



Universidade Federal do Amazonas  
Faculdade de Tecnologia  
Engenharia da Computação

MODELAGEM A PARTIR DA IDENTIFICAÇÃO  
PARAMÉTRICA DE MÍNIMOS QUADRADOS

Manaus - AM  
2024

DARLYSSON MELO DE LIMA - 219954316  
EVANDRO SALVADOR MARINHO - 22052988  
HERVELYN CHRISTINNE VITAL DA SILVA - 21750599  
KEVYN DO NASCIMENTO PAZ GONDIM - 22153920  
MARIA SARA DA SILVA NAVARRO - 22051556

MODELAGEM A PARTIR DA IDENTIFICAÇÃO  
PARAMÉTRICA DE MÍNIMOS QUADRADOS

Relatório apresentado como requisito para compor a nota parcial disciplina de Laboratório de Sistema de Controle referente ao semestre 2023/2, apresentado ao curso de bacharelado em Engenharia da Computação da Faculdade de Tecnologia, da Universidade Federal do Amazonas - UFAM.

Professor: Dr. Florindo Antonio de Carvalho Ayres Júnior

Manaus - AM  
2024

# Conteúdo

1	INTRODUÇÃO	1
2	PROCEDIMENTOS EXPERIMENTAIS	2
2.1	Modelagem Matemática . . . . .	2
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	6
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	7
4.1	Apêndice . . . . .	8

# Lista de Figuras

Figura 1	Gráfico de resposta temporal do sistema . . . . .	6
----------	---	---

# 1 Introdução

Identificar sistemas através do método dos mínimos quadrados é uma técnica fundamental em diversas áreas, incluindo engenharia e ciência da computação. Seu objetivo é estimar os parâmetros de um modelo matemático que descreve o comportamento de um sistema dinâmico com base em dados experimentais disponíveis. O método é amplamente utilizado em aplicações como controle de processos, previsão de séries temporais e modelagem de sistemas físicos e econômicos.

A essência do método dos mínimos quadrados é encontrar parâmetros do modelo que minimizem a diferença entre as observações experimentais e as previsões do modelo. Isso é feito minimizando a soma dos resíduos quadrados (ou seja, a diferença entre os valores observados e os valores previstos pelo modelo). Esta abordagem fornece uma forma sistemática e eficiente de ajustar modelos aos dados, mesmo quando o sistema que está sendo analisado é complexo ou mal compreendido.

Explorar os princípios por trás da identificação de sistemas de mínimos quadrados e seus fundamentos matemáticos é fundamental para obter uma visão precisa do comportamento de sistemas dinâmicos. A compreensão dessa tecnologia permite o desenvolvimento de modelos mais precisos e úteis para análise, controle e tomada de decisão em diversos ambientes de aplicação.

## 2 Procedimentos experimentais

### 2.1 MODELAGEM MATEMÁTICA

Utilizando o sistema de tempo discreto cuja a equação de diferenças que determinam o comportamento da equação. O modelo numérico será modelado a partir da seguinte equação para a identificação de sistemas:

$$y[n] = a1.y[n-1] + \dots + ap.y[n-p] + b1.u[n-1] + \dots + bq.u[n-q] + W[n] \quad (1)$$

A saída em um dado instante de tempo depende de uma ponderação de p saídas passadas:

$$p = a1.y[n-1] + \dots + ap.y[n-p] \quad (2)$$

Juntamente com q entradas passadas:

$$q = b1.u[n-1] + \dots + bq.u[n-q] \quad (3)$$

Além disso, o ruído gaussiano de média zero represatado por w:

$$r = W[n] \quad (4)$$

Reescrevendo a equação de forma a alterar os atrasos de entrada e saída para então utilizar o operador de atraso:

$$y = a1.Z^{-1}y + \dots + ap.Z^{-p}y + b1.Z^{-1}u + \dots + bq.Z^{-q}u + W \quad (5)$$

Passando todos os operadores y para somente um lado, reescrevmos a equação da seguinte forma:

$$y = \frac{(b1.Z^{-1} + \dots + bq.Z^{-q})u}{1 - a1.Z^{-1} - \dots - ap.Z^{-p}} + \frac{W}{1 - a1.Z^{-1} - \dots - ap.Z^{-p}} \quad (6)$$

