Aperfeiçoamento de métodos assintóticos para a distribuição Kumaraswamy

Hérica Priscila de Araújo Carneiro

Tese apresentada AO Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Estatística

Área de concentração: Estatística

Orientadora: Prof. Dra. Mônica Carneiro Sandoval

Coorientadora: Prof. Dra. Denise Aparecida Botter

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e CNPq

São Paulo, junho de 2020

Aperfeiçoamento de métodos assintóticos para a distribuição Kumaraswamy

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 26/06/2020. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof^a. Dr^a. Mônica Carneiro Sandoval (orientadora) IME-USP
- Prof. Dr. Gustavo Henrique de Araújo Pereira UFScar
- Prof. Dr. Manoel Ferreira dos Santos Neto UFCG
- Prof. Dr. Miguel Angel Uribe Opazo UNIOESTE
- Prof^a. Dr^a. Lúcia Pereira Barroso IME-USP

Dedicatória

A Jesus Eucarístico e Maria Santíssima.

Agradecimentos

A Deus, por tudo!

À minha mãe, por todo apoio, amor e amizade.

Às Professoras Mônica Carneiro Sandoval e Denise Aparecida Botter pela excelente orientação, paciência e dedicação neste trabalho.

Ao Prof. Dr. Tiago Maia Magalhães pela valiosa colaboração no início deste trabalho.

Aos professores do IME-USP, essenciais no meu processo de formação profissional, pela dedicação, e por tudo o que aprendi ao longo dos anos de curso.

Aos Professores do Departamento de Estatística da UFRN pelo apoio, amizade e confiança. Em especial a prof^a Dr^a Dione Maria Valença.

Aos meus colegas de curso, pela troca de experiências que me permitiram crescer e pelos momentos de descontração.

Aos Professores da banca de defesa pelas sugestões e correções que aprimoraram este trabalho.

A todos àqueles que me apoiaram, me ajudaram e contribuíram, de alguma forma, para a realização deste trabalho. Deus, família, amigos e professores, agradeço de coração.

À CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

A distribuição Kumaraswamy é duplamente limitada, contínua e bastante flexível. Devido às semelhanças e vantagens computacionais que apresenta em relação à distribuição Beta, vem sendo bastante estudada. Com o objetivo de contribuir com esse estudo, a presente tese desenvolve alguns de seus aspectos assintóticos. Inicialmente, obtemos expressões para a correção até ordem n^{-2} do viés mediano dos estimadores dos parâmetros da distribuição e comparamos seu desempenho com outras correções, presentes na literatura, por meio de um estudo de simulação de Monte Carlo. Em seguida, derivamos uma expressão analítica para o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ da distribuição dos estimadores dos parâmetros do modelo e realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar seu desempenho. Na sequência, encontramos fatores de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças, incluímos o teste da razão de verossimilhanças bootstrap e a correção de Bartlett bootstrap. Desenvolvemos um estudo de simulação de Monte Carlo para comparar as taxas de rejeição dos testes estudados. Por fim, propomos um modelo de regressão quantílica Kumaraswamy e realizamos dois estudos de simulação de Monte Carlo, um para explorar o viés dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros do modelo e compará-lo ao do estimador de máxima verossimilhança corrigido pelos métodos de Cox e Snell e bootstrap e outro para comparar as taxas de rejeição do teste da razão de verossimilhanças e do teste corrigido pelo método de Bartlett bootstrap. Para ilustrar os resultados obtidos realizamos aplicações com dados reais.

Palavras-chave: Coeficiente de assimetria, correção de Bartlett, correção de Bartlett bootstrap, distribuição Kumaraswamy, modelo de regressão Kumaraswamy, redução do viés
mediano.

Abstract

The Kumaraswamy distribution is doubly limited, continuous and very flexible. Due to the similarities and computational advantages it presents in relation to the Beta distribution, it has been extensively studied. In order to contribute to this study, this thesis develops some of its asymptotic aspects. Initially, we obtain expressions for the correction up to order n^{-2} of the median bias of the estimators of the distribution parameters and compare its performance with other corrections present in the literature through a Monte Carlo simulation study. Then, we derive an analytical expression for the order $n^{-1/2}$ skewness coefficient of the distribution of the model parameter estimators and perform a Monte Carlo simulation study to evaluate its performance. Next, we find Bartlett's correction factors for the likelihood ratio statistic, we include the likelihood ratio test bootstrap and the bootstrap Bartlett's correction. We develop a Monte Carlo simulation study to compare the rejection rates of the tests studied. Finally, we propose a Kumaraswamy quantile regression model and carry out two Monte Carlo simulation studies, one to explore the bias of the maximum likelihood estimators of the model parameters and compare it to the maximum likelihood estimator corrected by the methods of Cox and Snell and bootstrap and another to compare the rejection rate of the likelihood ratio test with the rejection rate of the test corrected by bootstrap Bartlett's method. To illustrate the results obtained, we made applications with real data.

Keywords: Bartlett correction, bootstrap Bartlett correction, Kumaraswamy distribution, Kumaraswamy regression model, median bias reduction, skewness coefficient.

Sumário

\mathbf{R}	esum	10	iii
A	bstra	act	iv
Li	sta d	cract iv a de Figuras vii a de Tabelas viii atrodução 1 1 Objetivos 3 2 Organização da tese 3 3 Distribuição Kumaraswamy 4 edução do viés mediano 9 1 Introdução 9 2 Métodos de redução de viés 11 3 Correção do viés mediano 13 4 Estudo de simulação 16 5 Aplicação 36 oeficiente de assimetria 38 1 Introdução 38	
Li	sta d	le Tabelas	viii
1	Intr	rodução	1
	1.1	Objetivos	3
	1.2	Organização da tese	3
	1.3	Distribuição Kumaraswamy	4
2	Rec	lução do viés mediano	9
	2.1	Introdução	9
	2.2	Métodos de redução de viés	11
	2.3	Correção do viés mediano	13
	2.4	Estudo de simulação	16
	2.5	Aplicação	36
3	Coe	eficiente de assimetria	38
	3.1	Introdução	38
	3.2	Coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$	40
		3.2.1 Coeficiente de assimetria para a distribuição de $\hat{\alpha}$	41
		3.2.2 Coeficiente de assimetria para a distribuição de $\hat{\beta}$	42
	3.3	Estudo de simulação	43

SUMÁRIO

	3.4	Aplicação	52
4	Tes	te da razão de verossimilhanças corrigido	53
	4.1	Introdução	53
	4.2	Correção de Bartlett	54
	4.3	Teste bootstrap para a estatística da razão de verossimilhanças	58
	4.4	Correção de Bartlett bootstrap	58
	4.5	Estudo de simulação	59
5	Mo	delo de regressão quantílica	70
	5.1	Introdução	70
	5.2	Distribuição Kumaraswamy reparametrizada	71
	5.3	Modelo de regressão	72
	5.4	Método Cox e Snell para redução de viés	74
	5.5	Estudos de simulação	75
	5.6	Aplicação	83
6	Cor	nsiderações finais e pesquisas futuras	84
A	Cur	nulantes e coeficientes de assimetria	87
В	Cur	nulantes associados ao modelo de regressão Kumaraswamy	91
$\mathbf{R}_{\mathbf{c}}$	eferê	ncias Bibliográficas	99

Lista de Figuras

1.1	Graficos da função de distribuição acumulada (esquerda) e densidade de pro-	
	babilidade (direita) da distribuição Kumaraswamy para diferentes combina-	
	ções dos parâmetros α e β	6
2.1	Histograma da variável resposta Y	37
3.1	Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(0.5, 0.5) e densidade normal	48
3.2	Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(0.5, 5) e densidade normal	49
3.3	Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(1.5, 0.5) e densidade normal	50
3.4	Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(1.5, 7.5) e densidade normal	51
4.1	Taxas de rejeição dos testes para o nível nominal 1%	67
4.2	Taxas de rejeição dos testes para o nível nominal 5%	68
13	Tayas de rejeição dos testes para o nível nominal 10%	60

Lista de Tabelas

2.1	Viés relativo para $n=15.$	19
2.2	Viés relativo para $n=25$	20
2.3	Viés relativo para $n=40$	20
2.4	Viés relativo para $n=60$	21
2.5	Raiz do erro quadrático médio para $n=15.$	21
2.6	Raiz do erro quadrático médio para $n=25.$	22
2.7	Raiz do erro quadrático médio para $n=40$	22
2.8	Raiz do erro quadrático médio para $n=60$	23
2.9	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	15 e $\beta = 0, 5$	24
2.10	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	15 e $\beta = 5, 0.$	25
2.11	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	15 e $\beta = 7, 5$	26
2.12	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	25 e $\beta = 0, 5$	27
2.13	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	25 e $\beta = 5, 0.$	28
2.14	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	25 e $\beta = 7, 5$	29
2.15	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	40 e $\beta = 0, 5$	30

2.16	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	40 e $\beta = 5, 0.$	31
2.17	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	40 e $\beta = 7, 5$	32
2.18	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	60 e $\beta = 0, 5$	33
2.19	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	60 e $\beta = 5, 0.$	34
2.20	Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para $n=$	
	60 e $\beta = 7, 5$	35
2.21	Medidas descritivas da variável Y	36
2.22	Estimativas pontuais e intervalos de confiança (IC) para α	36
2.23	Estimativas pontuais e intervalos de confiança (IC) para β	37
2.24	Testes de aderência	37
3.1	Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições	
	dos EMV dos parâmetros da Kum (α, β)	45
3.2	Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições	
	dos EMV dos parâmetros da Kum (α, β)	46
3.3	Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições	
	dos EMV dos parâmetros da Kum (α, β)	47
3.4	Estimativa e coeficiente de assimetria (γ_1)	52
4.1	Taxas de rejeição para $n=15$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$	61
4.2	Taxas de rejeição para $n=15$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	61
4.3	Taxas de rejeição para $n=15$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	62
4.4	Taxas de rejeição para $n=25$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	62
4.5	Taxas de rejeição para $n=25$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	63
4.6	Taxas de rejeição para $n=25$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	63
4.7	Taxas de rejeição para $n=40$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	64
4.8	Tayas de rejeição para $n=40$ e $H_0: \alpha=\alpha_0$ $\beta=\beta_0$	64

LISTA DE TABELAS

4.9	Taxas de rejeição para $n=40$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0$	65
4.10	Taxas de rejeição para $n=60$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	65
4.11	Taxas de rejeição para $n=60$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	66
4.12	Taxas de rejeição para $n=60$ e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0, \ldots$	66
5.1	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=15$ e $\alpha=2$	77
5.2	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=25$ e $\alpha=2$	78
5.3	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=40$ e $\alpha=2$	78
5.4	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=60$ e $\alpha=2$	79
5.5	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=15$ e $\alpha=4$	79
5.6	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=25$ e $\alpha=4$	80
5.7	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=40$ e $\alpha=4$	80
5.8	Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para	
	$n=60$ e $\alpha=4$	81
5.9	Taxas de rejeição para $n=15$ e $H_0:\delta_2=0$	81
5.10	Taxas de rejeição para $n=25$ e $H_0:\delta_2=0$	81
5.11	Taxas de rejeição para $n=40$ e $H_0:\delta_2=0$	82
5.12	Taxas de rejeição para $n=60$ e $H_0:\delta_2=0$	82
5.13	Estimativas (erros padrões)	83

Capítulo 1

Introdução

Distribuição Kumaraswamy foi o nome utilizado por Jones (2009) para referir-se à parte contínua da chamada distribuição duplamente limitada, originalmente proposta por Ponnambalam Kumaraswamy em 1980, com o objetivo de modelar variáveis aleatórias hidrológicas. Em seu trabalho, Kumaraswamy (1980) apresenta algumas propriedades básicas da nova distribuição, no entanto não menciona sua semelhança com a distribuição Beta. Nadarajah (2008) aponta que, em estudos de hidrologia, a distribuição duplamente limitada se apresenta como uma boa alternativa à distribuição Beta. A partir daí, Jones (2009) considera apenas parte contínua da distribuição e aponta diversas semelhanças entre a distribuição Kumaraswamy e a distribuição Beta, apresentando um estudo detalhado de propriedades, vantagens e desvantagens da nova distribuição com relação à distribuição Beta.

A partir do trabalho de Jones (2009), a distribuição Kumaraswamy ficou mais conhecida na área da estatística e nos últimos anos, várias famílias de distribuições têm surgido com base nessa distribuição. Dessa forma, o estudo e aprimoramento não só da estimação de parâmetros, mas também de outros aspectos assintóticos como viés, assimetria e correção de testes torna-se relevante.

Nesse trabalho realizamos um estudo do viés dos estimadores dos parâmetros que indexam a distribuição Kumaraswamy utilizando a correção do viés pelo método preventivo proposto por Pagui *et al.* (2017). Tal estudo é comparado com o realizado por Lemonte (2011) que obteve os estimadores corrigidos através dos métodos de Cox e Snell (1968), do

preventivo proposto por Firth (1993) e de bootstrap apresentado em Efron (1979). Estudos desse tipo são importantes pois, em geral, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) são viesados com um viés de ordem $O(n^{-1})$, sendo n o tamanho da amostra. Assim, para grandes amostras esse viés é considerado desprezível, mas quando n é pequeno o viés pode ser significativo e comprometer as inferências baseadas nesses estimadores.

Um resultado bastante utilizado para realizar inferência sobre os parâmetros de uma distribuição, é a normalidade assintótica dos EMV. No entanto, quando o tamanho amostral é pequeno ou até mesmo moderado esse resultado pode não ser válido. Bowman e Shenton (1998) apresentaram uma maneira de examinar a normalidade dos estimadores nesses casos, calculando o coeficiente de assimetria aproximado para a distribuição desses estimadores. Quanto mais distante de zero esse coeficiente estiver, mais afastada da normalidade estará essa distribuição. A partir da fórmula geral apresentada por Bowman e Shenton (1998), obtemos uma fórmula fechada para os coeficientes de assimetria das distribuições dos EMV dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy.

Outro ponto considerado neste trabalho são as correções de testes assintóticos. A estatística da razão de verossimilhanças, S_{RV} , é uma das mais utilizadas em testes estatísticos. Sabe-se que, sob a hipótese nula e sob condições gerais de regularidade, esta estatística tem distribuição assintótica qui-quadrado, com um erro de aproximação de ordem $O(n^{-1})$, em que n é o tamanho da amostra. Quando n é pequeno ou até mesmo moderado a utilização dessa aproximação pode ser muito ruim. Uma alternativa para contornar esse problema e melhorar a qualidade da aproximação da estatística S_{RV} à distribuição qui-quadrado foi proposta por Bartlett (1937). Ele sugeriu multiplicar a estatística S_{RV} por um fator C_B , conhecido como fator de correção de Bartlett, obtendo assim uma estatística da razão de verossimilhanças modificada, S_{RV}^* , cuja taxa de convergência para a distribuição qui-quadrado é mais rápida. Dada a importância desse tópico para a inferência estatística, o presente trabalho propõe-se também a corrigir a estatística da razão de verossimilhanças a fim de estudar e comparar os desempenhos dos testes da razão de verossimilhanças com e sem correção, considerando a distribuição Kumaraswamy.

1.1 Objetivos

Considerando que a distribuição Kumaraswamy é uma alternativa à clássica distribuição Beta e o crescente surgimento de famílias de distribuições com base nessa distribuição, o presente trabalho tem por objetivo estudar aspectos assintóticos da distribuição e do modelo de regressão quantílica Kumaraswamy.

1.2 Organização da tese

No Capítulo 2, descrevemos alguns métodos de redução de viés e desenvolvemos o método de correção do viés mediano para os estimadores dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy. Além disso, realizamos um estudo de simulação comparando o viés mediano (Pagui et al., 2017) aos vieses segundo Cox e Snell (1968), Firth (1993) e bootstrap (Efron (1979)), por meio do cálculo do viés relativo, da raiz do erro quadrático médio e das probabilidades estimadas de cobertura e de subestimação dos estimadores corrigidos pelo viés. No Capítulo 3, obtemos fórmulas analíticas para o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy, com base na fórmula geral de Bowman e Shenton (1998). Uma avaliação do coeficiente de assimetria encontrado foi realizada por meio de um estudo de simulação. No Capítulo 4, derivamos fatores de correção de Bartlett e bootstrap para a estatística da razão de verossimilhanças na distribuição Kumaraswamy e desenvolvemos um estudo de simulação para comparar seus desempenhos. No Capítulo 5, definimos o modelo de regressão quantílica Kumaraswamy, obtemos os estimadores de máxima verossimilhança corrigidos pelo viés, pelos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap, dos parâmetros desse modelo e encontramos o teste da razão de verossimilhanças corrigido pelo fator de correção de Bartlett bootstrap. Os resultados encontrados foram avaliados por meio de estudos de simulação. Nos Capítulos 2, 3 e 5, a metodologia desenvolvida foi aplicada a dados reais. Finalizando, no Capítulo 6, estabelecemos as conclusões desse trabalho e propomos alguns estudos futuros.

1.3 Distribuição Kumaraswamy

Nesta seção são introduzidos alguns conceitos básicos e as principais definições a respeito da distribuição Kumaraswamy.

Kumaraswamy (1980) propôs uma nova distribuição de probabilidade com o objetivo de melhorar o ajuste de variáveis hidrológicas (variáveis que modelam, por exemplo, capacidade de um reservatório, fluxo de corrente diária de um rio ou precipitação pluviométrica diária), já que distribuições de probabilidade clássicas como a Normal, Log-Normal e Beta não mostravam ajustes adequados. O autor afirmava que medidas importantes como média, desvio padrão, coeficiente de assimetria e coeficiente de curtose não eram bem estimadas em simulações computacionais que utilizavam essas distribuições. A distribuição proposta por Kumaraswamy não é apenas utilizada para modelar variáveis aleatórias hidrológicas, mas também para outros processos aleatórios cujas realizações sejam limitadas inferiormente e superiormente.

Segundo Nadarajah (2008) a distribuição duplamente limitada pode ser vista como uma boa alternativa à distribuição Beta devido ao fato de ser uma distribuição contínua definida no intervalo limitado (a,b), a>0 e b>0 e ser muito flexível podendo tomar aproximadamente as mesmas formas da distribuição Beta, dependendo dos valores de seus parâmetros, a saber: $\alpha>1$ e $\beta>1$ (unimodal); $\alpha<1$ e $\beta<1$ (forma de banheira ou U); $\alpha>1$ e $\beta\leq1$ (crescente); $\alpha\leq1$ e $\beta>1$ (decrescente); $\alpha=\beta=1$ (constante). A partir dessa observação Jones (2009) considerando apenas a parte contínua da distribuição duplamente limitada, apresentou um estudo detalhado das propriedades, vantagens e desvantagens dessa distribuição em relação à distribuição Beta. À esta parte contínua Jones chamou de distribuição Kumaraswamy. A principal vantagem da distribuição Kumaraswamy em relação à distribuição Beta é ter uma forma fechada para a função de distribuição acumulada, o que torna simples o problema de geração de variáveis aleatórias.

Segundo Dey et al. (2017) várias famílias de distribuições baseadas na distribuição Kumaraswamy têm surgido. Assim, não só uma estimação eficiente mas também o aprimoramento das propriedades dos estimadores desses parâmetros é importante. Alguns trabalhos recentes que propõem novas famílias de distribuições com base na distribuição Kumaraswamy

são: Cordeiro et al. (2010) introduziram e estudaram algumas propriedades matemáticas da distribuição Kumaraswamy Weibull, que é um modelo muito flexível na análise de dados positivos; Cordeiro e de Castro (2011) consideraram a distribuição Kumaraswamy para descrever uma nova família de distribuições generalizadas; Cordeiro et al. (2012a, 2012b) propuseram, respectivamente, a distribuição Kumaraswamy Gumbel e a distribuição seminormal Kumaraswamy; De Santana et al. (2012), baseados nas distribuições log-logística e Kumaraswamy, introduziram a chamada distribuição Kumaraswamy-log-logística, que tem várias distribuições importantes da literatura como casos particulares; Saulo et al. (2012) estudaram a distribuição Kumaraswamy Birnbaum-Saunders derivando algumas de suas propriedades matemáticas; Cordeiro et al. (2014) obtiveram a distribuição Weibull modificada Kumaraswamy capaz de modelar funções de risco na forma de banheira e definiram o modelo de regressão Weibull modificada log-Kumaraswamy para modelar dados de sobrevivência; Mameli (2015), propuseram uma nova generalização da distribuição skew-normal chamada de skew-normal Kumaraswamy. Iqbal et al. (2017) introduziram uma distribuição invertida generalizada de Kumaraswamy (GIKum), mais flexível do que a distribuição invertida Kumaraswamy (IKum) e todos os seus submodelos relacionados. Batan et al. (2019) apresentaram uma nova família geral de distribuições derivadas da distribuição Kumaraswamy invertida truncada, denominada família gerada Kumaraswamy invertida truncada. Em geral, são determinadas propriedades importantes da nova família, com ênfase na entropia (entropia de Rényi e Shannon). Nawaz et al. (2020) introduziram uma distribuição de cinco parâmetros, chamada distribuição Kappa generalizada de Kumaraswamy, que estende a distribuição Kappa de três parâmetros. A nova distribuição é mais flexível e é aplicável no estudo de dados altamente distorcidos. Usman e Ahsan ul Haq (2020) propuseram uma nova distribuição paramétrica denominada distribuição Kumaraswamy estendida Marshall-Olkin (MOEIK). Essa generalização possui alguns submodelos de renome, como o Beta tipo II, o Lomax e o Fisk, descritos na literatura. O estudo inclui propriedades básicas do modelo probabilístico observado.

Dizemos que uma variável aleatória Y possui distribuição Kumaraswamy com parâmetros de forma $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, se suas funções de distribuição acumulada e densidade de

probabilidade são dadas, respectivamente, por

$$F(y; \alpha, \beta) = 1 - (1 - y^{\alpha})^{\beta}$$
 e $f(y; \alpha, \beta) = \alpha \beta y^{\alpha - 1} (1 - y^{\alpha})^{\beta - 1}$,

para $y \in (0,1)$. Utilizamos a notação $Y \sim Kum(\alpha, \beta)$.

A Figura 1.1 exibe algumas formas da distribuição Kumaraswamy.

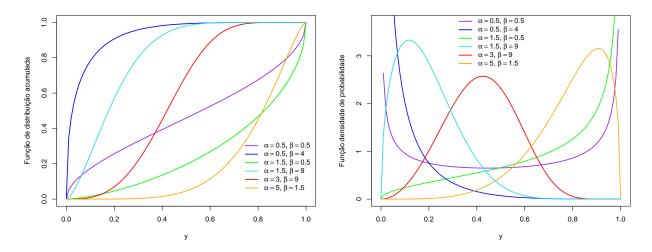


Figura 1.1: Gráficos da função de distribuição acumulada (esquerda) e densidade de probabilidade (direita) da distribuição Kumaraswamy para diferentes combinações dos parâmetros α e β.

A média, mediana e moda são dadas, respectivamente por

$$E(Y) = \beta B \left(1 + \frac{1}{\alpha}, \beta \right),$$

$$Md(Y) = \left(1 - 0, 5^{1/\beta} \right)^{1/\alpha},$$

$$Mo(Y) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha \beta - 1} \right)^{1/\alpha}, \quad \alpha \ge 1, \quad \beta \ge 1, \quad (\alpha, \beta) \ne (1, 1),$$

em que $B\left(\cdot,\cdot\right)$ é a função Beta.

O r-ésimo momento é dado por

$$m_r = \beta B \left(1 + \frac{r}{\alpha}, \beta \right).$$

Como dito anteriormente, uma das principais vantagens, quando vista na perspectiva da modelagem, da distribuição de Kumaraswamy é ter uma função distribuição acumulada de fácil inversão. Dessa forma, a função geral do quantil de ordem q é facilmente obtida sendo

dada por

$$y_q = \left[1 - (1 - q)^{1/\beta}\right]^{1/\alpha}, \quad 0 < q < 1.$$

Como sabemos, dada uma variável aleatória Y, absolutamente contínua com uma função distribuição igual a F(y), a variável U = F(Y) é uniformemente distribuída entre 0 e 1. Assim, os valores pseudo-aleatórios de Y podem ser obtidos gerando números pseudo-aleatórios uniformemente distribuídos e calculando-se $y = F^{-1}(u)$. Para a distribuição Kumaraswamy podemos considerar

$$Y = \left(1 - U^{1/\beta}\right)^{1/\alpha}$$

em que $U \sim U(0,1)$, para um algoritmo mais rápido, já que tando U quanto (1-U) são uniformemente distribuídas.

Jones (2009), afirma que não existe outra família de distribuições com dois parâmetros definida no intervalo (0,1) que possua uma forma tão simples e um comportamento tão satisfatório, o que torna a geração de números pseudo-aleatórios para essa distribuição, superior aos principais algoritmos sofisticados para gerar amostras aleatórias da distribuição Beta (sua principal concorrente).

Sejam Y_1, \ldots, Y_n uma amostra aleatória de tamanho n da distribuição $Kum(\alpha, \beta)$. A função de log-verossimilhança de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$ para uma amostra observada $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^{\top}$ é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = \ell(\boldsymbol{\theta}) = n \log(\alpha \beta) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \log(y_i) + (\beta - 1) \sum_{i=1}^{n} \log(1 - y_i^{\alpha}).$$
 (1.1)

O vetor escore é dado por $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\alpha}, U_{\beta})^{\top} = (\partial \ell / \partial \alpha, \partial \ell / \partial \beta)^{\top}, \text{ com}$

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \log(y_i) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^{\alpha} \log(y_i)}{1 - y_i^{\alpha}} \quad e \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \log(1 - y_i^{\alpha}). \tag{1.2}$$

Como o sistema de equações $U_{\theta} = 0$ é não linear, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ de α e β , respectivamente, devem ser obtidos por técnicas iterativas, tais como Newton-Raphson e BFGS.

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} k_{\alpha,\alpha} & k_{\alpha,\beta} \\ k_{\beta,\alpha} & k_{\beta,\beta} \end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

Notemos que a matriz K_{θ} não é bloco diagonal. Isso indica que os parâmetros α e β não são ortogonais e portanto seus estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ não são assintoticamente independentes.

Temos, sob condições de regularidade usuais para os EMV, que $\hat{\boldsymbol{\theta}} \sim N_2(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1})$, sendo que a inversa da matriz de informação de Fisher para $\boldsymbol{\theta}$ é dada por

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1} = \begin{bmatrix} k^{\alpha,\alpha} & k^{\alpha,\beta} \\ k^{\beta,\alpha} & k^{\beta,\beta} \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

em que
$$k^{\alpha,\alpha}=\alpha^2/n(\bar{A}-\beta^2\bar{B}),\,k^{\alpha,\beta}=k^{\beta,\alpha}=-\alpha\beta\bar{B}/n(\bar{A}-\beta^2\bar{B})$$
 e $k^{\beta,\beta}=\beta^2\bar{A}/n(\bar{A}-\beta^2\bar{B})$.

A normalidade assintótica dos estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ pode ser usada para construir intervalos de confiança aproximados para os parâmetros α e β , da seguinte forma:

$$\hat{\alpha} \pm z_{\eta/2} \times [\widehat{var}(\hat{\alpha})]^{1/2}$$
 e $\hat{\beta} \pm z_{\eta/2} \times [\widehat{var}(\hat{\beta})]^{1/2}$

em que $\widehat{var}(\hat{\alpha})$ e $\widehat{var}(\hat{\beta})$ são iguais a $k^{\alpha,\alpha}$ e $k^{\beta,\beta}$, respectivamente, avaliados em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e $z_{\eta/2}$ é o quantil de ordem $(1-\eta/2)$ da distribuição normal padrão, para um intervalo assintótico de confiança $100(1-\eta)\%$.

Capítulo 2

Redução do viés mediano

2.1 Introdução

Os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) são, em geral, viesados para o verdadeiro valor do parâmetro, com um viés de ordem $O(n^{-1})$, em que n é o tamanho da amostra. Apesar do viés ser considerado desprezível quando o tamanho da amostra é grande (isto, em comparação ao erro padrão que é de ordem $O(n^{-1/2})$), em amostras de tamanho pequeno ou moderado o viés pode ser significativo e de mesma ordem de magnitude do correspondente erro padrão. Dessa forma um método para sua redução torna-se relevante.

Bartlett (1953), por exemplo, obteve uma expressão para o viés de ordem $O(n^{-1})$ do estimador de máxima verossimilhança em modelos uniparamétricos. Cox e Snell (1968), supondo observações independentes mas não necessariamente identicamente distribuídas, obteve uma expressão geral para o viés de ordem $O(n^{-1})$ do estimador de máxima verossimilhança considerando modelos multiparamétricos. Essa expressão é a mais utilizada na literatura para a correção do viés em diversos modelos, por exemplo: Cordeiro et al. (2000) derivaram fórmulas gerais para os vieses de segunda ordem das estimativas de máxima verossimilhanças na classe de modelos de regressão não linear simétricos. Saha e Paul (2005) obtiveram o estimador de máxima verossimilhança corrigido pelo viés de primeira ordem para o parâmetro de dispersão da distribuição binomial negativa. Lemonte et al. (2007) derivaram estimadores aproximadamente não viesados para os dois parâmetros da distribuição Birnbaum—Saunders. Cysneiros et al. (2010) derivaram fórmulas matriciais gerais

para vieses de segunda ordem dos estimadores de máxima verossimilhança na classe de modelos de regressão não linear simétricos e heterocedásticos. Simas $et\ al.\ (2011)$ obtiveram estimadores corrigidos pelo viés para os parâmetros de regressão e dispersão em uma classe estendida de modelos de dispersão. Barreto-Souza e Vasconcellos (2011) obtiveram os vieses de segunda ordem e o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão valor extremo geral. Giles $et\ al.\ (2016)$ derivaram expressões analíticas para os vieses até a ordem $O(n^{-1})$ dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Pareto generalizada e Mazucheli $et\ al.\ (2018)$, usaram os métodos analítico de Cox e o método de bootstrap para derivar a correção de viés de primeira ordem para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Weibull inversa.

Firth (1993) propôs um outro método de correção de viés, conhecido também como um método preventivo, pois ao invés de obter o estimador de máxima verossimilhança e em seguida corrigir seu viés, ele sugere uma modificação da função escore, de tal forma que a solução da correspondente equação de estimação retorna um estimador não viesado de ordem $O(n^{-2})$, ou seja, a função escore é modificada antes da obtenção da estimativa. O método é interessante em casos nos quais os estimadores de máxima verossimilhança podem ser instáveis, isto é, infinitos ou pertencentes à fronteira do espaço paramétrico. Casos assim podem ser observados, por exemplo, em Kosmidis (2014), Kosmidis e Firth (2009 e 2011), Sartori (2006), Zorn (2005) e Bull $et\ al.\ (2002)$.

Recentemente, Pagui et al. (2017) também propuseram um método preventivo, ou seja, baseado em uma função escore modificada. No entanto, o objetivo foi obter um estimador com viés mediano reduzido até a ordem $O(n^{-2})$. O estimador de um parâmetro θ é dito não viesado por mediana se a mediana de sua distribuição coincide com θ . Medeiros (2016) obteve estimadores corrigidos por esse método, considerando a classe de distribuições logsimétricas. Além disso, Kosmidis et al. (2019) apresentaram uma abordagem unificada para a redução dos vieses médio e mediano em modelos lineares generalizados, usando os métodos de Firth (1993) e Pagui et al. (2017), respectivamente.

Lemonte (2011) obteve estimadores corrigidos pelo viés, segundo as expressões gerais de Cox e Snell (1968), de Firth (1993) e por *bootstrap*, considerando a distribuição Kuma-

raswamy. Replicamos parte desse trabalho, acrescentando o método preventivo apresentado por Pagui *et al.* (2017) com o objetivo de corrigir o viés mediano dos EMV dos parâmetros que indexam a distribuição Kumaraswamy.

A seguir, apresentamos mais detalhes sobre os métodos de correção citados acima.

2.2 Métodos de redução de viés

Considere $\ell(\boldsymbol{\theta}) = \ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y})$ uma função de log-verossimilhança baseada em n observações independentes, mas não necessariamente identicamente distribuídas com um vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^p$.

Vamos considerar a seguinte notação para as derivadas da log-verossimilhança em que r, s, t,... estão associados aos componentes do vetor $\boldsymbol{\theta}$: $U_r = \partial \ell/\partial \theta_r$, $U_{rs} = \partial^2 \ell/\partial \theta_r \partial_s$, e assim por diante. A notação padrão que será adotada para os cumulantes das derivadas da logverossimilhança é: $\kappa_{rs} = E(U_{rs})$, $\kappa_{r,s} = E(U_rU_s)$, $\kappa_{rs,t} = E(U_{rs}U_t)$, etc., em que todos os κ 's se referem a um total sobre a amostra e são, em geral, de ordem n. Os elementos da matriz de informação de Fisher $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}$ são $\kappa_{r,s} = -\kappa_{rs}$ e $\kappa^{r,s} = -\kappa^{rs}$ denotam os correspondentes elementos da matriz inversa $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}^{-1}$, que é de ordem $O(n^{-1})$. As derivadas dos cumulantes são escritas com sobrescritos: $\kappa_{rs}^{(t)} = \partial \kappa_{rs}/\partial \theta_t$, O viés do EMV do r-ésimo componente do vetor $\boldsymbol{\theta}$ é definido por $E(\hat{\theta}_r - \theta_r)$ e em geral é de ordem $O(n^{-1})$. A partir de Cox e Snell (1968) temos

$$E(\hat{\theta}_r - \theta_r) = B_{\hat{\theta}_r}(\boldsymbol{\theta}) + O(n^{-2}),$$

em que o termo $B_{\hat{\theta}_r}(\boldsymbol{\theta})$, de ordem $O(n^{-1})$, é chamado viés de $\hat{\theta}_r$ e sua forma geral é dada por

$$B_{\hat{\theta}_r}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{s,t,u} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left[\frac{1}{2} \kappa_{stu} + \kappa_{st,u} \right] = \sum_{s,t,u} \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left[\kappa_{st}^{(u)} - \frac{1}{2} \kappa_{stu} \right], \tag{2.1}$$

em que r, s, t e u variam de 1 até p. A segunda igualdade da expressão (2.1) é obtida a partir da identidade de Bartlett $\kappa_{st,u} + \kappa_{stu} - \kappa_{st}^{(u)} = 0$.

O estimador não viesado até a ordem $O(n^{-1})$ definido por Cox e Snell (1968) pode ser obtido fazendo

$$\tilde{m{ heta}} = \hat{m{ heta}} - m{B}_{\hat{m{ heta}}}(\hat{m{ heta}}),$$

em que $\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ é o viés de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ avaliado em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. O viés do estimador $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ é de ordem $O(n^{-2})$.

