left\{ [1 - \Phi(z_i)^a]^b \right\}.$$
(4.3)

O estimador de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\eta}$ de η pode ser obtido por meio da maximização da função de log-verossimilhança (4.3). Podemos maximizar a função em (4.3) utilizando o procedimento NLMixed do SAS, MaxBFGS do OX ou a linguagem R (função optim), por exemplo.

Os componentes do vetor escore $U(\eta)$ são dados por

$$U_{a}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i \in F} \left\{ \frac{1}{a} + \log[\Phi(z_{i})] - \frac{(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\} - b \sum_{i \in C} \frac{\Phi(z_{i})^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}},$$

$$U_{b}(\boldsymbol{\eta}) = \sum_{i \in F} \left\{ \frac{1}{b} + \log[1 - \Phi(z_{i})^{a}] \right\} + \sum_{i \in C} \log[1 - \Phi(z_{i})^{a}],$$

$$U_{\sigma}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in F} \left\{ z_i^2 - 2 - z_i \phi(z_i) \left[\frac{(a-1)}{\Phi(z_i)} - \frac{a(b-1)[\Phi(z_i)]^{a-1}}{1 - \Phi(z_i)^a} \right] \right\} + \sum_{i \in C} \frac{a b \Phi(z_i)^{a-1} \phi(z_i) z_i}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]},$$

е

$$U_{\beta_{j}}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{\sigma} \sum_{i \in F} \left\{ z_{i} x_{ij} - \phi(z_{i}) x_{ij} \left[\frac{(a-1)}{\Phi(z_{i})} - \frac{a(b-1)\Phi(z_{i})^{a-1}}{[1-\Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\} + \sum_{i \in C} \frac{a b \Phi(z_{i})^{a-1} \phi(z_{i}) x_{ij}}{\sigma[1-\Phi(z_{i})^{a}]},$$

em que j=1,...,p. Do modelo ajustado em (4.1), a função de sobrevivência para y_i pode ser

estimada por

$$\hat{S}(y_i, \boldsymbol{\eta}) = \left[1 - \Phi \left(\frac{y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\beta}}}{\hat{\sigma}} \right)^{\hat{a}} \right]^{\hat{b}}.$$
 (4.4)

Sob condições gerais de regularidade, a distribuição assintótica de $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ é

$$\hat{\boldsymbol{\eta}} - \boldsymbol{\eta} \sim N_{(p+3)}(0, K(\boldsymbol{\eta})^{-1}),$$

em que $K(\eta)^{-1}$ é a inversa da matriz de informação de Fisher. Como o cálculo da matriz $K(\eta)^{-1}$ é difícil, podemos usar como alternativa, a matriz de informação observada, denotada por $J(\eta)$. Neste caso, a matriz de informação observada é dada por

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} J_{aa} & J_{ab} & J_{a\sigma} & J_{a\beta_1} \dots J_{a\beta_p} \\ J_{ba} & J_{bb} & J_{b\sigma} & J_{b\beta_1} \dots J_{b\beta_p} \\ J_{\sigma a} & J_{\sigma b} & J_{\sigma \sigma} & J_{\sigma\beta_1} \dots J_{\sigma\beta_p} \\ J_{\beta_1 a} & J_{\beta_1 b} & J_{\beta_1 \sigma} & J_{\beta_1 \beta_1} \dots J_{\beta_1 \beta_p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ J_{\beta_p a} & J_{\beta_p b} & J_{\beta_p \sigma} & J_{\beta_p \beta_1} \dots J_{\beta_p \beta_p} \end{bmatrix},$$

em que os elementos da matriz $J(\eta)$ são dados no Apêndice C.

Portanto, um intervalo de confiança assintótico $100(1-\alpha)\%$ para cada parâmetro η_i é dado por

$$ICA_i = \left(\hat{\eta}_i - z_{\alpha/2}\sqrt{-\widehat{J}^{i,i}}, \hat{\eta}_i + z_{\alpha/2}\sqrt{-\widehat{J}^{i,i}}\right),$$

em que $-\widehat{J}^{i,i}$ i-ésimo elemento da diagonal da matriz $[J(\eta)]^{-1}$ avaliado em $\hat{\eta}$ e $z_{\alpha/2}$ é o quantil $\alpha/2$ da distribuição normal padrão.

4.3 Análise de diagnóstico

Para avaliar a sensibilidade dos EMV utilizaremos a influência local sob três esquemas de perturbação.

4.3.1 Influência local

Nesta seção aplicaremos a técnica de influência local descrita na Seção 3.3.2.

Para alguns regimes de perturbação, apresentados a seguir, calculou-se a matriz

$$\mathbf{\Delta} = (\mathbf{\Delta}_{ji})_{(p+3)\times n} = \left(\frac{\partial^2 \ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega})}{\partial \eta_j \partial \omega_i}\right), i = 1, \dots, p+3 \quad \text{e} \quad j = 1, \dots, n.$$

Para o modelo em (4.1), temos

• Ponderação de casos

O objetivo nesse esquema é avaliar se as contribuições das observações com diferentes pesos afetarão as estimativas de máxima verossimilhança de η . Para o nosso modelo, a função de log-

verossimilhança perturbada é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\eta}|\boldsymbol{\omega}) = r[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] \sum_{i \in F} \omega_i + \sum_{i \in F} \omega_i \left\{ (a - 1) \log[\Phi(z_i)] + (b - 1) \log[1 - \Phi(z_i)^a] - \frac{z_i^2}{2} \right\} + \sum_{i \in C} \omega_i \log\left\{ [1 - \Phi(z_i)^a]^b \right\},$$

em que r é o número de falhas, $0 \le \omega_i \le 1$ e $\omega_0 = (1, ..., 1)^{\top}$. Os elementos da matriz $\Delta = (\Delta_a^{\top}, \Delta_b^{\top}, \Delta_\sigma^{\top}, \Delta_{\beta}^{\top})$ são obtidos numericamente.

