



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO  
FACULDADE DE ARQUITETURA, ENGENHARIA E TECNOLOGIA  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELÉTRICA

EVANDRO FERNANDES LEDEMA

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE FRENTE À  
APLICAÇÃO DE DIFERENTES ENTRADAS**

CUIABÁ – MT  
AGOSTO, 2019

EVANDRO FERNANDES LEDEMA

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DE UM SISTEMA DE CONTROLE FRENTE À  
APLICAÇÃO DE DIFERENTES ENTRADAS**

Trabalho apresentado à Universidade Federal de Mato Grosso, Faculdade de Arquitetura, Engenharia e Tecnologia - FAET Departamento de Engenharia Elétrica, como requisito parcial para avaliação na disciplina de Sistemas de Controle. Orientador: Prof. Hamilton Dias de Carvalho.

CUIABÁ – MT  
AGOSTO, 2019

## SUMÁRIO

1. OBJETIVO .....	1
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....	1
2.1. Conceitos básicos.....	1
2.2. Sistema Proposto.....	1
3. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO.....	3
3.1. Determinação da função de transferência de malha aberta.....	3
3.2. Determinação da função de transferência de malha fechada .....	5
4. RESPOSTA DO SISTEMA ÀS ENTRADAS.....	7
4.1. Impulso unitário .....	7
4.2. Degrau unitário .....	9
4.3. Degrau não unitário .....	11
4.4. Rampa unitária.....	14
4.5. Senóide.....	16
5. ANÁLISE DA ESTABILIDADE .....	18
5.1. Avaliar as raízes de $Q(S)$ .....	18
5.2. Impulso unitário .....	19
5.3. Análise de Routh.....	20
6. ANÁLISE DO ERRO ESTACIONÁRIO .....	22
7. ANÁLISE DO TRANSITÓRIO.....	28
8. ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA .....	32
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	35

## 1. OBJETIVO

Analisar o comportamento de um sistema de controle quanto a sua estabilidade, erro e transitório, aplicando diversas entradas.

## 2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1. Conceitos básicos

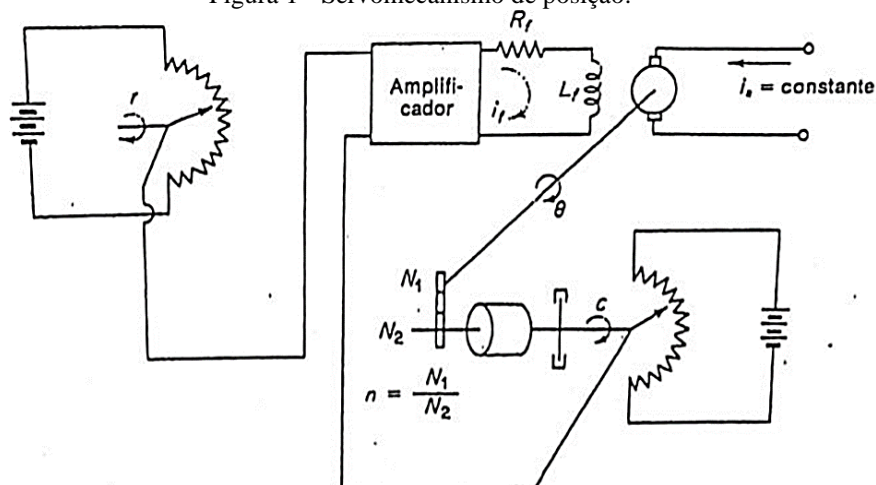
Todo sistema físico, não importando a natureza, é regido por equações integro-diferenciais. O comportamento de variáveis de qualquer natureza (temperatura, tensão, corrente, posição, vazão, força, etc) pode ser estudado a partir do desenvolvimento de um programa ou circuito que simule o sistema a partir de seu modelo matemático. Dessa maneira, pode-se proceder a uma simulação analógica ou digital.

A simulação analógica consiste na montagem de um circuito eletrônico que obedeça ao mesmo equacionamento, ou mesmo diagrama de blocos, que o sistema cujo comportamento dinâmico quer-se analisar. Em contrapartida, a simulação digital consiste no desenvolvimento de um software que implemente o modelo. Neste projeto, o software que fará a simulação do comportamento do sistema de controle será o MATLAB.