Lemonte (2011) obteve a expressão geral do viés proposto por Cox e Snell (1968) para o EMV do vetor $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$ de parâmetros da distribuição Kumaraswamy. Temos

$$B_{\hat{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\alpha}{nk} \left\{ a_0 + \frac{a_1}{\beta - 1} + \frac{a_2}{\beta - 2} + \frac{a_3}{\beta - 3} \right\}$$
 (2.2)

е

$$B_{\hat{\beta}}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\beta}{nk} \left\{ b_0 + \frac{b_1}{\beta - 1} + \frac{b_2}{\beta - 2} + \frac{b_3}{\beta - 3} \right\},\tag{2.3}$$

em que $k = (\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)^2$, $a_0 = a_0(\beta) = -1 + 2\bar{A} - \beta \bar{B}(2\beta \bar{B} + \bar{A})$, $a_1 = a_1(\beta) = (\beta^2 \bar{B}^2 + \bar{A}) \bar{C} - 3\beta^2 \bar{B}(\bar{A} - 1)/2$, $a_2 = a_2(\beta) = \bar{D} - 2\beta \bar{B}(\bar{A} - 1)$, $a_3 = a_3(\beta) = \bar{G} - \bar{F} - \bar{E}$, $b_0 = b_0(\beta) = \bar{A}(\bar{A} - \beta \bar{B}) + \beta \bar{B}(\beta^2 \bar{B}^2 + 1)$, $b_1 = b_1(\beta) = \beta^3 \bar{B}^2(\bar{A} - 1) - 2\beta \bar{A}\bar{B}\bar{C} + \beta \bar{A}(\bar{A} - 1)/2$, $b_2 = b_2(\beta) = 2\beta^2 \bar{B}^3(\bar{A} - 1) - \beta \bar{B}\bar{D}$ e $b_3 = b_3(\beta) = -\beta \bar{B}a_3$ (ver Apêndice A).

Como mencionado anteriormente, o método preventivo de Firth para correção do viés, baseia-se na modificação da função escore. Tal modificação é feita da seguinte forma

$$U_{ heta}{}^{\star} = U_{ heta} - K_{ heta} B_{\hat{oldsymbol{ heta}}}(heta),$$

em que U_{θ} é o vetor escore, K_{θ} é a matriz de informação de Fisher e $B_{\hat{\theta}}(\theta)$ é o vetor viés de segunda ordem, cujo r-ésimo componente é dado em (2.1). A maior vantagem desse método de redução de viés é que a equação de estimação $U_{\theta}^{\star} = 0$ não depende explicitamente da estimativa de máxima verossimilhança. Além disso, o estimador corrigido segundo o método de Firth, θ^{\star} , possui as mesmas propriedades assintóticas do EMV de θ (Firth , 1993).

Para a distribuição $Kum(\alpha, \beta)$, U_{θ} e K_{θ} são dados em (1.2) e (1.3), respectivamente, e $B_{\hat{\theta}}(\theta) = (B_{\hat{\alpha}}(\theta), B_{\hat{\beta}}(\theta))^{\top}$ são dados em (2.2) e (2.3), respectivamente.

O estimador não viesado de segunda ordem para $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$ segundo o método de Firth, é obtido como solução do sistema de equações de estimação $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}}^{\star} = \mathbf{0}$. Como esta equação não possui solução analítica, deve-se usar algum método numérico para obter a solução.

Outra forma de corrigir o viés de estimadores de parâmetros é por meio do método bootstrap proposto por Efron (1979). Este é um método computacionalmente intensivo utilizado para obter soluções aproximadas de problemas cujas soluções analíticas são complicadas ou desconhecidas. A seguir apresentamos o método bootstrap utilizado nesse trabalho para obter o viés e o correspondente EMV corrigido pelo viés.

Consideremos uma amostra aleatória Y_1, \ldots, Y_n de uma variável Y com função distribuição $F = F_{\theta}(y)$, indexada por um vetor de parâmetros θ . Seja $\hat{\theta}$ o EMV de θ calculado com base em uma amostra observada $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$. A técnica bootstrap consiste em obter, a partir da amostra original \mathbf{y} , um grande número (digamos B) de subamostras $\mathbf{y}^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*)^T$ e então usar essas subamostras para obter o viés de $\hat{\theta}$ e o EMV de θ corrigido pelo viés (as amostras bootstrap e todas as estatísticas calculadas a partir delas serão indicadas utilizando "*"). Podemos obter amostras bootstrap parametricamente e não parametricamente. No método bootstrap paramétrico, obtemos B amostras de tamanho n a partir de $F = F_{\hat{\theta}}(y)$, ou seja, amostramos a partir da função distribuição $F = F_{\theta}(y)$ depois de substituir os parâmetros desconhecidos pelos correspondentes estimadores de máxima verossimilhança. No método bootstrap não paramétrico, obtemos B amostras com reposição de tamanho n a partir dos dados $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$.

Para cada uma das B subamostras, calculamos o EMV de $\boldsymbol{\theta}, \ \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^*, \ i=1,\dots,B,$ e, em seguida, calculamos a média

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}^* = \frac{1}{B} \sum_{i=1}^{B} \hat{\boldsymbol{\theta}}_i^*.$$

Com isso, a estimativa do viés via bootstrap paramétrico e não-paramétrico é dada por

$$\hat{B}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^* = \hat{\boldsymbol{\theta}}^* - \hat{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.4}$$

A partir de (2.4) podemos definir o seguinte estimador corrigido pelo viés

$$\ddot{\theta} = \hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{B}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}^* = 2\hat{\boldsymbol{\theta}} - \hat{\boldsymbol{\theta}}^*.$$

2.3 Correção do viés mediano

Pagui et al. (2017) propuseram uma função escore modificada, \overline{U}_{θ} , para obter estimadores não viesados por mediana em amostras finitas. Diferentemente de Firth (1993), a modificação considera a mediana, ao invés da média, como um índice centralizador do es-

core e é obtida subtraindo-se da função escore sua mediana aproximada (essa aproximação foi feita por meio da expansão de Cornish-Fisher, ver Pace e Salvan (1997), seção 10.6).

Um estimador $\bar{\theta}$ é dito não viesado por mediana se $P_{\theta}(\bar{\theta} \leq \theta) = P_{\theta}(\bar{\theta} \geq \theta)$, para todo θ . Quando a distribuição de $\bar{\theta}$ é contínua, $\bar{\theta}$ é não viesado por mediana se $P_{\theta}(\bar{\theta} \leq \theta) = \frac{1}{2}$, para todo θ .

A função escore modificada proposta por Pagui et al. (2017) é tal que, para $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_r, \dots, \theta_p)^{\top}$, $P_{\theta_r}(\overline{U}_{\theta_r} \leq 0) = \frac{1}{2} + O(n^{-3/2})$. O componente \overline{U}_{θ_r} é definido como

$$\overline{U}_{\theta_r} = U_{\theta_r} - \gamma_{rs} U_{\theta_s} - \nu_{1r} + \frac{\nu_{3r}}{6\nu_{2r}}, \quad r = 1, \dots, p,$$

em que

$$\nu_{1r} = -\frac{1}{2} \sum_{s,t,u=1}^{p} \kappa^{st} (\kappa_{r,st} - \gamma_{ru} \kappa_{u,st} + \kappa_{r,s,t} - \gamma_{ru} \kappa_{s,t,u}),$$

$$\nu_{2r} = \kappa_{r,r} - \sum_{s=1}^{p} \gamma_{rs} \kappa_{r,s},$$

$$\nu_{3r} = \kappa_{r,r,r} - 3 \sum_{s=1}^{p} \gamma_{rs} \kappa_{r,r,s} + 3 \sum_{s,t=1}^{p} \gamma_{rs} \gamma_{rt} \kappa_{r,s,t} - \sum_{s,t,u=1}^{p} \gamma_{rs} \gamma_{rt} \gamma_{ru} \kappa_{s,t,u},$$

com $\gamma_{rv} = \sum_{w=1}^{p} \kappa^{vw} \kappa_{r,w}$ e $s, t, u, w \in \{1, \dots, p\} \setminus \{r\}$, sendo κ^{vw} um elemento da inversa da matriz quadrada de ordem p-1 com entradas $\kappa_{v,w}$.

Se o sistema de equações $\overline{U}_{\theta} = \mathbf{0}$ tem solução única $\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_p$ então

- $P_{\theta}(\bar{\theta}_r \leq \theta_r) = 1/2 + O(n^{-3/2}) \text{ com } r = 1, \dots, p.$
- $\bar{\theta}_r \stackrel{\cdot}{\sim} N(\theta_r, \kappa^{r,r})$.

Para a distribuição $Kum(\alpha, \beta)$ os componentes do vetor escore modificado, $\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\theta}}$, em que $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$, são dados por

$$\overline{U}_{\alpha} = U_{\alpha} - \gamma_{\alpha\beta}U_{\beta} - \nu_{1\alpha} + \frac{\nu_{3\alpha}}{6\nu_{2\alpha}} \quad \text{e} \quad \overline{U}_{\beta} = U_{\beta} - \gamma_{\beta\alpha}U_{\alpha} - \nu_{1\beta} + \frac{\nu_{3\beta}}{6\nu_{2\beta}},$$

em que

$$\nu_{1\alpha} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\kappa_{\beta\beta}} \right) \left[\kappa_{\alpha,\beta\beta} - \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\beta,\beta\beta} + \kappa_{\alpha,\beta,\beta} - \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\beta,\beta,\beta} \right]$$

$$\nu_{2\alpha} = \kappa_{\alpha,\alpha} - \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha,\beta}$$

$$\nu_{3\alpha} = \kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} - 3\gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha,\alpha,\beta} + 3\gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\alpha,\beta,\beta} - \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \kappa_{\beta,\beta,\beta}$$

$$\nu_{1\beta} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{\kappa_{\alpha\alpha}} \right) \left[\kappa_{\beta,\alpha\alpha} - \gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\alpha,\alpha\alpha} + \kappa_{\beta,\alpha,\alpha} - \gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} \right]$$

$$\nu_{2\beta} = \kappa_{\beta,\beta} - \gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\beta,\alpha}$$

$$\nu_{3\beta} = \kappa_{\beta,\beta,\beta} - 3\gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\beta,\beta,\alpha} + 3\gamma_{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\beta,\alpha,\alpha} - \gamma_{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \gamma_{\beta\alpha} \kappa_{\alpha,\alpha,\alpha}$$

com $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\kappa_{\alpha\beta}}{\kappa_{\beta\beta}}$ e $\gamma_{\beta\alpha} = \frac{\kappa_{\beta\alpha}}{\kappa_{\alpha\alpha}}$. Substituindo os cumulantes nas expressões acima obtemos, depois de alguma álgebra, as seguintes expressões (os cumulantes e todas as quantidades necessárias para os cálculos são dados no Apêndice A):

$$\begin{array}{lll} \nu_{1\alpha} & = & -\frac{\bar{C} + \bar{B}\beta(\beta-1)}{\alpha(\beta-1)} \\ \nu_{2\alpha} & = & \frac{n}{\alpha^2} \left[\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2 \right] \\ \nu_{3\alpha} & = & -\frac{2n \left(-2 + 3\bar{A} - \bar{B}^2 \beta^2 (\bar{B}\beta + 3) \right)}{\alpha^3} + \frac{6\beta^2 \bar{B}n(\bar{A} - 1 - \bar{B}\bar{C})}{\alpha^3(\beta-1)} + \frac{4n(\bar{E} - \bar{G} + \bar{F})}{\alpha^3(\beta-3)} \\ & + & \frac{3n(2\bar{B}\beta(\bar{A}-1) - \bar{D})}{\alpha^3(\beta-2)} \\ \nu_{1\beta} & = & \frac{(\bar{A}-1) \left[\bar{A} - 2\bar{B}(\beta-1) \right]}{2\bar{A}^2(\beta-1)} + \frac{\bar{B}(\bar{E} - \bar{G} + \bar{F})}{\bar{A}^2(\beta-3)} \\ \nu_{2\beta} & = & \frac{n}{\beta^2} - \frac{\bar{B}^2n}{\bar{A}} \\ \nu_{3\beta} & = & -\frac{2n}{\beta^3} + \frac{6\bar{B}n\bar{C}}{\bar{A}\beta^2(\beta-1)} + \frac{3\bar{B}^2n}{\bar{A}^2} \left[-\frac{2(\bar{A}-1)}{(\beta-1)} - \frac{2\beta\bar{B}(\bar{A}-1) - \bar{D}}{\beta^2(\beta-2)\bar{B}} - 2\bar{B} \right] \\ & - & \frac{n\bar{B}^3}{\bar{A}^3} \left[4\left(1 + \frac{\bar{E} - \bar{G} + \bar{F}}{\beta-3}\right) - 6\bar{A} \right] \end{array}$$

com
$$\gamma_{\alpha\beta} = \frac{\beta^2 \overline{B}}{\alpha} e \gamma_{\beta\alpha} = \frac{\alpha \overline{B}}{\overline{A}}.$$

A solução do sistema de equações $\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ fornece o estimador não viesado por mediana de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$, denotado por $\overline{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})^{\top}$, com um erro de ordem $O(n^{-3/2})$. A equação $\overline{\boldsymbol{U}}_{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{0}$ não tem solução analítica, para resolvê-la deve-se utilizar algum método numérico.

2.4 Estudo de simulação

Nesta seção apresentamos os resultados do estudo de simulação realizado por meio da linguagem de programação R (R Core Team , 2019) com o objetivo de avaliar o comportamento dos EMV de α e β da distribuição Kumaraswamy, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, e dos estimadores corrigidos, obtidos pelos métodos de Cox e Snell (1968), $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$, de Firth (1993), α^* e β^* , de bootstrap, $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ e de Pagui et al. (2017), $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$, em amostras finitas. Essa avaliação foi feita com base no viés relativo, na raiz do erro quadrático médio e nas probabilidades estimadas de subestimação (ps) e de cobertura (pc) dos intervalos de confiança assintóticos desses estimadores.

Nesse estudo, as amostras aleatórias da distribuição Kumaraswamy foram geradas a partir de $Y = \left[1 - U^{1/\beta}\right]^{1/\alpha}$, em que $U \sim U(0,1)$ (ver Seção 1.3). As estimativas de máxima verossimilhança de α e β foram obtidas a partir da função optim do software R, selecionandose o método quase-Newton, BFGS. No caso dos métodos de Firth (1993) e Pagui et al. (2017) obtivemos as raízes das equações de estimação, através da função multiroot. Segundo Lemonte (2011), os estimadores corrigidos pelos métodos de Cox e Snell (1968) e de Firth (1993) exibem variâncias muito grandes quando comparadas com as dos EMV, quando $\beta \in [1,3]$. Já os estimadores corrigidos via bootstrap apresentam bom comportamento nesse intervalo. O estimador corrigido pelo método de Pagui et al. (2017) também apresentou esse comportamento. Assim, os valores para os parâmetros α e β foram fixados em α = 0,5; 1,5; 3; 5 e 9 e β = 0,5; 5 e 7,5, e os tamanhos amostrais em n = 15, 25, 40 e 60. Consideramos R = 5000 réplicas de Monte Carlo e B = 500 réplicas bootstrap.

Para cada tamanho amostral, seja $\dot{\theta}_{ri}$, uma estimativa do r-ésimo componente do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$, obtida na i-ésima réplica, $i = 1, \dots, 5000$. Calculamos

$$\begin{split} \dot{\theta}_r &= \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} \dot{\theta}_{ri} \quad (\text{ média }), \\ \text{vr} &= \frac{\dot{\theta}_r - \theta_r}{\theta_r} \quad (\text{ viés relativo }), \\ \sqrt{\text{eqm}} &= \sqrt{\frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} \left(\dot{\theta}_{ri} - \theta_r \right)^2} \quad (\text{ raiz do erro quadrático médio}), \end{split}$$

$$\begin{split} \text{ps} &= \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} I_{\left\{\dot{\theta}_{ri} \leq \theta_r\right\}} \quad \text{(probabilidade estimada de subestimação)}, \\ \text{pc}_{95} &= \frac{1}{5000} \sum_{i=1}^{5000} I_{\left\{\theta_r \in \left(\dot{\theta}_{ri} \pm 1,96\sqrt{v\dot{a}r_i(\hat{\theta}_r)}\right)\right\}} \quad \text{(probabilidade estimada de cobertura)}, \end{split}$$

sendo $v\dot{a}r_i(\hat{\theta}_r)$ a variância assintótica de $\hat{\theta}_r$ avaliada em $\dot{\boldsymbol{\theta}}$. Consideramos os intervalos de confiança assintóticos com coeficiente de confiança de 95%.

Nas Tabelas 2.1–2.4, podemos ver que o viés de todos os estimadores diminui quando n aumenta, como esperado. Além disso, os EMV de α e de β podem ser bastante viesados, até mesmo considerando um tamanho de amostra moderado. Por exemplo, na Tabela 2.2, para $\alpha=0.5$ e $\beta=0.5$ os vieses relativos das estimativas de máxima verossimilhança de α e β são aproximadamente 17% e 11%, respectivamente. Note que, no mesmo cenário, os vieses relativos de $\tilde{\alpha}$, α^* , $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, β^* , $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\beta}$ são aproximadamente 2,4%, 2%, 0,6%, 9,4%, 4,7%, 4,8%, -0,9% e 5,3%, respectivamente, ou seja, no geral as estimativas corrigidas pelo viés são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro do que as estimativas de máxima verossimilhança não corrigidas. Nota-se um comportamento análogo quanto à raiz do erro quadrático médio, que geralmente é menor para as estimativas corrigidas do que para as estimativas de máxima verossimilhança (ver Tabelas 2.5–2.8). Essas tabelas mostram também que para o parâmetro α , a raiz do erro quadrático médio, para todos os valores de n e para todos os estimadores e fixado o valor de β , aumenta quando o valor de α aumenta. Já, para o parâmetro α , a raiz do erro quadrático médio, para todos os valores de α 0 e para todos os estimadores, aumenta quando o valor de α 0 aumenta.

As Tabelas 2.9 a 2.20 apresentam as probabilidades estimadas de subestimação (ps) dos EMV e de suas versões corrigidas para os parâmetros α e β . Para os estimadores corrigidos por mediana (método de Pagui et al. (2017)) é esperado que a mediana da distribuição dos estimadores $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ seja igual ao verdadeiro valor do parâmetro ou, em outras palavras, que as probabilidades estimadas de subestimação fiquem em torno de 0,5. Em todos os cenários considerados, notamos que o estimador de máxima verossimilhança não corrigido demonstrou o pior desempenho, no sentido de apresentar valores de ps sempre mais distantes de 0,5, tanto para o parâmetro α quanto para β . Já o estimador corrigido pelo método de Cox e Snell (1968) apresenta melhor desempenho do que o estimador corrigido por mediana

para o parâmetro α nos casos em que $\beta \neq 0,5$, em compensação para o parâmetro β obteve desempenho bem inferior (ver, por exemplo, Tabela 2.10). Em geral, quando consideramos os parâmetros α e β , simultaneamente, o estimador corrigido segundo Pagui et al. (2017) demonstra um desempenho superior ao dos demais estimadores, no sentido de apresentar valores de ps mais próximos de 0,5, em todos os casos considerados. Nas situações em que esse resultado não foi verificado, notamos que os desempenhos dos estimadores corrigidos segundo os métodos de Pagui et al. (2017), Cox e Snell (1968), Firth (1993) e bootstrap são parecidos, no sentido de apresentarem valores de ps próximos de 0,5.

As Tabelas 2.9 a 2.20 apresentam também as probabilidades estimadas de cobertura (pc_{95}) dos intervalos de 95% de confiança para α e β baseados nos EMV e em suas versões corrigidas. Para n=15, 25 e 40, quando $\beta=7,5$, as probabilidades estimadas de cobertura dos intervalos de confiança para α , baseados em todos os estimadores, são próximas ou iguais a 100%. Esse resultado também vale para $\beta = 5.0$, exceto para n = 40, quando os valores de pc_{95} são próximos de 95%. Já, as probabilidades estimadas de cobertura (pc_{95}) dos intervalos de confiança para β , quando $\beta = 5.0$ e 7.5, para todos os estimadores, são próximas ou iguais a 100%, exceto para o estimador bootstrap, em que as probabilidades estimadas de cobertura para n=15 são menores do que 50%, próximas de 90%, quando n=25 e de 95%, 40. Quando $\beta = 0.5$, para n = 15, as probabilidades estimadas de cobertura dos intervalos de confiança para α baseados nos estimadores corrigidos segundo Cox e Snell (1968) e Firth (1993) são as mais próximas de 95%. Já, para n=25 e 40, esse resultado ocorre para o estimador corrigido segundo Pagui et al. (2017). Para o parâmetro β , quando n=25, a probabilidade estimada de cobertura dos intervalos baseados no estimador corrigido segundo Pagui et al. (2017) é próxima de 95%. Quando n = 40, os valores de pc₉₅ para todos os estimadores, são próximos ou iguais a 95%. No entanto, quando n=15, nenhuma das probabilidades estimadas de cobertura dos intervalos baseados em qualquer um dos cinco estimadores é próxima de 95%. Para n = 60, quando $\beta = 0.5$, as probabilidades estimadas de cobertura dos intervalos de confiança tanto para α quanto para β baseados em todos os estimadores são próximas ou iguais a 95%. Esse resultado também ocorre, para o parâmetro α , quando $\beta = 5.0$. Já, para o parâmetro β , os valores de pc₉₅ baseados no estimador corrigido pelo método de Pagui et al. (2017) são os mais próximos de 95%. Quando β

7,5, a probabilidade estimada de cobertura dos intervalos de confiança para α baseados em todos os estimadores situa-se entre 96% e 97%. Já, para o parâmetro β , os valores de pc₉₅ baseados no estimador corrigido via *bootstrap* são os mais próximos de 95%.

O estimador corrigido por mediana possui expressões analíticas simples e de fácil implementação. Os resultados da simulação de Monte Carlo mostraram que os estimadores corrigidos pelo viés, têm um comportamento melhor em amostras finitas do que a estimativa de máxima verossimilhança. Esses resultados mostram a importância da correção de viés de EMV.

Tabela 2.1: Viés relativo para n = 15.

				Estima	dor de o	l		Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	$\tilde{\alpha}$	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	-	$\hat{\beta}$	\tilde{eta}	β^*	$\ddot{\beta}$	$\bar{\beta}$	
0,5	0,5	0,338	0,066	0,052	0,009	0,191		0,213	0,082	0,088	-0,035	0,113	
	1,5	0,340	$0,\!067$	$0,\!053$	0,010	0,193		0,212	0,081	0,087	-0,035	0,112	
	3,0	$0,\!323$	$0,\!053$	0,040	-0,003	0,178		0,211	0,079	0,087	-0,036	0,111	
	$_{5,0}$	0,277	$0,\!014$	0,001	-0,041	0,135		0,200	0,078	0,079	-0.043	0,102	
	9,0	0,197	-0,054	-0,066	-0,106	0,063		0,167	0,046	0,053	-0,066	0,072	
5,0	0,5	0,145	0,027	0,002	0,015	0,064		0,395	0,316	0,265	-0,395	0,179	
	1,5	0,143	$0,\!025$	0,000	0,015	0,062		$0,\!392$	0,314	0,263	-0,377	0,176	
	3,0	0,142	$0,\!024$	-0,001	0,013	0,060		0,389	0,312	0,261	-0,387	0,173	
	$_{5,0}$	0,139	$0,\!021$	-0,003	0,009	0,058		$0,\!375$	0,301	$0,\!250$	-0,412	0,163	
	9,0	$0,\!129$	$0,\!012$	-0,012	0,000	0,049		$0,\!354$	0,287	0,235	-0,414	0,146	
7,5	0,5	0,112	0,001	-0,013	-0,005	0,035		0,347	0,172	0,164	-0,470	0,121	
	1,5	0,118	$0,\!007$	-0,007	0,003	0,041		$0,\!354$	$0,\!176$	0,169	-0,443	$0,\!125$	
	3,0	0,121	$0,\!010$	-0,005	0,004	0,044		$0,\!361$	0,181	0,174	-0,464	0,131	
	5,0	0,112	$0,\!002$	-0,012	-0,004	0,035		0,347	0,172	0,164	-0,466	0,119	
	9,0	0,111	0,001	-0,014	-0,003	0,035		0,336	0,166	$0,\!155$	-0,437	0,112	

Tabela 2.2: Viés relativo para n = 25.

				Estima	dor de o	Υ .		Estimador de β					
β	α	\hat{lpha}	$ ilde{lpha}$	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	_	\hat{eta}	$ ilde{eta}$	β^*	\ddot{eta}	$ar{eta}$	
0,5	0,5	0,173	0,024	0,020	0,006	0,094		0,106	0,047	0,048	-0,009	0,053	
	1,5	0,160	0,012	0,008	-0,005	0,082		0,110	0,049	$0,\!051$	-0,007	0,056	
	3,0	0,163	0,015	$0,\!011$	-0,003	0,084		0,105	0,045	$0,\!046$	-0,011	0,052	
	5,0	0,160	0,012	$0,\!008$	-0,006	0,081		0,101	0,042	$0,\!042$	-0,015	0,048	
	9,0	0,119	-0,024	-0,028	-0,041	0,043		0,093	$0,\!036$	$0,\!036$	-0,021	0,040	
5,0	0,5	0,080	0,012	0,002	0,007	0,034		0,240	0,219	0,194	-0,105	0,127	
	1,5	0,081	0,014	$0,\!004$	0,008	0,036		0,239	0,218	0,194	-0,107	0,126	
	3,0	0,082	0,014	$0,\!005$	0,009	0,036		0,241	0,220	0,196	-0,106	0,128	
	5,0	$0,\!078$	0,011	$0,\!001$	0,006	0,033		0,241	0,220	0,196	-0,104	0,128	
	9,0	$0,\!074$	0,007	-0,003	0,002	0,029		0,224	0,206	$0,\!180$	-0,113	0,113	
-7,5	0,5	0,065	0,001	-0,006	-0,002	0,021		0,225	0,145	0,135	-0,159	0,102	
	1,5	0,069	0,005	-0,003	0,000	0,025		0,231	0,149	$0,\!138$	-0,169	0,107	
	3,0	$0,\!065$	0,001	-0,005	-0,003	0,022		0,227	0,146	$0,\!138$	-0,169	0,104	
	5,0	$0,\!071$	0,007	0,000	0,003	0,027		0,238	$0,\!155$	0,146	-0,153	0,113	
	9,0	0,064	-0,000	-0,006	-0,004	0,020		0,223	0,143	0,135	-0,170	0,100	

Tabela 2.3: Viés relativo para n = 40.

				Estima	dor de o	ļ		Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	\tilde{lpha}	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	-	$\hat{\beta}$	\tilde{eta}	β^*	$\ddot{\beta}$	\bar{eta}	
-0,5	0,5	0,081	-0,007	-0,008	-0,013	0,035		0,056	0,024	0,024	-0,008	0,025	
	1,5	0,085	-0,003	-0,004	-0,010	0,039		$0,\!056$	0,024	$0,\!024$	-0,009	0,024	
	3,0	0,092	0,003	$0,\!002$	-0,003	0,045		0,060	0,028	$0,\!027$	-0,005	0,028	
	5,0	0,093	0,005	$0,\!003$	-0,002	0,047		0,063	0,031	$0,\!030$	-0,002	0,032	
	9,0	$0,\!079$	-0,009	-0,010	-0,015	0,033		0,060	0,028	$0,\!028$	-0,004	0,029	
5,0	0,5	0,052	0,011	0,006	0,009	0,024		0,155	0,151	0,138	-0,018	0,090	
	1,5	0,049	0,008	$0,\!003$	0,006	0,022		0,146	0,143	0,129	-0,025	0,082	
	3,0	0,049	0,008	$0,\!003$	0,005	0,021		$0,\!150$	0,146	0,133	-0,023	0,086	
	5,0	$0,\!050$	0,009	$0,\!003$	0,007	0,022		0,143	0,140	$0,\!126$	-0.027	0,079	
	9,0	0,049	0,007	$0,\!002$	0,005	0,021		0,144	0,141	0,127	-0.027	0,080	
7,5	0,5	0,044	0,004	0,001	0,003	0,017		0,156	0,114	0,109	-0,047	0,084	
	1,5	0,046	0,007	$0,\!003$	0,005	0,019		0,160	0,117	0,111	-0,044	0,088	
	3,0	0,046	0,006	$0,\!003$	0,005	0,019		$0,\!156$	0,114	0,108	-0.047	0,084	
	5,0	0,044	$0,\!005$	$0,\!001$	0,003	0,018		$0,\!158$	0,116	0,109	-0.045	0,086	
	9,0	0,043	0,003	0,000	0,002	0,016		$0,\!152$	0,111	$0,\!105$	-0,050	0,080	

Tabela 2.4: Viés relativo para n = 60.

			Estimador de α					Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	$\tilde{\alpha}$	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	-	$\hat{\beta}$	\tilde{eta}	β^*	$\ddot{\beta}$	$\bar{\beta}$	
0,5	0,5	0,057	-0,000	-0,001	-0,003	0,027		0,036	0,016	0,016	-0,005	0,016	
	1,5	0,063	$0,\!005$	0,004	0,002	0,032		0,042	0,021	0,021	0,001	0,021	
	3,0	$0,\!062$	$0,\!004$	$0,\!004$	0,002	0,032		0,038	0,018	0,018	-0,003	0,018	
	5,0	$0,\!054$	-0,003	-0,004	-0,006	0,024		0,038	0,018	0,018	-0,003	0,017	
	9,0	$0,\!058$	-0,000	-0,001	-0,003	0,028		0,039	0,019	0,019	-0,001	0,019	
-5,0	0,5	0,030	0,003	0,000	0,002	0,012		0,092	0,093	0,086	-0,008	0,052	
	1,5	$0,\!030$	$0,\!003$	0,000	0,002	0,012		0,092	0,093	0,086	-0,008	$0,\!052$	
	3,0	$0,\!028$	$0,\!001$	-0,002	0,000	0,010		0,090	0,091	0,084	-0,009	$0,\!050$	
	5,0	0,031	$0,\!004$	0,001	0,003	0,013		0,094	0,095	0,087	-0,006	0,054	
	9,0	$0,\!029$	$0,\!002$	-0,001	0,001	0,011		0,092	0,093	0,085	-0,008	$0,\!052$	
7,5	0,5	0,029	0,003	0,001	0,002	0,012		0,108	0,084	0,080	-0,011	0,062	
	1,5	$0,\!029$	$0,\!003$	0,001	0,002	0,011		0,107	0,083	0,079	-0,012	0,061	
	3,0	0,032	$0,\!006$	$0,\!004$	0,005	0,014		0,111	0,087	0,084	-0,008	0,065	
	5,0	$0,\!028$	$0,\!002$	-0,000	0,001	0,010		0,104	0,080	0,076	-0,015	0,059	
	9,0	0,030	0,004	0,002	0,003	0,012		0,104	0,080	0,077	-0,015	0,058	

Tabela 2.5: Raiz do erro quadrático médio para n = 15.

			Estimador de α						Estimador de β						
β	α	$\hat{\alpha}$	\tilde{lpha}	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$		\hat{eta}	\tilde{eta}	β^*	$\ddot{\beta}$	$ar{eta}$			
0,5	0,5	0,349	0,259	0,256	0,251	0,293		0,243	0,204	0,170	0,153	0,203			
	1,5	1,051	0,779	0,769	0,755	$0,\!882$		$0,\!242$	0,203	0,170	$0,\!153$	0,202			
	3,0	1,936	1,419	1,403	$1,\!379$	1,611		$0,\!236$	0,187	0,167	0,149	0,197			
	5,0	2,704	1,953	1,935	1,923	2,210		$0,\!230$	0,204	0,163	0,147	0,192			
	9,0	3,713	2,786	2,790	2,878	3,011		$0,\!208$	$0,\!150$	0,153	0,141	$0,\!175$			
-5,0	0,5	0,132	0,102	0,105	0,103	0,108		3,445	2,570	2,611	2,207	2,433			
	1,5	$0,\!395$	$0,\!306$	$0,\!317$	$0,\!311$	$0,\!324$		$3,\!469$	2,585	2,631	2,186	2,454			
	3,0	0,780	$0,\!603$	$0,\!619$	0,611	$0,\!638$		$3,\!420$	2,554	2,589	2,194	2,412			
	5,0	1,284	0,994	1,030	0,999	1,053		$3,\!351$	2,505	2,553	2,247	$2,\!376$			
	9,0	2,214	1,726	1,802	1,730	1,819		$3,\!155$	$2,\!377$	2,414	2,255	2,228			
7,5	0,5	0,103	0,079	0,082	0,081	0,083		4,325	2,647	2,924	3,800	2,873			
	1,5	$0,\!317$	$0,\!241$	$0,\!249$	$0,\!252$	$0,\!254$		$4,\!354$	2,663	2,925	3,673	2,879			
	3,0	$0,\!641$	$0,\!484$	$0,\!496$	$0,\!502$	$0,\!512$		$4,\!405$	2,692	2,955	3,774	2,906			
	5,0	1,038	0,797	$0,\!826$	0,818	$0,\!835$		$4,\!270$	2,613	2,868	3,788	$2,\!815$			
	9,0	1,810	$1,\!379$	1,433	$1,\!442$	$1,\!447$		$4,\!164$	2,550	2,823	3,638	2,748			

Tabela 2.6: Raiz do erro quadrático médio para $n = 2$	Tabela 2.6:	Raiz do erro	quadrático médio	para $n=25$.
---	-------------	--------------	------------------	---------------

		Estimador de α						Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	$\tilde{\alpha}$	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$		\hat{eta}	\tilde{eta}	β^*	β	\bar{eta}	
0,5	0,5	0,221	0,184	0,183	0,182	0,198	0,15	4 (),125	0,129	0,125	0,139	
	1,5	$0,\!638$	$0,\!534$	$0,\!532$	$0,\!539$	0,571	0,15	7 (0,125	0,133	$0,\!126$	0,141	
	3,0	$1,\!302$	1,090	1,087	1,080	1,167	0,15	6 (0,127	0,131	$0,\!126$	0,140	
	5,0	2,079	1,731	1,726	1,723	1,856	0,15	3 (0,126	0,129	0,124	0,138	
	9,0	3,064	$2,\!594$	2,593	2,597	2,735	0,14	5 (0,121	0,123	0,119	0,131	
5,0	0,5	0,099	0,086	0,088	0,086	0,089	2,53	2 2	2,170	2,202	1,456	2,069	
	1,5	$0,\!305$	$0,\!266$	$0,\!271$	$0,\!266$	0,275	2,56	4 2	2,194	2,222	1,479	2,097	
	3,0	$0,\!602$	$0,\!523$	$0,\!531$	$0,\!522$	0,540	2,52	4 2	2,163	2,186	1,438	2,057	
	5,0	0,994	$0,\!869$	0,884	$0,\!868$	0,895	2,54	2 2	2,178	2,204	1,471	2,076	
	9,0	1,739	$1,\!524$	$1,\!555$	1,527	1,566	2,43	2 2	2,088	2,119	1,450	1,986	
-7,5	0,5	0,082	0,071	0,073	0,072	0,073	3,31	9 2	2,562	2,678	2,118	2,609	
	1,5	$0,\!252$	$0,\!218$	$0,\!226$	$0,\!219$	0,224	3,43	2 2	2,652	2,789	2,117	2,704	
	3,0	$0,\!492$	$0,\!429$	$0,\!442$	$0,\!430$	0,440	$3,\!37$	6 2	2,608	2,725	2,118	2,662	
	5,0	0,828	0,711	0,730	0,718	0,733	3,41	3 2	2,632	2,742	2,104	2,674	
	9,0	1,444	1,257	1,293	1,264	1,289	3,28	0 2	2,534	2,644	2,078	2,576	

Tabela 2.7: Raiz do erro quadrático médio para n = 40.