• Perturbação na variável resposta

Neste esquema, o interesse é detectar a sensibilidade do modelo quando a variável resposta é submetida a uma perturbação aditiva dada por $Y_i = y_i + \omega_i S_y$, em que S_y é um fator de escala que pode ser a estimativa do desvio padrão da resposta observada Y e $\omega_i \in \Re$. A função de log-verossimilhança perturbada pode ser expressa como

$$\begin{split} \ell(\pmb{\eta}|\pmb{\omega}) &= r[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i \in F} \{(a-1)\log[\Phi(z_i^*)] + \\ &+ (b-1)\log[1 - \Phi(z_i^*)^a] - \frac{z_i^{*2}}{2} \bigg\} + \sum_{i \in C} \log \left\{ [1 - \Phi(z_i^*)^a]^b \right\}, \end{split}$$

em que $z_i^* = [(y_i + \omega_i S_y) - \mathbf{x}_i^{\top} \boldsymbol{\beta}]/\sigma$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \dots, 0)^{\top}$ é o vetor de não perturbação. Os elementos da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_a^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_b^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_\sigma^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top})$ são obtidos numericamente.

• Perturbação em uma variável explicativa

Para verificar a sensibilidade do modelo (4.1), considere agora uma perturbação aditiva em uma determinada variável explicativa contínua, digamos X_q , definida por $x_{iq\omega} = x_{iq} + \omega_i S_q$, em que S_q é um vetor de escala e $\omega_i \in \Re$. A função de log-verossimilhança perturbada tem a seguinte forma

$$\begin{split} \ell(\pmb{\eta}|\pmb{\omega}) &= r[\log(a) + \log(b) - \log(\sigma^2) - \log(\sqrt{2\pi})] + \sum_{i \in F} \left\{ (a-1) \log[\Phi(z_i^{**})] + \right. \\ &+ (b-1) \log[1 - \Phi(z_i^{**})^a] - \frac{z_i^{**2}}{2} \right\} + \sum_{i \in C} \log\left\{ [1 - \Phi(z_i^{**})^a]^b \right\}, \end{split}$$

em que $z_i^{**} = (y_i - \mathbf{x}_i^{*\top} \boldsymbol{\beta})/\sigma$, $\mathbf{x}_i^{*\top} \boldsymbol{\beta} = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_q (x_{iq} + \omega_i S_q) + \dots + \beta_p x_{ip}$ e $\boldsymbol{\omega}_0 = (0, \dots, 0)^{\top}$ é o fator de não pertubação. Os elementos da matriz $\boldsymbol{\Delta} = (\boldsymbol{\Delta}_a^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_b^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_\sigma^{\top}, \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{\beta}}^{\top})$ são obtidos numericamente.

4.4 Análise de resíduos

A fim de verificar as suposições dos erros, bem como a presença de *outliers*, consideramos dois tipos de resíduos: resíduo martingal e resíduo deviance modificado.

• Resíduo martingal

O resíduo martingal é muito utilizado em processos de contagem (Fleming e Harrington , 2011). O resíduo martingal é definido como $\hat{r}_{M_i} = \delta_i + \log[\hat{S}(y_i; \boldsymbol{\eta})]$, em que δ_i é a variável indicadora de censura, ou seja, $\delta_i = 0(\delta_i = 1)$ e $\hat{S}(y_i; \boldsymbol{\eta})$ denota a função de sobrevivência estimada expressa em (4.2). Portanto, o resíduo martingal para o modelo KwN assume a forma

$$\hat{r}_{M_i} = \begin{cases} 1 + \log\{[1 - \Phi(z_i)^{\hat{a}}]^{\hat{b}}\}, & \text{se } \delta_i = 1, \\ \log\{[1 - \Phi(z_i)^{\hat{a}}]^{\hat{b}}\}, & \text{se } \delta_i = 0, \end{cases}$$

em que $z_i = (y_i - \mathbf{x}_i^{\top} \hat{\boldsymbol{\beta}})/\hat{\sigma}$.

Esse resíduo é assimétrico e assume valores no intervalo $(-\infty, 1]$.

• Resíduo deviance modificado

Esse resíduo foi introduzido por Therneau et al. (1990) visando tornar o resíduo martingal mais simétrico em torno de zero. O resíduo deviance modificado para um modelo de regressão paramétrico é dado por

$$\hat{r}_{D_i} = sinal(\hat{r}_{M_i}) \{-2[\hat{r}_{M_i} + \delta_i \log(\delta_i - \hat{r}_{M_i})]\}^{1/2},$$

em que \hat{r}_{M_i} é o resíduo martingal e a função sinal() é uma função que conduz aos valores +1 se o argumento é positivo e -1 se o argumento é negativo. O resíduo deviance modificado para o nosso modelo é expresso por

$$\hat{r}_{D_i} = \begin{cases} sinal(\hat{r}_{M_i}) \{-2[1 + \log\{[1 - \Phi(z_i)^{\hat{a}}]^{\hat{b}}\} + \log(-\log\{[1 - \Phi(z_i)^{\hat{a}}]^{\hat{b}}\})]\}^{1/2}, & \text{se } \delta_i = 1, \\ sinal(\hat{r}_{M_i}) \{-2(\log\{[1 - \Phi(z_i)^{\hat{a}}]^{\hat{b}}\})\}^{1/2}, & \text{se } \delta_i = 0. \end{cases}$$

O gráfico dos resíduos, martingal ou deviance modificado *versus* os valores ajustados forma uma ferramenta importante na análise residual, pois o mesmo fornece uma maneira de verificar a adequação do modelo e auxiliam na detecção de observações atípicas (outliers). Se o modelo for adequado, os gráficos devem apresentar um comportamento aleatório em torno de zero.

4.5 Aplicação

Nesta seção, utilizamos um conjunto de dados reais analisado por Kalbfleisch e Prentice (1980) para ilustrar a utilidade do modelo de regressão KwN com censura aleatória. Estimamos os parâmetros desse modelo por máxima verossimilhança usando o procedimento BFGS em linguagem R. O conjunto de dados é descrito em seguida.