### 2.2. Sistema Proposto

O sistema a ser analisado e simulado é um servoposicionador CC, como mostra a figura 1, na qual é possível observar vários elementos físicos, como por exemplo elementos de comando, elementos de controle com ajuste do ganho posicional, elemento atuador (motor CC) e elementos de realimentação.

Figura 1 - Servomecanismo de posição.

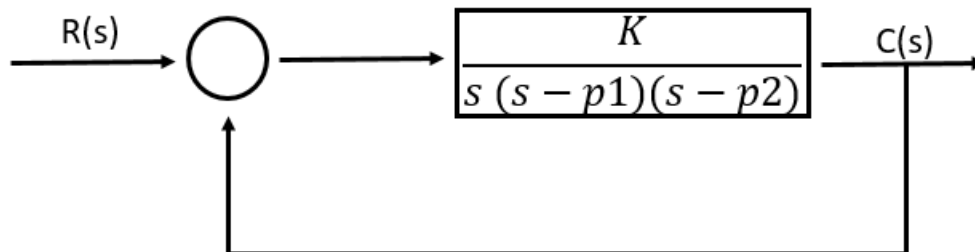


Onde:

- $\theta_r$  – Deslocamento angular do eixo de entrada de referência, em radianos;
- $c$  – Deslocamento angular do eixo de saída, em radianos;
- $\omega$  – Deslocamento angular do eixo do motor, em radianos;
- $K_i$  – Ganho do detector de erro do potenciômetro, em volts/radianos;
- $K_p$  – Ganho do amplificador, em volts;
- $R_f$  – Resistência do enrolamento de campo, ohms;
- $L_f$  – Indutância do enrolamento de campo, em Henrys;
- $I_f$  – Corrente de enrolamento de campo, em ampères;
- $E_f$  – Tensão de campo aplicada, em volts;
- $K_2$  – Constante de torque do motor, em Newton-m/ampères;
- $n$  – Relação de engrenagens;
- $J$  – Momento equivalente de inércia do motor e carga referido ao eixo do motor, em Kg-m<sup>2</sup>;
- $f$  – Coeficiente de fricção viscosa equivalente do motor e carga referente ao eixo do motor, em Newton-m/rad/s.

O sistema será representado pelo diagrama de blocos, dado pela figura 2, para valores numéricos de parâmetros pesquisados para um protótipo. Tais sistemas possuem partes mecânicas, elementos cinemáticos como mancais, rolamentos, massas, entre outros, e partes elétricas, amplificadores de tensão e corrente, elementos elétricos do motor, entre outros.

Figura 2 – Diagrama de blocos simplificado



### 3. DESENVOLVIMENTO DO PROJETO

O sistema da figura 1 foi utilizado para a realização dos cálculos, a tabela 1 mostram os dados usados para análise.

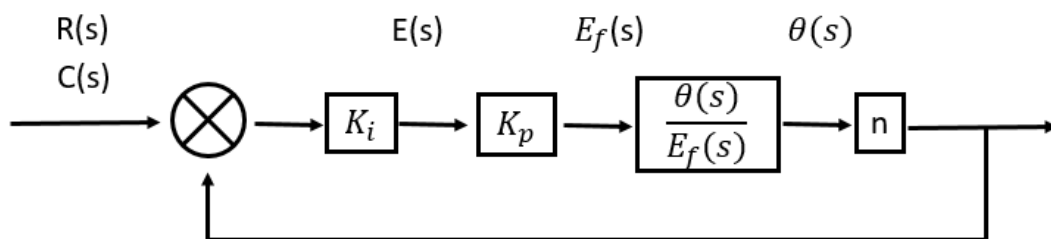
Tabela 1 – Dados do sistema

Símbolo	Legenda	Valor
$K_p$	Ganho do amplificador	1
$K_i$	Ganho do detector de erro do potenciômetro	$24/\pi$
$K_2$	Constante de torque do motor	0,05
$R_f$	Resistência do enrolamento de campo	9
$L_f$	Indutância do enrolamento de campo	0,6
$J$	Momento equivalente de inércia do motor e carga referida ao eixo do motor.	0,07
$f$	Coefficiente de fricção-viscosa equivalente do motor e carga referente ao eixo do motor	0,09
$N$	Relação de engrenagem	1/22

#### 3.1. Determinação da função de transferência de malha aberta

O sistema em estudo pode ser dividido em blocos correspondentes aos elementos detector de erro do potenciômetro, amplificador, motor CC controlado por campo e relação de engrenagens, como mostra a figura 3. Dessa forma, deve-se aplicar as funções de transferência de cada bloco para encontrar a função de transferência equivalente do sistema.