Notando a relação que existe entre a equação de e a função de transferência do modelo, a função de transferência relaciona o sinal de entrada com a de saída e relaciona o sinal de ruído com a saída. Compactando equação e definindo  $\emptyset$  como vetor que contém as entradas passadas e as saídas passadas e  $\Theta$  como os coeficientes que determinam a equação de diferença:

$$\varnothing[n] \cong \begin{bmatrix} y[n-1] \\ \cdot \\ y[n-p] \\ u[n-1] \\ \cdot \\ u[n-q] \end{bmatrix} \quad (7)$$

e

$$\Theta \cong \begin{bmatrix} y[a1] \\ \cdot \\ ap \\ b1 \\ \cdot \\ bq \end{bmatrix} \quad (8)$$

então podemos assim, reescrever a equação de forma vetorial.

$$y[n] = \Theta^T[n-1]\Theta + W \quad (9)$$

Ensaio de K amostras (Sist SISO) Os valores de  $\varnothing$  são os dados coletados e para determinar os coeficientes os valores do vetor  $\Theta$ , utilizando então o critério de mínimos quadrados.

$$J(K, \Theta) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K (y[n] - \Theta^T[n-1].\Theta)^2 \quad (10)$$

Se o modelo da equação for bom, ele se aproxima da saída real e o termo será menor, caso ele seja ruim, ele será distante da saída real e o termo será maior. Portanto, reescrevendo a função J de forma que nos seja mais favorável a alcançarmos o modelo bom, temos:

$$Y \cong \begin{bmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \cdot \\ y[k] \end{bmatrix} \quad (11)$$

O vetor Y acima, contém todos os K valores de saída coletados durante o ensaio. Já o vetor  $\Phi$  abaixo, contém todas as entradas e saídas passadas que geraram cada um dos valores de saída do ensaio:

$$\Phi \cong \begin{bmatrix} \Theta^T[1] \\ \Theta^T[2] \\ \vdots \\ \Theta^T[k] \end{bmatrix} \quad (12)$$

Definindo agora J, como um produto de vetores, teremos a seguinte equação:

$$J(K, \Theta) = \frac{1}{K} \sum_{n=1}^K (Y - \Phi\Theta)^T (Y - \Phi\Theta) \quad (13)$$

Derivando J para encontrar o mínimo quadrado da função:

$$\frac{\partial J(K, \Theta)}{\partial \Theta} = 0 \quad (14)$$

Expandindo os termos da derivação, temos a equação a seguir:

$$\frac{\partial \frac{1}{K} (Y^T Y - \Theta^T \Phi^T Y - Y \Theta \Phi + \Theta^T \Phi^T \Theta \Phi)}{\partial \Theta} \quad (15)$$

Derivando a equação acima, obtemos:

$$\frac{1}{K} (0 - 2\Phi^T Y + 2\Phi\Phi^T \Theta^x) = 0 \quad (16)$$

Utilizando algumas operações matriciais, chegamos na seguinte expressão:

$$\Theta^x = (\Phi\Phi^T)^{-1} \Phi^T Y \quad (17)$$

Tratando sobre a existência da inversa de  $\Phi$  transposto vezes  $\Phi$ , para que garatemos que o produto não resulte em uma matriz singular. Tratando da existência de  $(\Phi\Phi^T)^{-1}$ , primeiramente consideramos um vetor V que é não nulo.

$$\Phi\Phi^T V = 0 \quad (18)$$

Agora tratando o caso da equação acima, evitamos os dois casos possíveis de que a equação seja igual a 0, na primeira o caso de:

$$V\Phi = 0 \quad (19)$$

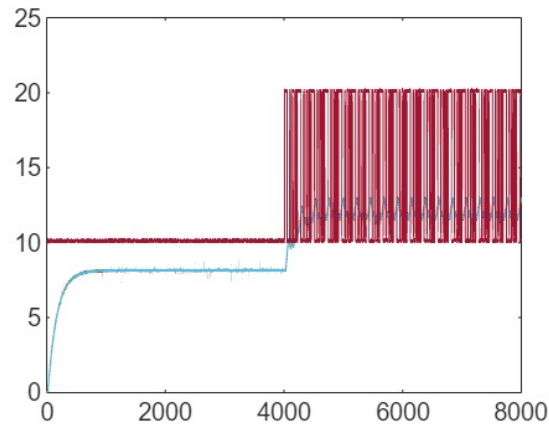
Afirmando que a Matriz  $\Phi$  seja uma matriz em que nenhuma coluna possa ser escrito como uma combinação linear das demais, sendo assim, precisamos de bastantes amostras de K. Posteriormente para o caso:

$$\Phi^T (V\phi) = 0 \quad (20)$$



Toma-se como impossível, pois o espaço nulo de  $\phi^T$  é ortogonal ao range de  $\Phi$

### 3 Resultados e discussões



**Figura 1:** *Gráfico de resposta temporal do sistema*

O código MATLAB gera duas séries de dados que é plotado no gráfico [Figura 1](#). A primeira série,  $Y$ , é o resultado de um gerador de números pseudoaleatórios binários usando uma regra de realimentação com operações XOR. Esta série binária é então amplificada e transformada na série  $U$ , onde o valor de cada ponto também é incrementado por um pequeno valor aleatório (ruído). A segunda série,  $y$ , é o resultado da simulação de um sistema de controle em tempo contínuo com a série  $U$  como entrada, também adicionado de ruído.