4.5.1 Dados de transplante de coração em Stanford

Os dados reportam-se ao programa de transplante de coração de Stanford no período decorrido entre outubro de 1967 a abril de 1974 e referem-se a 103 pacientes cardíacos que se cadastraram no programa. Dentre os 103 pacientes, 69 receberam o transplante. O número de mortes registradas no final do estudo foi de 75 (45 com transplante e 30 sem terem recebido transplante) e os 28 pacientes restantes contribuíram com tempos de sobrevida censurados. Disponibilizamos os dados no Apêndice D.

O conjunto de dados é analisado sob a perspectiva de modelos de regressão com censura aleatória à direita, que podem ser expressos da seguinte forma

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \sigma z_i, i = 1, \dots, 103.$$

Consideramos as seguintes variáveis:

- y_i : tempo de sobrevida (tempo desde a aceitação para o programa de transplante de coração até a morte, em dias) ou tempo de censura.
- x_{i1} : idade de aceitação (idade do indivíduo quando incluído no programa de transplante de coração, em anos),
- x_{i2} : cirurgia prévia ($1 = \sin, 0 = \tilde{nao}$),
- x_{i3} : transplante ($1 = \sin, 0 = \tilde{\text{nao}}$).

As Tabelas 4.1 e 4.2 apresentam as estimativas de máxima verossimilhança e erros padrões (entre parênteses) dos parâmetros dos modelos de regressão e os valores dos critérios de informação AIC, BIC e CAIC para os modelos de regressão KwN, LTII-N, Exp-N e Normal. Observamos que o modelo de regressão KwN fornece valores mais baixos para os critérios AIC, BIC e CAIC quando comparado aos modelos de regressão LTII-N, Exp-N e normal. Assim, concluímos que o modelo de regressão KwN é o que melhor se adapta aos dados de transplante de coração.

Como podemos observar na Tabela 4.1, a estimativa para o parâmetro β_1 é negativa para o modelo KwN assim como para os demais modelos, exceto para o modelo Exp-N. Esse resultado faz sentido, pois β_1 é a idade de aceitação no programa e quanto maior for, menor será o tempo de vida.

A fim de detectar possíveis observações discrepantes no modelo de regressão KwN, construímos o gráfico dos resíduos deviance modificado versus valores ajustados, disponível na Figura 4.1. Não detectamos nenhuma tendência, apesar de ter ocorrido um valor de resíduo inferior a -3.

O gráfico normal de probabilidade dos resíduos deviance modificado com envelope simulado é apresentado na Figura 4.2. Como podemos observar, não há indícios de afastamento da suposição de que os erros têm distribuição KwN. Fizemos o gráfico normal de probabilidade dos resíduos deviance modificado com envelope simulado para os demais modelos, mas não obtivemos um bom ajuste dos dados a esses modelos.

Na Figura 4.3, temos o gráfico de influência local considerando o esquema de perturbação ponderação de casos. Identificamos as observações #26 e #91 como possivelmente influentes. Com o intuito de analisar o impacto dessas observações nas estimativas dos parâmetros, realizamos uma análise confirmatória reajustando o modelo sem as observações consideradas influentes. Depois calculamos a mudança relativa em porcentagem das estimativas para os parâmetros do modelo.

As mudanças relativas para as observações #26 e #91, individualmente e conjuntamente, estão apresentadas na Tabela 4.3.

Apresentamos na Tabela 4.4 as estimativas dos parâmetros do modelo de regressão KwN sem essas observações. Notemos que a retirada das observações #26 ou #91 não causou mudanças inferenciais no modelo. Assim, sugerimos que essas observações não sejam eliminadas.

Tabela 4.1: Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros para os modelos de regressão KwN, LTII-N, Exp-N e normal ajustados aos dados de transplante de coração em Stanford

——————————————————————————————————————			F	Parâmetros			
Distribuição	a	b	σ	β_0	β_1	β_2	β_3
KwN	0,0057	0,6564	0,2059	8,9446	-0,0708	2,3957	2,1499
	(0,00085)	(0,2269)	(0,1130)	(0,6190)	(0.0158)	(0,7923)	(0,3398)
LTII-N	1	$0,\!0925$	$0,\!6171$	$5,\!5327$	-0,0972	$1,\!2372$	$2,\!1327$
	-	(0.0385)	(0.0083)	(0,0063)	(0,0136)	(0,5093)	(0,0242)
$\operatorname{Exp-N}$	$0,\!0053$	1	$0,\!2831$	$5,\!0512$	$0,\!0722$	1,1427	$1,\!3541$
	(0,0006)	-	(0,2152)	(0,5112)	(0,0173)	(0,7946)	(0.4989)
Normal	1	1	$1,\!1930$	$5,\!4570$	-0,0577	$0,\!8706$	$2,\!6236$
	-	-	(0,0717)	(0,6105)	(0,0132)	(0,3562)	(0,2644)

Tabela 4.2: Critérios de informação

——————————————————————————————————————		Critérios	
Distribuição	AIC	CAIC	BIC
KwN	$131,\!555$	132,734	149,998
LTII-N	$306,\!275$	$307,\!150$	$322,\!083$
Exp-N	$222,\!806$	$223,\!681$	$238,\!614$
Normal	$397,\!633$	$398,\!509$	$413,\!442$

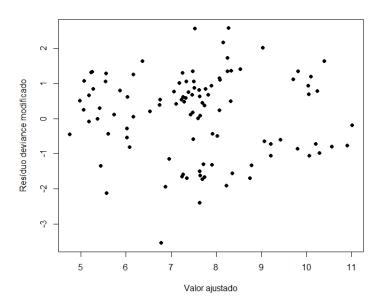


Figura 4.1: Gráficos dos resíduos deviance modificado versus valores ajustados para o modelo de regressão KwN.