Figura 3 – Digrama de blocos inicial



Para o detector de erro do potenciômetro, sua função de transferência é dada por:

$$E(s) = k_i[\theta r(s) - C(s)] = \frac{24}{\pi} [\theta r(s) - C(s)]$$

Para o amplificador, temos:

$$E_f = K_p E(s) = 1E(s) = E(s)$$

Para o motor controlado por campo, temos:

$$\frac{\theta(s)}{E_f} = \frac{K_m}{S(T_f S + 1)(T_m S + 1)}$$

Onde,

$$K_m = \frac{K_2}{R_f f} = \frac{0,05}{9 \times 0,09} \cong 0,06173$$

$$T_f = \frac{L_f}{R_f} = \frac{0,6}{9} \cong 0,06667$$

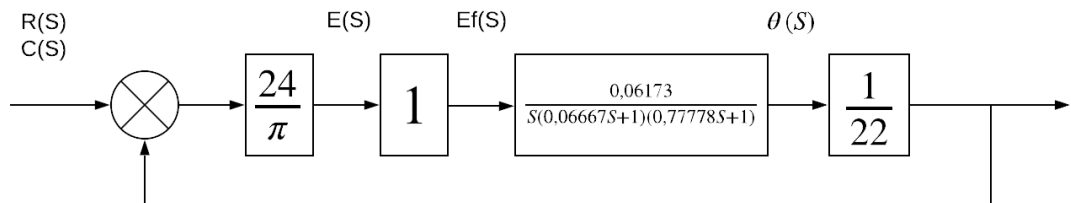
$$T_m = \frac{J}{f} = \frac{0,07}{0,09} \cong 0,77778$$

Então,

$$\frac{\theta(s)}{E_f} = \frac{0,06173}{S(0,06667S + 1)(0,77778S + 1)}$$

A função de transferência da figura 3 pode ser substituída pelos dados calculados, sendo possível observar o resultado na figura 4.

Figura 4 – Função de transferência



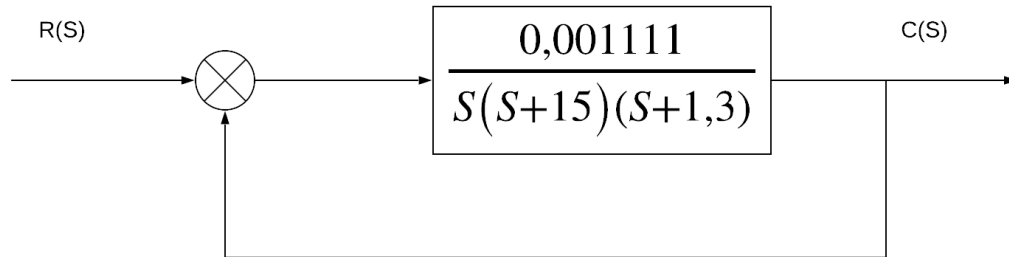
Aplicando álgebra de bloco temos:

$$\begin{aligned} & \frac{24}{\pi} \times 1 \times \frac{0,06173}{S(0,06667S + 1)(0,77778S + 1)} \times \frac{1}{22} = \\ & = 0,3472 \times \frac{0,06173}{S(0,06667S + 1)(0,77778S + 1)} \\ & = 0,3472 \times \frac{0,06173}{S15(S + 15)1,3(S + 1,3)} = \\ & = 0,3472 \times \frac{0,06173}{19,3 \times S(S + 15)(S + 1,3)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{0,001111}{S(S + 15)(S + 1,3)}$$

Dessa forma, temos o diagrama de blocos reduzido conforme a figura 5.

Figura 5 – Diagrama simplificado da malha aberta



### 3.2. Determinação da função de transferência de malha fechada

Para determinar a função de transferência de malha fechada, aplicou-se a equação abaixo:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Onde  $G(s)$  é a função de transferência de malha aberta e  $H(s)$  é a função de retroalimentação. No sistema estudado  $H(s) = 1$ . Utilizou-se o software MATLAB para realizar o cálculo da função de transferência de malha fechada, por meio do comando `ftmt`.

```
>> g=zpk([], [0,-15, -1.3], 0.001111)
```

```
g =
```

```
0.001111
```

```
-----
```

```
s (s+15) (s+1.3)
```

```
Continuous-time zero/pole/gain model.
```



```
>> ftmf= minreal(g/(1+g))
```

```
ftmf =
```