Analisando o gráfico:

Geração da Série Binária ( $Y$ ):

A série binária é criada com uma operação XOR aplicada a determinadas posições do vetor  $Y_i$  e um deslocamento de tempo (delay) de  $nT_{shift}$  amostras. Amplificação e Ruidosidade ( $U$ ):

A série binária é amplificada por um fator  $Amp$  e deslocada para cima por 1 unidade para assegurar que os valores sejam positivos. A adição de um pequeno valor aleatório simula uma interferência ou ruído no sinal. Simulação do Sistema ( $y$ ):

O sistema de controle é modelado como uma função de transferência de primeiro ordem com atraso de tempo ( $G$ ). A série  $U$  é usada como entrada para o sistema, e a saída é simulada utilizando a função `lsim`. Mais ruído é adicionado à saída simulada para criar a série  $y$ . O Gráfico:

No gráfico, a série  $y$  é representada pela linha azul, que parece ser a resposta de um sistema a uma entrada que é representada pela linha vermelha ( $U$ ). A série  $U$  mostra padrões claros de degraus, o que é típico de uma entrada binária amplificada que seria utilizada em um sistema de controle digital. A linha azul, a resposta do sistema, segue a entrada, mas devido à natureza de primeira ordem do sistema ( $G$ ), ela mostra um comportamento de subida e descida suave, o que indica um certo atraso e suavização da resposta devido ao tempo de atraso ( $T_d$ ) e constante de tempo ( $\tau$ ). No geral, o gráfico sugere a resposta de um sistema de controle linear com retardamento de tempo a um sinal binário ruidoso. Este tipo de sistema poderia ser utilizado em aplicações de controle industrial onde uma entrada digital precisa ser processada e controlar uma saída contínua, como a posição de uma válvula ou a velocidade de um motor

## 4 Considerações finais

Em síntese, a Identificação Paramétrica de Mínimos Quadrados se destaca como um método eficiente e versátil para estimar parâmetros em uma ampla gama de modelos, tanto lineares quanto não lineares. Em sistemas lineares, sua aplicação é particularmente eficaz devido à convexidade do problema de minimização, garantindo uma solução única e de fácil obtenção. Entretanto, em cenários não lineares, desafios como a necessidade de linearizações, a presença de mínimos locais e a sensibilidade a ruídos e outliers podem complicar a obtenção da solução ótima global, exigindo cuidados adicionais na análise e interpretação dos resultados. Além disso, a qualidade dos dados de entrada e saída, juntamente com a complexidade computacional e a influência das condições iniciais, são fatores determinantes para a precisão das estimativas. Por fim, a validação do modelo é essencial para garantir sua confiabilidade e representatividade em relação ao sistema real, destacando a importância de uma abordagem abrangente e criteriosa na utilização desse método.

## 4.1 APÊNDICE

Segue o código para a modelagem do relatório:

```

1 clear, close all, clc
  Ts = 1;
  namostras = 4000;
  K1 = 1;
  nTshift = 10;
6 Yi = [0 1 0 1 0 1];

  for L =1:namostras
    if K1 == nTshift
      Yi(1) = xor(Yi(5), Yi(6));
11      Y(L) = Yi (1);
      Yi(6) = Yi(5);
      Yi(5) = Yi(4);
      Yi(4) = Yi(3);
      Yi(3) = Yi(2);
16      Yi(2) = Yi(1) ;
      K1 = 0

    else
      K1 = K1 + 1
21      Y(L) = Yi(1)
    end
  end

  %plot(Y)
26
  Amp = 10;
  U = Amp*([ones(1,length(Y)) (Y+1)])';

  for K2 = 1:length(U)
31      U(K2) = U(K2)+0.25*rand(1);
  end

  % plot(U)

36      s = tf('s')

      K = 0.8;
      Tau = 153;
      Td = 20;
41      G = K/(Tau*s+1)*exp(-Td*s)

  t = 0: Ts:length(U)-1;
  y = lsim(G,U,t)+0.1*rand(length(U));

```

```
46  plot(t,y), hold on  
    plot(t,U)
```