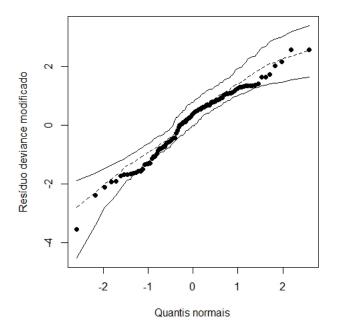


Figura 4.2: Gráfico de probabilidade normal com envelope simulado dos resíduos deviance modificado para o modelo de regressão KwN com censura.

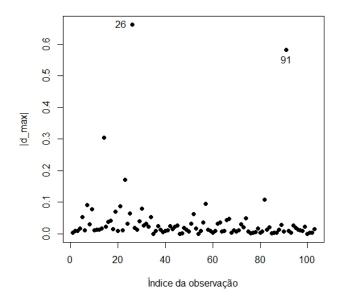


Figura 4.3: Gráfico de $|d_{max}|$ contra índice da observação considerando o esquema de perturbação da ponderação de casos.

Tabela 4.3: Mudanças relativas

Observações			Pa	arâmetro	S		
Observações	a	b	σ	β_0	β_1	β_2	β_3
#26	109,77%	$75,\!44\%$	$15,\!57\%$	$4,\!32\%$	$12,\!49\%$	$13{,}36\%$	$7,\!17\%$
#91	29,14%	$17{,}44\%$	$0,\!68\%$	$0,\!31\%$	$8,\!60\%$	$5{,}90\%$	$28,\!43\%$
#26 e #91	70,82%	$16,\!38\%$	8,01%	$3,\!85\%$	$48{,}22\%$	$13,\!10\%$	$46,\!31\%$

Tabela 4.4: Estimativas de máxima verossimilhança e respectivos erros padrão dos parâmetros para os modelos de regressão KwN, ajustados aos dados de transplante de coração em Stanford sem as observações $\#26\ e\ \#91$

Observações	Parâmetros							
Observações	a	b	σ	β_0	β_1	β_2	β_3	
#26	0,0119	$1,\!1516$	0,2380	8,5579	-0,0619	2,7159	1,9958	
	(0,00071)	$(0,\!2154)$	(0,1023)	(0,6552)	(0,0144)	(0,5939)	(0,2361)	
#91	0,0072	0,5419	0,2061	8,9720	-0,0768	2,2544	2,7612	
	(0,00081)	(0,1333)	(0,0209)	(0,6014)	$(0,\!0153)$	(0,7871)	(0,3060)	
#26 e #91	0,0097	0,7639	0,1895	9,2893	-0,1049	2,7093	3,1455	
	(0,00073)	$(0,\!2213)$	(0,1114)	(0,5988)	(0,0109)	(0,7712)	(0.1679)	

Capítulo 5

Considerações finais

No desenvolvimento deste trabalho, estudamos a distribuição Kumaraswamy normal (KwN) gerada a partir da classe de distribuições Kumaraswamy generalizadas, proposta por Cordeiro e de Castro (2011). Apresentamos algumas propriedades desta distribuição, tais como, momentos ordinários, centrais, incompletos e ponderados por probabilidade, desvios médios, funções quantílica e geradora de momentos, estatísticas de ordem e dois tipos de entropias, Rényi e Shannon. Os parâmetros da distribuição são estimados por máxima verossimilhança. Por meio de estudos de simulação, constatou-se um desempenho satisfatório para a distribuição em questão. A utilidade da distribuição KwN é ilustrada por meio de uma aplicação de um conjunto de dados reais. Os critérios AIC, BIC e CAIC e o teste da razão de verossimilhanças, mostram que essa distribuição proporciona um ajuste mais adequado do que outras distribuições. Propomos dois modelos de regressão KwN, um com a presença de censura e outro com ausência e fornecemos algumas medidas diagnósticas para ambos os modelos. Duas aplicações dos novos modelos de regressão a dados reais comprovam empiricamente que eles podem ser usados de forma bastante eficaz para proporcionar ajustes melhores do que outros modelos bem conhecidos.

As principais contribuições científicas desta tese concentram-se nos Capítulos 2, 3 e 4.

5.1 Pesquisas futuras

Dando continuidade a esta pesquisa, podemos futuramente

- Desenvolver um estudo sobre a assimetria da distribuição dos estimadores dos parâmetros a
 e b da distribuição discutida no Capitulo 2;
- Propor um modelo de regressão quantílica;
- Desenvolver e implementar computacionalmente outros métodos de estimação para os parâmetros do modelo de regressão KwN, por exemplo, o algoritmo de estimação EM.

Apêndice A

A.1 Elementos da matriz de informação observada $J(\theta)$

Diferenciando (2.39) em relação aos elementos de $\boldsymbol{\theta}$, os elementos da matriz de informação observada $J(\theta)$ para os parâmetros (a, b, μ, σ) são:

$$J_{aa} = -\frac{n}{a^2} - (b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_i)]^a \{ \log[\Phi(z_i)] \}^2}{[1 - \Phi(z_i)^a]} \left\{ 1 - \frac{[\Phi(z_i)]^a}{[1 - \Phi(z_i)^a]} \right\},$$

$$J_{ab} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_i)]^a \{ \log[\Phi(z_i)] \}}{[1 - \Phi(z_i)^a]},$$

$$J_{a\mu} = -\sum_{i=1}^{n} \sigma^{-1} \phi(z_i) \left\{ \frac{1}{\Phi(z_i)} + \frac{(b-1)[\Phi(z_i)]^{a-1}}{1 - \Phi(z_i)^a} \left\{ 1 + a \log[\Phi(z_i)] - \frac{[\Phi(z_i)]^a}{1 - \Phi(z_i)^a} \times \log[\Phi(z_i)] \right\} \right\}$$

$$J_{a\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{z_{i}\phi(z_{i})}{\sigma[\Phi(z_{i})]} - (b-1)\frac{\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma[1-\Phi(z_{i})]^{a}} \left[z_{i} - az_{i} \log[\Phi(z_{i})] - a\Phi(z_{i})^{a} \right] \right\}$$

$$\times \frac{\log[\Phi(z_{i})]}{\sigma[1-\Phi(z_{i})^{a}]} \right\},$$

$$J_{bb} = -\frac{n}{b^{2}},$$

$$J_{b\mu} = -a\sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi((z_{i}))}{\sigma[1-\Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$J_{\mu\mu} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2}} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left(z_{i} - \frac{\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} \right) - \frac{a(b-1)\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left[(a-1) + \left[\frac{a\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\},$$