$$0.001111 (s+15)$$

-----

$$(s+15)^2 (s+1.3) (s+0,05698)$$

Continuous-time zero/pole/gain model.

```
>> tf(ftmf)
```

```
ans =
```

$$0.001111 s + 0.01666$$

-----

$$s^4 + 31.3 s^3 + 264 s^2 + 292.5 s + 0.01667$$

Continuous-time transfer function.

```
>> pole(ftmf)
```

```
ans =
```

-15.0000

-15.0000

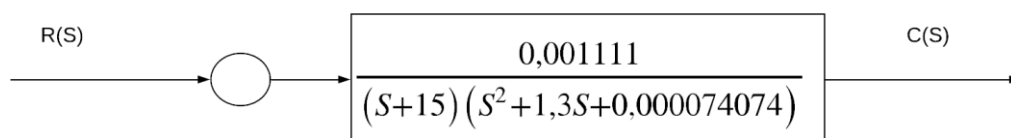
-1.2999

-0.0001

Dessa forma temos a função de transferência de malha fechada, como mostra a figura

6.

Figura 6 – Diagrama da malha fechada



#### 4. RESPOSTA DO SISTEMA ÀS ENTRADAS

A primeira parte do projeto consiste em avaliar a saída do sistema, submetido a cinco tipos de entradas:

- a) Impulso Unitário, onde  $R(S)=1$
- b) Degrau Unitário, onde  $R(S)=1/S$ ;
- c) Degrau não Unitário, onde  $R(S)=A/S$ ;
- d) Rampa Unitária, onde  $R(S)= 1/S^2$ ;
- e) Senóide, onde  $r(t)= \sin (wt)$ , e  $R(S)= W/(S^2 + W^2)$ .

##### 4.1. Impulso unitário

Na entrada impulso unitário, a função no domínio de Laplace é igual a  $R(s) = 1$ , dessa forma a saída corresponde à multiplicação da entrada pela função de transferência de malha fechada, logo:

$$C(s) = R(s) \times FTMF(s)$$

Dessa forma, no MATLAB temos:

```
>> R=zpk([],[],1)
R =
    1
Static gain.

>> C_imp=R*ftmf
C_imp =
    0.001111 (s+15)
-----
(s+15)^2 (s+1.3) (s+5.698e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> tf(C_imp)
ans =
    0.001111 s + 0.01666
-----
s^4 + 31.3 s^3 + 264 s^2 + 292.5 s + 0.01667
Continuous-time transfer function.
```

```

>> num=[0.0011]
num =
    0.0011

>> den=[1 16.3001 19.5009 0.0011]
den =
    1.0000    16.3001    19.5009    0.0011

>> [coef,raiz,k]=residue(num,den)
coef =
    1.0e-04 *

    0.0535
   -0.6177
    0.5641

raiz =
   -15.0000
    -1.3000
    -0.0001

k =
    []

```

Com os valores dos coeficientes e das raízes é possível representar a saída do sistema, podendo então montar a resposta no tempo.

No domínio de Laplace temos:

$$C(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \frac{A_3}{(s - p_3)}$$

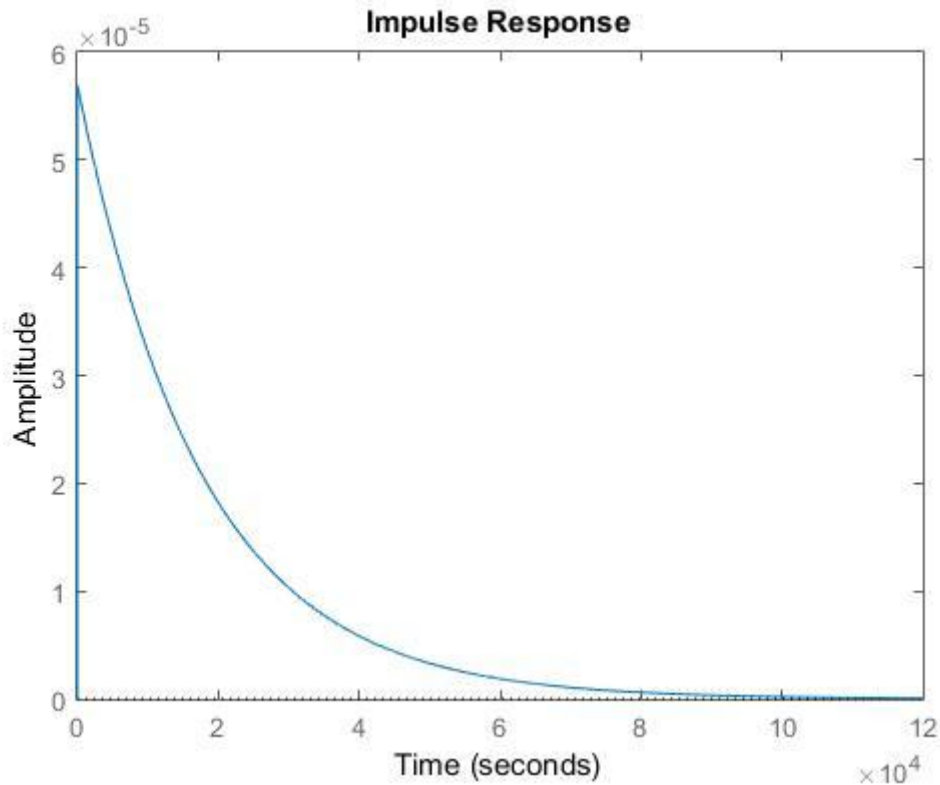
$$C(s) = \frac{0.00000535}{(s + 15)} + \frac{-0.00006177}{(s + 1.3)} + \frac{0.00005641}{(s + 0.0001)}$$

No domínio do tempo temos:

$$c(t) = 0,0000535e^{-15t} - 0.00006177e^{-1.3t} + 0.00005641e^{-0.00001t}$$

Plotando o gráfico no MATLAB temos a figura 7, utilizando o comando `impz(C_imp)`. Dessa forma, quando o tempo tende ao infinito é possível observar que tenderá a zero, comprovado pelo gráfico e pela equação final.

Figura 7 – Resposta ao impulso unitário



#### 4.2. Degrau unitário

Na entrada degrau unitário, a função no domínio de Laplace é igual a  $R(s) = 1/s$ , dessa forma a saída corresponde à multiplicação da entrada pela função de transferência de malha fechada, da mesma forma que foi realizado anteriormente, logo:

$$C(s) = R(s) \times FTMF(s)$$

Dessa forma, no MATLAB temos:

```
>> R=zpk([], [0], 1)
R =
    1
    -
    s
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```

>> C_d_uni=R*ftmf

C_d_uni =

          0.001111
          -----
          s (s+15) (s+1.3) (s+5.698e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> tf(C_d_uni)
ans =

          0.001111
          -----
          s^4 + 16.3001 s^3 + 19.5009 s^2 + 0.0011 s
Continuous-time transfer function.

>> num=[0.001111]
num =
    0.0011

>> den=[1 16.3001 19.5009 0.0011 0]
den =
    1.0000    16.3001    19.5009    0.0011         0

>> [coef,raiz,k]=residue(num,den)
coef =
    1.0e-04 *

    -0.0036
     0.4799
    -0.4763
     0.5698

raiz =
   -15.0000
    -1.3000
    -0.0000
    -0.0000

k =

```

[ ]

Com os valores dos coeficientes e das raízes é possível representar a saída do sistema, podendo então montar a resposta no tempo.

No domínio de Laplace temos:

$$C(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \frac{A_3}{(s)} + \frac{A_4}{(s)}$$