		Estimador de α					Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	$\tilde{\alpha}$	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\tilde{eta}	β^*	$\ddot{\beta}$	$\bar{\beta}$	
0,5	0,5	0,149	0,134	0,134	0,134	0,139	0,110	0,099	0,100	0,098	0,103	
	1,5	$0,\!452$	$0,\!406$	$0,\!406$	$0,\!405$	$0,\!422$	0,109	0,099	0,099	0,097	0,102	
	3,0	$0,\!925$	$0,\!828$	$0,\!827$	$0,\!827$	$0,\!862$	0,111	0,100	0,101	0,099	0,104	
	5,0	$1,\!525$	$1,\!361$	1,360	$1,\!358$	1,420	0,113	0,101	0,102	0,099	0,105	
	9,0	$2,\!517$	$2,\!264$	2,264	$2,\!266$	2,348	0,109	0,098	0,099	0,097	0,102	
-5,0	0,5	0,080	0,074	0,075	0,074	0,075	1,933	1,768	1,793	1,394	1,703	
	1,5	$0,\!240$	$0,\!221$	$0,\!225$	$0,\!221$	0,225	1,900	1,738	1,774	1,387	1,676	
	3,0	$0,\!482$	$0,\!445$	$0,\!451$	$0,\!444$	$0,\!453$	1,919	1,755	1,785	1,383	1,692	
	5,0	0,810	0,747	0,761	0,747	0,761	1,891	1,730	1,761	1,382	1,670	
	9,0	$1,\!422$	1,313	$1,\!334$	1,311	1,336	1,880	1,721	1,758	$1,\!367$	$1,\!659$	
7,5	0,5	0,069	0,064	0,065	0,064	0,065	2,732	2,350	2,407	1,900	2,360	
	1,5	$0,\!208$	$0,\!190$	$0,\!196$	$0,\!190$	0,194	2,749	2,363	2,433	1,903	2,373	
	3,0	$0,\!419$	$0,\!384$	$0,\!390$	$0,\!385$	$0,\!391$	2,761	$2,\!376$	2,432	1,934	2,385	
	5,0	$0,\!691$	$0,\!635$	$0,\!650$	$0,\!635$	0,646	2,748	$2,\!365$	2,433	1,908	2,373	
	9,0	1,233	1,135	1,161	$1,\!137$	1,155	2,700	2,324	2,388	1,891	2,333	

Tabela 2.8: Raiz do erro quadrático médio para n = 60.

		Estimador de α					Estimador de β					
β	α	$\hat{\alpha}$	\tilde{lpha}	α^*	$\ddot{\alpha}$	$\bar{\alpha}$	 $\hat{\beta}$	$ ilde{eta}$	β^*	$\ddot{\beta}$	$ar{eta}$	
0,5	0,5	0,120	0,112	0,112	0,112	0,115	0,085	0,080	0,080	0,079	0,081	
	1,5	$0,\!356$	$0,\!329$	$0,\!329$	$0,\!329$	$0,\!339$	$0,\!086$	0,081	0,081	0,080	0,082	
	3,0	0,704	$0,\!649$	$0,\!649$	$0,\!649$	$0,\!669$	0,083	0,078	0,078	0,077	0,080	
	5,0	1,171	1,091	1,091	1,090	1,119	$0,\!086$	0,080	0,080	0,079	0,082	
	9,0	2,095	1,944	1,945	1,941	1,998	$0,\!085$	0,080	0,080	0,079	0,082	
5,0	0,5	0,065	0,062	0,063	0,062	0,063	1,441	1,364	1,392	1,191	1,327	
	1,5	0,197	$0,\!188$	$0,\!190$	$0,\!188$	$0,\!190$	$1,\!473$	1,393	1,418	1,219	$1,\!358$	
	3,0	$0,\!382$	$0,\!365$	$0,\!370$	$0,\!365$	$0,\!368$	$1,\!452$	$1,\!373$	1,404	1,201	1,337	
	5,0	$0,\!667$	$0,\!635$	$0,\!644$	$0,\!636$	$0,\!642$	1,503	1,420	1,449	1,243	1,385	
	9,0	1,172	1,118	$1,\!134$	1,119	$1,\!129$	$1,\!474$	1,394	1,425	1,221	$1,\!358$	
7,5	0,5	0,059	0,056	0,057	0,056	0,057	2,298	2,089	2,138	1,837	2,092	
	1,5	0,178	$0,\!169$	$0,\!174$	$0,\!170$	$0,\!171$	$2,\!292$	2,084	2,128	1,828	2,086	
	3,0	$0,\!360$	$0,\!340$	$0,\!345$	$0,\!341$	$0,\!345$	$2,\!277$	2,068	2,102	1,801	2,066	
	5,0	0,585	$0,\!556$	$0,\!566$	$0,\!557$	$0,\!562$	2,228	2,026	2,071	1,778	2,026	
	9,0	1,061	1,006	$1,\!015$	1,008	$1,\!017$	2,234	2,032	2,057	1,793	2,031	

Tabela 2.9: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=15 e $\beta=0,5$.

			p	ps		95
β	α	Estimador	α	β	α	β
0,5	0,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,33	0,36	0,98	1,00
			$0,\!56$	$0,\!47$	0,94	0,99
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!57$	$0,\!47$	0,93	0,98
		$ar{m{ heta}}$	$0,\!45$	$0,\!47$	0,99	0,98
			0,60	$0,\!63$	0,91	0,92
	$\overline{1,5}$	$\hat{ heta}$	0,33	0,36	0,98	1,00
		$ ilde{ heta}$	$0,\!56$	$0,\!47$	0,94	$0,\!99$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!57$	$0,\!47$	0,93	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ ar{ heta} \end{array}$	$0,\!45$	$0,\!47$	0,99	0,98
			0,60	$0,\!63$	0,91	$0,\!92$
	3,0	$egin{array}{ccc} \hat{ heta} & & & & & & & & & & & & & & & & \\ & ilde{ heta} & & & & & & & & & & & & & & & & & & &$	0,33	0,35	0,99	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!56$	$0,\!46$	0,95	0,99
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!57$	$0,\!47$	0,93	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!45$	$0,\!46$	0,99	0,98
			0,61	$0,\!63$	0,91	$0,\!92$
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,33	0,37	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!57$	$0,\!48$	0,95	$0,\!99$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	0,58	$0,\!48$	0,94	0,98
		$ar{ heta}$	$0,\!45$	$0,\!48$	1,00	0,98
			0,62	$0,\!64$	0,92	0,92
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!35$	0,40	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	0,62	$0,\!50$	0,95	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	0,63	$0,\!51$	0,94	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	0,49	$0,\!50$	1,00	0,97
		$\ddot{ heta}$	0,67	$0,\!67$	0,92	0,91

Tabela 2.10: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc₉₅) para n=15 e $\beta=5,0$.

)S	po	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
-5,0	0,5	$\hat{m{ heta}}$	0,29	0,29	0,99	1,00
		$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!50$	$0,\!25$	1,00	1,00
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!55$	$0,\!33$	0,98	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!43$	0,44	1,00	1,00
			$0,\!53$	0,94	1,00	$0,\!51$
	$\overline{1,5}$	$\hat{ heta}$	0,30	0,29	0,99	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!51$	0,26	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!55$	$0,\!34$	0,98	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!44$	$0,\!45$	1,00	1,00
			$0,\!53$	0,92	1,00	$0,\!52$
	3,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,30	0,30	0,99	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!51$	$0,\!27$	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!55$	$0,\!34$	0,99	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!44$	$0,\!45$	1,00	1,00
			$0,\!54$	0,94	1,00	$0,\!51$
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,30	0,31	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	0,27	1,00	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!56$	$0,\!35$	0,98	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!45$	0,46	1,00	1,00
			$0,\!55$	0,96	1,00	$0,\!47$
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!31$	0,31	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!53$	0,27	1,00	1,00
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!57$	$0,\!35$	0,98	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!46$	0,46	1,00	1,00
		$\ddot{ heta}$	$0,\!55$	0,96	1,00	0,48

Tabela 2.11: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=15 e $\beta=7,5$.

			p	S	pc_{95}	
β	α	Estimador	α	β	α	β
7,5	0,5	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!30$	$0,\!28$	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	$0,\!36$	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!57$	$0,\!39$	1,00	0,99
		$ar{ heta}$	0,47	$0,\!46$	1,00	1,00
			$0,\!55$	$0,\!97$	1,00	$0,\!37$
	1,5	$egin{array}{ccc} \hat{ heta} & & & & & & & & & & & & & & & & & & &$	0,30	0,27	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!35$	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!55$	$0,\!38$	1,00	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!45$	$0,\!46$	1,00	1,00
		$\ddot{m{ heta}}$	$0,\!54$	$0,\!95$	1,00	$0,\!42$
	3,0	$\hat{ heta}$	0,28	0,26	1,00	1,00
		$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \ heta^\star \ ilde{ heta} \ ilde{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!52$	$0,\!35$	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!54$	$0,\!38$	1,00	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	0,44	$0,\!45$	1,00	1,00
			$0,\!54$	$0,\!96$	1,00	$0,\!38$
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,31	0,26	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	$0,\!35$	1,00	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!56$	$0,\!38$	1,00	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	0,46	$0,\!45$	1,00	1,00
		$\ddot{ heta}$	$0,\!55$	$0,\!96$	1,00	$0,\!38$
	9,0	$\hat{ heta}$	0,29	0,27	1,00	1,00
		$egin{array}{ccc} \hat{ heta} & & & & & & & & & & & & & & & & \\ ilde{ heta} & & & & & & & & & & & & & & & & & & &$	0,53	$0,\!36$	1,00	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!56$	$0,\!39$	1,00	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!45$	$0,\!46$	1,00	1,00
		$\ddot{ heta}$	$0,\!54$	$0,\!94$	1,00	$0,\!43$

Tabela 2.12: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=25 e $\beta=0,5$.

			F)S	po	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
0,5	0,5	$\hat{ heta} \hat{ heta}$	0,39	0,41	0,97	0,97
			$0,\!56$	0,49	0,92	0,96
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!56$	0,49	0,92	$0,\!96$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!47$	0,49	$0,\!95$	$0,\!95$
			$0,\!58$	0,59	0,92	0,93
	1,5	$\hat{ heta}$	0,40	0,40	0,97	0,97
		$ ilde{ heta}$	$0,\!57$	0,49	0,93	0,97
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!57$	0,49	0,92	$0,\!96$
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!49$	0,49	0,96	$0,\!96$
			$0,\!59$	$0,\!60$	0,92	0,93
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	0,42	0,97	0,97
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!57$	0,50	0,92	0,96
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!57$	0,50	0,91	$0,\!96$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,50	0,95	$0,\!95$
			$0,\!59$	0,59	0,91	0,93
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,40	0,43	0,97	0,97
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!56$	0,50	0,92	$0,\!96$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!57$	0,50	0,92	$0,\!96$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!47$	0,50	$0,\!96$	$0,\!95$
			$0,\!59$	$0,\!60$	0,92	$0,\!92$
	9,0	$\hat{m{ heta}}$	0,41	0,43	0,99	0,97
		$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!58$	0,50	0,93	0,97
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!59$	0,51	0,93	$0,\!96$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!50$	0,51	0,97	$0,\!96$
		$\ddot{m{ heta}}$	0,60	0,60	0,93	0,92

Tabela 2.13: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=25 e $\beta=5,0$.

			p	os	po	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
-5,0	0,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,37	0,36	0,98	1,00
			$0,\!52$	$0,\!34$	0,98	1,00
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!54$	$0,\!37$	0,97	0,98
		$ar{ heta}$	$0,\!47$	$0,\!46$	0,99	$0,\!99$
			$0,\!53$	0,71	0,98	0,89
	1,5	$\hat{ heta}$	$0,\!37$	$0,\!38$	0,98	1,00
		$ ilde{ heta}$	$0,\!52$	$0,\!36$	0,98	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!54$	$0,\!39$	0,97	0,99
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!47$	$0,\!48$	0,98	$0,\!99$
			$0,\!54$	0,71	0,98	0,89
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!37$	$0,\!36$	0,98	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!34$	0,98	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!54$	$0,\!37$	0,98	0,99
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!47$	$0,\!46$	0,99	$0,\!99$
			0,53	0,71	0,99	0,89
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!38$	$0,\!35$	0,98	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!34$	0,98	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!54$	$0,\!36$	0,97	0,99
		$ar{ heta}$	$0,\!47$	$0,\!46$	0,99	$0,\!99$
			$0,\!53$	0,71	0,98	0,89
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!39$	$0,\!37$	0,99	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	0,53	$0,\!35$	0,99	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!55$	$0,\!38$	0,98	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!48$	$0,\!48$	0,99	0,99
		$\ddot{ heta}$	$0,\!54$	0,72	0,99	0,88

Tabela 2.14: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=25 e $\beta=7,5$.

			p	os	po	
β	α	Estimador	α	β	α	β
7,5	0,5	$\hat{m{ heta}}$	0,38	0,35	1,00	1,00
		$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	$0,\!54$	0,40	1,00	1,00
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!55$	0,41	0,99	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,46	1,00	1,00
			$0,\!55$	0,77	1,00	0,89
	$\overline{1,5}$	$\hat{ heta}$	0,38	0,34	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!53$	$0,\!39$	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!54$	0,40	0,99	0,98
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!48$	0,46	1,00	1,00
			$0,\!54$	0,79	1,00	0,88
	3,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,37	0,35	0,99	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	0,40	1,00	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!54$	0,41	0,99	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,46	1,00	1,00
			$0,\!55$	0,79	1,00	0,88
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,36	0,33	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!51$	$0,\!38$	1,00	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!52$	$0,\!39$	0,99	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!46$	$0,\!45$	1,00	1,00
			$0,\!53$	0,76	0,99	$0,\!89$
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!37$	$0,\!34$	1,00	1,00
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	$0,\!39$	0,99	1,00
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!55$	$0,\!41$	0,99	$0,\!99$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,46	1,00	1,00
		$\ddot{ heta}$	$0,\!55$	0,79	1,00	0,89

Tabela 2.15: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc₉₅) para n=40 e $\beta=0,5$.

			p	os	pq	pc_{95}	
β	α	Estimador	$\frac{1}{\alpha}$	β	α	β	
-0.5	0,5	$\hat{m{ heta}}$	0,44	0,45	0,95	0,96	
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!57$	$0,\!51$	0,93	0,96	
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!57$	$0,\!51$	0,92	$0,\!95$	
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!50$	$0,\!51$	0,95	$0,\!95$	
			0,58	$0,\!57$	0,92	0,93	
	1,5	$\hat{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!45$	0,95	0,96	
		$ ilde{ heta}$	$0,\!57$	$0,\!51$	0,92	$0,\!95$	
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!57$	$0,\!51$	0,92	$0,\!95$	
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!50$	$0,\!51$	0,95	$0,\!95$	
			0,58	$0,\!58$	0,92	0,93	
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!43$	$0,\!43$	0,95	$0,\!96$	
			$0,\!56$	$0,\!49$	0,93	$0,\!96$	
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!56$	$0,\!49$	0,92	$0,\!96$	
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!50$	$0,\!50$	0,94	$0,\!95$	
			$0,\!57$	$0,\!56$	0,92	0,93	
	5,0	$\hat{ heta}$	$0,\!42$	$0,\!43$	0,95	$0,\!95$	
		$ ilde{ heta}$	$0,\!56$	$0,\!49$	0,93	$0,\!95$	
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!56$	$0,\!49$	0,93	$0,\!95$	
		$ar{ heta}$	0,49	$0,\!49$	0,95	$0,\!95$	
		$\ddot{ heta}$	$0,\!57$	0,57	0,93	0,93	
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!43$	$0,\!43$	0,97	$0,\!96$	
			$0,\!57$	$0,\!49$	0,93	$0,\!96$	
		$oldsymbol{ heta}_{-}^{\star}$	$0,\!57$	$0,\!49$	0,93	$0,\!96$	
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	0,50	$0,\!49$	0,96	$0,\!95$	
		$\ddot{ heta}$	0,58	0,56	0,93	0,94	

Tabela 2.16: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=40 e $\beta=5,0$.

			F	os	po	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
5,0	0,5	$\hat{ heta} \hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	0,40	0,96	0,99
			$0,\!51$	$0,\!38$	0,96	1,00
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!52$	$0,\!39$	0,95	$0,\!99$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!47$	0,47	0,96	0,98
			$0,\!52$	0,61	$0,\!96$	0,93
	1,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	0,40	0,97	0,99
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!38$	0,96	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!52$	0,40	0,96	0,98
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!47$	0,48	0,97	0,98
			$0,\!52$	0,62	0,97	$0,\!92$
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,41	0,40	0,97	0,99
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!38$	0,96	1,00
		$oldsymbol{ heta^{\star}}_{-}$	$0,\!53$	0,40	0,95	$0,\!99$
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!48$	0,48	$0,\!96$	0,97
			$0,\!53$	0,62	0,96	0,93
	5,0	$egin{array}{c} \hat{ heta} \ ilde{ heta} \ heta^{\star} \ ilde{ heta} \ ilde{ heta} \ ilde{ heta} \ ilde{ heta} \end{array}$	0,41	0,41	0,96	0,99
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	0,40	0,96	1,00
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!53$	0,41	$0,\!95$	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!48$	0,49	0,96	0,97
			$0,\!52$	0,63	0,96	0,92
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!41$	0,41	0,97	0,99
			$0,\!52$	$0,\!39$	0,97	1,00
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!53$	$0,\!41$	0,96	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!48$	0,48	0,97	0,97
		$\ddot{ heta}$	$0,\!53$	0,62	0,97	0,92

Tabela 2.17: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=40 e $\beta=7,5$.

			p	os	po	pc_{95}	
β	α	Estimador	α	β	α	β	
7,5	0,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	0,39	0,99	1,00	
			0,51	$0,\!42$	0,98	1,00	
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!52$	$0,\!43$	0,98	0,99	
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!48$	$0,\!47$	0,99	0,99	
			0,51	$0,\!63$	0,99	0,94	
	1,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	$0,\!38$	0,99	1,00	
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!51$	$0,\!41$	0,98	1,00	
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!52$	$0,\!42$	0,98	$0,\!99$	
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	0,47	$0,\!47$	0,99	$0,\!99$	
			$0,\!52$	$0,\!64$	0,99	0,94	
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,40	$0,\!39$	0,98	1,00	
		$ ilde{m{ heta}}$	0,51	$0,\!43$	0,98	1,00	
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!52$	$0,\!43$	0,98	0,99	
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!47$	$0,\!47$	0,99	0,99	
			$0,\!52$	0,64	0,98	0,94	
	5,0	$\hat{ heta}$	0,41	$0,\!39$	0,99	1,00	
		$ ilde{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!42$	0,99	1,00	
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!52$	$0,\!43$	0,98	0,99	
		$ar{ heta}$	$0,\!48$	$0,\!47$	0,99	0,99	
		$\ddot{ heta}$	$0,\!52$	0,63	0,99	0,94	
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,41	$0,\!39$	0,99	1,00	
			$0,\!52$	$0,\!42$	0,99	1,00	
		$oldsymbol{ heta}^\star$	$0,\!53$	$0,\!43$	0,98	$0,\!99$	
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!48$	$0,\!48$	0,99	0,99	
		$\ddot{ heta}$	0,53	0,64	0,99	0,94	

Tabela 2.18: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc₉₅) para n=60 e $\beta=0,5$.

0		D 1		os o	pc_{95}	
β	α	Estimador	α	β	α	β
0,5	0,5	$\hat{m{ heta}}$	$0,\!45$	0,46	$0,\!95$	$0,\!96$
		$ ilde{ heta}$	$0,\!55$	0,51	0,93	$0,\!95$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!55$	0,51	0,93	$0,\!95$
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!50$	$0,\!51$	0,94	$0,\!95$
			$0,\!56$	$0,\!56$	0,93	$0,\!94$
	1,5	$\hat{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!45$	0,95	$0,\!95$
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	0,49	0,94	$0,\!95$
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!54$	0,49	0,94	$0,\!95$
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!49$	0,49	$0,\!95$	$0,\!95$
			$0,\!55$	$0,\!54$	0,94	$0,\!94$
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,43	0,45	0,95	0,96
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!54$	0,49	0,94	$0,\!95$
		$oldsymbol{ heta}^{\star}$	$0,\!54$	0,49	0,94	$0,\!95$
		$ar{ar{ heta}}$	$0,\!49$	0,49	0,95	$0,\!95$
			$0,\!54$	$0,\!55$	0,94	$0,\!94$
	5,0	$\hat{ heta}$	0,45	0,45	0,95	0,95
		$ ilde{ heta}$	$0,\!55$	0,50	0,93	$0,\!95$
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!55$	0,50	0,93	$0,\!95$
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!51$	0,50	0,94	$0,\!95$
		$\ddot{ heta}$	$0,\!56$	$0,\!55$	0,93	$0,\!94$
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,45	0,44	0,95	0,96
			$0,\!55$	0,49	0,93	0,96
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!55$	0,49	0,93	$0,\!96$
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!50$	0,50	0,95	$0,\!95$
		$\ddot{ heta}$	0,56	$0,\!55$	0,93	0,94

Tabela 2.19: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc $_{95}$) para n=60 e $\beta=5,0$.

			p	S	po	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
5,0	0,5	$rac{\hat{ heta}}{ ilde{ heta}}$	0,44	0,43	0,96	0,98
			$0,\!53$	$0,\!42$	0,95	0,99
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!53$	$0,\!43$	0,95	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!50$	$0,\!49$	0,96	0,97
			$0,\!53$	$0,\!59$	0,96	0,94
	1,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!43$	0,96	0,97
		$ ilde{m{ heta}}$	0,53	$0,\!42$	0,95	$0,\!99$
		$\boldsymbol{\theta^{\star}}$	$0,\!53$	$0,\!43$	0,94	0,98
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!50$	$0,\!50$	0,95	$0,\!96$
			0,53	$0,\!59$	0,95	0,93
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!44$	0,96	$0,\!97$
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!43$	0,95	0,99
		$ heta^\star$	$0,\!53$	$0,\!44$	0,95	0,98
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	0,50	$0,\!50$	0,96	$0,\!96$
			0,53	$0,\!59$	0,96	0,93
	5,0	$\hat{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!43$	0,96	0,97
		$ ilde{ heta}$	0,53	$0,\!42$	0,95	0,99
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	0,53	$0,\!43$	0,94	0,98
		$ar{ heta}$	0,49	$0,\!50$	0,96	$0,\!96$
		$\ddot{ heta}$	0,53	$0,\!58$	0,95	0,93
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!44$	0,96	0,97
			$0,\!53$	$0,\!43$	0,95	0,99
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!53$	$0,\!43$	0,95	0,98
		$ar{ heta}$	0,50	$0,\!49$	0,96	$0,\!96$
		$\ddot{ heta}$	0,53	0,59	0,96	0,93

Tabela 2.20: Probabilidade estimada de subestimação (ps) e de cobertura (pc₉₅) para n=60 e $\beta=7,5$.

			F	os	pc	95
β	α	Estimador	α	β	α	β
7,5	0,5	$\hat{m{ heta}} \ ilde{m{ heta}}$	0,43	0,42	0,97	0,99
			$0,\!51$	0,44	0,97	0,99
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!52$	0,44	0,96	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!48$	0,47	0,97	0,98
			$0,\!52$	0,58	0,97	$0,\!94$
	1,5	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	0,44	0,42	0,97	0,99
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!52$	$0,\!45$	0,97	$0,\!99$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!52$	$0,\!45$	0,96	0,99
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!49$	0,49	0,97	0,98
			$0,\!52$	$0,\!60$	0,97	$0,\!94$
	3,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!42$	0,41	0,97	0,99
		$ ilde{m{ heta}}$	$0,\!51$	0,43	0,97	$0,\!99$
		$\boldsymbol{\theta}^{\star}$	$0,\!51$	$0,\!43$	0,96	0,99
		$ar{ heta} \ \ddot{ heta}$	$0,\!48$	0,47	0,97	0,98
			$0,\!51$	0,58	0,97	$0,\!95$
	5,0	$\hat{m{ heta}}$	$0,\!43$	$0,\!42$	0,97	0,99
		$ ilde{ heta}$	$0,\!52$	0,44	0,97	$0,\!99$
		$egin{array}{c} oldsymbol{ heta}^{\star} \ ar{oldsymbol{ heta}} \end{array}$	$0,\!53$	$0,\!45$	0,96	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,48	0,97	0,97
		$\ddot{m{ heta}}$	$0,\!52$	0,59	0,97	$0,\!94$
	9,0	$\hat{ heta} \ ilde{ heta}$	$0,\!44$	$0,\!42$	0,97	0,99
			$0,\!52$	$0,\!45$	0,97	$0,\!99$
		$egin{array}{c} eta^{\star} \ ar{ heta} \ \ddot{ heta} \end{array}$	$0,\!52$	$0,\!45$	0,97	0,99
		$ar{oldsymbol{ heta}}$	$0,\!49$	0,48	0,98	0,98
		$\ddot{ heta}$	0,52	0,59	0,97	0,94

2.5 Aplicação

Nesta seção apresentamos uma aplicação com dados reais a fim de ilustrar os resultados obtidos neste capítulo.

Consideramos os dados referentes aos gastos com alimentos, renda e número de pessoas em cada domicílio de uma amostra aleatória de 38 domicílios em uma grande cidade dos EUA. Esses dados estão disponíveis em Griffiths et al. (1993) ou no software R descrito como "FoodExpenditure" no pacote betareg. As variáveis são definidas como

- food (x_1) : despesas domésticas com alimentos
- income (x_2) : renda familiar
- persons (x_3) : número de pessoas que vivem no domicílio.

Assim como em Ferrari e Cribari-Neto (2004) nosso interesse foi modelar a proporção da renda gasta em alimentos, ou seja, $Y = x_1/x_2$. A Tabela 2.21 apresenta algumas medidas descritivas da variável Y.

Tabela 2.21: Medidas descritivas da variável Y

Média	Desvio padrão	Mínimo	1^{0} quartil	Mediana	3º quartil	Máximo
0,2897	0,0103	0,1075	$0,\!2269$	0,2611	0,3469	0,5612

Supondo que Y segue uma distribuição $Kum(\alpha, \beta)$, calculamos, com base nesse conjunto de dados, as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros assim como as estimativas corrigidas, apresentadas nas Tabelas 2.22 e 2.23. Essas tabelas mostram que, tanto para α quanto para β , as estimativas de máxima verossimilhança $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ apresentam valores superiores aos das respectivas versões corrigidas, sendo que os valores dessas encontram-se próximos. Observe que os resultados obtidos estão de acordo com nossas simulações.

Tabela 2.22: Estimativas pontuais e intervalos de confiança (IC) para α

Estimador	Estimativa	Erro padrão	IC (95%)
\hat{lpha}	2,955	$0,\!400$	(2,171; 3,738)
$ ilde{lpha}$	$2,\!845$	$0,\!387$	(2,086; 3,604)
$lpha^{\star}$	$2,\!860$	$0,\!389$	(2,098; 3,622)
\ddot{lpha}	$2,\!847$	$0,\!390$	(2,074; 3,626)
$\bar{\alpha}$	2,892	0,392	(2,123; 3,661)

Tabela 2.23: Estimativas pontuais e intervalos de confiança (IC) para β

Estimador	Estimativa	Erro padrão	IC (95%)
\hat{eta}	26,965	11,786	(3,864; 50,066)
$ ilde{eta}$	$23,\!573$	$10,\!004$	(3,965; 43,180)
eta^{\star}	$24,\!330$	$10,\!398$	(3,951, 44,710)
\ddot{eta}	20,043	8,205	(3,961; 36,124)
$ar{eta}$	$25,\!021$	10,759	(3,934; 46,108)

Para testar se a variável Y segue uma distribuição Kumaraswamy, realizamos os testes de aderência de Cramer-von Mises, Anderson-Darling e Kolmogorov-Smirnov, disponíveis no software R. Ao nível de significância 5%, os testes de Cramer-von Mises e Kolmogorov-Smirnov não rejeitam a hipótese de que Y segue essa distribuição (valores-p iguais a 0.0614 e 0.5643, respectivamente), ou seja, a distribuição de Kumaraswamy parece ser adequada para representar os dados observados. Os resultados estão apresentados na Tabela 2.24.

Tabela 2.24: Testes de aderência

Teste	Estatística	<i>p</i> -valor
Cramer-von Mises	0.1177	0.0614
Anderson-Darling	0.8447	0.0268
Kolmogorov-Smirnov	0.1237	0.5643

A Figura 2.1 mostra a distribuição de Y e a densidade estimada da Kum(2,955;26,965). Pode-se notar que a distribuição de Y possui uma assimetria à direita.

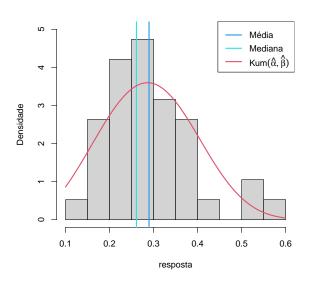


Figura 2.1: Histograma da variável resposta Y.

Capítulo 3

Coeficiente de assimetria

3.1 Introdução

Média, variância, assimetria e curtose são medidas que caracterizam bem uma distribuição. A média e a variância são mais conhecidas e utilizadas, pois fornecem informações sobre localização e dispersão, respectivamente. Apesar de serem menos utilizadas, as medidas de assimetria e curtose podem ser usadas com a finalidade de verificar desvios da normalidade da variável que está sendo analisada, pois elas caracterizam a forma da distribuição.

Sabe-se que em casos nos quais a amostra é suficientemente grande, sob certas condições de regularidade, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) dos parâmetros da distribuição são assintoticamente normais, e portanto seu coeficiente de assimetria é assintoticamente igual a zero. No entanto, em amostras pequenas ou moderadas esse resultado pode não ser confiável, pois a distribuição exata do EMV pode ser bem diferente da distribuição normal. Assim, uma forma de verificar o quão distante da normalidade está a distribuição do EMV é calcular o seu coeficiente de assimetria. Um valor distante do zero dará indícios de que a distribuição do EMV está afastada da distribuição normal.

Existem várias medidas de assimetria, sendo que a mais utilizada é o terceiro cumulante padronizado de Pearson definido por $A=\kappa_3/\kappa_2^{3/2}$, em que κ_r é o r-ésimo cumulante da distribuição. Quando A>0 (A<0) a distribuição é positivamente (negativamente) assimétrica e terá uma cauda longa (curta) à direita e curta (longa) à esquerda. É bem conhecido que se a distribuição é simétrica A=0. Contudo, a recíproca não é verdadeira, ou seja,

A=0 não implica que a distribuição é simétrica, pois existem distribuições assimétricas cujos respectivos momentos centrais ímpares são nulos (ver exemplo em Kendall et al., 1977, Exercício 3.26). Dessa forma, o valor de A deve ser interpretado com cautela.

Bowman e Shenton (1998) expandiram o terceiro momento central da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança até a ordem n^{-2} , em que n é o tamanho da amostra, e com esta expansão, obtiveram o coeficiente de assimetria até a ordem $n^{-1/2}$, γ_1 , da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança. Este coeficiente pode ser visto como uma estimativa mais precisa da assimetria exata. Patriota e Cordeiro (2011) mencionam que a estimativa do coeficiente de assimetria pode ser usada como um guia para calcular o tamanho da amostra, bastando para isso fixar um valor para γ_1 , digamos $\gamma_1 = 0, 1$, e escolher um tamanho de amostra para o qual essa estimativa seja válida. Inicialmente, deve-se tomar uma amostra piloto para estimar os parâmetros desconhecidos em γ_1 .

Existem alguns trabalhos na literatura sobre o cálculo dos coeficientes de assimetria das distribuições dos EMV em diversos modelos: Cysneiros et al. (2001) calcularam os coeficientes de assimetria e curtose de segunda ordem para uma família exponencial uniparamétrica. Cordeiro e Cordeiro (2001) usaram a expansão do terceiro momento central da distribuição dos EMV até ordem n^{-2} para obter uma expressão matricial para o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$, em que n é o tamanho da amostra, dos EMV dos parâmetros de localização e dispersão nos modelos lineares generalizados. Cavalcanti et al. (2009) estenderam este resultado para o caso dos modelos não-lineares da família exponencial. Simas et al. (2010) generalizaram para os modelos de dispersão. Patriota e Cordeiro (2011) apresentaram uma expressão matricial simples para γ_1 , numericamente mais vantajosa. Bowman e Shenton (2005) implementaram um script MAPLE para calcular as derivadas envolvidas na expansão do terceiro momento central obtida por Bowman e Shenton (1998), para a distribuição gama biparamétrica e distribuições de misturas de Poisson com três parâmetros. Lemonte e Cordeiro (2010) encontraram o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ para os modelos de regressão não lineares Birnbaum-Saunders e Barreto-Souza e Vasconcellos (2011) para os modelos de regressão do valor extremo. Mais recentemente, Magalhães et al. (2013) obtiveram a fórmula matricial de ordem $n^{-1/2}$ para o coeficiente de assimetria da distribuição dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão beta. Barros (2017) obteve os

coeficientes γ_1 e também γ_2 (coeficiente de curtose) e expressou-os em notação matricial para os modelos lineares generalizados heterocedásticos e Magalhães *et al.* (2019) obtiveram a fórmula matricial de ordem $n^{-1/2}$ para o coeficiente de assimetria da distribuição dos EMV dos parâmetros do modelo de regressão beta com dispersão variável.

Nesse capítulo, obtemos fórmulas analíticas para os coeficientes de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ das distribuições dos estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy, com base na fórmula geral de Bowman e Shenton (1998). Além disso, realizamos um estudo de simulação para comparar o desempenho desses coeficientes de assimetria com os amostrais e avaliar a simetria das distribuições dos estimadores de máxima verossimilhança.

A seguir introduzimos os conceitos básicos e apresentamos nossas expressões e resultados.

3.2 Coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$

Como mencionado anteriormente, os EMV são assintoticamente normais, no entanto as inferências sobre eles baseadas nessa distribuição, quando o tamanho amostral é pequeno, podem não ser adequadas. Uma forma de verificar, em amostras finitas, se a distribuição do EMV está próxima da distribuição normal, é calcular o seu coeficiente de assimetria. Assim, um valor distante do zero nos dá indícios de que a distribuição do EMV está afastada da distribuição normal.

Seja $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p)^{\top}$ um vetor de parâmetros qualquer. Bowman e Shenton (1998) obtiveram uma aproximação de ordem $O(n^{-2})$, em que n é o tamanho da amostra, para o terceiro momento central, $\kappa_3(\hat{\theta}_a) = E\left[\hat{\theta}_a - E\left(\hat{\theta}_a\right)\right]^3$, do EMV de θ_a , $\hat{\theta}_a$, com $a = 1, \dots, p$, dada por

$$\kappa_3(\hat{\theta}_a) = \sum' \kappa^{a,r} \kappa^{a,s} \kappa^{a,t} \left(\kappa_{r,s,t} + 3\kappa_{rst} + 6\kappa_{rs,t} \right), \tag{3.1}$$

em que \sum' denota a soma sobre todos os p parâmetros e $\kappa^{a,r}$ é o (a,r)-elemento da inversa da matriz de informação de Fisher.

O terceiro cumulante padronizado $\gamma_1(\hat{\theta}_a) = \kappa_3(\hat{\theta}_a)/var(\hat{\theta}_a)^{3/2}$ é de ordem $O(n^{-1/2})$, pois as quantidades $\kappa_3(\hat{\theta}_a)$ e $(\kappa^{a,a})^{3/2}$ são de ordem $O(n^{-2})$ e $O(n^{-3/2})$, respectivamente.

A seguir, calculamos o coeficiente de assimetria da distribuição dos EMV $\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)$

para a distribuição Kumaraswamy usando a fórmula apresentada por Bowman e Shenton.