 $J_{b\sigma} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i [\Phi(z_i)]^{a-1} \phi(z_i)}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]},$

$$J_{\mu\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2z_{i}}{\sigma} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})z_{i}}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left[z_{i} + \phi(z_{i}) - \frac{\Phi(z_{i})}{[\Phi(z_{i})]} \right] + \frac{a(b-1)\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \times \right.$$

$$\left. \left\{ z_{i} + \frac{(a-1)[\Phi(z_{i})]^{-1}}{\sigma} - \frac{z_{i}\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} - \frac{\phi(z_{i})[1 - \Phi(z_{i})^{a}]}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\} \right\},$$

е

$$J_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(a-1)z_i\phi(z_i)}{\sigma^2\Phi(z_i)} \left\{ 1 - z_i^2 - \frac{z_i\phi(z_i)}{\Phi(z_i)} - \frac{\phi(z_i)}{\Phi(z_i)} \right\} - \frac{\phi(z_i)\Phi(z_i)^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} \right\}$$

$$a(b-1)z_i \left\{ \sigma^{-2} - z_i + \sigma^{-1}(a-1)z_i\phi(z_i)\Phi(z_i)^{-1} + \frac{a[1 - \Phi(z_i)^a]}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} - z_1\phi(z_i) \times \frac{\Phi(z_i)^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} \right\}.$$

Apêndice B

A.2 Elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ - Modelo de regressão KwN

Diferenciando (3.2) em relação aos elementos de η , os elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ para os parâmetros $(a, b, \sigma, \boldsymbol{\beta}^{\top})$ são:

$$J_{aa} = -\frac{n}{a^{2}} - (b-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \{\log[\Phi(z_{i})]\}^{2}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ 1 - \frac{[\Phi(z_{i})]^{a}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\},$$

$$J_{ab} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \{\log[\Phi(z_{i})]\}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$J_{a\beta_{j}} = -\sum_{i=1}^{n} \sigma^{-1} \phi(z_{i}) \left\{ \frac{1}{\Phi(z_{i})} + \frac{(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \left\{ 1 + a \log[\Phi(z_{i})] - \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\} \right\},$$

$$J_{a\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{z_{i}\phi(z_{i})}{\sigma[\Phi(z_{i})]} - (b-1) \frac{\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})]^{a}} \left[z_{i} - az_{i} \log[\Phi(z_{i})] - \frac{a\Phi(z_{i})^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\},$$

$$J_{bb} = -\frac{n}{b^{2}},$$

$$J_{b\beta_{j}} = -a \sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi((z_{i}))}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$J_{b\sigma} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i}[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$J_{\beta_{j}\beta_{k}} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2}} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left(z_{i} - \frac{\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} \right) - \frac{a(b-1)\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left[(a-1)[\Phi(z_{i})]^{-1} + z_{i} + \frac{a\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\},$$

$$J_{\beta_{j}\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{2z_{i}}{\sigma} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})z_{i}}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left[z_{i} + \phi(z_{i}) - \frac{\Phi(z_{i})}{[\Phi(z_{i})]} \right] + \frac{a(b-1)\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right.$$

$$\times \left\{ z_{i} + \frac{(a-1)[\Phi(z_{i})]^{-1}}{\sigma} - \frac{z_{i}\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} - \frac{\phi(z_{i})[1 - \Phi(z_{i})^{a}]}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\} \right\},$$

e

$$J_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\sigma^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{(a-1)z_i\phi(z_i)}{\sigma^2\Phi(z_i)} \left\{ 1 - z_i^2 - \frac{z_i\phi(z_i)}{\Phi(z_i)} - \frac{\phi(z_i)}{\Phi(z_i)} \right\} - \frac{a(b-1)z_i\phi(z_i)\Phi(z_i)^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} \left\{ \sigma^{-2} - z_i + \sigma^{-1}(a-1)z_i\phi(z_i)\Phi(z_i)^{-1} + \frac{a[1 - \Phi(z_i)^a]}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} - \frac{z_1\phi(z_i)\Phi(z_i)^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_i)^a]} \right\} \right).$$

Apêndice C

A.3 Elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ -Modelo de regressão KwN com censura

Diferenciando (4.3) em relação aos elementos de η , os elementos da matriz de informação observada $J(\eta)$ para os parâmetros $(a, b, \sigma, \boldsymbol{\beta}^{\top})$ são:

$$J_{aa} = -\frac{n}{a^{2}} - (b-1) \sum_{i \in F} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \{ \log[\Phi(z_{i})] \}^{2}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ 1 - \frac{[\Phi(z_{i})]^{a}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\} - b \sum_{i \in C} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} [\log \Phi(z_{i})]^{2}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \times \left\{ 1 + \frac{[\Phi(z_{i})]^{a}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\},$$

$$J_{ab} = -\sum_{i \in F} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \{ \log[\Phi(z_{i})] \}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} - \sum_{i \in C} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} [\log \Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}},$$

$$J_{a\beta_{j}} = -\sum_{i \in F} \sigma^{-1} \phi(z_{i}) \left\{ \frac{1}{\Phi(z_{i})} + \frac{(b-1)[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \left\{ 1 + a \log[\Phi(z_{i})] - \frac{[\Phi(z_{i})]^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{1 - \Phi(z_{i})^{a}} \right\} \right\}$$

$$+ b \sum_{i \in C} \frac{x_{ij} [\Phi(z_{i})]^{a-1} \phi(z_{i})}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ 1 + a \log[\Phi(z_{i})] + \frac{a[\Phi(z_{i})]^{a-1} \{ \log[\Phi(z_{i})] \}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\}$$