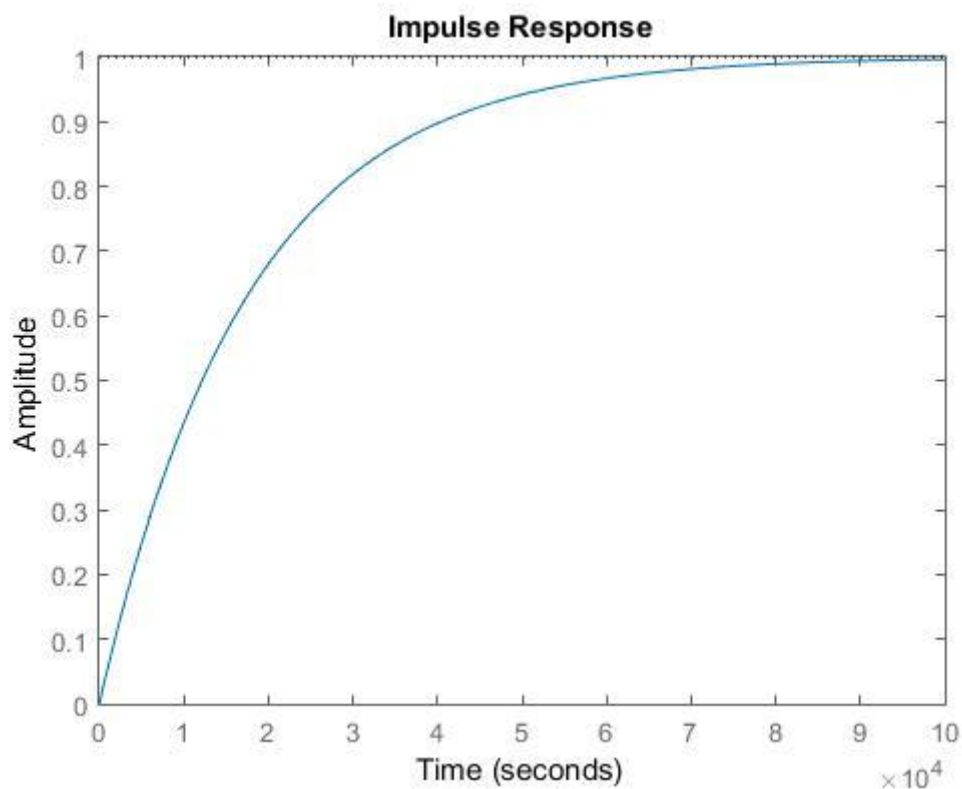
$$C(s) = \frac{-0,00000036}{(s + 15)} + \frac{0.00004799}{(s + 1.3)} + \frac{-0,00004763}{(s)} + \frac{0.00005698}{s}$$

No domínio do tempo temos:

$$c(t) = -0,00000036e^{-15t} + 0.00004799e^{-1.3t} - 0,00000935$$

Plotando o gráfico no MATLAB temos a figura 8. Dessa forma, quando o tempo tende ao infinito é possível observar que tenderá a 1, comprovado pelo gráfico e pela equação final.

Figura 8 – Resposta ao degrau unitário



#### 4.3. Degrão não unitário

Na entrada degrão não unitário, a função no domínio de Laplace é igual a  $R(S)=A/S$ , dessa forma a saída corresponde à multiplicação da entrada pela função de transferência de malha fechada, da mesma forma que foi realizado anteriormente, logo:

$$C(s) = R(s) \times FTMF(s)$$

Dessa forma, no MATLAB temos:

```
>> R=zpk([], [0], 10)

R =

    10
    --
    s
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> C=R*ftmf

C =

          0.01111
-----
s (s+15) (s+1.3) (s+5.698e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> tf(C)

ans =

          0.01111
-----
s^4 + 16.3001 s^3 + 19.5009 s^2 + 0.0011 s
Continuous-time transfer function.

>> num=[0.01111]

num =

    0.0111

>> den=[1 16.3001 19.5009 0.0011 0]

den =

    1.0000    16.3001    19.5009    0.0011    0

>> [coef, raiz, k]=residue(num, den)

coef =

    1.0e-03 *
```

```

-0.0036
0.4799
-0.4763
0.5698

raiz =
-15.0000
-1.3000
-0.0000
-0.0000

k =
[]

```

Com os valores dos coeficientes e das raízes é possível representar a saída do sistema, podendo então montar a resposta no tempo.

No domínio de Laplace temos:

$$CC(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \frac{A_3}{(s)} + \frac{A_4}{(s)}$$

$$C(s) = \frac{-0,0000036}{(s + 15)} + \frac{0.0004799}{(s + 1.3)} + \frac{-0,0004763}{s} + \frac{0.0005698}{s}$$