3.2.1 Coeficiente de assimetria para a distribuição de $\hat{\alpha}$

Da expressão (3.1) escrevemos o terceiro momento central do EMV de α , $\hat{\alpha}$, como

$$\kappa_3(\hat{\alpha}) = \sum' \kappa^{\alpha,r} \kappa^{\alpha,s} \kappa^{\alpha,t} \left(\kappa_{r,s,t} + 3\kappa_{rst} + 6\kappa_{rs,t} \right),$$

em que o somatório se estende sobre os parâmetros, α e β . Assim, o terceiro momento central de ordem n^{-2} de $\hat{\alpha}$ pode ser escrito como

$$\kappa_{3}(\hat{\alpha}) = \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} (\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\alpha\alpha} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\alpha}) + \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\beta} (\kappa_{\alpha,\alpha,\beta} + 3\kappa_{\alpha\alpha\beta} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\beta})
+ \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\alpha} (\kappa_{\alpha,\beta,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\beta\alpha} + 6\kappa_{\alpha\beta,\alpha}) + \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} (\kappa_{\beta,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\beta\alpha\alpha} + 6\kappa_{\beta\alpha,\alpha})
+ \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} (\kappa_{\alpha,\beta,\beta} + 3\kappa_{\alpha\beta\beta} + 6\kappa_{\alpha\beta,\beta}) + \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\beta} (\kappa_{\beta,\alpha,\beta} + 3\kappa_{\beta\alpha\beta} + 6\kappa_{\beta\alpha,\beta})
+ \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\alpha} (\kappa_{\beta,\beta,\alpha} + 3\kappa_{\beta\beta\alpha} + 6\kappa_{\beta\beta,\alpha}) + \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} (\kappa_{\beta,\beta,\beta} + 3\kappa_{\beta\beta\beta} + 6\kappa_{\beta\beta,\beta}).$$

Somando os termos iguais e considerando que $\kappa_{\beta\beta\alpha} = \kappa_{\beta\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta\beta} = \kappa_{\beta\beta,\alpha} = 0$ (ver Apêndice A), podemos reescrever $\kappa_3(\hat{\alpha})$ como

$$\kappa_{3}(\hat{\alpha}) = \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} \kappa^{\alpha,\alpha} (\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\alpha\alpha} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\alpha})
+ (\kappa^{\alpha,\alpha})^{2} \kappa^{\alpha,\beta} (3\kappa_{\alpha,\alpha,\beta} + 9\kappa_{\alpha\alpha\beta} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\beta} + 12\kappa_{\alpha\beta,\alpha})
+ (\kappa^{\alpha,\beta})^{2} \kappa^{\alpha,\alpha} (3\kappa_{\beta,\beta,\alpha} + 12\kappa_{\beta\alpha,\beta}) + \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} \kappa^{\alpha,\beta} (\kappa_{\beta,\beta,\beta} + 3\kappa_{\beta\beta\beta} + 6\kappa_{\beta\beta,\beta}) . (3.2)$$

Substituindo os cumulantes apresentados no Apêndice A, em (3.2) e simplificando a expressão, obtemos:

$$\kappa_3(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^3}{n^2(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)^3} \left(a_0 + \frac{a_1}{\beta - 1} + \frac{a_2}{\beta - 2} \right), \tag{3.3}$$

sendo
$$a_0 = a_0(\beta) = 4 + 6(\bar{A} - 1) - 2\bar{B}\beta^2 (3 + 2\bar{B}\beta), \ a_1 = a_1(\beta) = 3\bar{B}\beta^2 [2\bar{B}\bar{C} - (\bar{A} - 1)]$$
 e $a_2 = a_2(\beta) = 2(\bar{G} - \bar{E} - \bar{F}).$

A partir de (3.3) e da variância assintótica de $\hat{\alpha}$ dada por (ver Apêndice A)

$$var(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^2}{n\left(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2\right)},$$

podemos obter o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$

$$\gamma_1(\hat{\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{n(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)^3}} \left(a_0 + \frac{a_1}{\beta - 1} + \frac{a_2}{\beta - 2} \right), \tag{3.4}$$

com $\beta \neq 1$ e $\beta \neq 2$.

Note que o coeficiente de assimetria para a distribuição de $\hat{\alpha}$ não depende do parâmetro α , mas depende do parâmetro β e do tamanho amostral, n, de forma que à medida em que n cresce, o coeficiente $\gamma_1(\hat{\alpha})$ diminui.

3.2.2 Coeficiente de assimetria para a distribuição de $\hat{\beta}$

O terceiro momento central do EMV de β , $\hat{\beta}$, é obtido a partir da expressão (3.1), como

$$\kappa_{3}(\hat{\beta}) = \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha} \left(\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\alpha\alpha} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\alpha}\right) + \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\beta} \left(\kappa_{\alpha,\alpha,\beta} + 3\kappa_{\alpha\alpha\beta} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\beta}\right)
+ \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\alpha} \left(\kappa_{\alpha,\beta,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\beta\alpha} + 6\kappa_{\alpha\beta,\alpha}\right) + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\alpha} \left(\kappa_{\beta,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\beta\alpha\alpha} + 6\kappa_{\beta\alpha,\alpha}\right)
+ \kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta} \left(\kappa_{\alpha,\beta,\beta} + 3\kappa_{\alpha\beta\beta} + 6\kappa_{\alpha\beta,\beta}\right) + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\alpha}\kappa^{\beta,\beta} \left(\kappa_{\beta,\alpha,\beta} + 3\kappa_{\beta\alpha\beta} + 6\kappa_{\beta\alpha,\beta}\right)
+ \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\alpha} \left(\kappa_{\beta,\beta,\alpha} + 3\kappa_{\beta\beta\alpha} + 6\kappa_{\beta\beta,\alpha}\right) + \kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta}\kappa^{\beta,\beta} \left(\kappa_{\beta,\beta,\beta} + 3\kappa_{\beta\beta\beta} + 6\kappa_{\beta\beta,\beta}\right).$$

Somando os termos iguais e considerando novamente que $\kappa_{\beta\beta\alpha} = \kappa_{\beta\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta\beta} = \kappa_{\beta\beta,\alpha} = 0$, podemos reescrever $\kappa_3(\hat{\beta})$ como

$$\kappa_{3}(\hat{\beta}) = \kappa^{\beta,\beta} \kappa^{\beta,\beta} \kappa^{\beta,\beta} (\kappa_{\beta,\beta,\beta} + 3\kappa_{\beta\beta\beta} + 6\kappa_{\beta\beta,\beta}) + (\kappa^{\beta,\beta})^{2} \kappa^{\beta,\alpha} (3\kappa_{\beta,\beta,\alpha} + 12\kappa_{\beta\alpha,\beta})
+ (\kappa^{\beta,\alpha})^{2} \kappa^{\beta,\beta} (3\kappa_{\alpha,\alpha,\beta} + 9\kappa_{\alpha\alpha\beta} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\beta} + 12\kappa_{\alpha\beta,\alpha})
+ (\kappa^{\beta,\alpha})^{3} (\kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} + 3\kappa_{\alpha\alpha\alpha} + 6\kappa_{\alpha\alpha,\alpha}).$$
(3.5)

Substituindo os cumulantes, apresentados no Apêndice A, em (3.5) e simplificando a

expressão, obtemos:

$$\kappa_3(\hat{\beta}) = \frac{\beta^3}{n^2(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)^3} \left(b_0 + \frac{b_1}{\beta - 1} + \frac{b_2}{\beta - 2} + \frac{b_3}{\beta - 3} \right), \tag{3.6}$$

sendo $b_0 = b_0(\beta) = 4\bar{A}^3 + 2\beta^3\bar{B}^3$, $b_1 = b_1(\beta) = 3\beta\bar{A}\bar{B}\left[\beta^2\bar{B}(\bar{A}-1) - 2\bar{A}\bar{C}\right]$, $b_2 = b_2(\beta) = 3\beta\bar{A}\bar{B}[2\beta(\bar{A}-1)\bar{B}-\bar{D}]$ e $b_3 = b_3(\beta) = 2\beta^3\bar{B}^3(\bar{E}-\bar{G}+\bar{F})$.

A partir de (3.6) e da variância assintótica de $\hat{\beta}$ dada por (ver Apêndice A ou as expressões em (1.4))

$$var(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2 \bar{A}}{n \left(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2\right)},$$

obtemos o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$

$$\gamma_1(\hat{\beta}) = \frac{1}{\sqrt{n\bar{A}^3 \left(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2\right)^3}} \left(b_0 + \frac{b_1}{\beta - 1} + \frac{b_2}{\beta - 2} + \frac{b_3}{\beta - 3}\right),\tag{3.7}$$

em que $\beta \notin \{1, 2, 3\}$.

Note que o coeficiente de assimetria da distribuição de $\hat{\beta}$ depende apenas do parâmetro β e do tamanho amostral, n, de forma que a medida em que n cresce o coeficiente $\gamma_1(\hat{\beta})$ diminui.

3.3 Estudo de simulação

Nesta seção apresentamos os resultados do estudo de simulação de Monte Carlo que realizamos com o objetivo de avaliar os coeficientes de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ das distribuições dos EMV dos parâmetros α e β da distribuição Kumaraswamy e compará-los com os coeficientes de assimetria amostrais, definidos pela razão de momentos amostrais.

Os tamanhos amostrais considerados na simulação foram n=15, 25, 40 e 60, e os valores verdadeiros dos parâmetros foram fixados em $\alpha=0.5; 1.5; 3; 5$ e 9 e $\beta=0.5; 5$ e 7,5. O número de replicações de Monte Carlo foi estabelecido em R=5000. Em cada réplica, encontramos os EMV, $\hat{\boldsymbol{\theta}}=(\hat{\alpha},\hat{\beta})^{\top}$, maximizando a função de log-verossimilhança a partir da função *optim*, usando o método quase-Newton, BFGS.

O coeficiente de assimetria amostral foi calculado por meio da função skewness presente no pacote "e1071", do software R. Selecionando nos argumentos da função, o método de estimação "type = 1", o coeficiente de assimetria é calculado como

$$g_1 = m_3/m_2^{3/2}$$
, com $m_s = \sum_{i=1}^{5000} (\hat{\theta}_{ri} - \bar{\hat{\theta}}_r)^s / 5000$,

 m_s é o momento amostral de ordem s e $\bar{\hat{\theta}}_r = \sum_{i=1}^{5000} \hat{\theta}_{ri}/5000$.

Para cada uma das 5000 réplicas de Monte Carlo calculamos o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ das distribuições dos EMV de α e β , a partir das expressões (3.4) e (3.7), respectivamente. O coeficiente γ_1 é a média aritmética dos 5000 valores calculados.

Os resultados obtidos estão dispostos nas Tabelas 3.1–3.3. Percebemos que o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ da distribuição do EMV de α fica geralmente próximo do coeficiente de assimetria amostral. Já, para o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ da distribuição do EMV de β , esse resultado ocorre apenas quando $\beta=0,5$. Para os demais β , os dois valores ficam razoavelmente próximos apenas para n=60. Além disso, à medida que o tamanho da amostra aumenta, tanto o coeficiente de assimetria amostral quanto o de ordem $n^{-1/2}$ diminuem, como esperado, mas, mesmo para n=60 estão distantes de zero, principalmente para estimador $\hat{\beta}$. Este resultado indica que a aproximação pela distribuição normal para os EMV da distribuição Kumaraswamy pode ser enganosa em amostras de tamanho pequeno e até mesmo moderado. Os resultados apontam que essa distância da normalidade da distribuição de $\hat{\beta}$ é mais forte quando os valores de β são maiores do que 0,5. Em contra partida a distribuição de $\hat{\alpha}$ parece ficar mais próxima da normalidade à medida em que os valores de β crescem. Notamos também, que em quase todos os casos, o coeficiente γ_1 é menor do que o coeficiente g_1 , o que mostra que o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ parece subestimar o coeficiente de assimetria amostral.

Para facilitar a visualização desses resultados, construímos figuras contendo densidades estimadas dos EMV, $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, a fim de compará-las com a densidade da distribuição normal para valores crescentes de n. As densidades dos EMV foram estimadas usando-se a função density do Software R, com base nos 5000 valores das estimativas de máxima verossimilhança de cada parâmetro. A densidade da distribuição normal foi obtida por meio da função dnorm

do Software R, com base na média e na variância dos 5000 valores das estimativas de máxima verossimilhança de cada parâmetro. A média e mediana das 5000 estimativas também foram incorporadas às figuras com o objetivo de se avaliar a assimetria das distribuições dos EMV.

Os resultados para alguns dos casos apresentados nas Tabelas 3.1–3.3 estão apresentados nas Figuras 3.1 - 3.4. Escolhemos os tamanhos amostrais n=15, 25 e 60, $\alpha=0,5$ e 1,5 e $\beta=0,5$ e 7,5 (escolhidos de forma a cobrir os casos $\alpha<1$ e $\beta<1, \alpha<1$ e $\beta>1$, $\alpha>1$ e $\beta<1$ e $\alpha>1$ e $\beta>1$). Essas figuras ilustram bem o comportamento que descrevemos anteriormente nos comentários sobre as tabelas.

Tabela 3.1: Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições dos EMV dos parâmetros da $Kum(\alpha, \beta)$.

			$\hat{\alpha}$		Ļ	<u> </u>
β	α	n	g_1	γ_1	g_1	γ_1
0,5	0,5	15	2,5520	1,4909	2,2657	1,3920
		25	1,4777	$1,\!1687$	$1,\!3740$	$1,\!0672$
		40	$1,\!1568$	0,9282	0,9928	$0,\!8399$
		60	$0,\!8074$	0,7607	0,7113	$0,\!6837$
	1,5	15	1,7988	1,4937	2,2333	1,3909
		25	$1,\!3580$	$1,\!1661$	$1,\!3907$	1,0684
		40	1,0320	0,9303	1,0931	$0,\!8390$
		60	$0,\!8150$	0,7618	$0,\!8507$	$0,\!6833$
	3,0	15	2,5256	1,4928	1,8488	1,3909
		25	1,5243	$1,\!1691$	1,2291	$1,\!0672$
		40	0,9390	0,9286	1,0530	$0,\!8397$
		60	$0,\!8855$	0,7606	0,7282	$0,\!6838$
	5,0	15	1,9687	1,4877	2,1582	1,3932
		25	1,3392	1,1689	1,5620	1,0671
		40	0,9310	0,9296	0,9090	$0,\!8393$
		60	$0,\!8363$	0,7608	0,7458	$0,\!6837$
	9,0	15	1,7903	1,4907	2,3070	1,3922
		25	$1,\!3542$	1,1677	$1,\!3886$	$1,\!0677$
		40	1,0399	0,9297	0,9430	$0,\!8392$
		60	0,7919	0,7609	0,7018	0,6836

Tabela 3.2: Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições dos EMV dos parâmetros da $Kum(\alpha, \beta)$.

						^
			<i>Č</i>	$\hat{\alpha}$		3
β	α	n	g_1	γ_1	g_1	γ_1
5,0	0,5	15	1,0414	0,8882	4,4943	2,2527
		25	0,8114	$0,\!6885$	3,7574	1,7105
		40	$0,\!5259$	0,5441	1,7564	1,3417
		60	$0,\!3888$	0,4449	$1,\!2900$	1,0873
	1,5	15	0,9332	0,8878	4,7900	2,2550
		25	0,7553	$0,\!6879$	3,0214	1,7147
		40	$0,\!5965$	0,5441	1,9333	1,3426
		60	$0,\!4573$	0,4442	$1,\!3000$	1,0913
	3,0	15	0,8857	0,8875	3,4388	2,2568
		25	0,7500	0,6880	3,6674	1,7137
		40	$0,\!5762$	0,5440	$1,\!6785$	1,3429
		60	$0,\!4338$	0,4446	$1,\!3091$	1,0882
	5,0	15	0,9768	0,8870	4,1587	2,2604
		25	$0,\!6761$	0,6881	$3,\!2956$	1,7132
		40	$0,\!5591$	0,5447	1,8298	1,3386
		60	0,5132	0,4443	$1,\!3847$	1,0910
	9,0	15	1,0449	0,8866	4,9872	2,2633
		25	0,7614	$0,\!6883$	$3,\!4247$	1,7132
		40	0,5773	0,5444	$2,\!3738$	1,3397
		60	0,4906	0,4448	1,3025	1,0881

Tabela 3.3: Coeficiente de assimetria amostral (g_1) e de ordem $n^{-1/2}$ (γ_1) , das distribuições dos EMV dos parâmetros da $Kum(\alpha, \beta)$.

			\hat{lpha}		,	$\hat{\beta}$
β	α	n	$\overline{g_1}$	γ_1	g_1	γ_1
7,5	0,5	15	0,8204	0,8682	3,2271	2,4520
		25	0,6436	$0,\!6720$	2,7529	1,8600
		40	$0,\!6262$	$0,\!5311$	2,1625	$1,\!4534$
		60	$0,\!4283$	$0,\!4336$	1,3712	$1,\!1780$
	1,5	15	0,7834	0,8682	3,0389	2,4485
		25	$0,\!6862$	$0,\!6718$	3,8984	1,8630
		40	0,5976	$0,\!5310$	2,8329	$1,\!4540$
		60	$0,\!4137$	$0,\!4336$	1,5211	$1,\!1790$
	3,0	15	0,7303	0,8679	3,2151	2,4562
		25	0,7506	$0,\!6719$	3,7755	1,8615
		40	0,4953	$0,\!5310$	1,9605	$1,\!4554$
		60	0,4904	$0,\!4334$	1,6039	1,1809
	5,0	15	0,8376	0,8679	3,2795	2,4507
		25	0,7044	$0,\!6717$	2,5696	1,8621
		40	$0,\!6233$	$0,\!5310$	2,3463	$1,\!4536$
		60	$0,\!3787$	$0,\!4336$	1,3084	$1,\!1789$
	9,0	15	0,7293	0,8677	3,9629	2,4535
		25	$0,\!6657$	$0,\!6719$	$3,\!3523$	1,8594
		40	0,6427	$0,\!5309$	2,5451	$1,\!4541$
		60	$0,\!4200$	$0,\!4336$	1,4096	$1,\!1792$

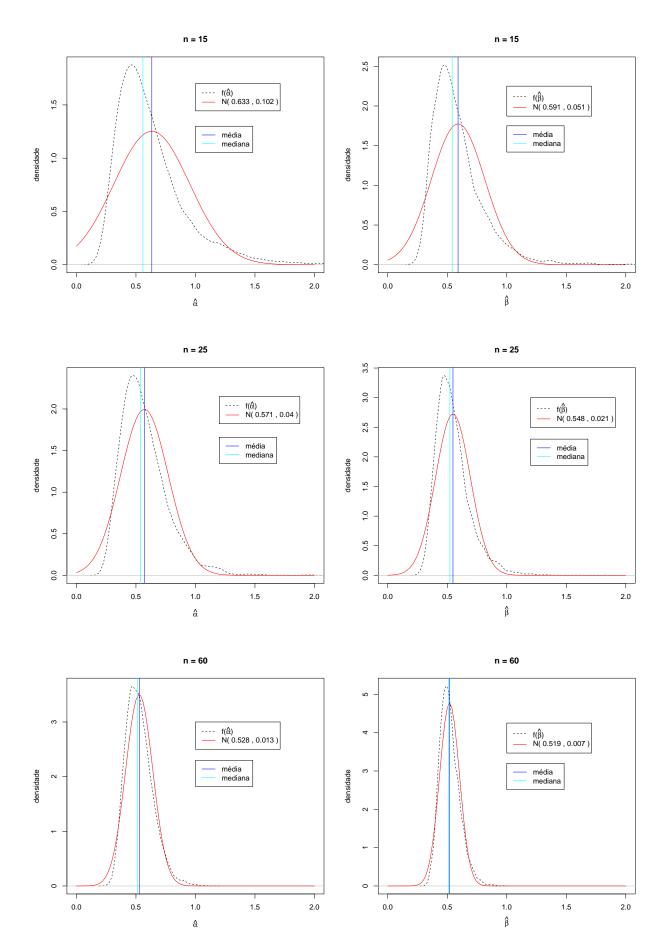


Figura 3.1: Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma $Kum(0.5,\ 0.5)$ e densidade normal.

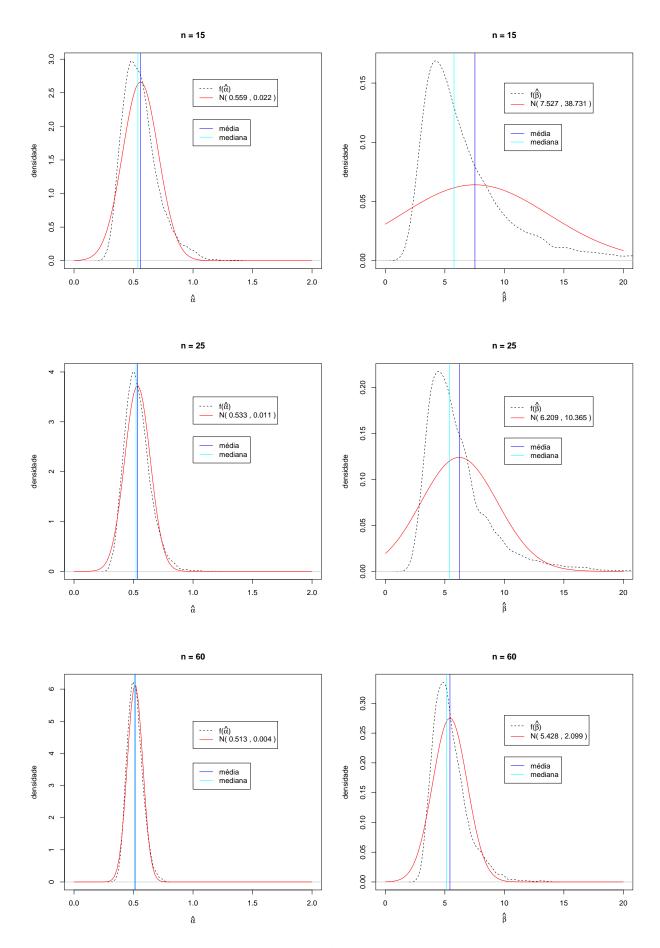


Figura 3.2: Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(0.5, 5) e densidade normal.

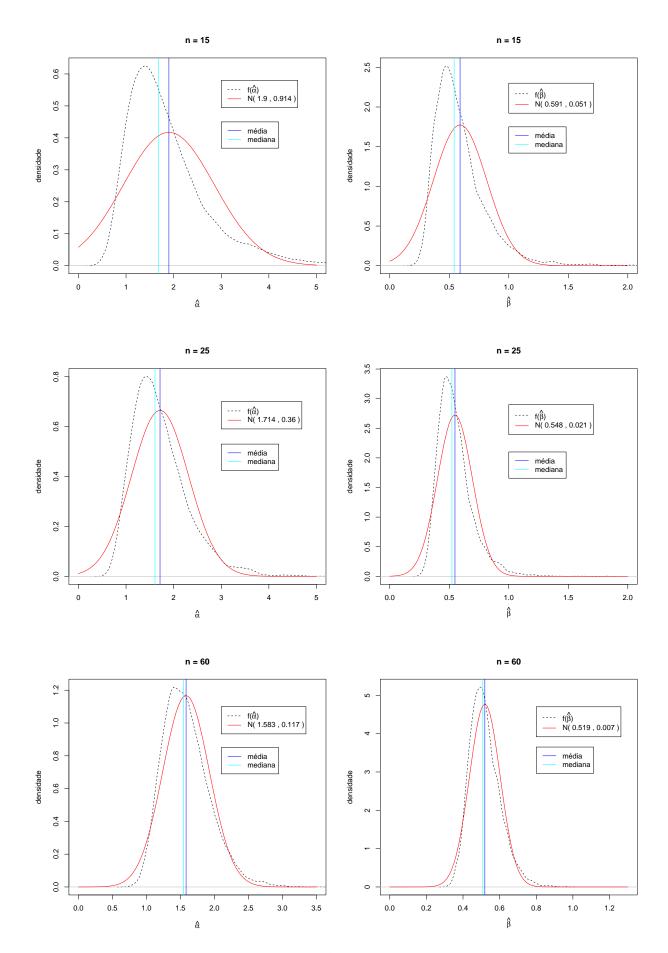


Figura 3.3: Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma $Kum(1.5,\ 0.5)$ e densidade normal.

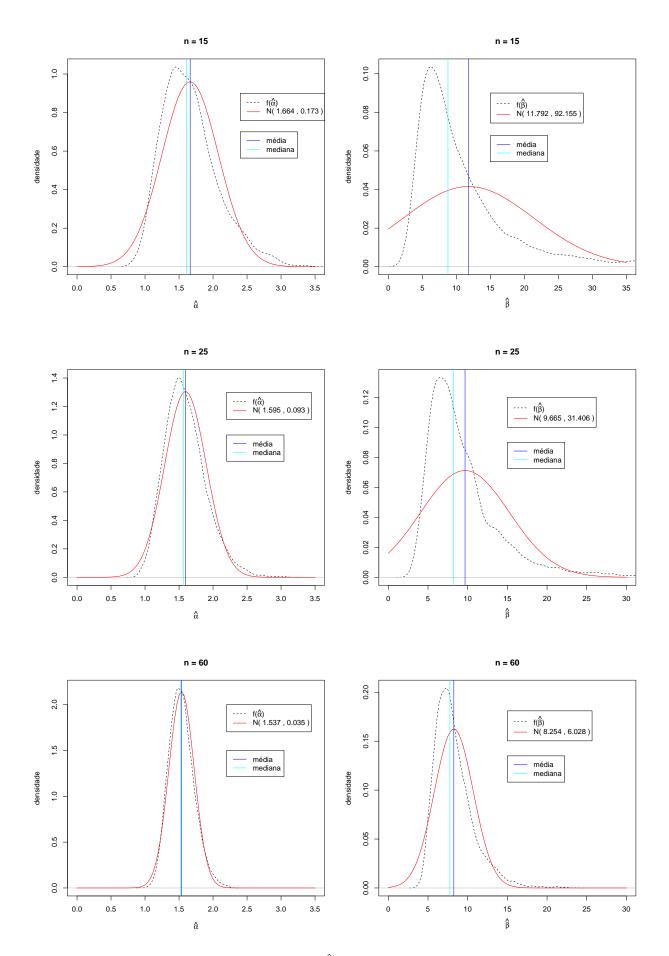


Figura 3.4: Densidade estimada de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ para uma Kum(1.5, 7.5) e densidade normal.

3.4 Aplicação

Para ilustrar os resultados obtidos neste capítulo, consideramos apenas a variável resposta Y, calculada a partir do mesmo conjunto de dados apresentados na Seção 2.5. A Tabela 3.4 apresenta as estimativas de máxima verossimilhança de α e de β da distribuição Kumaraswamy, os respectivos erros padrões e os valores estimados dos coeficientes de assimetria, obtidos a partir das expressões (3.4) e (3.7). Os valores estimados de γ_1 sugerem que uma aproximação pela normal seria menos apropriada para distribuição de $\hat{\beta}$. Este resultado está coerente com o que foi observado nas simulações.

Tabela 3.4: Estimativa e coeficiente de assimetria (γ_1)

Parâmetro	Estimativa	Erro padrão	γ_1
α	2,9545	0,400	-0,3068
β	26,9649	11,786	1,0404

Capítulo 4

Teste da razão de verossimilhanças corrigido

4.1 Introdução

Para testar uma hipótese nula usando uma estatística qualquer é necessário obter sua distribuição exata sob a hipótese nula ou uma boa aproximação dela. A estatística da razão de verossimilhanças, S_{RV} , é uma das estatísticas mais utilizadas na inferência paramétrica para testar hipóteses. Sabe-se que, sob H_0 e condições gerais de regularidade, esta estatística tem distribuição assintoticamente χ_q^2 , com um erro de aproximação de ordem $O(n^{-1})$, em que q é o número de restrições impostas pela hipótese nula e n é o tamanho da amostra. No entanto, em amostras pequenas ou até mesmo moderadas, a utilização da aproximação pela χ_q^2 pode não ser satisfatória e causar distorções no tamanho do teste. Uma alternativa para contornar esse problema e melhorar a qualidade da aproximação da estatística S_{RV} à distribuição χ_q^2 , sob a hipótese nula, foi proposta por Bartlett (1937). Ele sugeriu multiplicar a estatística S_{RV} por um fator C_B , conhecido como fator de correção de Bartlett, obtendo assim uma estatística da razão de verossimilhanças modificada, S_{RV}^* , cuja taxa de convergência para a distribuição χ^2 é mais rápida.

Outra forma para melhorar essa aproximação foi apresentada por Rocke (1989) e se baseia no método bootstrap (Efron, 1979). Esse método é conhecido por correção de Bartlett bootstrap e considerado mais eficiente computacionalmente do que o teste bootstrap usual

(Efron e Tibshirani, 1993).

Vários trabalhos focaram em derivar a correção de Bartlett e/ou o teste bootstrap e/ou a correção de Bartlett bootstrap considerando diversos modelos, por exemplo: Cordeiro (1983, 1992) obtiveram correções de Bartlett para modelos lineares generalizados com parâmetro de dispersão conhecido e para modelos normais heteroscedásticos multiplicativos, respectivamente; Botter e Cordeiro (1997) generalizaram esses resultados para os modelos lineares generalizados com dispersão nas covariáveis; Rayner (1990) derivou a correção de Bartlett para S_{RV} e considerou um teste bootstrap em modelos de regressão lineares normais; Kahle (1996) obteve a correção de Bartlett para a distribuição Weibull; Lemonte et al. (2007) derivaram uma correção de Bartlett considerando a distribuição Birnbaum-Saunders; Bayer e Cribari-Neto (2013) também derivaram a correção de Bartlett e Bartlett bootstrap para S_{RV} e consideraram também o teste bootstrap em modelos de regressão Beta; Loose et al. (2017) propuseram a correção Bartlett bootstrap para a estatítica da razão de verossimilhanças no modelo de regressão Beta inflacionado; Loose et al. (2018) propuseram correções de bootstrap para os testes da razão de verossimilhanças, escore, Wald e gradiente e correção de Bartlett bootstrap para a estatística da razão de verossimilhanças no modelo Weibull; Araújo et al. (2020) derivaram correções de Bartlett e Bartlett bootstrap para o teste da razão de verossimilhanças assim como testes bootstrap considerando modelos de regressão não lineares simétricos.

Neste capítulo, consideramos o método de correção de Bartlett da estatística da razão de verossimilhanças mencionado acima, assim como algumas de suas variações apresentadas na literatura. Além disso, incluímos o teste bootstrap e a correção de Bartlett bootstrap para o teste da razão de verossimilhanças dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy. A seguir, discutimos cada uma dessas correções mais detalhadamente.

4.2 Correção de Bartlett

Como mencionado anteriormente, em grandes amostras, sob H_0 e condições gerais de regularidade, a estatística da razão de verossimilhanças tem distribuição aproximadamente χ_q^2 , com um erro de aproximação de ordem $O(n^{-1})$. No entanto, em amostras finitas, a

utilização desta aproximação pode não ser confiável. Para melhorar a qualidade da aproximação, Bartlett (1937) sugeriu multiplicar a estatística S_{RV} por um fator C_B , conhecido como fator de correção de Bartlett, obtendo assim uma estatística da razão de verossimilhanças modificada, S_{RV}^* , cuja taxa de convergência para a distribuição χ^2 é mais rápida. O método e a aplicação dele à distribuição Kumaraswamy são detalhados a seguir.

Sejam Y_1, \ldots, Y_n uma amostra aleatória de tamanho n extraída de uma distribuição qualquer indexada pelo vetor p-dimensional de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_p)^\top$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$ a amostra observada e $\ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y})$ a função de log-verossimilhança associada. Considere a seguinte partição do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)^\top$, em que $\boldsymbol{\theta}_1 = (\theta_1, \ldots, \theta_r)^\top$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = (\theta_{r+1}, \ldots, \theta_p)^\top$, com r < p. Suponha que estamos interessados em testar alguma das seguintes hipóteses nulas

$$H_0: \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0 \quad versus \quad H_1: \boldsymbol{\theta} \neq \boldsymbol{\theta}^0,$$
 (4.1)

ou

$$H_0: \boldsymbol{\theta}_1 = \boldsymbol{\theta}_1^0 \quad versus \quad H_1: \boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_1^0,$$
 (4.2)

sendo $\boldsymbol{\theta}^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_p^0)^{\top}$ e $\boldsymbol{\theta}_1^0 = (\theta_1^0, \dots, \theta_r^0)^{\top}$ vetores de valores especificados.

A estatística da razão de verossimilhanças para testar tanto a hipótese nula simples (4.1), quanto a hipótese nula composta (4.2) tem a seguinte forma geral

$$S_{RV} = 2 \left\{ \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{y}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{y}) \right\},$$

em que $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta}_0$, sob (4.1) e $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\theta}_1^0, \tilde{\boldsymbol{\theta}}_2)^{\top}$, sendo $\tilde{\boldsymbol{\theta}}_2 = (\tilde{\theta}_{r+1}, \dots, \tilde{\theta}_p)^{\top}$ o estimador de máxima verossimilhança de $\boldsymbol{\theta}_2$ restrito à hipótese nula em (4.2), e $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \hat{\boldsymbol{\theta}}_2)^{\top}$ o estimador irrestrito de máxima verossimilhança.

Sob H_0 e condições gerais de regularidade, a estatística da razão de verossimilhanças, S_{RV} , terá distribuição assintoticamente χ_q^2 , em que q representa o número de restrições impostas por H_0 , (4.1) ou (4.2), nos parâmetros. A estatística da razão de verossimilhanças corrigida pelo fator de correção de Bartlett, S_{RV}^* é obtida multiplicando-se a estatística S_{RV}

pela constante $C_B = (1+d)^{-1}$, ou seja, a estatística de teste modificada é dada por

$$S_{RV}^* = S_{RV} \cdot C_B, \tag{4.3}$$

em que d é uma constante de ordem n^{-1} , obtida de maneira que, sob H_0 , $E(S_{RV}^*) = q + O(n^{-2})$.

Lawley (1956), mostrou, sob H_0 , que o valor esperado da estatística da razão de verossimilhança pode ser expandido e escrito como:

$$E(S_{RV}) = q + \epsilon_p - \epsilon_{p-q} + O(n^{-2}).$$

Dessa expansão, pode-se escrever o fator de correção de Bartlett como:

$$C_B^{-1} = 1 + d = \frac{E(S_{RV})}{g} = 1 + \frac{\epsilon_p - \epsilon_{p-q}}{g},$$
 (4.4)

em que $E(S_{RV})$ é calculada até ordem n^{-1} , ou seja $d=(\epsilon_p-\epsilon_{p-q})/q$ é de ordem n^{-1} e

$$\epsilon_p = \sum_{\theta} \{\ell_{rstu} - \ell_{rstuvw}\},\tag{4.5}$$

em que
$$\ell_{rstu} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left\{ \frac{1}{4} \kappa_{rstu} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)} \right\}$$
 e
$$\ell_{rstuvw} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rtv} (\kappa_{suw}/6 - \kappa_{sw}^{(u)}) + \kappa_{rtu} (\kappa_{svw}/4 - \kappa_{sw}^{(v)}) + \kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}.$$

Note que a soma em (4.5) é feita em $\boldsymbol{\theta}$, ou seja, os índices r, s, t, u, v, e w variam sobre todos os p parâmetros do vetor $\boldsymbol{\theta}$. O cálculo de ϵ_{p-q} vem de (4.5), sendo que a soma é feita sobre os componentes de $\boldsymbol{\theta_2}$.

Assim, a estatística modificada, S_{RV}^* , tem distribuição aproximadamente χ_q^2 , com erro de aproximação de ordem $O(n^{-2})$.

A estatística da razão de verossimilhanças corrigida geralmente é dada por (4.3). No entanto, existem algumas variações dessa estatística de teste. No presente trabalho conside-

ramos as seguintes

$$S_{RV1}^* = S_{RV} \cdot (1+d)^{-1},$$

 $S_{RV2}^* = S_{RV} \cdot \exp(-d),$
 $S_{RV3}^* = S_{RV} \cdot (1-d).$ (4.6)

Todas as estatísticas em (4.6) são equivalentes até a ordem $O(n^{-1})$ (Lemonte et al., 2010). Note que a estatística S_{RV2}^* tem a vantagem de nunca assumir valores negativos.