$$J_{a\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{z_{i}\phi(z_{i})}{\sigma[\Phi(z_{i})]} - (b-1) \frac{\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma[1-\Phi(z_{i})]^{a}} \left[z_{i} - az_{i} \log[\Phi(z_{i})] - \frac{a\Phi(z_{i})^{a} \log[\Phi(z_{i})]}{\sigma[1-\Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\}$$

$$+b\sum_{i \in C} \frac{z_{i}[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma[1-\Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ 1 + a \log[\Phi(z_{i})] + \frac{a[\Phi(z_{i})]^{a-1}\{\log[\Phi(z_{i})]\}}{[1-\Phi(z_{i})^{a}]} \right\},$$

$$J_{bb} = -\frac{n}{h^2},$$

$$J_{b\beta_{j}} = -a \sum_{i=1}^{n} \frac{[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi((z_{i}))}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} + a \sum_{i \in C} \frac{x_{ij}[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$L_{b\sigma} = a \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{i}[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} + a \sum_{i \in C} \frac{z_{i}[\Phi(z_{i})]^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]},$$

$$J_{\beta_{j}\beta_{k}} = -\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\sigma^{2}} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left(z_{i} - \frac{\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} \right) - \frac{a(b-1)\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left[(a-1)[\Phi(z_{i})]^{-1} + z_{i} + \frac{a\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right] \right\} + ab \sum_{i \in C} \frac{\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})x_{ij}}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ \frac{(a-1)\Phi(z_{i})^{-1}\phi(z_{i})x_{ij}}{\sigma} - x_{ij} + \frac{x_{ik}z_{i}}{\sigma} - \frac{a\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})x_{ij}x_{ik}}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\},$$

$$J_{\beta_{j}\sigma} = -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2z_{i}}{\sigma} + \frac{(a-1)\phi(z_{i})z_{i}}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left[z_{i} + \phi(z_{i}) - \frac{\Phi(z_{i})}{[\Phi(z_{i})]} \right] + \frac{a(b-1)\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right] \times \left\{ z_{i} + \frac{(a-1)[\Phi(z_{i})]^{-1}}{\sigma} - \frac{z_{i}\phi(z_{i})[\Phi(z_{i})]^{a-1}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} - \frac{\phi(z_{i})[1 - \Phi(z_{i})^{a}]}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\} \right) - ab \sum_{i \in C} \frac{\phi(z_{i})}{\sigma^{2}} \times \frac{\Phi(z_{i})^{a-1}x_{ij}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ (a-1)\Phi(z_{i})^{-1}x_{ij}z_{i} - x_{ij}z_{i}^{2} - x_{ij} + \frac{a\Phi(z_{i})^{a-1}\phi(z_{i})x_{ij}z_{i}}{[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\},$$

е

$$J_{\sigma\sigma} = \frac{n}{\sigma^{2}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(a-1)z_{i}\phi(z_{i})}{\sigma^{2}\Phi(z_{i})} \left\{ 1 - z_{i}^{2} - \frac{z_{i}\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} - \frac{\phi(z_{i})}{\Phi(z_{i})} \right\} - \frac{a(b-1)z_{i}\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \left\{ \sigma^{-2} - z_{i} + \sigma^{-1}(a-1)z_{i}\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{-1} + \frac{a[1 - \Phi(z_{i})^{a}]}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} - \frac{z_{1}\phi(z_{i})\Phi(z_{i})^{a-1}}{\sigma[1 - \Phi(z_{i})^{a}]} \right\} + b a \sum_{i \in C} \phi(z_{i})$$

$$\times (a-1)\frac{\Phi(z_{i})^{a-1}z_{i}^{2}}{\sigma^{2}[1 - \Phi(z_{i})^{a}]}.$$

Apêndice D

A.4 Dados de transplante de coração em Stanford

Tabela A.1: Dados de transplante de coração em Stanford

		_	_	-
Idade de aceitação	Cirurgia prévia	Transplante	Censura	tempo de sobrevida (dias)
30,84	0	0	1	50
51,84	0	0	1	6
54,30	0	1	1	16
$40,\!26$	0	1	1	39
20,79	0	0	1	18
54,60	0	0	1	3
50,87	0	1	1	675
$45,\!35$	0	0	1	40
$47,\!16$	0	0	1	85
$42,\!50$	0	1	1	58
47,98	0	1	1	153
53,19	0	0	1	8
54,57	0	1	1	81
54,01	0	1	1	1387
$53,\!82$	1	0	1	1
$49,\!45$	0	1	1	308
20,33	0	0	1	36
56,85	0	1	1	43
$59,\!12$	0	0	1	37
55,28	0	1	1	28
$43,\!34$	0	1	1	1032
42,78	0	1	1	51
$58,\!36$	0	1	1	733
51,80	0	1	1	219
$33,\!\!22$	0	1	0	1800
$30,\!54$	0	0	0	1401
8,79	0	0	1	263
$54,\!02$	0	1	1	72
$50,\!\!43$	0	0	1	35
$44,\!91$	0	1	1	852
54,89	0	0	1	16
$64,\!41$	0	1	1	77

Tabela A.2: Continuação da Tabela anterior

Idade de aceitação	Cirurgia prévia	Transplante	Censura	tempo de sobrevida (dias)
48,90	0	1	0	1587
$40,\!55$	0	1	0	1572
$43,\!47$	0	0	1	12
48,93	0	1	1	100
61,50	0	1	1	66
$41,\!\!47$	0	1	1	5
$50,\!\!52$	0	1	1	53
48,48	1	1	0	1408
$45,\!\!30$	1	1	0	1322
$36,\!$	0	0	1	3
$43,\!39$	1	0	1	$\frac{1}{2}$
$42,\!58$	1	0	1	40
36,18	0	1	1	45
48,61	1	1	1	996
47,10	0	1	1	72
56,04	0	0	1	9
36,65	1	1	0	1142
45,89	1	1	1	980
•	_	1	1	285
48,73	0	0	1	102
41,25	0			
47,34	0	$\frac{1}{0}$	1	188
47,79	0	0	1	3
52,45	0	1	1	61
38,74	0	1	0	942
41,26	0	0	1	149
48,02	1	1	1	343
41,38	1	1	0	916
49,05	0	1	1	68
52,56	0	0	1	2
$39,\!35$	0	0	1	69
$32,\!66$	0	1	0	842
$48,\!82$	1	1	1	584
$51,\!29$	0	1	1	78
$53,\!21$	0	0	1	32
$19,\!55$	0	1	1	285
$45,\!24$	0	1	1	68
$47,\!99$	0	1	0	670
$53,\!00$	0	1	1	30
$47,\!41$	0	1	0	620
26,73	0	1	0	596
$56,\!33$	0	1	1	90
29,17	0	1	1	17
52,18	0	0	1	2
52,08	1	1	0	545
41,11	0	0	1	21
48,70	0	1	0	515
53,78	0	1	1	96
46,44	1	1	0	482