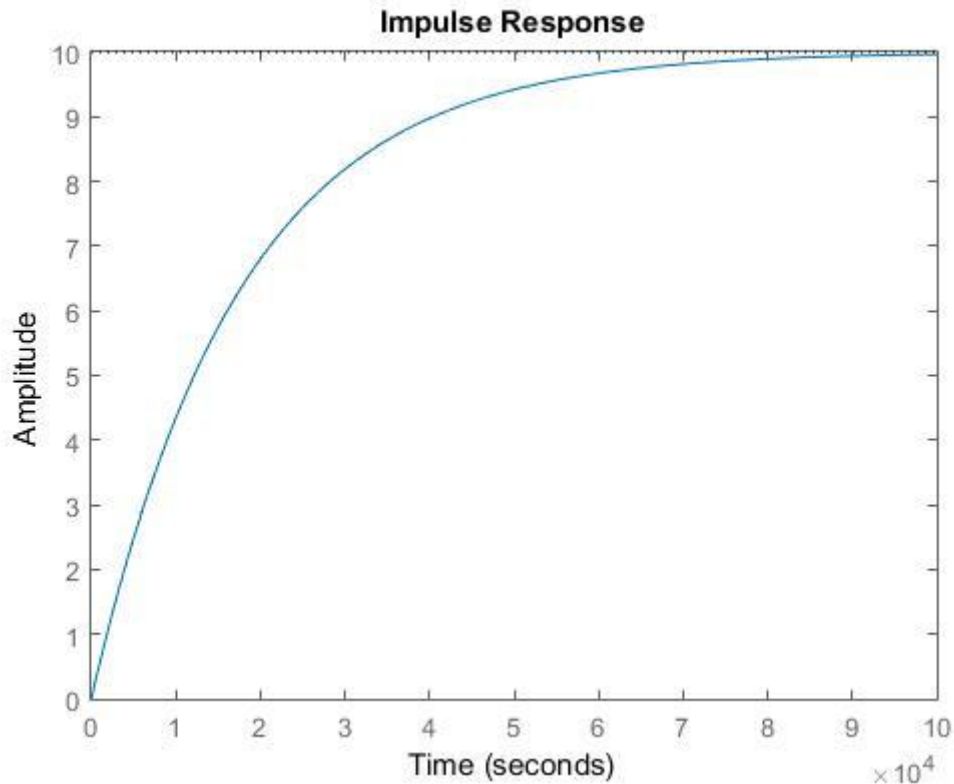
No domínio do tempo temos:

$$c(t) = -0,0000036e^{-15t} + 0.0004799e^{-1.3t} - 0,0000935$$

Plotando o gráfico no MATLAB temos a figura 9. Dessa forma, quando o tempo tende ao infinito é possível observar que tenderá a 10, comprovado pelo gráfico e pela equação final.



Figura 9 – Resposta ao degrau não unitário



#### 4.4. Rampa unitária

Na entrada rampa unitária, a função no domínio de Laplace é igual a  $R(S)= 1/S^2$ , dessa forma a saída corresponde à multiplicação da entrada pela função de transferência de malha fechada, da mesma forma que foi realizado anteriormente, logo:

$$C(s) = R(s) \times FTMF(s)$$

Dessa forma, no MATLAB temos:

```
>> R=zpk([], [0,0],1)
R =
    1
   ---
  s^2
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> C_rampa=R*ftmf
C_rampa =
    0.001111
   -----
  s^2 (s+15) (s+1.3) (s+5.698e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```

>> tf(C_rampa)
ans =
          0.001111
-----
s^5 + 16.3001s^4 + 19.5009s^3 + 0.0011s^2
Continuous-time transfer function.

>> num=[0.0011]
num =
    0.0011

>> den=[1 16.3001 19.5009 0.0011 0 0]
den =
    1.0000    16.3001    19.5009    0.0011         0         0

>> [coef,raiz,k]=residue(num,den)
coef =
    1.0e-04 *
    0.0002
   -0.3655
    0.3652
   -0.4715
    0.5641

raiz =
   -15.0000
   -1.3000
   -0.0000
   -0.0000
   -0.0000

k =
    []

```

Com os valores dos coeficientes e das raízes é possível representar a saída do sistema, podendo então montar a resposta no tempo.

No domínio de Laplace temos:

$$CC(s) = \frac{A_1}{(s - p_1)} + \frac{A_2}{(s - p_2)} + \frac{A_3}{s} + \frac{A_4}{s} + \frac{A_5}{s}$$