Suponhamos agora que $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^{\top}$ seja uma amostra aleatória de tamanho n extraída a partir de uma distribuição Kumaraswamy indexada pelos parâmetros de forma $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$. A função de log-verossimilhança associada é dada em (1.1). As hipóteses (4.1) e (4.2) assumem então as seguintes formas

$$H_0: \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0 \quad versus \quad H_1: \alpha \neq \alpha_0 \text{ ou } \beta \neq \beta_0$$
 (4.7)

ou

$$H_0: \alpha = \alpha_0 \quad versus \quad H_1: \alpha \neq \alpha_0$$
 (4.8)

ou

$$H_0: \beta = \beta_0 \quad versus \quad H_1: \beta \neq \beta_0.$$
 (4.9)

A estatística da razão de verossimilhanças para testar a hipótese nula (4.7), (4.8) ou (4.9) é dada por

$$S_{RV} = 2 \left\{ \ell(\hat{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{y}) - \ell(\tilde{\boldsymbol{\theta}}; \boldsymbol{y}) \right\},$$

sendo $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\alpha_0, \beta_0)^{\top}$, para a hipótese nula dada em (4.7), e $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\alpha_0, \tilde{\beta})^{\top}$ ou $\tilde{\boldsymbol{\theta}} = (\tilde{\alpha}, \beta_0)^{\top}$, com $\tilde{\beta}$ e $\tilde{\alpha}$ denotando os estimadores de máxima verossimilhança de β e de α , restritos às hipóteses (4.8) e (4.9), respectivamente, e $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^{\top}$ o estimador de máxima verossimilhança irrestrito de $\boldsymbol{\theta}$.

Sob cada uma das hipóteses nulas $S_{RV} \stackrel{\cdot}{\sim} \chi_q^2$, em que q é o número de restrições impostas sobre os parâmetros por H_0 (neste caso 2 ou 1, dependendo da hipótese nula considerada).

A partir de (4.4), temos para hipótese nula simples (4.7) que $d = \frac{\epsilon_2}{2}$ com

$$\epsilon_2 = \sum_{\alpha,\beta} \{\ell_{rstu} - \ell_{rstuvw}\},\tag{4.10}$$

em que
$$\ell_{rstu} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \left\{ \frac{1}{4} \kappa_{rstu} - \kappa_{rst}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(su)} \right\}$$
 e
$$\ell_{rstuvw} = \kappa^{rs} \kappa^{tu} \kappa^{vw} \left\{ \kappa_{rtv} (\kappa_{suw}/6 - \kappa_{sw}^{(u)}) + \kappa_{rtu} (\kappa_{svw}/4 - \kappa_{sw}^{(v)}) + \kappa_{rt}^{(v)} \kappa_{sw}^{(u)} + \kappa_{rt}^{(u)} \kappa_{sw}^{(v)} \right\}.$$

Já, para as hipóteses nulas compostas (4.8) e (4.9), temos que $d = \epsilon_2 - \epsilon_1$, com ϵ_2 dado em (4.10) e $\epsilon_1 = \ell_{\beta\beta\beta\beta} - \ell_{\beta\beta\beta\beta\beta\beta}$ e $\epsilon_1 = \ell_{\alpha\alpha\alpha\alpha} - \ell_{\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha}$, respectivamente. Todos os cumulantes até a quarta ordem para a distribuição Kumaraswamy estão dados no Apêndice A.

4.3 Teste bootstrap para a estatística da razão de verossimilhanças

O teste bootstrap paramétrico com base em uma estatística qualquer está descrito em Efron e Tibshirani (1993). Sob H_0 , geramos B amostras bootstrap $(\mathbf{y}^{*1}, \dots, \mathbf{y}^{*B})$ de tamanho n, a partir do método boostrap paramétrico (ver Seção 2.2). Considerando a estatística da razão de verossimilhanças, para cada amostra bootstrap, calcula-se o valor dessa estatística, S_{RV}^{*b} , $b = 1, \dots, B$, e, para os B valores obtidos, encontra-se o quantil de ordem $(1 - \alpha)$, denotado por $\hat{q}_{(1-\alpha)}$, em que α é o nível de significância fixado.

A partir da amostra original $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^{\top}$, calcula-se o valor da estatística da razão de verossimilhanças S_{RV} e rejeita-se a hipótese nula se $S_{RV} > \hat{q}_{(1-\alpha)}$. No estudo de simulação utilizamos a notação $S_{RV_{Boot}}$ para representar este teste.

4.4 Correção de Bartlett bootstrap

Uma forma alternativa para calcular o fator de correção de Bartlett para a estatística da razão de verossimilhanças, S_{RV} , foi introduzida por Rocke (1989) e tem como base o método bootstrap (Efron (1979)). Da mesma forma que na Seção 4.3, calculamos a estatística S_{RV} com base na amostra original \boldsymbol{y} , geramos, sob H_0 , as B amostras bootstrap ($\boldsymbol{y}^{*1}, \ldots, \boldsymbol{y}^{*B}$) de tamanho n, a partir do método boostrap paramétrico e calculamos o valor da estatística,

$$S_{RV}^{*b}, b = 1, \dots, B.$$

Por fim, a estatística da razão de verossimilhanças corrigida por meio do método de Bartlett *bootstrap* é calculada como:

$$S_{RV_{Boot}}^* = \frac{S_{RV}}{\overline{S_{RV}^{*b}}} q,$$

em que q representa o número de restrições sob a hipótese nula e $\overline{S_{RV}^{*b}} = \frac{\sum_{b=1}^{B} S_{RV}^{*b}}{B}$. A estatística $S_{RV_{Boot}}^{*}$ tem distribuição assintótica χ_{q}^{2} .

4.5 Estudo de simulação

Nesta seção apresentamos os resultados de um estudo de simulação com o objetivo de comparar o desempenho do teste baseado na estatística da razão de verossimilhanças, S_{RV} , com os dos testes baseados nas versões corrigidas pelo fator de correção de Bartlett, S_{RV1}^* , S_{RV2}^* , e S_{RV3}^* (ver 4.6), e com os dos testes bootstrap, baseado na estatística $S_{RV_{Boot}}$ (ver Seção 4.3) e da RV corrigido por meio do método de Bartlett bootstrap, baseado na estatística $S_{RV_{Boot}}^*$ (ver Seção 4.4), considerando amostras finitas e a distribuição Kumaraswamy, $Kum(\alpha, \beta)$, apresentada na Seção 1.3.

Para essas simulações, as amostras aleatórias da distribuição Kumaraswamy foram geradas a partir de $Y = \left[1 - U^{1/\beta}\right]^{1/\alpha}$, em que $U \sim U(0,1)$. As estimativas de máxima verossimilhanças foram obtidas a partir da função optim, selecionando-se o método quase-Newton, BFGS. Fixamos os valores para os parâmetros α e β em $\alpha = 0.5$; 1,5; 3; 5 e 9 e $\beta = 0.5$; 5 e 7,5, e os tamanhos amostrais em n = 15, 25, 40 e 60. Consideramos R = 5000 réplicas de Monte Carlo e B = 500 réplicas bootstrap. Todas as simulações foram realizadas utilizando-se a linguagem de programação R (R Core Team , 2019).

As Tabelas 4.1-4.12 apresentam as taxas de rejeição (em porcentagem) dos testes baseados nas estatísticas S_{RV} , S_{RV1}^* , S_{RV2}^* , S_{RV3}^* , $S_{RV_{Boot}}$ e $S_{RV_{Boot}}^*$ para testar a hipótese nula simples $H_0: \alpha = \alpha_0; \beta = \beta_0$. Para cada tamanho de amostra n = 15, 25, 40 e 60, foram construídas três tabelas, uma para cada um dos seguintes níveis nominais: 1%, 5% e 10%.

De maneira geral, observa-se que o teste da razão de verossimilhanças é um pouco liberal,

com taxas de rejeição maiores do que o nível nominal considerado. Por outro lado, os testes baseados nas estatísticas S_{RV1}^* , S_{RV2}^* , S_{RV3}^* e S_{RVBoot}^* , apresentaram um comportamento melhor, ou seja, em geral, apresentaram taxas de rejeição mais próximas dos níveis nominais fixados, mesmo para n=15. Esse resultado decorre do fato do fator da correção levar à uma redução da taxa de rejeição. Para todos os casos simulados, não é possível fazer distinção entre os desempenhos dos quatro testes corrigidos, ou seja, os testes se apresentam de forma competitiva. Por outro lado, para o nível nominal igual a 1% e $n \ge 25$ (ver Figura 4.1), o teste da razão de verossimilhanças bootstrap tem um comportamento semelhante ou pior do que o teste baseado na estatística S_{RV} .

De maneira geral, nota-se que à medida em que o tamanho da amostra cresce os testes melhoram, ou seja, as respectivas taxas de rejeição se aproximam mais do nível nominal considerado, como era esperado. Em alguns casos, principalmente quando o tamanho da amostra é grande, a taxa de rejeição do teste baseado na estatística S_{RV} é muito próxima do nível nominal sendo que, nesses casos, não necessita de correção.

Para facilitar a visualização desses resultados fizemos alguns gráficos que estão apresentados nas Figuras 4.1, 4.2 e 4.3. As figuras mostram, para cada um dos seis testes estudados, a taxa de rejeição associada a cada uma das 15 combinações dos valores (casos) de α e β , como aparecem nas Tabelas 4.1-4.12, de acordo com o nível nominal considerado e variando o tamanho da amostra, n=15, 25 e 40.

Tabela 4.1: Taxas de rejeição para n=15 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Níve	el nomi	nal igua	l a 1%	
α	β	$\overline{S_{RV}}$	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
-0.5	0,5	1,14	0,88	0,88	0,88	0,96	0,98
	5,0	1,46	1,08	1,08	1,08	1,38	1,16
	7,5	1,32	0,96	0,92	0,92	1,10	0,92
-1,5	0,5	1,22	0,90	0,90	0,90	1,14	1,00
	5,0	1,36	1,14	1,14	1,14	1,34	$1,\!22$
	7,5	1,40	0,98	0,96	0,96	1,22	0,98
3,0	0,5	1,14	0,94	0,94	0,92	1,10	0,92
	5,0	1,46	1,20	1,20	1,16	1,38	1,18
	7,5	1,40	1,04	1,04	1,00	1,26	1,10
5,0	0,5	1,08	0,84	0,84	0,84	0,90	0,84
	5,0	1,20	0,92	0,92	0,90	1,04	1,00
	7,5	1,18	0,94	0,90	0,88	1,10	0,98
9,0	0,5	1,18	0,86	0,86	0,86	1,10	0,84
	5,0	1,30	1,00	1,00	1,00	1,30	1,02
	7,5	1,18	0,92	0,92	0,90	1,16	0,92

Tabela 4.2: Taxas de rejeição para n=15 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			NI	1 :	1 :	1 507	
					nal igua		
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$ 5 3 2
0,5	0,5	$6,\!34$	5,26	5,22	5,18	5,58	$5,\!32$
	5,0	$6,\!22$	5,14	5,12	$5,\!06$	$5,\!38$	$5,\!16$
	7,5	6,02	4,74	4,74	4,72	4,98	$4,\!86$
1,5	0,5	5,90	4,92	4,90	4,84	4,94	4,84
	5,0	$5,\!82$	4,94	4,86	4,78	5,20	$5,\!04$
	7,5	$6,\!30$	$5,\!36$	$5,\!32$	5,28	$5,\!66$	$5,\!32$
3,0	0,5	6,08	5,02	5,02	4,98	5,22	5,10
	5,0	5,90	4,98	4,92	4,92	5,16	4,90
	7,5	5,98	5,12	5,10	5,06	5,26	$5,\!12$
5,0	0,5	5,76	4,62	4,58	4,56	4,80	4,60
	5,0	$5,\!44$	4,48	4,44	4,40	4,56	$4,\!42$
	7,5	$5,\!84$	4,92	4,86	$4,\!82$	5,14	$5,\!00$
-9,0	0,5	5,70	4,88	4,84	4,84	4,98	4,86
	5,0	$5,\!62$	4,78	4,78	4,72	4,90	4,70
	7,5	5,88	5,14	5,12	5,10	5,08	5,06

Tabela 4.3: Taxas de rejeição para n=15 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

					al igual	a 10%	
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
0,5	0,5	12,10	10,52	10,46	10,38	$10,\!62$	10,48
	5,0	$11,\!66$	10,24	10,20	10,20	10,10	10,22
	7,5	$10,\!66$	$9,\!20$	$9,\!12$	$9,\!10$	9,24	9,14
1,5	0,5	11,20	9,72	9,72	9,66	9,70	9,80
	5,0	$11,\!30$	$9,\!62$	$9,\!60$	$9,\!58$	$9,\!68$	9,60
	7,5	$12,\!26$	$10,\!66$	10,60	10,52	$10,\!38$	10,48
3,0	0,5	11,54	9,70	9,70	9,68	9,88	9,96
	5,0	11,06	$9,\!46$	$9,\!42$	$9,\!34$	9,48	9,58
	7,5	$11,\!52$	10,06	10,02	10,02	$10,\!30$	10,06
5,0	0,5	10,94	9,56	9,52	9,44	9,70	9,78
	5,0	10,92	$9,\!56$	$9,\!50$	$9,\!40$	9,74	9,48
	7,5	11,06	9,88	$9,\!86$	$9,\!84$	$9,\!86$	9,90
9,0	0,5	11,20	9,40	9,34	9,32	9,66	9,42
	5,0	$12,\!06$	10,22	10,10	10,02	10,28	$10,\!36$
	7,5	11,80	10,12	10,04	10,04	10,30	10,16

Tabela 4.4: Taxas de rejeição para n=25 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			3.77	1 .		1 107	
				el nomi			
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$ 1 1 2
5,0	0,5	$1,\!22$	0,98	0,98	0,98	1,26	$1,\!12$
	5,0	$1,\!22$	1,06	1,06	1,06	1,22	1,08
	7,5	$1,\!14$	0,92	0,92	0,92	1,08	$0,\!94$
1,5	0,5	1,38	1,22	1,22	1,20	1,54	1,26
	5,0	$1,\!16$	1,04	1,04	1,04	1,18	1,04
	7,5	1,06	$0,\!84$	$0,\!84$	$0,\!84$	1,04	0,88
3,0	0,5	1,08	0,96	0,96	0,96	1,14	1,00
	5,0	$1,\!26$	1,08	1,08	1,08	1,26	$1,\!14$
	7,5	1,30	0,98	0,98	0,98	1,28	0,98
-5,0	0,5	1,12	0,98	0,98	0,98	1,06	1,00
	5,0	0,98	$0,\!80$	$0,\!80$	$0,\!80$	0,96	0,88
	7,5	$1,\!22$	1,00	1,00	1,00	1,28	1,06
-9,0	0,5	1,42	1,20	1,20	1,20	1,32	1,18
	5,0	1,20	1,00	1,00	0,98	1,24	$1,\!02$
	7,5	1,12	0,90	0,90	0,88	1,12	0,88

Tabela 4.5: Taxas de rejeição para n=25 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Níve	el nomi	nal igua	l a 5%	
α	β	$\overline{S_{RV}}$	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$ 5.58
-5,0	0,5	6,28	$\frac{1771}{5,72}$	$\frac{7672}{5,72}$	5,68	$\frac{5,72}{5,72}$	5,58
	5,0	5,08	4,50	4,50	4,50	4,64	4,46
	7,5	5,50	5,00	4,98	4,98	5,20	5,02
-1,5	0,5	6,14	5,50	5,48	5,48	5,90	5,66
	5,0	6,14	$5,\!38$	$5,\!34$	$5,\!32$	$5,\!62$	$5,\!56$
	7,5	5,26	4,50	4,46	4,46	4,58	$4,\!62$
3,0	0,5	5,26	4,64	4,62	4,62	4,86	4,80
	5,0	5,58	5,06	5,06	5,04	$5,\!22$	$5,\!26$
	7,5	5,96	5,28	5,28	5,28	5,26	$5,\!12$
-5,0	0,5	5,10	4,58	4,56	4,54	4,80	4,66
	5,0	$5,\!36$	4,80	4,80	4,80	4,98	4,84
	7,5	5,24	4,58	4,58	4,58	4,80	$4,\!68$
-9,0	0,5	5,98	5,42	5,40	5,40	5,54	5,44
	5,0	5,82	5,20	5,20	5,20	$5,\!52$	5,36
	7,5	6,24	5,78	5,78	5,76	5,62	$5,\!64$

Tabela 4.6: Taxas de rejeição para n=25 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

						0.4	
					al igual	a 10%	
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S_{RV_{Boot}}^*$
5,0	0,5	11,12	$10,\!42$	10,38	10,36	10,44	10,36
	5,0	9,64	8,70	8,70	8,70	$8,\!92$	8,76
	7,5	$10,\!68$	9,76	9,74	9,72	10,06	9,78
-1,5	0,5	11,76	10,92	10,92	10,92	10,92	10,90
	5,0	10,98	$10,\!22$	$10,\!20$	$10,\!18$	10,46	10,54
	7,5	$10,\!32$	$9,\!42$	$9,\!42$	$9,\!38$	9,78	9,48
3,0	0,5	11,12	10,10	10,08	10,08	10,14	10,26
	5,0	10,78	$9,\!84$	$9,\!82$	9,80	$10,\!22$	9,94
	7,5	10,90	$9,\!96$	$9,\!92$	$9,\!92$	$10,\!22$	10,06
5,0	0,5	10,10	9,06	9,06	9,06	9,34	9,28
	5,0	10,90	$9,\!90$	$9,\!90$	$9,\!90$	10,26	9,92
	7,5	10,80	$10,\!10$	$10,\!10$	$10,\!10$	10,28	9,94
9,0	0,5	11,04	10,10	10,08	10,08	10,36	10,36
	5,0	$11,\!12$	$10,\!30$	$10,\!30$	$10,\!30$	$10,\!56$	$10,\!30$
	7,5	11,66	10,98	10,96	10,94	10,98	11,00

Tabela 4.7: Taxas de rejeição para n=40 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Níve	el nomi	nal igua	ıl a 1%	
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S_{RV_{Boot}}^*$
0,5	0,5	1,36	1,24	1,24	1,24	1,46	1,32
	5,0	$0,\!96$	0,78	0,78	0,76	0,98	$0,\!84$
	7,5	1,00	$0,\!96$	0,96	$0,\!96$	1,20	$0,\!86$
-1,5	0,5	1,18	1,06	1,06	1,06	1,44	1,14
	5,0	1,06	0,94	0,94	0,94	1,18	$0,\!96$
	7,5	1,02	0,90	0,90	$0,\!90$	1,04	$0,\!90$
3,0	0,5	1,06	0,98	0,98	0,98	1,22	1,04
	5,0	1,06	1,00	1,00	1,00	1,18	$1,\!04$
	7,5	$1,\!26$	1,18	1,18	1,18	$1,\!36$	$1,\!12$
-5,0	0,5	1,22	1,06	1,06	1,06	1,28	1,12
	5,0	1,36	1,20	1,20	1,20	1,48	1,16
	7,5	1,00	0,96	0,96	0,96	1,04	0,92
-9,0	0,5	1,00	0,96	0,96	0,96	1,06	0,92
	5,0	$1,\!22$	1,10	1,10	1,10	1,38	1,16
	7,5	1,00	0,96	0,96	0,96	1,16	0,96

Tabela 4.8: Taxas de rejeição para n=40 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Níve	el nomi	nal igua	ıl a 5%	
0.	\mathcal{Q}						C*
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
0,5	0,5	$6,\!24$	5,78	5,78	5,78	5,70	$5,\!80$
	5,0	$5,\!66$	5,06	5,06	5,04	$5,\!46$	$5,\!16$
	7,5	$5,\!56$	5,24	5,24	$5,\!22$	5,18	$5,\!24$
1,5	0,5	5,66	5,22	5,22	5,22	5,46	5,40
	$_{5,0}$	$5,\!14$	4,78	4,78	4,78	5,10	$5,\!02$
	7,5	$4,\!92$	4,50	4,50	4,50	$4,\!62$	$4,\!44$
3,0	0,5	4,96	4,68	4,68	4,64	4,86	4,74
	$_{5,0}$	$5,\!32$	$4,\!86$	$4,\!86$	$4,\!86$	5,18	4,72
	7,5	$5,\!48$	4,98	4,96	4,94	5,14	4,94
-5,0	0,5	5,70	5,24	5,24	5,24	5,64	5,36
	5,0	$5,\!56$	5,18	5,18	5,18	5,50	$5,\!22$
	7,5	$5,\!64$	5,26	5,26	5,24	5,16	$5,\!14$
9,0	0,5	4,68	4,34	4,34	4,34	4,66	4,54
	$_{5,0}$	$5,\!60$	5,28	5,28	5,28	$5,\!44$	$5,\!20$
	7,5	$5,\!20$	4,94	4,92	4,92	5,04	4,96

Tabela 4.9: Taxas de rejeição para n=40 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Nível	nomina	al igual	a 10%	
α	β	$\overline{S_{RV}}$	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
0,5	0,5	11,18	10,70	10,70	10,70	10,64	10,70
	5,0	$10,\!66$	$10,\!22$	$10,\!22$	$10,\!22$	$10,\!36$	10,26
	7,5	$10,\!60$	$10,\!04$	$10,\!02$	$10,\!02$	10,14	10, 10
-1,5	0,5	10,68	10,12	10,12	10,10	10,42	10,00
	5,0	$10,\!40$	$9,\!86$	$9,\!84$	$9,\!84$	10,28	9,84
	7,5	$10,\!36$	$9,\!84$	$9,\!84$	$9,\!84$	$9,\!84$	$9,\!86$
3,0	0,5	10,26	9,74	9,74	9,74	9,62	9,56
	5,0	$10,\!32$	$9,\!80$	9,80	9,80	10,00	9,94
	7,5	10,80	$10,\!20$	$10,\!20$	$10,\!18$	$10,\!34$	10,20
5,0	0,5	11,18	10,60	10,58	10,58	10,92	10,74
	5,0	$10,\!52$	$10,\!06$	$10,\!04$	$10,\!04$	10,08	10,00
	7,5	10,80	$10,\!16$	$10,\!16$	$10,\!16$	$10,\!30$	10,18
-9,0	0,5	10,28	9,66	9,66	9,66	10,24	9,88
	5,0	$10,\!66$	$10,\!08$	10,08	10,06	10,28	10,26
	7,5	10,30	9,60	9,58	9,58	9,74	9,68

Tabela 4.10: Taxas de rejeição para n = 60 e $H_0: \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$.

			Níve	el nomi	nal igua	ıl a 1%	
α	β	$\overline{S_{RV}}$	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$ 1 16
0,5	0,5	1,32	1,28	1,28	1,28	1,52	1,16
	5,0	1,18	1,08	1,08	1,08	1,22	1,10
	7,5	1,16	1,10	1,10	1,10	$1,\!32$	1,08
-1,5	0,5	1,00	0,90	0,90	0,90	1,14	0,96
	5,0	1,10	1,02	1,02	1,02	1,18	1,06
	7,5	1,02	0,94	0,94	0,94	1,26	0,98
3,0	0,5	1,26	1,20	1,20	1,20	1,36	1,26
	5,0	0,92	0,76	0,76	0,76	1,16	$0,\!96$
	7,5	1,00	0,94	0,94	0,94	1,18	1,02
5,0	0,5	1,02	1,00	1,00	1,00	1,24	1,06
	5,0	1,40	1,26	1,26	1,26	1,42	$1,\!34$
	7,5	1,06	1,00	1,00	1,00	1,06	1,00
9,0	0,5	1,08	1,00	1,00	0,98	1,12	0,94
	5,0	1,24	1,18	1,18	1,18	1,24	1,20
	7,5	0,96	0,92	0,92	0,92	1,12	0,92

Tabela 4.11: Taxas de rejeição para n=60 e $H_0: \alpha=\alpha_0, \beta=\beta_0.$

			Níve	el nomi	nal igua	ıl a 5%	
α	β	S_{RV}	S_{RV1}^*	S^*_{RV2}	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
0,5	0,5	$5,\!48$	5,16	5,16	5,16	$5,\!34$	$5,\!22$
	5,0	$5,\!42$	5,04	5,04	5,04	$5,\!32$	$5,\!16$
	7,5	4,98	$4,\!82$	$4,\!82$	$4,\!80$	4,92	4,84
1,5	0,5	5,14	5,04	5,04	5,04	5,32	5,12
	5,0	$5,\!34$	5,00	5,00	$5,\!00$	5,14	$4,\!96$
	7,5	$5,\!28$	4,98	4,96	4,96	$5,\!32$	$5,\!16$
3,0	0,5	4,96	4,82	4,82	4,82	5,22	4,92
	5,0	$5,\!46$	5,20	5,20	5,20	5,48	$5,\!42$
	7,5	$5,\!28$	5,06	5,06	$5,\!06$	5,14	$5,\!02$
-5,0	0,5	5,14	4,84	4,84	4,84	5,00	4,84
	5,0	$5,\!24$	4,92	4,92	4,92	5,08	$5,\!14$
	7,5	$4,\!90$	4,80	4,78	4,78	5,04	$4,\!94$
9,0	0,5	5,56	5,30	5,30	5,30	5,60	5,50
	5,0	$6,\!00$	5,72	5,72	5,72	5,72	5,74
	7,5	5,36	5,06	5,06	5,06	5,10	5,02

Tabela 4.12: Taxas de rejeição para n = 60 e $H_0: \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$.

				nomina		a 10%	
α	β	$\overline{S_{RV}}$	S_{RV1}^*	S_{RV2}^*	S_{RV3}^*	$S_{RV_{Boot}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$
0,5	0,5	10,80	10,40	10,40	10,40	10,70	10,60
	5,0	$10,\!62$	$10,\!32$	10,32	10,32	10,44	$10,\!32$
	7,5	10,08	$9,\!52$	9,52	9,50	9,72	$9,\!58$
-1,5	0,5	10,86	10,46	10,44	10,44	10,36	10,40
	5,0	$10,\!10$	9,92	9,92	9,92	10,12	$9,\!94$
	7,5	$10,\!10$	$9,\!88$	9,88	9,86	9,98	9,88
3,0	0,5	10,56	10,22	10,22	10,18	10,36	$\overline{10,24}$
	5,0	$10,\!44$	10,08	10,08	10,08	10,24	$10,\!20$
	7,5	10,88	10,46	10,46	10,46	10,68	$10,\!62$
5,0	0,5	10,34	10,10	10,10	10,10	10,54	10,36
	5,0	$10,\!66$	$10,\!30$	$10,\!30$	$10,\!30$	10,16	$10,\!20$
	7,5	$10,\!58$	10,18	10,18	10,18	$10,\!30$	$10,\!12$
9,0	0,5	10,64	10,24	10,24	10,24	10,40	10,20
	5,0	10,78	$10,\!34$	10,34	10,34	10,52	$10,\!42$
	7,5	10,24	9,92	9,92	9,92	10,14	10,06

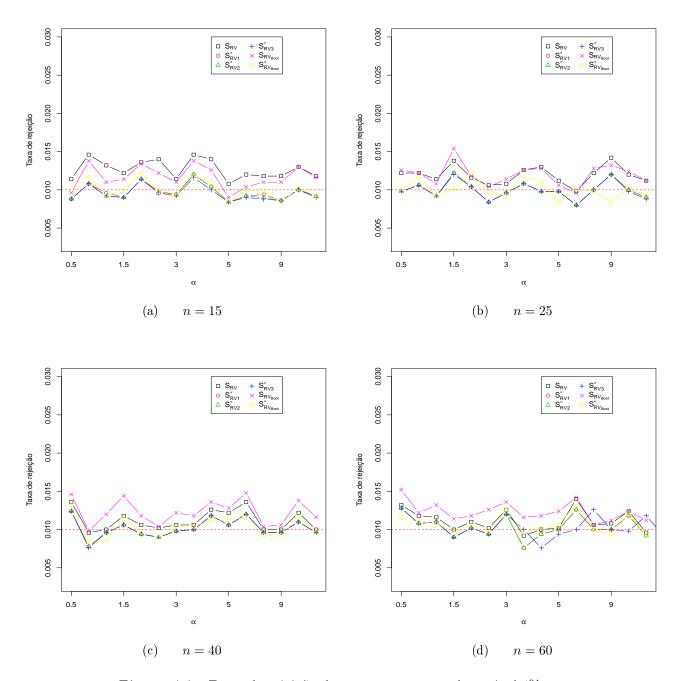


Figura 4.1: Taxas de rejeição dos testes para o nível nominal 1%

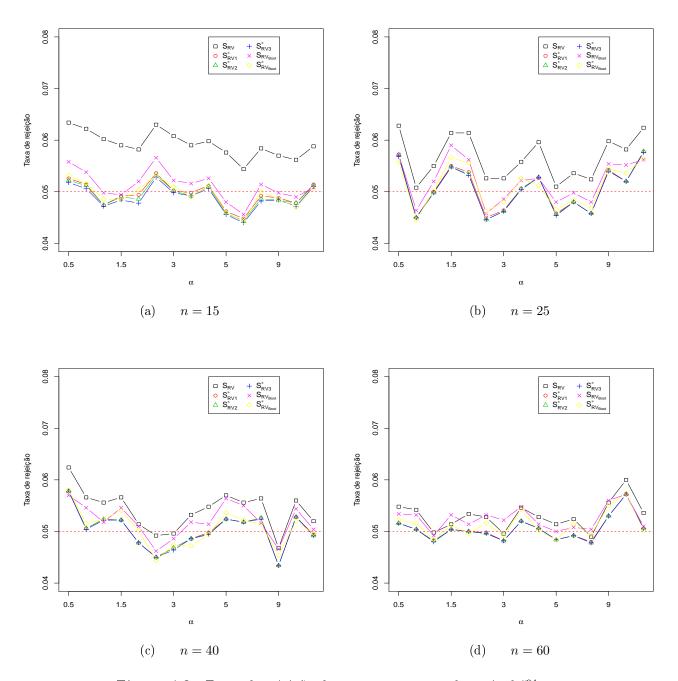


Figura 4.2: Taxas de rejeição dos testes para o nível nominal 5%

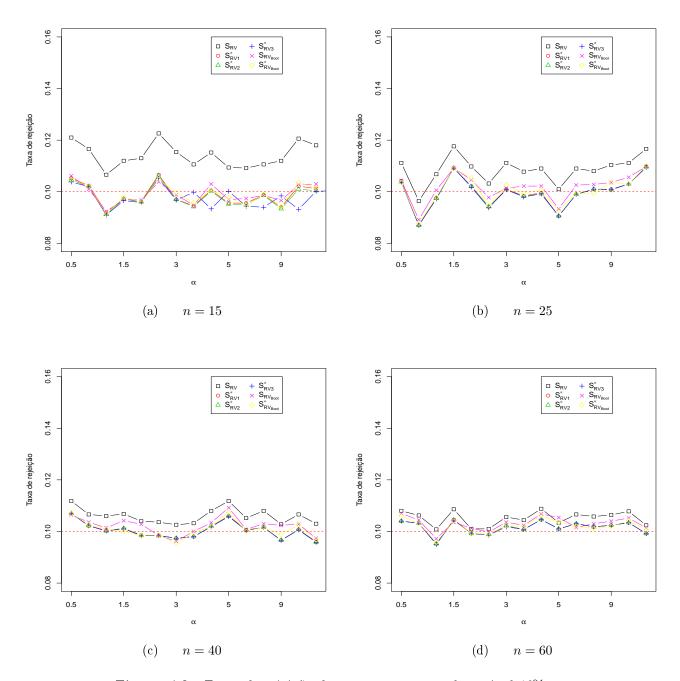


Figura 4.3: Taxas de rejeição dos testes para o nível nominal 10%

Capítulo 5

Modelo de regressão quantílica

5.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos a distribuição Kumaraswamy reparametrizada e o modelo de regressão quantílica Kumaraswamy.

Mitnik e Baek (2013) comentam que as expressões da esperança e variância de uma variável aleatória com distribuição Kumaraswamy não são tão simples, o que dificulta suas modelagens. Então, propõem duas reparametrizações baseadas na mediana com o objetivo de facilitar a construção de modelos de regressão.

Bayer et al. (2017) utilizaram uma das reparametrizações propostas por Mitnik e Baek (2013) e definiram um modelo denominado KARMA (Kumaraswamy autoregressive moving average). Bayes et al. (2017) propuseram uma outra reparametrização, com base nos quantis distribuição Kumaraswamy, definiram um modelo de regressão misto e utilizaram um enfoque bayesiano para a inferência nesse modelo. Adotando a reparametrização utilizada em Bayer et al. (2017), propomos um modelo de regressão quantílica Kumaraswamy e obtemos os estimadores corrigidos pelo viés com base nos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap paramétrico e a correção de Bartlett bootstrap para o teste da razão de verossimilhanças dos parâmetros do modelo.

5.2 Distribuição Kumaraswamy reparametrizada

A expressão da função quantílica na distribuição Kumaraswamy é simples e dada por

$$k = k(q) = F^{-1}(q) = [1 - (1 - q)^{1/\beta}]^{1/\alpha},$$
 (5.1)

em que q é uma probabilidade fixada de acordo com o quantil de interesse. Em particular, a mediana é obtida como $k(0,5)=[1-(0,5)^{1/\beta}]^{1/\alpha}$.

Com base em (5.1) e na reparametrização apresentada em Mitnik e Baek (2013) e utilizada por Bayer et al. (2017), definimos a função densidade e a função distribuição de uma variável aleatória Y com distribuição Kumaraswamy $(Y \sim Kum(k, \alpha, q))$, baseada no q-ésimo quantil k(q), respectivamente, como

$$f(y; k, \alpha) = \alpha \frac{\log(1 - q)}{\log(1 - k^{\alpha})} y^{\alpha - 1} (1 - y^{\alpha})^{\frac{\log(1 - q)}{\log(1 - k^{\alpha})} - 1}$$

 \mathbf{e}

$$F(y; k, \alpha) = 1 - (1 - y^{\alpha})^{\frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}},$$

com $y \in (0,1)$, sendo $k \in (0,1)$ um parâmetro de locação e $\alpha > 0$ um parâmetro de precisão.

Nessa parametrização, a esperança e a variância de Y são dadas por

$$E(Y) = \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} B\left(1 + \frac{1}{\alpha}; \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}\right),$$

е

$$Var(Y) = \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} B\left(1+\frac{2}{\alpha}; \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}\right) - \left[\frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} B\left(1+\frac{1}{\alpha}; \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}\right)\right]^{2}.$$

A função de verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (k, \alpha)^{\top}$ dada uma amostra \boldsymbol{y} é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \alpha \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} y_{i}^{\alpha-1} (1-y_{i}^{\alpha})^{\frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}-1} \right\}$$
$$= \left(\alpha \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} \right)^{n} \times \prod_{i=1}^{n} \left\{ y_{i}^{\alpha-1} (1-y_{i}^{\alpha})^{\frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})}-1} \right\}.$$

A função de log-verossimilhança para $\boldsymbol{\theta} = (k, \alpha)^{\top}$ dada uma amostra \boldsymbol{y} é dada por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = n \log \left(\alpha \frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} \right) + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^{n} \{\log(y_i)\}$$

$$+ \left(\frac{\log(1-q)}{\log(1-k^{\alpha})} - 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \{\log(1-y_i^{\alpha})\}.$$

5.3 Modelo de regressão

Considere $\boldsymbol{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)^{\top}$ uma amostra aleatória de tamanho n com $Y_i\sim Kum(k_i,\alpha,q)$, para $i=1,\ldots,n$. Seja $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)^{\top}$, a amostra observada. Considere também $\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\ldots,x_{i(p+1)})^{\top}$ o vetor de covariáveis associado à i-ésima observação e \boldsymbol{X} uma matriz $n\times(p+1)$ tal que $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n)^{\top}$.