Tabela A.3: Continuação da Tabela anterior

Idade de aceitação	Cirurgia prévia	Transplante	Censura	tempo de sobrevida (dias)
52,89	0	1	0	445
$29,\!20$	0	0	0	428
$53,\!31$	0	1	1	80
42,72	0	1	1	334
47,98	0	0	1	5
48,92	0	1	0	397
$46,\!25$	0	1	1	110
$54,\!36$	0	1	0	370
$51,\!05$	0	1	1	207
$52,\!03$	1	1	1	186
$47,\!59$	0	0	1	340
44,98	0	1	0	340
47,75	0	1	0	265
$43,\!84$	1	1	1	165
$40,\!28$	0	1	1	16
$26,\!65$	0	1	0	180
$23,\!62$	0	1	0	131
$28,\!63$	0	1	0	109
$49,\!83$	0	0	1	21
$35,\!06$	1	1	0	39
$49,\!52$	0	0	0	31
$40,\!39$	0	0	0	11
$39,\!32$	0	0	1	6

Referências Bibliográficas

- Abramowitz e Stegun (1965) Milton Abramowitz e Irene A Stegun. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables, volume 55. Courier Corporation. Citado na pág. 13
- Andrade et al. (2015) Thiago Andrade, Heloisa Rodrigues, Marcelo Bourguignon e Gauss Cordeiro. The exponentiated generalized gumbel distribution. Revista Colombiana de Estadística, 38(1):123–143. Citado na pág. 2
- Barreto-Souza et al. (2010) Wagner Barreto-Souza, Alessandro HS Santos e Gauss M Cordeiro. The beta generalized exponential distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 80(2):159–172. Citado na pág. 1
- Barros (2008) Angela Alves de Araújo Barros. Distribuições Exponencializada e Estendidas: Uma abordagem Clássica e Bayesiana. Tese de Doutorado, Universidade Federal Rural de Pernambuco. Citado na pág. 1
- Carrasco et al. (2008) Jalmar MF Carrasco, Edwin MM Ortega e Gilberto A Paula. Log-modified weibull regression models with censored data: Sensitivity and residual analysis. Computational Statistics & Data Analysis, 52(8):4021–4039. Citado na pág. 39
- Castellares et al. (2013) F Castellares, LC Montenegro e GM Cordeiro. The beta log-normal distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 83(2):203–228. Citado na pág. 23
- Comtet () Louis Comtet. Advanced combinatorics. 1974. Reidel, Dordrecht. Citado na pág. 16
- Cook (1977) R Dennis Cook. Detection of influential observation in linear regression. *Technometrics*, 19(1):15–18. Citado na pág. 31
- Cook (1986) R Dennis Cook. Assessment of local influence. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), páginas 133–169. Citado na pág. 31
- Cordeiro e de Castro (2011) Gauss M Cordeiro e Mario de Castro. A new family of generalized distributions. *Journal of statistical computation and simulation*, 81(7):883–898. Citado na pág. 1, 2, 5, 19
- Cordeiro (1999) Gauss Moutinho Cordeiro. *Introdução à teoria Assintótica*. IMPA. Citado na pág. 17
- Cruz et al. (2016) José Nilton da Cruz, Edwin MM Ortega e Gauss M Cordeiro. The log-odd log-logistic weibull regression model: modelling, estimation, influence diagnostics and residual analysis. Journal of Statistical Computation and Simulation, 86(8):1516–1538. Citado na pág. 2
- de Pascoa et al. (2011) Marcelino AR de Pascoa, Edwin MM Ortega e Gauss M Cordeiro. The kumaraswamy generalized gamma distribution with application in survival analysis. Statistical methodology, 8(5):411-433. Citado na pág. 2

- De Santana et al. (2012) Tiago Viana Flor De Santana, Edwin MM Ortega, Gauss M Cordeiro e Giovana O Silva. The kumaraswamy-log-logistic distribution. *Journal of Statistical Theory and Applications*, 11(3):265–291. Citado na pág. 2
- **Dunn e Smyth (1996)** Peter K Dunn e Gordon K Smyth. Randomized quantile residuals. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 5(3):236–244. Citado na pág. 33
- Eugene et al. (2002) Nicholas Eugene, Carl Lee e Felix Famoye. Beta-normal distribution and its applications. Communications in Statistics-Theory and methods, 31(4):497–512. Citado na pág. 1
- Fleming e Harrington (2011) Thomas R Fleming e David P Harrington. Counting processes and survival analysis, volume 169. John Wiley & Sons. Citado na pág. 43
- Gradshteyn e Ryzhik (2008) IS Gradshteyn e IM Ryzhik. Table of integrals, series, and products. 2000. There is no corresponding record for this reference. Citado na pág. 11
- Gupta et al. (1998) Ramesh C Gupta, Pushpa L Gupta e Rameshwar D Gupta. Modeling failure time data by lehman alternatives. Communications in Statistics-Theory and methods, 27(4): 887–904. Citado na pág. 1
- Gupta e Kundu (1999) Rameshwar D Gupta e Debasis Kundu. Theory & methods: Generalized exponential distributions. Australian & New Zealand Journal of Statistics, 41(2):173–188. Citado na pág. 1
- Gupta e Kundu (2001) Rameshwar D Gupta e Debasis Kundu. Generalized exponential distribution: different method of estimations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 69 (4):315–337. Citado na pág. 2
- Hashimoto et al. (2010) Elizabeth M Hashimoto, Edwin MM Ortega, Vicente G Cancho e Gauss M Cordeiro. The log-exponentiated weibull regression model for interval-censored data. Computational Statistics & Data Analysis, 54(4):1017–1035. Citado na pág. 2
- Kalbfleisch e Prentice (1980) JD Kalbfleisch e Ross L Prentice. statistical analysis of failure time data. Citado na pág. 43
- Kenney e Keeping (1962) JF Kenney e ES Keeping. Moving averages. *Mathematics of Statistics*, 3:221–223. Citado na pág. 13
- Lehmann (1953) Erich L Lehmann. The power of rank tests. The Annals of Mathematical Statistics, páginas 23-43. Citado na pág. 5
- Leiva et al. (2007) Víctor Leiva, Michelli Barros, Gilberto A Paula e Manuel Galea. Influence diagnostics in log-birnbaum—saunders regression models with censored data. Computational Statistics & Data Analysis, 51(12):5694–5707. Citado na pág. 39
- Marshall e Olkin (1997) Albert W Marshall e Ingram Olkin. A new method for adding a parameter to a family of distributions with application to the exponential and weibull families. *Biometrika*, 84(3):641–652. Citado na pág. 1
- Moors (1988) JJA Moors. A quantile alternative for kurtosis. The statistician, páginas 25–32. Citado na pág. 13
- Mudholkar e Srivastava (1993) Govind S Mudholkar e Deo Kumar Srivastava. Exponentiated weibull family for analyzing bathtub failure-rate data. *IEEE transactions on reliability*, 42(2): 299–302. Citado na pág. 1
- Mudholkar et al. (1995) Govind S Mudholkar, Deo Kumar Srivastava e Marshall Freimer. The exponentiated weibull family: a reanalysis of the bus-motor-failure data. *Technometrics*, 37(4): 436–445. Citado na pág. 1, 7

- Murthy et al. (2004) DN Prabhakar Murthy, Min Xie e Renyan Jiang. Weibull models, volume 505. John Wiley & Sons. Citado na pág. 33
- Nadarajah (2005) Saralees Nadarajah. Exponentiated pareto distributions. *Statistics*, 39(3): 255–260. Citado na pág. 1
- Nadarajah (2006) Saralees Nadarajah. The exponentiated gumbel distribution with climate application. *Environmetrics*, 17(1):13-23. Citado na pág. 1
- Nadarajah (2008) Saralees Nadarajah. On the distribution of kumaraswamy. *Journal of Hydrology*, 348(3):568–569. Citado na pág. 10
- Nadarajah (2011) Saralees Nadarajah. The exponentiated exponential distribution: a survey, 2011. Citado na pág. 1
- Nadarajah e Gupta (2007) Saralees Nadarajah e Arjun K Gupta. The exponentiated gamma distribution with application to drought data. *Calcutta Statistical Association Bulletin*, 59(1-2): 29–54. Citado na pág. 7
- Nadarajah e Kotz (2004) Saralees Nadarajah e Samuel Kotz. The beta gumbel distribution. Mathematical Problems in Engineering, 2004(4):323-332. Citado na pág. 1, 2
- Nadarajah e Kotz (2006) Saralees Nadarajah e Samuel Kotz. The beta exponential distribution. Reliability engineering & system safety, 91(6):689–697. Citado na pág. 1, 2
- Ojo e Olapade (2003) Mathew Oladejo Ojo e AK Olapade. On the generalized logistic and log-logistic distributions. Kraqujevac Journal of Mathematics, 25(25):65-73. Citado na pág. 1
- Ortega et al. (2011) Edwin MM Ortega, Gauss M Cordeiro e Elizabeth M Hashimoto. A log-linear regression model for the beta-weibull distribution. Communications in Statistics-simulation and Computation, 40(8):1206–1235. Citado na pág. 39
- Paranaíba (2012) Patrícia Ferreira Paranaíba. Caracterização e extensões da distribuição Burr XII: propriedades e aplicações. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. Citado na pág. 2
- Pescim et al. (2010) Rodrigo R Pescim, Clarice GB Demétrio, Gauss M Cordeiro, Edwin MM Ortega e Mariana R Urbano. The beta generalized half-normal distribution. Computational statistics & data analysis, 54(4):945–957. Citado na pág. 1
- Santana (2010) Tiago Viana Flor de Santana. As distribuições Kumaraswamy-log-logística e Kumaraswamy-logística. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo. Citado na pág. 2
- Silva et al. (2010) Giovana Oliveira Silva, Edwin MM Ortega e Vicente G Cancho. Log-weibull extended regression model: estimation, sensitivity and residual analysis. Statistical Methodology, 7(6):614-631. Citado na pág. 2
- SOUZA et al. (2016) Glaucia Tadu de SOUZA et al. Nova generalização para a classe beta-g de distribuições de probabilidade. Citado na pág. 1
- Steinbrecher (2002) G Steinbrecher. Taylor expansion for inverse error function around origin. Relatório técnico, University of Craiova working paper. Citado na pág. 12
- Tahir e Cordeiro (2016) Muhammad H Tahir e Gauss M Cordeiro. Compounding of distributions: a survey and new generalized classes. *Journal of Statistical Distributions and Applications*, 3(1): 13. Citado na pág. 1
- Tahir e Nadarajah (2015) Muhammad H Tahir e Saralees Nadarajah. Parameter induction in continuous univariate distributions: Well-established g families. *Anais da Academia Brasileira de Ciências*, 87(2):539–568. Citado na pág. 1

Therneau et al. (1990) Terry M Therneau, Patricia M Grambsch e Thomas R Fleming. Martingale-based residuals for survival models. Biometrika, 77(1):147–160. Citado na pág. 43