As covariáveis são incluídas no modelo através do parâmetro relacionado ao quantil q, $k_i = k_i(q)$, por meio de uma função de ligação $g: R \to (0,1)$ monótona, contínua e duas vezes diferenciável tal que

$$\eta_i = g(k_i) = \boldsymbol{x_i}^{\top} \boldsymbol{\delta},$$

sendo δ um vetor de dimensão (p+1) de parâmetros de regressão correspondente à x_i . Podese escolher como função de ligação a logito, probito ou complemento log-log, por exemplo.

A função de verossimilhança para o vetor $\pmb{\theta}=(\alpha,\delta_1,\dots,\delta_{p+1})^{\top}$ é dada por

$$L(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = \prod_{i=1}^{n} \left\{ \alpha \frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})} y_i^{\alpha-1} \left(1 - y_i^{\alpha}\right)^{\frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})} - 1} \right\}$$
$$= (\alpha \log(1-q))^n \times \prod_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_i^{\alpha-1} \left(1 - y_i^{\alpha}\right)^{\frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})} - 1}}{\log(1 - k_i^{\alpha})} \right\},$$

e a função de log-verossimilhança por

$$\ell(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{y}) = n \log(\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \left\{ \log \left(\frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})} \right) + (\alpha-1) \log(y_i) \right\}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left\{ \left(\frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})} - 1 \right) \log(1-y_i^{\alpha}) \right\}.$$

O vetor escore é dado por

$$\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = (U_{\alpha}, U_{\delta_1}, \dots, U_{\delta_{p+1}})^{\top} = (\partial \ell / \partial \alpha, \partial \ell / \partial \delta_1, \dots, \partial \ell / \partial \delta_{p+1})^{\top},$$

com

$$\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{1}{\alpha} + \log(y_i) + \frac{k_i^{\alpha - 1} k_i \log k_i}{(1 - k_i^{\alpha}) \log(1 - k_i^{\alpha})} [d_i \log(1 - y_i^{\alpha}) + 1] \right\}$$
$$- \sum_{i=1}^{n} \left\{ (d_i - 1) \frac{y_i^{\alpha} \log(y_i)}{1 - y_i^{\alpha}} \right\}$$

 \mathbf{e}

$$\frac{\partial \ell}{\partial \delta_r} = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\alpha k_i^{\alpha - 1} [d_i \log(1 - y_i^{\alpha}) + 1]}{(1 - k_i^{\alpha}) \log(1 - k_i^{\alpha})} \frac{x_{ir}}{g'(k_i)} \right\},$$

em que $r = 1, ..., (p+1), d_i = \log(1-q)/\log(1-k_i^{\alpha})$ e $g'(k_i) = dg(k_i)/dk_i$.

Como o sistema de equações $\boldsymbol{U}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0}$ é não linear, os estimadores de máxima verossimilhança (EMV) $\hat{\alpha}$ e $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ de α e $\boldsymbol{\delta}$, respectivamente, devem ser obtidos por técnicas iterativas, tais como Newton-Raphson e BFGS.

A matriz de informação de Fisher é dada por

$$\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} k_{\alpha,\alpha} & k_{\alpha,\delta_{1}} & \dots & k_{\alpha,\delta_{r}} & \dots & k_{\alpha,\delta_{p+1}} \\ k_{\delta_{1},\alpha} & k_{\delta_{1},\delta_{1}} & \dots & k_{\delta_{1},\delta_{r}} & \dots & k_{\delta_{1},\delta_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{\delta_{r},\alpha} & k_{\delta_{r},\delta_{1}} & \dots & k_{\delta_{r},\delta_{r}} & \dots & k_{\delta_{r},\delta_{p+1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{\delta_{p+1},\alpha} & k_{\delta_{p+1},\delta_{1}} & \dots & k_{\delta_{p+1},\delta_{r}} & \dots & k_{\delta_{p+1},\delta_{p+1}} \end{bmatrix},$$

$$(5.2)$$

com

$$\kappa_{\alpha,\alpha} = \frac{n}{\alpha^2} + \sum_{i=1}^n \left\{ k_i^2 \lambda_{2i} \log(k_i)^2 + 2d_i k_i^2 \lambda_{1i} \log(k_i) \frac{[\psi(2) - \psi(d_i + 1)]}{\alpha(d_i - 1)} \right\} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i [\psi'(2) - \psi'(d_i) + (\psi(2) - \psi(d_i))^2]}{\alpha^2 (d_i - 2)},$$
(5.3)

$$\kappa_{\alpha,\delta_r} = \kappa_{\delta_r,\alpha} = \sum_{i=1}^n \alpha k_i \left\{ \log(k_i) \lambda_{2i} + d_i \lambda_{1i} \frac{[\psi(2) - \psi(d_i + 1)]}{\alpha(d_i - 1)} \right\} \frac{x_{ir}}{g'(k_i)}$$
(5.4)

e

$$k_{\delta_r,\delta_s} = \sum_{i=1}^n \alpha^2 \lambda_{2i} \frac{x_{ir} x_{is}}{(g'(k_i))^2},\tag{5.5}$$

em que $\{r,s\}=1,\ldots,(p+1),$ $\lambda_{1i}=k_i^{\alpha-2}/[(1-k_i^{\alpha})\log(1-k_i^{\alpha})],$ $\lambda_{2i}=k_i^{2\alpha-2}/[(1-k_i^{\alpha})^2(\log(1-k_i^{\alpha}))^2]$ e $g''(k_i)=d^2g(k_i)/dk_i^2$. Detalhes da obtenção dos elementos da matriz $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$ podem ser encontrados no Apêndice B.

Notemos que a matriz K_{θ} não é bloco diagonal. Isso indica que os parâmetros α e δ não são ortogonais e portanto seus estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\delta}$ não são assintoticamente independentes. Sob condições de regularidade usuais para os EMV, temos que $\hat{\theta} \sim N_{p+2}(\theta, K_{\theta}^{-1})$, sendo K_{θ}^{-1} a inversa da matriz de informação de Fisher.

5.4 Método Cox e Snell para redução de viés

De acordo com a Seção 2.2, o viés do EMV do a-ésimo componente do vetor $\boldsymbol{\theta}$ é definido por $E(\hat{\theta}_a - \theta_a)$ e em geral é de ordem $O(n^{-1})$. A partir de Cox e Snell (1968) temos

$$E(\hat{\theta}_a - \theta_a) = B_{\hat{\theta}_a}(\boldsymbol{\theta}) + O(n^{-2}),$$

em que o viés de $\hat{\theta}_a$, denotado por $B_{\hat{\theta}_a}(\boldsymbol{\theta})$, de ordem $O(n^{-1})$, é dado por (2.1).

O estimador não viesado até a ordem $O(n^{-1})$ definido por Cox e Snell (1968) pode ser obtido fazendo

$$ilde{m{ heta}} = \hat{m{ heta}} - m{B}_{\hat{m{ heta}}}(\hat{m{ heta}}),$$

em que $\boldsymbol{B}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}}(\hat{\boldsymbol{\theta}})$ é o viés de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ avaliado em $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. O viés do estimador $\tilde{\boldsymbol{\theta}}$ é de ordem $O(n^{-2})$.

A partir de (2.1), os vieses de segunda ordem de $\hat{\alpha}$ e $\hat{\delta}_r$ podem ser escritos, respectiva-

mente, como

$$B_{\hat{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}) = \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\alpha} \left[\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\alpha} \right] + \sum_{u} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\alpha\delta_{u}} \left[\kappa_{\alpha\alpha}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\alpha\delta_{u}} \right]$$

$$+ \sum_{t} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\delta_{t}\alpha} \left[\kappa_{\alpha\delta_{t}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\delta_{t}\alpha} \right] + \sum_{s} \kappa^{\alpha\delta_{s}} \kappa^{\alpha\alpha} \left[\kappa_{\delta_{s}\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\delta_{s}\alpha\alpha} \right]$$

$$+ \sum_{t,u} \kappa^{\alpha\alpha} \kappa^{\delta_{t}\delta_{u}} \left[\kappa_{\alpha\delta_{t}}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2} \kappa_{\alpha\delta_{t}\delta_{u}} \right] + \sum_{s,u} \kappa^{\alpha\delta_{s}} \kappa^{\alpha\delta_{u}} \left[\kappa_{\delta_{s}\alpha}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2} \kappa_{\delta_{s}\alpha\delta_{u}} \right]$$

$$+ \sum_{s,t} \kappa^{\alpha\delta_{s}} \kappa^{\delta_{t}\alpha} \left[\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2} \kappa_{\delta_{s}\delta_{t}\alpha} \right] + \sum_{s,t,u} \kappa^{\alpha\delta_{s}} \kappa^{\delta_{t}\delta_{u}} \left[\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2} \kappa_{\delta_{s}\delta_{t}\delta_{u}} \right]$$

$$(5.6)$$

e

$$B_{\hat{\delta}_{r}}(\boldsymbol{\theta}) = \kappa^{\delta_{r}\alpha}\kappa^{\alpha\alpha} \left[\kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\alpha}\right] + \sum_{u} \kappa^{\delta_{r}\alpha}\kappa^{\alpha\delta_{u}} \left[\kappa_{\alpha\alpha}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\alpha\delta_{u}}\right]$$

$$+ \sum_{t} \kappa^{\delta_{r}\alpha}\kappa^{\delta_{t}\alpha} \left[\kappa_{\alpha\delta_{t}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\delta_{t}\alpha}\right] + \sum_{s} \kappa^{\delta_{r}\delta_{s}}\kappa^{\alpha\alpha} \left[\kappa_{\delta_{s}\alpha}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\delta_{s}\alpha\alpha}\right]$$

$$+ \sum_{t,u} \kappa^{\delta_{r}\alpha}\kappa^{\delta_{t}\delta_{u}} \left[\kappa_{\alpha\delta_{t}}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2}\kappa_{\alpha\delta_{t}\delta_{u}}\right] + \sum_{s,u} \kappa^{\delta_{r}\delta_{s}}\kappa^{\alpha\delta_{u}} \left[\kappa_{\delta_{s}\alpha}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2}\kappa_{\delta_{s}\alpha\delta_{u}}\right]$$

$$+ \sum_{s,t} \kappa^{\delta_{r}\delta_{s}}\kappa^{\delta_{t}\alpha} \left[\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}}^{(\alpha)} - \frac{1}{2}\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}\alpha}\right] + \sum_{s,t} \kappa^{\delta_{r}\delta_{s}}\kappa^{\delta_{t}\delta_{u}} \left[\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}}^{(\delta_{u})} - \frac{1}{2}\kappa_{\delta_{s}\delta_{t}\alpha}\right], \quad (5.7)$$

em que $\{r, s, t, u\} = 1, \ldots, p+1, \kappa^{ab} = -\kappa^{a,b}$, sendo $\kappa^{a,b}$ um elemento da inversa da matriz de informação $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{\theta})$, e $\kappa^{(c)}_{ab}$ e κ_{abc} são dados no Apêndice B, com a, b, c denotando um elemento qualquer do vetor $\boldsymbol{\theta}$.

5.5 Estudos de simulação

Nesta seção apresentamos os resultados de dois estudos de simulação de Monte Carlo. No primeiro estudo, nosso objetivo foi avaliar o viés do EMV e dos estimadores corrigidos pelos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap. No segundo, nosso objetivo foi avaliar e comparar o desempenho do teste da razão de verossimilhanças e de sua versão corrigida pelo método de Bartlett bootstrap (ver Seção 4.4), baseados nas estatísticas S_{RV} e $S_{RV_{Boot}}^*$, respectivamente.

Consideramos o modelo de regressão quantílica Kumaraswamy $Y_i \sim Kum(k_i, \alpha, q)$ com

função de ligação logito, sendo

$$\eta_i = \log[(k_i)/(1-k_i)] = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \delta_3 x_{i3}; \ i = 1, \dots, n.$$

Assumimos que o parâmetro de precisão α é desconhecido e o mesmo para todas as observações. As covariáveis x_{i2} e x_{i3} foram geradas de uma distribuição U(0,1) e os parâmetros da regressão foram fixados em $\delta_1 = 1,0$, $\delta_2 = 0,5$, $\delta_3 = 0,5$, no primeiro estudo, e em $\delta_1 = 0,5$, $\delta_2 = 0$, $\delta_3 = 1,5$, no segundo estudo. O parâmetro de precisão foi fixado em $\alpha = 2$ e 4, no primeiro estudo, e em $\alpha = 0,5$ e 2, no segundo estudo. A amostra observada y_1, \ldots, y_n é gerada a partir de

$$y_i = \left(1 - u_i^{\frac{\log(1 - k_i^{\alpha})}{\log(1 - q)}}\right)^{1/\alpha},$$

em que o valor u_i é obtido de uma distribuição U(0,1). Adotamos n=15, 25, 40 e 60 e q=0,25; 0,50; 0,75 e 0,90. Para cada valor de n, α e q, os valores das covariáveis foram mantidos constantes em todas as R=5000 réplicas de Monte Carlo geradas. Adotamos B=500 réplicas bootstrap. Todas as simulações foram realizadas utilizando-se a linguagem de programação R (R Core Team , 2019). As estimativas de máxima verossimilhanças foram obtidas a partir da função optim, selecionando-se o método quase-Newton, BFGS.

No primeiro estudo, obtivemos os estimadores corrigidos pelos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap dos parâmetros δ_1 , δ_2 , δ_3 e α e calculamos seus vieses relativos e a raiz do erro quadrático médio a fim de compará-los com os dos EMV. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 5.1–5.8. Podemos observar que o viés, em módulo, de todos os estimadores (corrigidos ou não) diminui quando n aumenta, como esperado. Além disso, o EMV de α é, em geral, mais viesado do que os EMV dos demais parâmetros. Esse resultado também se verifica para os estimadores corrigidos por bootstrap e Cox e Snell (1968). Notamos também que, no geral, as estimativas corrigidas por bootstrap, para os parâmetros δ_1 , δ_2 , δ_3 e α são mais próximas do verdadeiro valor do parâmetro do que as estimativas de máxima verossimilhança. Já, as corrigidas pelo método de Cox e Snell (1968) apresentaram, em geral, os valores dos vieses relativos maiores do que as estimativas de máxima verossimilhança, principalmente para os parâmetros δ_1 e α , sendo que para q=0.50, esse resultado se verifica apenas para δ_1 . Em contrapartida, a raiz do erro quadrático médio, foi geralmente menor

para as estimativas corrigidas pelo método bootstrap, do que para as estimativas de máxima verossimilhança.

No segundo estudo, após obter as estimativas de máxima verossimilhanças irrestritas e restritas a hipótese nula $H_0: \delta_2 = 0$, obtivemos a taxa de rejeição dos testes baseados nas estatísticas S_{RV} e $S_{RV_{Boot}}^*$ (ver Tabelas 5.9–5.12) considerando os níveis nominais 1%, 5% e 10%. Observa-se um comportamento bastante liberal do teste da razão de verossimilhanças (S_{RV}) , em todos os níveis nominais, ou seja, a hipótese nula é rejeitada mais vezes do que deveria. É possível notar, no entanto, que à medida em que o tamanho da amostra cresce, as taxas de rejeição do teste baseado em S_{RV} tendem ao tamanho desejado (se aproximam mais dos níveis nominais considerados). Por outro lado, o teste corrigido por Bartlett bootstrap $(S_{RV_{Boot}}^*)$ apresenta um excelente comportamento, com taxas de rejeição sempre próximas do nível nominal considerado, mesmo em amostras pequenas. O quantil q e o parâmetro α parecem não ter influência sobre as taxas de rejeição.

Tabela 5.1: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=15 e $\alpha=2$

			EMV		ı	Cox-Sne	[]		bootstrap			
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\widetilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{\theta}$	vr	\sqrt{eqm}		
$0,\!25$	δ_1	1,211	0,211	1,577	-0,687	-1,687	2,524	1,029	0,029	1,483		
	δ_2	0,549	$0,\!099$	2,015	0,448	-0,104	2,155	0,433	-0,134	1,897		
	δ_3	$0,\!605$	$0,\!209$	2,076	0,589	$0,\!178$	2,488	0,587	0,174	1,924		
	α	3,802	$0,\!901$	$3,\!633$	-0,275	-1,138	69,108	0,736	-0,632	1,968		
0,50	δ_1	1,009	0,009	1,499	0,861	-0,139	1,331	0,999	-0,001	1,406		
	δ_2	$0,\!562$	$0,\!124$	1,955	0,439	-0,122	1,714	0,473	-0.053	1,832		
	δ_3	$0,\!552$	$0,\!103$	1,926	0,526	$0,\!051$	1,643	$0,\!529$	0,058	1,777		
	α	2,989	$0,\!494$	1,797	2,391	$0,\!196$	2,700	1,609	-0,196	$1,\!039$		
0,75	δ_1	0,914	-0,086	1,450	0,886	-0,114	1,353	1,008	0,008	1,394		
	δ_2	0,523	$0,\!045$	$1,\!897$	$0,\!399$	-0,202	1,783	$0,\!453$	-0,095	$1,\!825$		
	δ_3	0,534	$0,\!069$	1,881	0,520	0,039	1,656	$0,\!529$	0,058	1,781		
	α	2,719	$0,\!359$	1,256	2,985	$0,\!492$	1,604	1,764	-0,118	0,795		
0,90	δ_1	0,830	-0,170	1,416	0,671	-0,329	1,410	0,991	-0,009	1,384		
	δ_2	0,530	$0,\!060$	1,862	$0,\!390$	-0,220	1,891	0,471	-0.058	1,826		
	δ_3	0,519	$0,\!038$	1,838	0,496	-0,008	1,586	$0,\!525$	0,049	1,778		
	α	2,653	$0,\!327$	1,100	3,302	0,651	1,694	1,844	-0,078	0,701		

Tabela 5.2: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=25 e $\alpha=2$

			EMV		(Cox-Snel	[]		bootstra	\overline{p}
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$ ilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\dot{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}
$0,\!25$	δ_1	1,103	0,103	0,919	-0,281	-1,281	1,593	0,994	-0,006	0,896
	δ_2	0,525	$0,\!050$	1,091	0,502	0,004	1,048	0,504	$0,\!008$	1,071
	δ_3	$0,\!522$	$0,\!044$	$1,\!331$	$0,\!521$	0,042	1,242	0,526	$0,\!053$	1,292
	α	2,742	$0,\!371$	$1,\!597$	-1,365	-1,682	$3,\!491$	1,790	-0,105	1,031
0,50	δ_1	0,990	-0,010	0,924	0,873	-0,127	0,875	0,994	-0,006	0,894
	δ_2	0,513	$0,\!026$	1,229	0,489	-0.023	$1,\!159$	0,501	$0,\!003$	1,188
	δ_3	0,567	$0,\!134$	$1,\!179$	0,498	-0,004	$1,\!105$	0,525	$0,\!049$	1,141
	α	2,477	$0,\!239$	0,978	1,979	-0,011	0,785	1,932	-0,034	0,704
0,75	δ_1	0,943	-0,057	0,863	0,886	-0,114	0,817	0,989	-0,011	0,840
	δ_2	$0,\!532$	$0,\!065$	1,099	0,502	0,004	1,046	0,512	$0,\!024$	1,072
	δ_3	0,502	$0,\!004$	$1,\!330$	0,494	-0.012	1,237	0,501	$0,\!002$	1,287
	α	$2,\!363$	$0,\!181$	0,736	2,469	0,235	$0,\!824$	1,944	-0,028	$0,\!553$
0,90	δ_1	0,923	-0,077	0,839	0,772	-0,228	0,805	1,007	0,007	0,825
	δ_2	0,527	$0,\!053$	1,054	0,494	-0.013	1,008	0,512	$0,\!024$	1,039
	δ_3	0,467	-0,066	$1,\!309$	$0,\!453$	-0,094	1,194	0,474	-0,052	1,279
	α	2,327	$0,\!164$	0,646	2,679	0,340	0,918	1,959	-0,021	0,489

Tabela 5.3: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=40 e $\alpha=2$

			DMM			C C 1	1		1 1 1	
			EMV			Cox-Snel	l I		bootstrap	<u> </u>
q	θ	θ	vr	\sqrt{eqm}	θ	vr	\sqrt{eqm}	θ	vr	\sqrt{eqm}
$0,\!25$	δ_1	1,055	$0,\!055$	$0,\!636$	0,137	-0,863	1,085	0,994	-0,006	0,631
	δ_2	0,502	$0,\!004$	0,984	0,500	0,001	0,977	0,499	-0,003	0,978
	δ_3	0,507	$0,\!013$	0,789	0,497	-0,007	0,772	0,502	$0,\!005$	0,784
	α	$2,\!373$	$0,\!186$	$0,\!926$	-0,029	-1,015	$2,\!057$	1,915	-0,042	0,716
0,50	δ_1	1,013	0,013	0,654	0,920	-0,080	0,629	1,006	0,006	0,636
	δ_2	0,487	-0,026	$0,\!946$	0,480	-0,039	$0,\!905$	0,488	-0,024	0,921
	δ_3	0,511	$0,\!022$	$0,\!904$	0,484	-0.031	$0,\!863$	0,497	-0,006	$0,\!883$
	α	2,262	$0,\!131$	$0,\!629$	1,955	-0,022	$0,\!532$	1,977	-0,012	$0,\!514$
0,75	δ_1	0,976	-0,024	0,661	0,940	-0,060	0,633	1,006	0,006	0,647
	δ_2	0,487	-0,027	$0,\!835$	0,482	-0.035	$0,\!807$	0,489	-0,021	$0,\!821$
	δ_3	0,511	$0,\!022$	0,954	0,487	-0.026	0,912	0,498	-0,003	0,935
	α	2,215	$0,\!108$	$0,\!504$	2,275	$0,\!137$	$0,\!542$	1,990	-0,005	$0,\!419$
0,90	δ_1	0,930	-0,070	0,741	0,842	-0,158	0,720	0,996	-0,004	0,728
	δ_2	0,504	$0,\!007$	$0,\!863$	0,484	-0,033	$0,\!843$	0,494	-0,013	$0,\!855$
	δ_3	0,529	$0,\!058$	$1,\!001$	0,494	-0,013	0,945	0,514	$0,\!028$	0,988
	α	2,196	0,098	$0,\!451$	2,411	0,205	0,597	1,993	-0,004	0,377

Tabela 5.4: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=60 e $\alpha=2$

			EMV			Cox-Sne	11		bootstra	\overline{p}
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\widetilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{\theta}$	vr	\sqrt{eqm}
0,25	δ_1	1,038	0,038	0,579	0,398	-0,602	0,840	1,000	-0,000	0,579
	δ_2	$0,\!503$	0,007	0,689	0,497	-0,005	0,688	0,497	-0,006	$0,\!692$
	δ_3	$0,\!508$	0,016	0,720	0,506	0,012	0,712	0,511	$0,\!022$	0,721
	α	$2,\!251$	$0,\!126$	0,689	$0,\!651$	-0,674	1,383	1,969	-0,015	0,575
0,50	δ_1	0,995	-0,005	0,492	0,934	-0,066	0,485	0,998	-0,002	0,487
	δ_2	$0,\!508$	0,016	0,704	0,500	0,000	$0,\!688$	0,505	$0,\!010$	$0,\!695$
	δ_3	$0,\!512$	$0,\!024$	$0,\!665$	0,491	-0.019	0,648	0,497	-0,005	$0,\!658$
	α	2,167	0,084	$0,\!465$	1,963	-0,019	0,409	1,991	-0,004	0,405
0,75	δ_1	0,976	-0,024	0,547	0,952	-0,048	0,538	1,000	0,000	0,544
	δ_2	$0,\!508$	0,017	0,702	0,495	-0.010	0,691	0,500	-0,001	$0,\!697$
	δ_3	$0,\!506$	0,011	0,722	0,497	-0,006	0,704	0,504	$0,\!007$	0,716
	α	$2,\!131$	0,066	$0,\!381$	2,173	0,086	$0,\!401$	1,990	-0,005	$0,\!338$
0,90	δ_1	0,963	-0,037	0,548	0,896	-0,104	0,543	1,003	0,003	0,546
	δ_2	$0,\!502$	0,004	0,688	0,490	-0,021	0,679	0,495	-0,010	$0,\!685$
	δ_3	$0,\!500$	-0,001	0,721	$0,\!486$	-0.027	0,697	0,500	0,000	0,718
	α	2,114	0,057	0,333	2,255	0,128	0,414	1,988	-0,006	0,299

Tabela 5.5: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=15 e $\alpha=4$

			EMV		(Cox-Sne	[]		bootstra	p
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$ ilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{\theta}$	vr	\sqrt{eqm}
$0,\!25$	δ_1	1,108	0,108	1,082	0,225	-0,775	1,333	1,020	0,020	1,001
	δ_2	0,588	$0,\!175$	1,544	$0,\!399$	-0,202	1,301	0,482	-0,035	$1,\!390$
	δ_3	0,528	$0,\!057$	1,301	0,441	-0,118	1,034	$0,\!480$	-0.040	1,171
	α	6,270	$0,\!568$	4,165	-0,214	-1,053	11,232	3,010	-0,247	$2,\!356$
0,50	δ_1	0,989	-0,011	1,022	1,032	0,032	0,855	1,009	0,009	0,965
	δ_2	0,551	$0,\!103$	1,526	0,417	-0,166	1,261	0,473	-0,054	$1,\!423$
	δ_3	0,547	$0,\!094$	1,283	0,493	-0,014	1,076	0,515	0,029	$1,\!194$
	α	5,546	$0,\!386$	$2,\!656$	5,180	$0,\!295$	3,647	3,568	-0,108	$1,\!630$
0,75	δ_1	0,898	-0,102	0,989	0,953	-0,047	0,891	0,985	-0,015	0,954
	δ_2	0,557	$0,\!115$	1,444	0,439	-0,122	1,307	0,495	-0,010	$1,\!386$
	δ_3	$0,\!536$	$0,\!072$	1,231	0,503	$0,\!006$	1,086	0,523	0,045	1,179
	α	5,236	$0,\!309$	2,114	5,915	$0,\!479$	2,988	$3,\!672$	-0,082	$1,\!365$
0,90	δ_1	0,834	-0,166	0,997	0,771	-0,229	1,004	0,962	-0,038	0,975
	δ_2	0,565	$0,\!130$	1,425	0,443	-0,113	1,480	0,515	0,030	$1,\!398$
	δ_3	0,529	$0,\!058$	1,182	0,497	-0,006	1,068	$0,\!528$	$0,\!056$	$1,\!157$
	α	5,152	0,288	1,941	6,447	0,612	3,181	3,746	-0,063	1,259

Tabela 5.6: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=25 e $\alpha=4$

			EMV			Cox-Sne	11		bootstrap	p
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$ ilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}
$0,\!25$	δ_1	1,069	0,069	0,593	0,382	-0,618	0,855	1,009	0,009	0,575
	δ_2	0,527	$0,\!054$	0,728	$0,\!468$	-0,064	$0,\!640$	0,510	$0,\!021$	0,703
	δ_3	0,497	-0,006	0,981	$0,\!422$	-0,157	0,847	0,467	-0,066	0,938
	α	4,996	$0,\!249$	2,095	$0,\!462$	-0,884	3,880	3,789	-0,053	$1,\!498$
0,50	δ_1	1,005	0,005	0,527	0,987	-0,013	0,485	1,006	0,006	0,513
	δ_2	0,510	$0,\!020$	0,719	$0,\!476$	-0.047	$0,\!665$	0,499	-0,003	0,700
	δ_3	0,518	$0,\!036$	0,961	$0,\!470$	-0,060	0,881	0,493	-0,015	0,927
	α	4,774	$0,\!193$	1,507	$4,\!259$	0,065	1,410	3,921	-0,020	1,111
0,75	δ_1	0,957	-0,043	0,527	0,962	-0,038	0,495	0,998	-0,002	0,518
	δ_2	0,503	$0,\!006$	0,723	$0,\!480$	-0.041	$0,\!685$	0,498	-0,005	0,712
	δ_3	$0,\!526$	$0,\!052$	$0,\!954$	$0,\!485$	-0,029	$0,\!891$	0,508	$0,\!016$	0,933
	α	4,631	$0,\!158$	1,283	$4,\!892$	0,223	1,527	3,916	-0,021	$0,\!986$
0,90	δ_1	0,931	-0,069	0,519	0,862	-0,138	0,496	0,998	-0,002	0,514
	δ_2	0,495	-0,011	0,703	$0,\!472$	-0,056	$0,\!670$	0,495	-0,010	0,701
	δ_3	0,515	$0,\!031$	0,939	$0,\!467$	-0,066	$0,\!867$	0,502	$0,\!004$	0,929
	α	4,597	0,149	1,165	5,263	0,316	1,706	3,941	-0,015	0,888

Tabela 5.7: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=40 e $\alpha=4$

			EMV				Cox-Sne	11		bootstra	
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}		$\tilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{\theta}$	vr	\sqrt{eqm}
$0,\!25$	δ_1	1,039	0,039	0,429	0,5	76	-0,424	0,598	1,000	-0,000	0,422
	δ_2	0,516	$0,\!032$	0,586	0,4	86	-0,029	0,542	0,513	$0,\!025$	$0,\!574$
	δ_3	0,503	$0,\!005$	0,561	0,4	64	-0,072	0,518	0,492	-0,016	$0,\!550$
	α	4,585	$0,\!146$	1,403	1,7	62	-0,559	2,434	3,960	-0,010	$1,\!133$
0,50	δ_1	1,000	-0,000	0,389	0,9	76	-0,024	0,373	0,996	-0,004	0,384
	δ_2	0,509	$0,\!018$	0,568	0,4	93	-0,014	0,540	0,507	$0,\!015$	$0,\!558$
	δ_3	0,510	$0,\!021$	$0,\!553$	0,4	87	-0,025	0,527	0,502	$0,\!004$	$0,\!544$
	α	4,424	$0,\!106$	1,035	4,0	65	0,016	0,955	3,970	-0,007	$0,\!868$
0,75	δ_1	0,974	-0,026	0,380	0,9	70	-0,030	0,367	0,995	-0,005	0,376
	δ_2	0,502	$0,\!003$	$0,\!572$	0,4	92	-0,015	0,553	0,504	0,008	$0,\!567$
	δ_3	0,515	0,030	$0,\!553$	0,4	96	-0,007	0,532	0,510	$0,\!020$	$0,\!548$
	α	$4,\!365$	$0,\!091$	$0,\!865$	4,4	99	$0,\!125$	0,963	3,976	-0,006	0,729
0,90	δ_1	0,953	-0,047	0,389	0,9	03	-0,097	0,383	0,991	-0,009	0,387
	δ_2	0,501	$0,\!002$	0,580	0,4	92	-0,016	0,561	0,506	$0,\!012$	$0,\!577$
	δ_3	0,502	$0,\!003$	$0,\!552$	0,4	79	-0,042	0,527	0,500	-0,001	$0,\!551$
	α	4,369	0,092	0,815	4,7	58	0,189	1,092	4,005	0,001	0,678

Tabela 5.8: Estimativa, viés relativo (vr) e raíz do erro quadrático médio (\sqrt{eqm}) para n=60 e $\alpha=4$

			EMV			Cox-Sne	11		bootstrap	<u> </u>
q	θ	$\hat{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$ ilde{ heta}$	vr	\sqrt{eqm}	$\ddot{\theta}$	vr	\sqrt{eqm}
0,25	δ_1	1,020	0,020	0,364	0,699	-0,301	0,464	0,998	-0,002	0,360
	δ_2	$0,\!513$	$0,\!025$	0,496	0,485	-0,030	$0,\!466$	0,503	$0,\!007$	$0,\!489$
	δ_3	$0,\!510$	$0,\!020$	$0,\!454$	0,481	-0,037	$0,\!431$	0,501	$0,\!002$	0,449
	α	$4,\!376$	0,094	1,215	2,482	-0,379	1,833	3,988	-0,003	1,088
0,50	δ_1	1,001	0,001	0,336	0,987	-0,013	0,325	1,003	0,003	0,332
	δ_2	$0,\!499$	-0,002	0,497	0,481	-0,039	$0,\!481$	0,491	-0,018	0,491
	δ_3	$0,\!514$	$0,\!027$	$0,\!450$	0,496	-0,009	$0,\!436$	0,506	$0,\!012$	0,446
	α	$4,\!264$	0,066	0,751	4,015	0,004	0,700	3,979	-0,005	$0,\!665$
0,75	δ_1	0,990	-0,010	0,326	0,991	-0,009	0,318	1,009	0,009	0,324
	δ_2	$0,\!494$	-0,012	0,484	$0,\!480$	-0,039	0,473	0,488	-0,023	$0,\!480$
	δ_3	$0,\!502$	0,004	0,461	0,488	-0.024	$0,\!450$	0,497	-0,007	$0,\!458$
	α	$4,\!235$	$0,\!059$	0,648	4,319	0,080	$0,\!699$	3,990	-0,003	$0,\!575$
0,90	δ_1	0,970	-0,030	0,325	0,939	-0,061	0,319	1,000	0,000	0,323
	δ_2	$0,\!506$	0,012	0,486	0,493	-0.015	0,474	0,502	$0,\!004$	$0,\!483$
	δ_3	$0,\!502$	0,003	$0,\!452$	0,484	-0,031	$0,\!438$	0,498	-0,003	$0,\!451$
	α	4,222	$0,\!055$	0,599	4,475	0,119	0,753	3,994	-0,002	0,532

Tabela 5.9: Taxas de rejeição para n=15 e $H_0:\delta_2=0$

			Nível nominal									
			1%	Ę	5%	10%						
q	α	$\overline{S_{RV}}$	$S_{RV_{Boot}}^*$	S_{RV}	$S_{RV_{Boot}}^*$	S_{RV}	$S_{RV_{Boot}}^*$					
$0,\!25$	0,5	3,00	0,99	9,28	5,02	15,96	$9,\!36$					
	2,0	$3,\!36$	0,87	$10,\!33$	5,09	17,34	10,03					
0,50	0,5	3,06	1,16	9,99	5,11	16,48	9,81					
	2,0	3,28	1,18	$10,\!44$	5,01	17,07	9,93					
0,75	0,5	2,82	0,91	10,26	4,70	17,45	10,30					
	2,0	3,26	$1,\!03$	$11,\!05$	5,19	18,14	10,80					
0,90	0,5	3,08	0,81	10,10	5,19	16,96	10,08					
	2,0	$3,\!45$	1,08	$10,\!53$	5,11	18,01	$10,\!37$					

Tabela 5.10: Taxas de rejeição para n=25 e $H_0:\delta_2=0$

			Nível nominal								
			1%		5%	10%					
q	α	$\overline{S_{RV}}$	$S_{RV_{Boot}}^*$	S_{RV}	$S_{RV_{Boot}}^*$	S_{RV}	$S^*_{RV_{Boot}}$				
0,25	0,5	1,80	1,19	7,44	$5,\!59$	13,15	10,59				
	2,0	$2,\!05$	0,88	8,21	$5,\!52$	$14,\!30$	10,73				
0,50	0,5	2,38	1,33	8,05	5,71	14,94	10,78				
	2,0	$2,\!30$	1,11	8,11	$5,\!21$	14,72	$10,\!34$				
0,75	0,5	2,07	0,99	7,99	5,34	13,96	10,16				
	2,0	1,81	0,80	7,70	$4,\!56$	$14,\!39$	$9,\!92$				
0,90	0,5	2,20	1,09	8,34	5,26	15,89	11,35				
	2,0	2,30	1,03	8,64	5,77	14,99	10,65				

Tabela 5.11: Taxas de rejeição para n=40 e $H_0:\delta_2=0$

			Nível nominal								
			1%		5%	10%					
q	α	$\overline{S_{RV}}$	$S^*_{RV_{Boot}}$	S_{RV}	$S^*_{RV_{Boot}}$	S_{RV}	$S_{RV_{Boot}}^*$				
$0,\!25$	0,5	1,23	0,96	5,16	$4,\!63$	10,96	9,93				
	2,0	1,50	1,00	6,75	$5,\!37$	$12,\!88$	10,76				
0,50	0,5	1,56	0,94	6,75	5,58	12,76	10,73				
	2,0	1,97	1,09	7,02	$5,\!33$	$12,\!86$	$10,\!63$				
0,75	0,5	1,78	1,09	7,14	5,44	12,91	10,75				
	2,0	1,42	0,90	6,44	$4,\!80$	$12,\!21$	9,87				
0,90	0,5	1,97	1,29	7,51	5,97	13,71	11,35				
	2,0	1,78	1,03	7,08	5,11	12,74	10,01				

Tabela 5.12: Taxas de rejeição para n=60 e $H_0:\delta_2=0$

			Nível nominal								
			1%		5%	10%					
q	α	S_{RV}	$S_{RV_{Boot}}^*$	S_{RV}	$S^*_{RV_{Boot}}$	S_{RV}	$S^*_{RV_{Boot}}$				
0,25	0,5	$0,\!95$	0,93	5,44	$5,\!52$	10,32	10,53				
	2,0	$1,\!30$	1,07	5,92	$4,\!99$	$11,\!51$	10,29				
0,50	0,5	1,26	0,91	5,47	4,74	11,12	9,67				
	2,0	$1,\!63$	$1,\!38$	6,48	$5,\!36$	11,98	10,19				
0,75	0,5	1,38	1,03	6,17	5,01	11,63	10,46				
	2,0	1,28	0,99	6,02	$5,\!01$	$12,\!11$	10,23				
0,90	0,5	1,40	0,99	6,39	5,26	11,28	9,80				
	2,0	1,61	1,36	6,81	$5,\!69$	$12,\!03$	10,17				

5.6 Aplicação

Para ilustrar os resultados obtidos nesta seção, consideramos os dados apresentados na Seção 2.5 e o modelo:

$$\eta_i = g(k_i) = \delta_1 + \delta_2 x_{i2} + \delta_3 x_{i3}.$$

A função de ligação utilizada foi a logito. Fixamos o valor de q em 0,5 (mediana). Para obter os valores iniciais dos parâmetros desconhecidos ajustamos o modelo utilizando a função betareg. As estimativas de máxima verossimilhanças e as corrigidas pelo viés pelos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap, juntamente com seus respectivos erros padrões estão apresentadas na Tabela 5.13. Por meio dessa tabela, é possível notar que as três estimativas de δ_2 e de δ_3 são muito próximas, o que não ocorre para os outros dois parâmetros. Pelos resultados observados no primeiro estudo de simulação, é preferível corrigir o viés dos EMV desses parâmetros por meio do método bootstrap.

Tabela 5.13: Estimativas (erros padrões).

Parâmetro	EMV	Cox-Snell	bootstrap
δ_1	-0.848 (0.182)	-0.715 (0.128)	-0.826 (0.195)
δ_2	-0.009 (0.002)	-0.009 (0.002)	-0.010 (0.003)
δ_3	0.137 (0.028)	$0.132\ (0.020)$	0.139 (0.030)
α	$4.934 \ (0.632)$	7.367 (0.934)	$4.614 \ (0.594)$

Calculamos, com base no mesmo conjunto de dados, as estatísticas da razão de verossimilhanças e a corrigida pelo método de Bartlett bootstrap para testar $H_0: \delta_2 = 0$. Os valores obtidos foram: $S_{RV} = 13,92$ e $S_{RV_{Boot}}^* = 12,38$. Rejeitamos a hipótese nula a um nível de significância de 5% para os dois testes.

Capítulo 6

Considerações finais e pesquisas futuras

Nos últimos anos, a distribuição Kumaraswamy vem ganhando considerável atenção. Além de ser flexível, assim como a distribuição Beta, possui a vantagem de ter uma expressão simples e fechada para a função de distribuição, o que a torna mais vantajosa computacionalmente. Consideramos neste trabalho, alguns aspectos assintóticos julgados importantes para a inferência estatística.

Um dos aspectos que tratamos nesta tese foi a correção do viés para os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros que indexam a distribuição Kumaraswamy. Replicamos as correções já estudadas em Lemonte (2011), a saber, a correção analítica de Cox e Snell (1968), a correção preventiva de Firth (1993) e a correção bootstrap (Efron , 1979). Como contribuição, acrescentamos a correção do viés mediano com base no método recentemente apresentado em Pagui et al. (2017). Os resultados de um estudo de simulação de Monte Carlo mostraram que os estimadores corrigidos pelo viés, por qualquer um dos métodos, têm comportamento superior ao do estimador de máxima verossimilhança, em amostras finitas. Além disso, o estimador corrigido pelo método do viés mediano obteve, em geral, o melhor desempenho, quando se avalia a probabilidade estimada de subestimação. Isso demonstra a importância de se considerar estimadores corrigidos para o modelo Kumaraswamy.

No que diz respeito ao coeficiente de assimetria de ordem $O(n^{-1/2})$ da distribuição dos EMVs dos parâmetros da distribuição Kumaraswamy, também estudado neste trabalho, obtivemos expressões analíticas simples e de fácil implementação. Realizamos, também,

um estudo de simulação no qual os coeficientes de assimetria obtidos demonstraram, em geral, um bom comportamento, ficando próximo do valor amostral. Apesar de, em amostras pequenas, o coeficiente de assimetria da distribuição de $\hat{\beta}$ não ficar tão próximo quanto o esperado do valor amostral, percebe-se que à medida em que o tamanho da amostra cresce essa diferença diminui. Este comportamento também foi notado para o coeficiente de assimetria da distribuição de $\hat{\alpha}$. Pelos gráficos das densidades estimadas, plotados para os estimadores $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$, observamos que, à medida em que o n cresce, as distribuições desses estimadores ficaram mais próximas da distribuição normal.

Propusemos correções de Bartlett e de Bartlett bootstrap para o teste da razão de verosimilhanças, assim com o teste da razão de verossimilhanças bootstrap, sobre os parâmetros da distribuição $Kum(\alpha, \beta)$. Calculamos os cumulantes necessários para a obtenção do fator de correção de Bartlett e realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar os desempenhos dos testes estudados, considerando a hipótese nula $H_0: \alpha = \alpha_0, \beta = \beta_0$. Os resultados demonstraram que os testes corrigidos têm melhor desempenho e nenhuma das correções se destaca substancialmente das demais.

Por fim, propusemos o modelo de regressão quantílica Kumaraswamy em que é possível especificar um valor qualquer para o quantil q. Derivamos expressões para a função de logverossimilhança, função escore e matriz de informação de Fisher. Realizamos um estudo de simulação de Monte Carlo para avaliar os estimadores dos parâmetros do modelo corrigidos pelos métodos de Cox e Snell (1968) e bootstrap, fixando diferentes valores de q. Foi possível observar que, em geral, as estimativas de máxima verossimilhança já se encontram próximas dos verdadeiros valores especificados para os parâmetros. Os resultados mostraram, também, o bom desempenho dos estimadores corrigidos pelo método bootstrap quando comparado ao de Cox e Snell (1968). Também avaliamos, por meio de simulação, a correção de Bartlett bootstrap para a estatística da razão de verossimilhanças. Os resultados mostraram que o teste da razão de verossimilhanças tem um comportamento bastante liberal e que, por outro lado, o teste corrigido apresentou desempenho consideravelmente melhor, com taxas de rejeição próximas dos níveis nominais fixados, mesmo em amostras pequenas.

Em estudos futuros, podemos avaliar o poder do teste da razão de verossimilhanças e das versões corrigidas, considerando a distribuição Kumaraswamy. Podemos ainda obter, no

modelo de regressão quantílica Kumaraswamy, estimadores corrigidos pelo viés, por meio dos métodos de Firth (1993) e Pagui et al. (2017), apresentados no Capítulo 2, o coeficiente de assimetria de ordem $n^{-1/2}$ da distribuição dos estimadores de máxima verossimilhança e o fator de correção de Bartlett para o teste da razão de verossimilhanças. Além disso, podemos realizar o estudo do poder para o teste da razão de verossimilhanças e a versão corrigida por Bartlett bootstrap e também um estudo de diagnóstico incluindo propostas de diferentes resíduos para avaliar o ajuste do modelo.

Apêndice A

Cumulantes e coeficientes de assimetria

A.1 Derivadas da função de log-verossimilhança da distribuição Kumaraswamy

Assumimos que a função $\ell = \ell(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y})$ é regular com respeito às derivadas em relação aos componentes de $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, \beta)^{\top}$ até a quarta ordem.

$$\begin{split} &\frac{\partial \ell}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^{n} \log \left(y_{i} \right) - \left(\beta - 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})}{1 - y_{i}^{\alpha}} \\ &\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \log \left(1 - y_{i}^{\alpha} \right) \\ &\frac{\partial^{2} \ell}{\partial \alpha \partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} - \frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})}{1 - y_{i}^{\alpha}} \\ &\frac{\partial^{2} \ell}{\partial \alpha^{2}} = -\frac{n}{\alpha^{2}} - \left(\beta - 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})^{2}}{1 - y_{i}^{\alpha}} + \frac{\left(y_{i}^{\alpha} \right)^{2} \log(y_{i})^{2}}{\left(1 - y_{i}^{\alpha} \right)^{2}} \right\} \\ &\frac{\partial^{2} \ell}{\partial \beta^{2}} = -\frac{n}{\beta^{2}} \\ &\frac{\partial^{3} \ell}{\partial \alpha^{3}} = \frac{2n}{\alpha^{3}} - \left(\beta - 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})^{3}}{1 - y_{i}^{\alpha}} + \frac{3 \left(y_{i}^{\alpha} \right)^{2} \log(y_{i})^{3}}{\left(1 - y_{i}^{\alpha} \right)^{2}} + \frac{2 \left(y_{1}^{\alpha} \right)^{3} \log(y_{i})^{3}}{\left(1 - y_{i}^{\alpha} \right)^{3}} \right\} \\ &\frac{\partial^{3} \ell}{\partial \beta^{3}} = \frac{2n}{\beta^{3}} \\ &\frac{\partial^{3} \ell}{\partial \beta \partial \alpha^{2}} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ -\frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})^{2}}{1 - y_{i}^{\alpha}} - \frac{\left(y_{i}^{\alpha} \right)^{2} \log(y_{i})^{2}}{\left(1 - y_{i}^{\alpha} \right)^{2}} \right\} \\ &\frac{\partial^{3} \ell}{\partial \alpha \partial \beta^{2}} = 0 \\ &\frac{\partial^{4} \ell}{\partial \alpha^{4}} = -\frac{6n}{a^{4}} - \left(\beta - 1 \right) \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{y_{i}^{\alpha} \log(y_{i})^{4} \left[1 + 4y_{i}^{\alpha} + \left(y_{i}^{\alpha} \right)^{2} \right]}{\left(y_{i}^{\alpha} - 1 \right)^{4}} \right\} \\ &\frac{\partial^{4} \ell}{\partial \alpha^{3} \partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i}^{a} \log(y_{i})^{3} \left(1 + y_{i}^{a} \right)}{\left(- 1 + y_{i}^{a} \right)^{3}} \\ &\frac{\partial^{4} \ell}{\partial \alpha^{2} \partial \beta^{2}} = 0 \end{aligned}$$

A.2 Cumulantes para a distribuição Kumaraswamy

Para simplificar as expressões dos cumulantes definimos as seguintes quantidades:

$$\begin{split} \overline{A} &= \overline{A}(\beta) = 1 + \frac{\beta}{\beta-2} \{ [\psi(\beta) - \psi(2)]^2 - [\psi'(\beta) - \psi'(2)] \}, \\ \overline{B} &= \overline{B}(\beta) = -\frac{1}{\beta-1} [\psi(\beta+1) - \psi(2)], \\ \overline{C} &= \overline{C}(\beta) = \beta^2 \left[\psi'(\beta+1) + \overline{B} \right], \\ \overline{D} &= \overline{D}(\beta) = \beta^3 \overline{B} \left\{ 2\psi'(\beta) [\psi(\beta) - \psi(2)] - \psi''(\beta) \right\}, \\ \overline{E} &= \overline{E}(\beta) = \frac{\beta(\beta+1)}{2(\beta-2)} \{ [\psi(\beta) - \psi(1)]^3 + [\psi''(\beta) - \psi''(1)] - 3 \left[\psi'(\beta) - \psi'(1)\right] \left[\psi(\beta) - \psi(1)\right] \right\}, \\ \overline{F} &= \overline{F}(\beta) = \frac{\beta\beta}{\beta-2} [\psi(\beta) - \psi(1)], \\ \overline{G} &= \overline{G}(\beta) = \frac{3\beta(\beta+3)}{2(\beta-2)} \{ [\psi(\beta) - \psi(1)]^2 - [\psi'(\beta) - \psi'(1)] \}, \\ \overline{H} &= \overline{H}(\beta) = 2 \left[(\psi'(\beta))^2 + (\psi(\beta) - \psi(2)) \psi''(\beta) \right] - \psi'''(\beta), \\ \overline{I} &= \overline{I}(\beta) = \frac{\beta(\beta+1)^2}{2(\beta-2)} \{ 3(\beta+3) \left[\psi''(\beta) - 2\psi'(\beta) (\psi(\beta) - \psi(1)) \right] \}, \\ \overline{J} &= \overline{J}(\beta) = \frac{\beta(\beta+1)^2}{2(\beta-2)} \{ 3(\beta+3) \left[\psi''(\beta) - 2\psi'(\beta) (\psi(\beta) - \psi(1)) \right] \}, \\ \overline{L} &= \overline{L}(\beta) = \frac{\beta(\beta+1)}{2(\beta-2)} \{ -3(\psi(\beta) - \psi(1))^2 + 15\psi'(\beta) - 3\psi'(1) \}, \\ \overline{M}_1 &= \overline{M}_1(\beta) = \left[\psi(\beta-2) - \psi(2) \right]^4 + 4 \left[\psi(\beta-2) - \psi(2) \right] \left[\psi''(\beta-2) - \psi''(2) \right] - 3 \left[\psi'(\beta-2) - \psi''(2) \right] \left\{ - \left[\psi'(\beta-2) - \psi'(2) \right] + 2 \left[\psi(\beta-2) - \psi(2) \right]^2 \right\} - \left[\psi'''(\beta-2) - \psi'''(2) \right], \\ \overline{M}_2 &= \overline{M}_2(\beta) = \left[\psi(\beta-1) - \psi(3) \right]^4 + 4 \left[\psi(\beta-1) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta-1) - \psi''(3) \right], \\ \overline{M}_3 &= \overline{M}_3(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(4) \right]^4 + 4 \left[\psi(\beta) - \psi(4) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(4) \right], \\ \overline{N}_1 &= \overline{N}_1(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(4) \right]^4 + 4 \left[\psi(\beta) - \psi(4) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(4) \right], \\ \overline{N}_1 &= \overline{N}_1(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(4) \right], \\ \overline{N}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right] + \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right], \\ \overline{N}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right] + \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right], \\ \overline{m}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right] + \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right], \\ \overline{m}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right] + \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right], \\ \overline{m}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right] + \left[\psi''(\beta) - \psi''(3) \right], \\ \overline{m}_2 &= \overline{N}_2(\beta) = \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right]^3 - 3 \left[\psi(\beta) - \psi(3) \right] \left[\psi''(\beta) - \psi''(\beta) \right] = \frac{\psi''(\beta)}{2} + \frac{\psi$$

A partir daí podemos escrever os cumulantes como segue:

$$\begin{split} &\kappa_{\alpha\alpha}=-\frac{n}{\alpha^2}\overline{A},\ \kappa_{\alpha\beta}=-\frac{n}{\alpha}\overline{B},\ \kappa_{\beta\beta}=-\frac{n}{\beta^2},\\ &\kappa_{\beta\beta\beta}=\frac{2n}{\beta^3},\ \kappa_{\alpha\beta\beta}=0,\ \kappa_{\alpha\alpha\beta}=-\frac{n}{\alpha^2(\beta-1)}(\overline{A}-1),\ \kappa_{\alpha\alpha\alpha}=\frac{2n}{\alpha^3}\left[1+\frac{1}{\beta-3}(\overline{E}-\overline{G}+\overline{F})\right],\\ &\kappa_{\beta\beta}^{(\alpha)}=0,\ \kappa_{\beta\beta}^{(\beta)}=\frac{2n}{\beta^3},\ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha)}=\frac{2n}{\alpha^3}\overline{A},\ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta)}=\frac{n}{\alpha^2\beta(\beta-2)}\left[2(\overline{A}-1)-\frac{\overline{D}}{\beta\overline{B}}\right],\\ &\kappa_{\alpha\beta}^{(\alpha)}=\frac{n}{\alpha^2}\overline{B},\ \kappa_{\alpha\beta}^{(\beta)}=\frac{n\overline{C}}{\alpha\beta^2(\beta-1)},\\ &\kappa_{\alpha\alpha\alpha}^{(\alpha)}=\frac{-6n}{\alpha^4}\left[1+\frac{1}{\beta-3}(\overline{E}-\overline{G}+\overline{F})\right],\ \kappa_{\alpha\alpha\alpha}^{(\beta)}=-\frac{2n(\beta^2-6)(\overline{E}-\overline{G}+\overline{F})}{\alpha^3\beta(\beta-2)(\beta-3)^2}+\frac{2n(\overline{E}+\overline{I}+\overline{J}+\overline{L})}{\alpha^3(\beta-3)(\beta+1)},\\ &\kappa_{\alpha\alpha\beta}^{(\alpha)}=\frac{2n}{\alpha^3(\beta-1)}\left(\overline{A}-1\right),\ \kappa_{\alpha\alpha\beta}^{(\beta)}=\frac{n}{\alpha^2(\beta-1)^2(\beta-2)}\left[\frac{(\beta^2-2)(\overline{A}-1)}{\beta}-\frac{(\beta-1)\overline{D}}{\beta^2\overline{B}}\right], \end{split}$$

$$\begin{split} \kappa_{\beta\beta\alpha}^{(\alpha)} &= 0, \ \kappa_{\beta\beta\beta}^{(\alpha)} = 0, \ \kappa_{\beta\beta\alpha}^{(\beta)} = 0, \ \kappa_{\beta\beta\alpha}^{(\beta)} = -\frac{6n}{\beta^4}, \\ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha\alpha)} &= -\frac{6n}{\alpha^4}\overline{A}, \ \kappa_{\beta\alpha}^{(\alpha\alpha)} = -\frac{2n}{\alpha^3}\overline{B} \ \kappa_{\beta\beta}^{(\alpha\alpha)} = 0, \\ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\alpha\beta)} &= -\frac{2n}{\beta(\beta-2)\alpha^3}\left[2(\bar{A}-1)-\frac{\bar{D}}{\bar{\beta}\bar{B}}\right], \ \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta\alpha)} = -\frac{n\bar{C}}{\alpha^2\beta^2(\beta-1)}, \\ \kappa_{\alpha\alpha}^{(\beta\beta)} &= -\frac{4n\left[(\bar{A}-1)\beta^2\bar{B}-\bar{D}\right]}{\beta^3(\beta-2)^2\alpha^2\bar{B}} - \frac{n\beta\bar{B}}{(\beta-2)\alpha^2}, \\ \kappa_{\beta\beta}^{(\beta\alpha)} &= 0, \ \kappa_{\beta\beta}^{(\beta)} = -\frac{6n}{\beta^4}, \ \kappa_{\beta\alpha}^{(\beta\beta)} = \frac{-2n\bar{C}}{\alpha\beta^2(\beta-1)^2} + \frac{n\psi''(\beta+1)}{\alpha(\beta-1)}, \\ \kappa_{\alpha\alpha\alpha\alpha} &= -\frac{6n}{\alpha^4} - \frac{n\beta(\beta-1)}{\alpha^4} \left[\frac{\bar{M}_1}{(\beta-3)(\beta-4)} + \frac{8\bar{M}_2}{(\beta-2)(\beta-3)(\beta-4)} + \frac{6\bar{M}_3}{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)(\beta-4)}\right], \\ \kappa_{\beta\alpha\alpha\alpha} &= \frac{n\beta}{\alpha^3} \left[\frac{\bar{N}_1}{(\beta-2)(\beta-3)} + \frac{2\bar{N}_2}{(\beta-1)(\beta-2)(\beta-3)}\right], \\ \kappa_{\beta\beta\alpha\alpha} &= 0, \ \kappa_{\beta\beta\beta\alpha} &= 0, \ \kappa_{\beta\beta\beta\beta} = -\frac{6n}{\beta^4}, \ \kappa_{\alpha,\alpha,\alpha} &= \frac{4n}{\alpha^3} \left(1 + \frac{\bar{E}-\bar{G}+\bar{F}}{\beta-3}\right) - \frac{6n\bar{A}}{\alpha^3}, \\ \kappa_{\beta,\alpha,\alpha} &= -\frac{2n(A-1)}{\alpha^2(\beta-1)} - \frac{n}{\alpha^2(\beta-2)} \left[\frac{2(\bar{A}-1)}{\beta} - \frac{\bar{D}}{\beta^2\bar{B}}\right] - \frac{2n\bar{B}}{\alpha^2}, \ \kappa_{\beta,\beta,\alpha} &= -\frac{2n\bar{C}}{\alpha\beta^2(\beta-1)}, \\ \kappa_{\beta,\beta,\beta} &= -\frac{2n}{\beta^3}, \ \kappa_{\alpha\alpha,\alpha} &= -\frac{2n}{\alpha^3} \left(1 + \frac{\bar{E}-\bar{G}+\bar{F}}{\beta-3}\right) + \frac{2n\bar{A}}{\alpha^3}, \ \kappa_{\alpha\alpha,\beta} &= \frac{n(\bar{A}-1)}{\alpha^2(\beta-1)} + \frac{n}{\alpha^2(\beta-2)} \left[\frac{2(\bar{A}-1)}{\beta} - \frac{\bar{D}}{\beta^2\bar{B}}\right], \\ \kappa_{\alpha\beta,\alpha} &= \frac{n(\bar{A}-1)}{\alpha^2(\beta-1)} + \frac{n\bar{B}}{\alpha^2}, \ \kappa_{\alpha\beta,\beta} &= \frac{n\bar{C}}{\alpha\beta^2(\beta-1)}, \ \kappa_{\beta\beta,\alpha} &= 0, \ \kappa_{\beta\beta,\beta} &= 0. \end{cases}$$

A.3 Cumulantes para a distribuição Kumaraswamy

$$k_{\alpha,\alpha} = n\overline{A}/\alpha^2$$

 $k_{\alpha,\beta} = k_{\beta,\alpha} = n\overline{B}/\alpha$
 $k_{\beta,\beta} = n/\beta^2$

A.4 Elementos da inversa da matriz de informação de Fisher para a distribuição Kumaraswamy

$$k^{\alpha,\alpha} = \frac{\alpha^2}{n(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)}$$

$$k^{\alpha,\beta} = k^{\beta,\alpha} = -\frac{\alpha \bar{B}\beta^2}{n(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)}$$

$$k^{\beta,\beta} = \frac{\beta^2 \bar{A}}{n(\bar{A} - \beta^2 \bar{B}^2)}$$

A.5 Identidades de Bartlett

Outros cumulantes podem ser obtidos através das identidades de Bartlett abaixo:

$$\kappa_r = 0$$

$$\kappa_{rs} + k_{r,s} = 0$$

$$\kappa_{rst} + \kappa_{r,st} - \kappa_{st}^{(r)} = 0$$

$$\kappa_{r,s,t} - 2\kappa_{rst} + \sum_{(3)} \kappa_{rs}^{(t)} = 0$$

$$\begin{split} \kappa_{rstu} + \kappa_{r,stu} - \kappa_{stu}^{(r)} &= 0 \\ \kappa_{r,s,tu} &= \kappa_{rstu} - \kappa_{rtu}^{(s)} - \kappa_{stu}^{(r)} + -\kappa_{tu}^{(rs)} - \kappa_{rs,tu} \\ \kappa_{r,s,t,u} &= -3\kappa_{rstu} + 2\sum_{(4)}\kappa_{rst}^{(u)} - \sum_{(6)}\kappa_{rs}^{(tu)} + \sum_{(3)}\kappa_{rs,tu} \\ \kappa_{rstu} + \sum_{(4)}\kappa_{r,stu} + \sum_{(3)}\kappa_{rs,tu} + \sum_{(6)}\kappa_{r,s,tu} + \kappa_{r,s,t,u} = 0 \\ \text{em que } \sum_{(k)} \text{ representa o somatório sobre todas as k combinações de índices.} \end{split}$$

A.6 Coeficientes de assimetria

Seja $D=(\bar{A}-\beta^2\bar{B}^2)$. O coeficiente de assimetria de ordem n^{-1} é definido por $\gamma_1(\hat{\theta}_a)=\kappa_3(\hat{\theta}_a)/var(\hat{\theta}_a)^{3/2}$. Para a distribuição de $\hat{\alpha}$ temos, $\kappa_3(\hat{\alpha})=\frac{\alpha^3}{n^2D^3}\left(a_0+\frac{a_1}{\beta-1}+\frac{a_2}{\beta-2}\right)$ e $var(\hat{\alpha})=\frac{\alpha^2}{nD}$. Logo,

$$\gamma_{1}(\hat{\alpha}) = \frac{\alpha^{3}/n^{2}D^{3}}{(\alpha^{2}/nD)^{3/2}} \left(a_{0} + \frac{a_{1}}{\beta - 1} + \frac{a_{2}}{\beta - 2} \right)$$

$$= \frac{\alpha^{3}}{n^{2}D^{3}} \cdot \frac{n^{3/2}D^{3/2}}{\alpha^{3}} \left(a_{0} + \frac{a_{1}}{\beta - 1} + \frac{a_{2}}{\beta - 2} \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n\left(\overline{A} - \beta^{2}\overline{B}^{2}\right)^{3}}} \left(a_{0} + \frac{a_{1}}{\beta - 1} + \frac{a_{2}}{\beta - 2} \right).$$

em que $a_0 = a_0(\beta) = 4 + 6(\overline{A} - 1) - 2\overline{B}\beta^2 (3 + 2\overline{B}\beta), \ a_1 = a_1(\beta) = 3\overline{B}\beta^2 [2\overline{BC} - (\overline{A} - 1)]$ e $a_2 = a_2(\beta) = 2(\overline{G} - \overline{E} - \overline{F}).$

Para a distribuição de $\hat{\beta}$ temos $\kappa_3(\hat{\beta}) = \frac{\beta^3}{n^2 D^3} \left(b_0 + \frac{b_1}{\beta - 1} + \frac{b_2}{\beta - 2} + \frac{b_3}{\beta - 3} \right)$ e $var(\hat{\beta}) = \frac{\beta^2 \bar{A}}{nD}$. Logo,

$$\gamma_{1}(\hat{\beta}) = \frac{\beta^{3}/n^{2}D^{3}}{\left(\beta^{2}\overline{A}/nD\right)^{3/2}} \left(b_{0} + \frac{b_{1}}{\beta - 1} + \frac{b_{2}}{\beta - 2} + \frac{b_{3}}{\beta - 3}\right)
= \frac{\beta^{3}}{n^{2}D^{3}} \cdot \frac{n^{3/2}D^{3/2}}{\beta^{3}\overline{A}^{3/2}} \left(b_{0} + \frac{b_{1}}{\beta - 1} + \frac{b_{2}}{\beta - 2} + \frac{b_{3}}{\beta - 3}\right)
= \frac{1}{\sqrt{n\overline{A}^{3}} \left(\overline{A} - \beta^{2}\overline{B}^{2}\right)^{3}} \left(b_{0} + \frac{b_{1}}{\beta - 1} + \frac{b_{2}}{\beta - 2} + \frac{b_{3}}{\beta - 3}\right).$$

em que $b_0 = b_0(\beta) = 4\overline{A}^3 + 2\beta^3\overline{B}^3$, $b_1 = b_1(\beta) = 3\beta\overline{AB} \left[\beta^2\overline{B}(\overline{A} - 1) - 2\overline{AC}\right]$, $b_2 = b_2(\beta) = 3\beta\overline{AB} \left[2\beta(\overline{A} - 1)\overline{B} - \overline{D}\right]$ e $b_3 = b_3(\beta) = 2\beta^3\overline{B}^3(\overline{E} - \overline{G} + \overline{F})$.

Apêndice B

Cumulantes associados ao modelo de regressão Kumaraswamy

B.1 Esperanças

Para calcular os cumulantes necessários para a obtenção das expressões (5.6) e (5.7) necessitamos das seguintes esperanças:

$$\begin{split} E1_i &= E[\log(1-y_i^\alpha)] = -\frac{1}{d_i}, \\ E2_i &= E\left[\frac{y_i^\alpha \log(y_i)}{(1-y_i^\alpha)}\right] = \frac{\psi(2) - \psi(d_i+1)}{\alpha(d_i-1)}, \\ E3_i &= E\left[\frac{y_i^\alpha (\log(y_i))^2}{(1-y_i^\alpha)^2}\right] = \frac{d_i[\psi'(2) - \psi'(d_i) + (\psi(2) - \psi(d_i))^2]}{\alpha^2(d_i-1)(d_i-2)}, \\ E4_i &= E\left[\frac{y_i^\alpha (\log(y_i))^2}{(1-y_i^\alpha)}\right] = \frac{(\psi(2) - \psi(d_i+1))^2 + \psi'(2) - \psi'(d_i+1)}{\alpha^2(d_i-1)}, \\ E5_i &= E\left[\frac{y_i^2 (\log(y_i))^2}{(1-y_i^\alpha)^2}\right] = 2\frac{(\psi(3) - \psi(d_i+1))^2 + \psi'(3) - \psi'(d_i+1)}{\alpha^2(d_i-1)(d_i-2)}, \\ E6_i &= E\left[\frac{y_i^\alpha (\log(y_i))^3}{(1-y_i^\alpha)}\right] = \frac{(\psi(2) - \psi(d_i+1))^3 + 3(\psi(2) - \psi(d_i+1))(\psi'(2) - \psi'(d_i+1))}{\alpha^3(d_i-1)}, \\ E7_i &= E\left[\frac{y_i^2 (\log(y_i))^3}{(1-y_i^\alpha)^2}\right] = 2\frac{(\psi(3) - \psi(d_i+1))^3 + 3(\psi(3) - \psi(d_i+1))(\psi'(3) - \psi'(d_i+1))}{\alpha^3(d_i-1)(d_i-2)}, \\ &+ \frac{\psi''(3) - \psi''(d_i+1)}{\alpha^3(d_i-1)(d_i-2)}, \end{split}$$

$$E8_{i} = E\left[\frac{y_{i}^{3\alpha}(\log(y_{i}))^{3}}{(1-y_{i}^{\alpha})^{3}}\right] = 6\frac{(\psi(4) - \psi(d_{i}+1))^{3} + 3(\psi(4) - \psi(d_{i}+1))(\psi'(4) - \psi'(d_{i}+1))}{\alpha^{3}(d_{i}-1)(d_{i}-2)(d_{i}-3)} + \frac{\psi''(4) - \psi''(d_{i}+1)}{\alpha^{3}(d_{i}-1)(d_{i}-2)(d_{i}-3)}.$$

B.2 Matriz de informação de Fisher

Os elementos da matriz de informação de Fisher $K_{\theta}(\theta)$ são obtidos como

$$k_{\alpha,\alpha} = -E\left(\frac{\partial^{2}\ell}{\partial\alpha^{2}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\left[d_{i}k_{i}^{2}\lambda_{2i}(\log(k_{i}))^{2} + \frac{d_{i}k_{i}^{\alpha}(\log(k_{i}))^{2}}{(1-k_{i}^{\alpha})\log(1-k_{i}^{\alpha})}\left(\lambda_{1i}k_{i}^{2} + \frac{1}{1-k_{i}^{\alpha}}\right)\right]E1_{i}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left\{2d_{i}k_{i}^{2}\lambda_{1i}\log(k_{i})E2_{i} + (d_{i}-1)E3_{i}\right\}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{k_{i}^{\alpha}(\log(k_{i}))^{2}}{(1-k_{i}^{\alpha})\log(1-k_{i}^{\alpha})}\left(\lambda_{1i}k_{i}^{2} + \frac{1}{1-k_{i}^{\alpha}}\right) - \frac{1}{\alpha^{2}}\right],$$

$$k_{\alpha,\delta_{r}} = -E\left(\frac{\partial^{2}\ell}{\partial\alpha\partial\delta_{r}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\frac{k_{i}^{\alpha-1}[\log(k_{i})+1]}{(1-k_{i}^{\alpha})\log(1-k_{i}^{\alpha})} \frac{1}{g'(k_{i})} x_{ir}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} k_{i} \log(k_{i})[(\alpha-1)\lambda_{1i} + \alpha\lambda_{2i}\log(1-k_{i}^{\alpha}) + \alpha\lambda_{2i}] \frac{1}{g'(k_{i})} x_{ir}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} d_{i}k_{i} \log(k_{i})[(\alpha-1)\lambda_{1i} + \alpha\lambda_{2i}\log(1-k_{i}^{\alpha}) + 2\alpha\lambda_{2i}]E1_{i} \frac{1}{g'(k_{i})} x_{ir}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d_{i}k_{i}^{\alpha-1}[\log(k_{i})+1]}{(1-k_{i}^{\alpha})\log(1-k_{i}^{\alpha})} E1_{i} - \alpha k_{i}d_{i}\lambda_{1i}E2_{i} \right\} \frac{1}{g'(k_{i})} x_{ir}$$

e

$$k_{\delta_{r},\delta_{s}} = -E\left(\frac{\partial^{2}\ell}{\partial\delta_{r}\partial\delta_{s}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} -\alpha[(\alpha - 1)\lambda_{1i} + \alpha\lambda_{2i}\log(1 - k_{i}^{\alpha}) + \alpha\lambda_{2i}]\frac{1}{(g'(k_{i}))^{2}}x_{ir}x_{is}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \alpha d_{i}[(\alpha - 1)\lambda_{1i} + \alpha\lambda_{2i}\log(1 - k_{i}^{\alpha}) + 2\alpha\lambda_{2i}]E1_{i}\frac{1}{(g'(k_{i}))^{2}}x_{ir}x_{is}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha k_{i}^{\alpha - 1}}{(1 - k_{i}^{\alpha})\log(1 - k_{i}^{\alpha})}\{d_{i}E1_{i} + 1\}\frac{g''(k_{i})}{(g'(k_{i}))^{3}}x_{ir}x_{is},$$

em que $\{r, s\} = 1, \dots, (p+1), \lambda_{1i} = k_i^{\alpha-2}/[(1-k_i^{\alpha})\log(1-k_i^{\alpha})], \lambda_{2i} = k_i^{2\alpha-2}/[(1-k_i^{\alpha})^2(\log(1-k_i^{\alpha}))^2]$ e $g''(k_i) = d^2g(k_i)/dk_i^2$.

Substituindo as expressões de $E1_i$ a $E3_i$, esses elementos resultam, respectivamente, nas expressões (5.3), (5.4), (5.5).

B.3 Derivadas dos cumulantes de segunda ordem

Antes de definirmos as derivadas dos cumulantes de segunda ordem com respeito aos parâmetros α e δ_r , $r=1,\ldots,p+1$, temos de definir as seguintes expressões

$$\begin{split} d_i &= \frac{\log(1-q)}{\log(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} &= -\frac{\log(1-q)k_i^{\alpha}\log(k_i)}{\log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial d_i}{\partial k_i} &= \frac{\alpha \log(1-q)k_i^{(\alpha-1)}}{\log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}, \\ \lambda 1_i &= \frac{k_i^{(\alpha-2)}}{\log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial \lambda 1_i}{\partial \alpha} &= \frac{k_i^{(\alpha-2)}\log(k_i)[\log(1-k_i^{\alpha})+k_i^{\alpha}]}{\log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial \lambda 1_i}{\partial k_i} &= \frac{k_i^{(\alpha-2)}[\alpha k_i^{\alpha}+\log(1-k_i^{\alpha})(\alpha-2+2k_i^{\alpha})]}{\log^2(1-k_i^{\alpha})k_i(1-k_i^{\alpha})}, \\ \lambda 2_i &= \frac{k_i^{(2\alpha-2)}[\alpha k_i^{\alpha}+\log(1-k_i^{\alpha})(\alpha-2+2k_i^{\alpha})]}{\log^2(1-k_i^{\alpha})k_i(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial \lambda 2_i}{\partial \alpha} &= \frac{2k_i^{(2\alpha-2)}\log(k_i)[\log(1-k_i^{\alpha})+k_i^{\alpha}]}{\log^3(1-k_i^{\alpha})k_i(1-k_i^{\alpha})}, \\ \frac{\partial \lambda 2_i}{\partial k_i} &= \frac{2k_i^{(2\alpha-2)}[\alpha k_i^{\alpha}+\log(1-k_i^{\alpha})(\alpha-1+k_i^{\alpha})]}{\log^3(1-k_i^{\alpha})k_i(1-k_i^{\alpha})}, \\ g'''(k_i) &= d^3g(k_i)/dk_i^3. \end{split}$$

As derivadas dos cumulantes de segunda ordem são dadas por

$$k_{\alpha\alpha}^{(\alpha)} = \frac{\partial k_{\alpha\alpha}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial k_{\alpha,\alpha}}{\partial \alpha} = \frac{2n}{\alpha^3} - \sum_{i=1}^n k_i^2 \log^2(k_i) \frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial \alpha}$$

$$+ \sum_{i=1}^n 2k_i^2 \log(k_i) \lambda_{1i} \left[\frac{(\psi(2) - \psi(d_i + 1))}{\alpha(d_i - 1)^2} \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} + \frac{d_i(\psi(2) - \psi(d_i + 1))}{\alpha^2(d_i - 1)} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{2k_i^2 d_i \log(k_i)}{\alpha(d_i - 1)} \left[\lambda_{1i} \psi'(d_i + 1) \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} - (\psi(2) - \psi(d_i + 1)) \frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial \alpha} \right]$$

$$- \sum_{i=1}^n \frac{[\psi'(2) - \psi'(d_i) + (\psi(2) - \psi(d_i))^2]}{\alpha^2(d_i - 2)} \left[\left(1 + \frac{d_i}{d_i - 2} \right) \frac{\partial d_i}{\partial \alpha} + \frac{2d_i}{\alpha} \right]$$

$$+ \sum_{i=1}^n \frac{d_i [\psi''(d_i) + 2(\psi(2) - \psi(d_i))\psi'(d_i)]}{\alpha^2(d_i - 2)} \frac{\partial d_i}{\partial \alpha},$$

$$\begin{split} k_{\alpha\alpha}^{(\delta_s)} &= \frac{\partial k_{\alpha\alpha}}{\partial \delta_s} = -\frac{\partial k_{\alpha,\alpha}}{\partial \delta_s} = -\sum_{i=1}^n \left[k_i \log^2(k_i) \left(2\lambda_{2i} + k_i \frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial k_i} \right) + 2k_i \log(k_i) \lambda_{2i} \right] \frac{x_{is}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2[\psi'(2) - \psi'(d_i) + (\psi(2) - \psi(d_i))^2]}{\alpha^2(d_i - 2)^2} \frac{\partial d_i}{\partial k_i} \frac{x_{is}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{[d_i \psi''(d_i) + 2d_i (\psi(2) - \psi(d_i)) \psi'(d_i)]}{\alpha^2(d_i - 2)} \frac{\partial d_i}{\partial k_i} \frac{x_{is}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2k_i^2 \log(k_i) \lambda_{1i}}{\alpha(d_i - 1)} \left[d_i \psi'(d_i + 1) + \frac{(\psi(2) - \psi(d_i + 1))}{d_i - 1} \right] \frac{\partial d_i}{\partial k_i} \frac{x_{is}}{g'(k_i)} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{2d_i k_i (\psi(2) - \psi(d_i + 1))}{\alpha(d - 1)} \left\{ [1 + 2 \log(k_i)] \lambda_{1i} + k_i \log(k_i) \frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial k_i} \right\} \frac{x_{is}}{g'(k_i)}, \end{split}$$

$$k_{\alpha\delta_{s}}^{(\alpha)} = \frac{\partial k_{\alpha\delta_{s}}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial k_{\alpha,\delta_{s}}}{\partial \alpha} = -\sum_{i=1}^{n} k_{i} \log(k_{i}) \left(\lambda_{2i} + \alpha \frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial \alpha}\right) \frac{x_{is}}{g'(k_{i})}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{i} d_{i} (\psi(2) - \psi(d_{i} + 1))}{d_{i} - 1} \frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial \alpha} \frac{x_{is}}{g'(k_{i})}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{k_{i} \lambda_{1i}}{d_{i} - 1} \left[\frac{\psi(2) - \psi(d_{i} + 1)}{d_{i} - 1} + d_{i} \psi'(d_{i} + 1)\right] \frac{\partial d_{i}}{\partial \alpha} \frac{x_{is}}{g'(k_{i})},$$

$$k_{\alpha\delta_{s}}^{(\delta_{t})} = k_{\delta_{s}\alpha}^{(\delta_{t})} = \frac{\partial k_{\alpha\delta_{s}}}{\partial \delta_{t}} = -\frac{\partial k_{\alpha,\delta_{s}}}{\partial \delta_{t}} = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\lambda_{1i}(\psi(2) - \psi(d_{i}+1))}{d_{i}-1} \left(d_{i} - \frac{k_{i}}{d_{i}-1} \frac{\partial d_{i}}{\partial k_{i}} \right) \right] \frac{x_{is}x_{it}}{(g'(k_{i}))^{2}}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \left[\alpha\lambda_{2i}(1 + \log(k_{i})) + \alpha k_{i} \log(k_{i}) \left(\frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial k_{i}} - \lambda_{2i} \frac{g''(k_{i})}{g'(k_{i})} \right) \right] \frac{x_{is}x_{it}}{(g'(k_{i}))^{2}}$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{k_{i}d_{i}\lambda_{1i}\psi'(d_{i}+1)}{d_{i}-1} \frac{\partial d_{i}}{\partial k_{i}} - \frac{k_{i}d_{i}(\psi(2) - \psi(d_{i}+1))}{d_{i}-1} \left(\frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial k_{i}} - \lambda_{1i} \frac{g''(k_{i})}{g'(k_{i})} \right) \right] \frac{x_{is}x_{it}}{(g'(k_{i}))^{2}},$$

$$k_{\delta_s \delta_t}^{(\alpha)} = \frac{\partial k_{\delta_s \delta_t}}{\partial \alpha} = -\frac{\partial k_{\delta_s, \delta_t}}{\partial \alpha} = -\sum_{i=1}^n \left(2\alpha \lambda_{2i} + \alpha^2 \frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial \alpha} \right) \frac{x_{is} x_{it}}{(g'(k_i))^2}$$

e

$$k_{\delta_s \delta_t}^{(\delta_u)} = \frac{\partial k_{\delta_s \delta_t}}{\partial \delta_u} = -\frac{\partial k_{\delta_s, \delta_t}}{\partial \delta_u} = \alpha^2 \sum_{i=1}^n \left(2\lambda_{2i} \frac{g''(k_i)}{g'(k_i)} - \frac{\partial \lambda_{2i}}{\partial k_i} \right) \frac{x_{is} x_{it} x_{iu}}{(g'(k_i))^3}$$

B.4 Cumulantes de terceira ordem

Os cumulantes de terceira ordem são definidos como

$$\begin{split} k_{\alpha\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^n E\left(\frac{\partial^3 \ell_i(k_i,\alpha)}{\partial \alpha^3}\right) = \frac{2n}{\alpha^3} + \sum_{i=1}^n \frac{k_i^\alpha \log^3(k_i)}{\log(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)} \left[1 + \frac{3k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} + \frac{2k_i^{2\alpha}}{(1-k_i^\alpha)^2}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{k_i^{2\alpha} \log^3(k_i)}{\log^2(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)^2} \left[3 + \frac{3k_i^\alpha}{(1-k_i^\alpha)} + \frac{2k_i^\alpha}{\log(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)}\right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\log(1-q)k_i^\alpha \log^3(k_i)}{\log^2(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)} \left[1 + \frac{3k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha}\right] E \mathbf{1}_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{6\log(1-q)k_i^{2\alpha} \log^3(k_i)}{\log^3(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)^2} \left[1 + \frac{k_i^\alpha}{\log(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)}\right] E \mathbf{1}_i \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2\log(1-q)k_i^{2\alpha} \log^3(k_i)}{\log^2(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)^3} \left[1 + \frac{3}{\log(1-k_i^\alpha)}\right] E \mathbf{1}_i \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{3\log(1-q)k_i^\alpha \log^2(k_i)}{\log^2(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)} \left[1 + \frac{k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} + \frac{2k_i^\alpha}{\log(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)}\right] E \mathbf{2}_i \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{3\log(1-q)k_i^\alpha \log(k_i)}{\log^2(1-k_i^\alpha)(1-k_i^\alpha)} (E \mathbf{4}_i + E \mathbf{5}_i) - (d_i - 1)(E \mathbf{6}_i + 3E \mathbf{7}_i + 2E \mathbf{8}_i), \end{split}$$

$$\begin{split} k_{\alpha\alpha\delta_u} &= \sum_{i=1}^n E\left(\frac{\partial^3 \ell_i(k_i,\alpha)}{\partial \alpha^2 \partial k_i}\right) \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} = \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha k_i^{3\alpha} \log^2(k_i)}{k_i \log^3(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})^3} \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha k_i^{\alpha} \log^2(k_i)}{k_i \log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} \left[1 + \frac{2k_i^{2\alpha}}{(1-k_i^{\alpha})^2}\right] \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2k_i^{\alpha} \log(k_i)}{k_i \log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} \left[1 + \frac{k_i^{\alpha}}{1-k_i^{\alpha}} + \frac{k_i^{\alpha}}{\log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}\right] \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{3\alpha k_i^{2\alpha} \log^2(k_i)}{k_i \log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})^2} \left[1 + \frac{1}{\log(1-k_i^{\alpha})} + \frac{k_i^{\alpha}}{\log(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})}\right] \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\log(1-q)k_i^{2\alpha} \log(k_i)(2+3\alpha \log(k_i))}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})^2} \left[1 + \frac{2}{\log(1-k_i^{\alpha})}\right] E1_i \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha \log(1-q)k_i^{3\alpha} \log^2(k_i)}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})^3} \left[1 + \frac{3}{\log(1-k_i^{\alpha})} + \frac{3}{\log^2(1-k_i^{\alpha})}\right] E1_i \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\log(1-q)k_i^{\alpha} \log(k_i)(2+\alpha \log(k_i))}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} E1_i \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2\log(1-q)k_i^{\alpha} \log(k_i)(2+\alpha \log(k_i))}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} E3_i \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1-q)k_i^{\alpha}}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} \left[E4_i + E5_i\right] \frac{x_{iu}}{g'(k_i)} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha \log(1-q)k_i^{2\alpha} \log(k_i)}{k_i \log^2(1-k_i^{\alpha})(1-k_i^{\alpha})} \left[1 + \frac{2}{\log(1-k_i^{\alpha})}\right] E2_i \frac{x_{iu}}{g'(k_i)}, \end{split}$$

$$k_{\delta_u\alpha\alpha} = k_{\alpha\delta_u\alpha} = k_{\alpha\alpha\delta_u}$$

$$\begin{split} k_{\alpha\delta_l\delta_u} &= \sum_{i=1}^n \left[E\left(\frac{\partial^3 \ell_i(k_i,\alpha)}{\partial \alpha \partial k_i^2}\right) \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} - E\left(\frac{\partial^2 \ell_i(k_i,\alpha)}{\partial \alpha \partial k_i}\right) \frac{x_{it}x_{iu}g''(k_i)}{(g'(k_i))^3} \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 k_i^{2\alpha} \log(k_i)}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})^3} \left[3 + \frac{2[1 + \log^2 (1 - k_i^{\alpha})]}{\log (1 - k_i^{\alpha})} \right] \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{k_i^{\alpha} [\alpha^2 \log(k_i) - 1 - \alpha \log(k_i) + 2\alpha]}{\log (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})} \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha k_i^{2\alpha} [3\alpha \log(k_i) + 2 - \log(k_i)]}{\log (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})^2} \left[1 + \frac{1}{\log (1 - k_i^{\alpha})} \right] \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\log(1 - q) k_i^{\alpha} [\alpha^2 \log(k_i) - 1 - \alpha \log(k_i) + 2\alpha]}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})} E 1_i \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1 - q) k_i^{\alpha} [\alpha^2 \log(k_i) + 2 - \log(k_i)]}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})^2} \left[1 + \frac{2}{\log (1 - k_i^{\alpha})} \right] E 1_i \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1 - q) k_i^{3\alpha} \log(k_i)}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})^2} \left[\alpha - 1 + k_i^{\alpha} - \frac{3}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha})} \right] E 1_i \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1 - q) k_i^{\alpha}}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i^2 (1 - k_i^{\alpha})^2} \left[\alpha - 1 + k_i^{\alpha} - \frac{2\alpha k_i^{\alpha}}{\log(1 - k_i^{\alpha})} \right] E 2_i \frac{x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^2} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{k_i^{\alpha} \{\alpha \log(k_i) [k_i^{\alpha} + \log(1 - k_i^{\alpha})] + \log(1 - k_i^{\alpha}) [1 - k_i^{\alpha})\}}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i (1 - k_i^{\alpha})^2} E 1_i \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^3} x_{it}x_{iu} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1 - q) k_i^{\alpha} \{\alpha \log(k_i) [2k_i^{\alpha} + \log(1 - k_i^{\alpha})] + \log(1 - k_i^{\alpha}) (1 - k_i^{\alpha})\}}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i (1 - k_i^{\alpha})} E 2_i \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^3} x_{it}x_{iu}, \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha \log(1 - q) k_i^{\alpha}}{\log^2 (1 - k_i^{\alpha}) k_i (1 - k_i^{\alpha})} E 2_i \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^3} x_{it}x_{iu}, \end{split}$$

$$k_{\delta_t \alpha \delta_u} = k_{\delta_t \delta_u \alpha} = k_{\alpha \delta_t \delta_u}$$

e

$$\begin{split} k_{\delta_s\delta_t\delta_u} &= \sum_{i=1}^n \left[E\left(\frac{\partial^3\ell_i(k_i,\alpha)}{\partial\partial k_i^3}\right) \frac{x_{is}x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^3} - 3E\left(\frac{\partial^2\ell_i(k_i,\alpha)}{\partial k_i^2}\right) \frac{x_{is}x_{it}x_{iu}g''(k_i)}{(g'(k_i))^4} \right] \\ &- \sum_{i=1}^n E\left(\frac{\partial\ell_i(k_i,\alpha)}{\partial k_i}\right) \left[\frac{g'''(k_i)}{(g'(k_i))^4} - 3\frac{(g''(k_i))^2}{(g'(k_i))^5} \right] x_{is}x_{it}x_{iu} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)k_i^\alpha}{\log(1-k_i^\alpha)k_i^3(1-k_i^\alpha)} \left\{ \alpha - 2 + \frac{3\alpha k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} \left[1 + \frac{1}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} \frac{x_{is}x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^3} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^3k_i^{3\alpha}}{\log(1-k_i^\alpha)k_i^3(1-k_i^\alpha)^3} \left\{ 2 + \frac{1}{\log(1-k_i^\alpha)} \left[3 + \frac{2}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} \frac{x_{is}x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^3} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{2\alpha^3\log(1-q)k_i^{3\alpha}}{\log^2(1-k_i^\alpha)k_i^3(1-k_i^\alpha)^3} \left\{ 1 + \frac{3}{\log(1-k_i^\alpha)} \left[1 + \frac{1}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} E1_i \frac{x_{is}x_{it}x_{iu}}{(g'(k_i))^3} \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\log(1-q)k_i^\alpha}{\log^2(1-k_i^\alpha)k_i^3(1-k_i^\alpha)} \left\{ \alpha - 2 + \frac{3\alpha k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} \left[1 + \frac{2}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} E1_i \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^3} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{3\alpha\log(1-q)k_i^\alpha}{\log^2(1-k_i^\alpha)k_i^2(1-k_i^\alpha)} \left\{ \alpha - 1 + \frac{\alpha k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} \left[1 + \frac{1}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^4} x_{is} x_{it} x_{iu} \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{3\alpha k_i^\alpha}{\log(1-k_i^\alpha)k_i^2(1-k_i^\alpha)} \left\{ \alpha - 1 + \frac{\alpha k_i^\alpha}{1-k_i^\alpha} \left[1 + \frac{1}{\log(1-k_i^\alpha)} \right] \right\} \frac{g''(k_i)}{(g'(k_i))^4} x_{is} x_{it} x_{iu}. \end{split}$$

Referências Bibliográficas

Araújo et al. (2020) M.C. Araújo, A.H.M.A. Cysneiros e L.C. Montenegro. Improved heteroskedasticity likelihood ratio tests in symmetric nonlinear regression models. Statistical Papers, 61:167–188. ISSN 1613-9798. URL https://doi.org/10.1007/s00362-017-0933-5. Citado na pág. 54

Barreto-Souza e Vasconcellos (2011) W. Barreto-Souza e K.L.P. Vasconcellos. Bias and skewness in a general extreme-value regression model. *Computational statistics & data analysis*, 55:1379–1393. URL https://doi.org/10.1016/j.csda.2010.09.028.

Barros (2017) F.U. Barros. Refinamentos assintóticos em modelos lineares generalizados heteroscedásticos. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. Citado na pág. 39

Bartlett (1937) M.S. Bartlett. Properties of sufficiency and statistical tests. *Proceedings* of the Royal Socety. Series A - Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 160: 268–282. URL https://doi.org/10.1098/rspa.1937.0109. Citado na pág. 2, 53, 55

Bartlett (1953) M.S Bartlett. Aproximate confidence intervals ii. *Biometrika*, 40:306–317.

Citado na pág. 9

Batan et al. (2019) R.A.R Batan, F. Jamal e M. Elgarhy. Truncated inverted kumaraswamy generated family of distributions with applications. Entropy, 21:1089. URL https://doi.org/10.3390/e21111089. Citado na pág. 5

- Bayer e Cribari-Neto (2013) F.M. Bayer e F. Cribari-Neto. Bartlett corrections in beta regression models. Journal of Statistical Planning and Inference, 143:531-547. ISSN 0378-3758. URL https://doi.org/10.1016/j.jspi.2012.08.018. Citado na pág. 54
- Bayer et al. (2017) F.M. Bayer, D.M. Bayer e G. Pumi. Kumaraswamy autoregressive moving average models for double bounded environmental data. *Journal of Hydrology*, 555:385–396. URL https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2017.10.006. Citado na pág. 70, 71
- Bayes et al. (2017) C. Bayes, J. Bazán e M. Castro. A quantile parametric mixed regression model for bounded response variables. Statistics and Its Interface, 10:483-493. URL https://dx.doi.org/10.4310/SII.2017.v10.n3.a11. Citado na pág. 70
- Botter e Cordeiro (1997) D.A. Botter e G.M. Cordeiro. Bartlett corrections for generalized linear models with dispersion covariates. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 26:279–307. URL https://doi.org/10.1080/03610929708831916. Citado na pág. 54
- Bowman e Shenton (1998) K.O. Bowman e L.R. Shenton. Asymptotic skewness and the distribution of maximum likelihood esimators. *Communications in Statistics Theory and Methods*, 27:2743–2760. URL https://doi.org/10.1080/03610929808832252.
- Bowman e Shenton (2005) K.O. Bowman e L.R. Shenton. The asymptotic variance and skewness of maximum likelihood estimators using maple. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 75:975–986. URL https://doi.org/10.1080/00949650412331321142. Citado na pág. 39
- Bull et al. (2002) S.B. Bull, C. Mark e C.M.T. Greenwood. A modified score function estimator for multinomial logistic regression in small samples. Computational Statistics & Data Analysis, 39:57-74. Citado na pág. 10

- Cavalcanti et al. (2009) A.B. Cavalcanti, G.M. Cordeiro, D.A. Botter e L.P. Barroso. Asymptotic skewness in exponential family nonlinear models. Communications in Statistics Theory and Methods, 38:2275–2287. URL https://doi.org/10.1080/03610920802527072. Citado na pág. 39
- Cordeiro (1983) G.M. Cordeiro. Improved likelihood ratio statistics for generalized linear models. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 45:404-413. ISSN 00359246. URL http://www.jstor.org/stable/2345412. Citado na pág. 54
- Cordeiro (1992) G.M. Cordeiro. Bartlett corrections and bias correction for two heteroscedastic regression models. Communications in Statistics Theory and Methods, 22: 169–188. URL https://doi.org/10.1080/03610929308831012. Citado na pág. 54
- Cordeiro e de Castro (2011) G.M. Cordeiro e M. de Castro. A new family of generalized distributions. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81:883-898. URL https://doi.org/10.1080/00949650903530745. Citado na pág. 5
- Cordeiro et al. (2000) G.M. Cordeiro, S.L.P. Ferrari, M.A. Uribe-Opazo e K.L.P Vasconcellos. Corrected maximum-likelihood estimation in a class of symmetric nonlinear regression models. Statistics & Probability Letters, 46:317–328. Citado na pág. 9
- Cordeiro et al. (2010) G.M. Cordeiro, E.M.M. Ortega e S. Nadarajah. The kumaraswamy weibull distribution with application to failure data. Journal of the Franklin Institute, 347: 1399-1429. ISSN 0016-0032. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0016003210001754. Citado na pág. 5
- Cordeiro et al. (2012a) G.M. Cordeiro, S. Nadarajah e Ortega E.M.M. The kumaraswamy gumbel distribution. Statistical Methods & Applications, 21:139–168. URL https://link.springer.com/article/10.1007/s10260-011-0183-y. Citado na pág. 5
- Cordeiro et al. (2012b) G.M. Cordeiro, R.R. Pescim e E.M.M. Ortega. The kumaraswamy generalized half-normal distribution for skewed positive data. *Journal of Data Science*, 10:195–224. Citado na pág. 5

- Cordeiro et al. (2014) G.M. Cordeiro, E.M.M. Ortega e G.O. Silva. The kumaraswamy modified weibull distribution: theory and applications. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84:1387–1411. URL https://doi.org/10.1080/00949655. 2012.745125. Citado na pág. 5
- Cordeiro e Cordeiro (2001) H.H. Cordeiro e G.M. Cordeiro. Skewness for parameters in generalized linear models. Communications in Statistics Theory and Methods, 30: 1317–1334. URL https://doi.org/10.1081/STA-100104747. Citado na pág. 39
- Cox e Snell (1968) D.R. Cox e E.J. Snell. A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 30:248-275. URL http://www.jstor.org/stable/2984505. Citado na pág. 1, 3, 9, 10, 11, 12, 16, 17, 18, 70, 74, 75, 76, 83, 84, 85
- Cysneiros et al. (2001) F.J. Cysneiros, S.J.P. dos Santos e G.M. Cordeiro. Skewness and kurtosis for maximum likelihood estimator in one-parameter exponential family models.

 Brazilian Journal of Probability and Statistics, páginas 85–105. URL https://www.jstor.org/stable/43600986. Citado na pág. 39
- Cysneiros et al. (2010) F.J.A. Cysneiros, G.M. Cordeiro e H.M.A. Cysneiros. Corrected maximum likelihood estimators in heteroscedastic symmetric nonlinear models. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 8:451–461. Citado na pág. 9
- De Santana et al. (2012) T.V.F. De Santana, E.M.M. Ortega, G.M. Cordeiro e G.O. Silva.

 The kumaraswamy-log-logistic distribution. Journal of Statistical Theory and Applications, 11:265–291. Citado na pág. 5
- Dey et al. (2017) S. Dey, J. Mazucheli e S Nadarajah. Kumaraswamy distribution: different methods of estimation. Computational and Applied Mathematics, 37:2094 2111. ISSN 1807-0302. URL https://doi.org/10.1007/s40314-017-0441-1. Citado na pág. 4
- Efron (1979) B. Efron. Bootstrap methods: Another look at the jackknife. *The Annals of Statistics*, 7:1–26. ISSN 00905364. URL http://www.jstor.org/stable/2958830.

 Citado na pág. 2, 3, 12, 53, 58, 84

- Efron e Tibshirani (1993) B. Efron e R.J. Tibshirani. An Introduction to the Bootstrap.

 Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton,
 Florida, USA. Citado na pág. 54, 58
- Ferrari e Cribari-Neto (2004) S.L.P. Ferrari e F. Cribari-Neto. Beta regression for modelling rates and proportions. Journal of Applied Statistics, 31(7):799-815. doi: 10.1080/0266476042000214501. URL https://doi.org/10.1080/0266476042000214501. Citado na pág. 36
- Firth (1993) D. Firth. Bias reduction of maximum likelihood estimates. *Biometrika*, 80: 27–38. URL https://doi.org/10.1093/biomet/80.1.27. Citado na pág. 2, 3, 10, 12, 13, 16, 18, 84, 86
- Giles et al. (2016) D.E. Giles, H. Feng e R.T. Godwin. Bias-corrected maximum likelihood estimation of the parameters of the generalized pareto distribution. Communications in Statistics Theory and Methods, 45(8):2465–2483. doi: 10.1080/03610926.2014.887104. URL https://doi.org/10.1080/03610926.2014.887104. Citado na pág. 10
- Griffiths et al. (1993) W. Griffiths, C. Hill, H. Lütkepohl, G. Judge e T. Lee. Learning and practicing econometrics. John Wiley & Sons. Citado na pág. 36
- Iqbal et al. (2017) Zafar Iqbal, Muhammad Maqsood Tahir, Naureen Riaz, Syed Azeem Ali e Munir Ahmad. Generalized inverted kumaraswamy distribution: Properties and application. Open Journal of Statistics, 7(4):645-662. URL https://doi.org/10.4236/ojs.2017.74045. Citado na pág. 5
- Jones (2009) M.C. Jones. Kumaraswamy's distribution: A beta-type distribution with some tractability advantages. *Statistical Methodology*, 6:70-91. URL https://doi.org/10.1016/j.stamet.2008.04.001. Citado na pág. 1, 4, 7
- Kahle (1996) W. Kahle. Bartlett corrections for the weibull distribution. Metrika, 43: 257–263. ISSN 1435-926X. URL https://doi.org/10.1007/BF02613912. Citado na pág. 54

- Kendall et al. (1977) M.G. Kendall, A. Stuart e J. K. Ord. The advanced theory of statistics. London: C. Griffin, 4th ed ed. ISBN 0852642156 (v.2). Includes index. Citado na pág. 39
- Kosmidis (2014) I. Kosmidis. Improved estimation in cumulative link models. *Journal of the Royal Statistical Society B*, 76:169–196. Citado na pág. 10
- Kosmidis e Firth (2009) I. Kosmidis e D. Firth. Bias reduction in exponential family nonlinear models. *Biometrika*, 96:793–804. Citado na pág. 10
- Kosmidis e Firth (2011) I. Kosmidis e D. Firth. Multinomial logit bias reduction via the poisson log-linear model. *Biometrika*, páginas 1–5. Citado na pág. 10
- Kosmidis et al. (2019) I. Kosmidis, K.E.C. Pagui e N. Sartori. Mean and median bias reduction in generalized linear models. Statistics and Computing. ISSN 1573-1375. doi: 10.1007/s11222-019-09860-6. URL https://doi.org/10.1007/s11222-019-09860-6. Citado na pág. 10
- Kumaraswamy (1980) P. Kumaraswamy. A generalized probability density function for double-bounded random processes. Journal of Hydrology, 46:79-88. ISSN 0022-1694. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022169480900360. Citado na pág. 1, 4
- Lawley (1956) D. Lawley. A general method for approximating to the distribution of likelihood ratio criteria. *Biometrika*, 43:295–303. Citado na pág. 56
- Lemonte (2011) A.J. Lemonte. Improved point estimation for the kumaraswamy distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 81:1971–1982. ISSN 0094-9655.

 URL http://www.tandfonline.com/loi/gscs20. Citado na pág. 1, 10, 12, 16, 84
- Lemonte e Cordeiro (2010) A.J. Lemonte e G.M Cordeiro. Asymptotic skewness in birnbaum-saunders nonlinear regression models. Statistics & Probability Letters, 80:892–898. URL https://doi.org/10.1016/j.spl.2010.01.024. Citado na pág. 39
- Lemonte et al. (2007) A.J Lemonte, F. Cribari-Neto e K.L.P. Vasconcellos. Improved statistical inference for the two-parameter birnbaum saunders distribution. Computational

- Statistics & Data Analysis, 51:4656-4681. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167947306002799. Citado na pág. 9, 54
- Lemonte et al. (2010) Artur Lemonte, Silvia Ferrari e Francisco Cribari-Neto. Improved likelihood inference in birnbaum-saunders regressions. Computational Statistics & Data Analysis, 54:1307–1316. doi: 10.1016/j.csda.2009.11.017. Citado na pág. 57
- Loose et al. (2017) L.H. Loose, F.M. Bayer e T.L. Pereira. Bootstrap bartlett correction in inflated beta regression. Communications in Statistics Simulation and Computation, 46: 2865-2879. URL https://doi.org/10.1080/03610918.2015.1065326. Citado na pág. 54
- Loose et al. (2018) L.H. Loose, D.M. Valença e F.M. Bayer. On bootstrap testing inference in cure rate models. Journal of Statistical Computation and Simulation, 88:3437–3454.

 URL https://doi.org/10.1080/00949655.2018.1522316. Citado na pág. 54
- Magalhães et al. (2013) T.M. Magalhães, D.A. Botter e M.C. Sandoval. Asymptotic skewness for the beta regression model. Statistics & Probability Letters, 83:2236-2241. ISSN 0167-7152. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0167715213002162. Citado na pág. 39
- Magalhães et al. (2019) T.M. Magalhães, D.A. Botter, M.C. Sandoval, G.H.A. Pereira e G.M. Cordeiro. Skewness of maximum likelihood estimators in the varying dispersion beta regression model. Communications in Statistics Theory and Methods, 48: 4250-4260. doi: 10.1080/03610926.2018.1490768. URL https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1490768. Citado na pág. 40
- Mameli (2015) V. Mameli. The kumaraswamy skew-normal distribution. Statistics & Probability Letters, 104:75-81. URL https://doi.org/10.1016/j.spl.2015.04.
- Mazucheli et al. (2018) J. Mazucheli, A.F.B. Menezes e S. Dey. Bias-corrected maximum likelihood estimators of the parameters of the inverse weibull distribution. Communicati-

```
ons in Statistics - Simulation and Computation, 0:1-10. URL https://doi.org/10.1080/03610918.2018.1433838. Citado na pág. 10
```

- Medeiros (2016) F.M.C. Medeiros. Aprimoramento de métodos assintóticos em classes de modelos estatísticos. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. Citado na pág. 10
- Mitnik e Baek (2013) P. Mitnik e S. Baek. The kumaraswamy distribution: Median-dispersion re-parameterizations for regression modeling and simulation-based estimation. Statistical Papers, 54:177. URL https://doi.org/10.1007/s00362-011-0417-y. Citado na pág. 70, 71
- Nadarajah (2008) S. Nadarajah. On the distribution of kumaraswamy. Jornal of Hydrology, 348:568-569. URL "https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.09.
- Nawaz et al. (2020) Tahir Nawaz, Sajid Hussain, Tanvir Ahmad, Farah Naz e Muhammad Abid. Kumaraswamy generalized kappa distribution with application to stream flow data. Journal of King Saud University Science, 32(1):172 182. ISSN 1018-3647. doi: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.04.005. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1018364718303902. Citado na pág. 5
- Pace e Salvan (1997) L. Pace e A. Salvan. Principles of statistical inference from a neo-Fisherian perspective, volume 4. World Scientific Publishing Company. Citado na pág. 14
- Pagui et al. (2017) E.C.K Pagui, A. Salvan e N. Sartori. Median bias reduction of maximum likelihood estimates. Biometrika, 104:923–938. URL https://doi.org/10.1093/biomet/asx046. Citado na pág. 1, 3, 10, 11, 13, 14, 16, 17, 18, 84, 86
- Patriota e Cordeiro (2011) A.G. Patriota e G.M. Cordeiro. A matrix formula for the skewness of maximum likelihood estimators. Statistics & Probability Letters, 81. Citado na pág. 39

- R Core Team (2019) R Core Team. R: A Language and Environment for Statistical Computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2019. URL https://www.R-project.org/. Citado na pág. 16, 59, 76
- Rayner (1990) R. K. Rayner. Bartlett's correction and the bootstrap in normal linear regression models. *Economics Letters*, 33:255 258. ISSN 0165-1765. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0165176590900110. Citado na pág. 54
- Rocke (1989) D.M. Rocke. Bootstrap bartlett adjustment in seemingly unrelated regression. Journal of the American Statistical Association, 84:598–601. ISSN 01621459. URL http://www.jstor.org/stable/2289948. Citado na pág. 53, 58
- Saha e Paul (2005) K. Saha e S. Paul. Bias-corrected maximum likelihood estimator of the negative binomial dispersion parameter. *Biometrics*, 61:179–185. Citado na pág. 9
- Sartori (2006) N. Sartori. Bias prevention of maximum likelihood estimator for scalar skew normal and skew t distributions. *Journal Statistical Planning and Inference*, 136: 4259–4275. Citado na pág. 10
- Saulo et al. (2012) H. Saulo, J. Leão e M. Bourguignon. The kumaraswamy birnbaum-saunders distribution. Journal of Statistical Theory and Practice, 6:745-759. URL https://doi.org/10.1080/15598608.2012.719814. Citado na pág. 5
- Simas et al. (2010) A.B Simas, G.M Cordeiro e A.V. Rocha. Skewness of maximum likelihood estimators in dispersion models. Journal of Statistical Planning and Inference, 140:2111–2121. Citado na pág. 39
- Simas et al. (2011) A.B. Simas, A.V. Rocha e W. Barreto-Souza. Bias-corrected estimators for dispersion models with dispersion covariates. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141:3063–3074. Citado na pág. 10
- Usman e Ahsan ul Haq (2020) Rana Muhammad Usman e Muhammad Ahsan ul Haq. The marshall-olkin extended inverted kumaraswamy distribution: Theory and applications. Journal of King Saud University Science, 32(1):356 365. ISSN

```
1018-3647. doi: https://doi.org/10.1016/j.jksus.2018.05.021. URL http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1018364717309898. Citado na pág. 5
```

Zorn (2005) C. Zorn. A solution to separation in binary response models. Political Analysis, 13:157–170. Citado na pág. 10