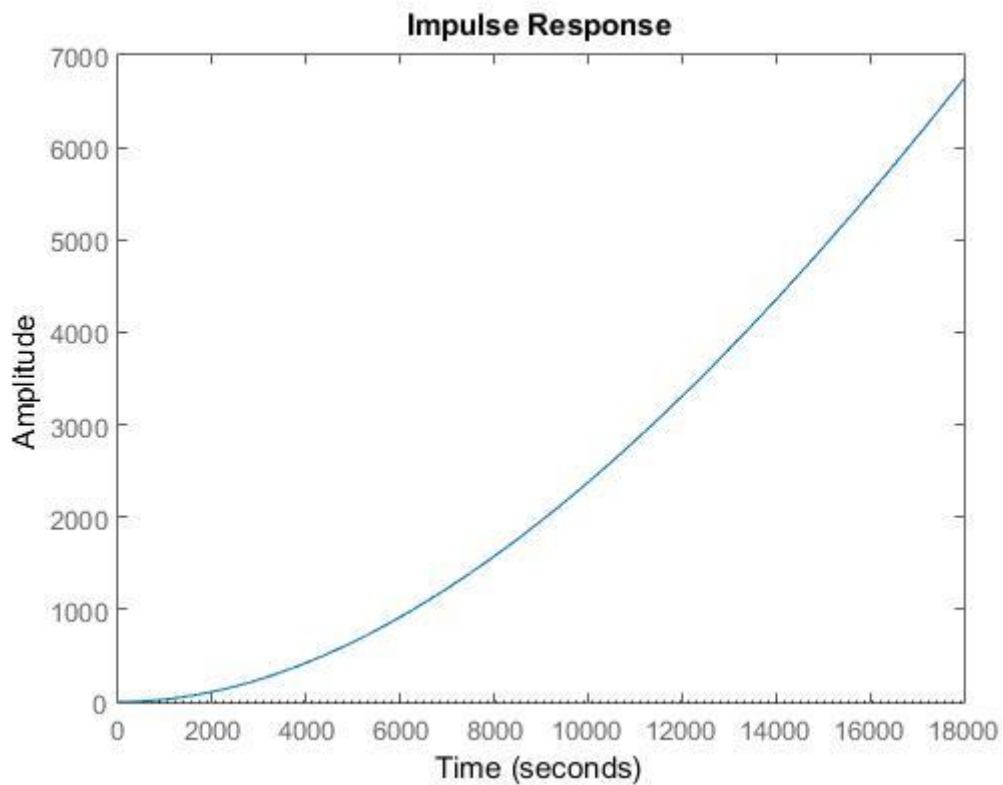
$$C(s) = \frac{0.00000002}{(s + 15)} + \frac{-0.00003655}{(s + 1.3)} + \frac{0.00003652}{s} + \frac{-0.00004715}{s} + \frac{0.00005641}{s}$$

No domínio do tempo temos:

$$c(t) = 0.00000002e^{-15t} - 0.00003655e^{-1.3t} + 0.00004578$$

Plotando o gráfico no MATLAB temos a figura 10.

Figura 10 – Resposta a rampa unitária



#### 4.5. Senóide

Na entrada senoidal, onde  $r(t) = \sin(\omega t)$ , a função no domínio de Laplace é igual a  $R(S) = W/(S^2 + W^2)$ , dessa forma a saída corresponde à multiplicação da entrada pela função de transferência de malha fechada, da mesma forma que foi realizado anteriormente, logo:

$$C(s) = R(s) \times FTMF(s)$$

Dessa forma, no MATLAB temos:

```

>> R=zpk([], [2i, -2i], 2)
R =
      2
      -----
      (s^2 + 4)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> Csen=R*ftmf
Csen =
      0.002222
      -----
      (s+1.3) (s+15) (s+5.698e-05) (s^2 + 4)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> tf(Csen)
ans =
      0.002222
      -----
      s^5 + 16.3001s^4 + 65.2013s^3 + 78.0037s^2 + 0.0044s
Continuous-time transfer function.

>> num=[0.002222]
num =
      0.0022

>> den=[ 1 16.3001 65.2013 78.0037 0.0044 0]
den =
      1.0000      16.3001      65.2013      78.0037      0.0044      0
>> [coef, raiz, k]=residue(num, den)

coef =
      1.0e-04 *

      0.0026 + 0.0000i
      0.1178 - 0.5087i
      0.1178 + 0.5087i
      -0.2381 + 0.0000i
      0.2849 + 0.0000i

raiz =
      -11.0300 + 0.0000i
      -2.6350 + 0.3581i
      -2.6350 - 0.3581i
      -0.0000 + 0.0000i
      -0.0000 + 0.0000i

k =
      []

```

Com os valores dos coeficientes e das raízes é possível representar a saída do sistema, podendo então montar a resposta no tempo.

No domínio de Laplace temos:

$$C(s) = \frac{A_1}{(s + p_1)} + \frac{A_2}{(s + \sigma + j\omega)} + \frac{A_3}{(s + \sigma - j\omega)} + \frac{A_4}{s} + \frac{A_5}{s}$$

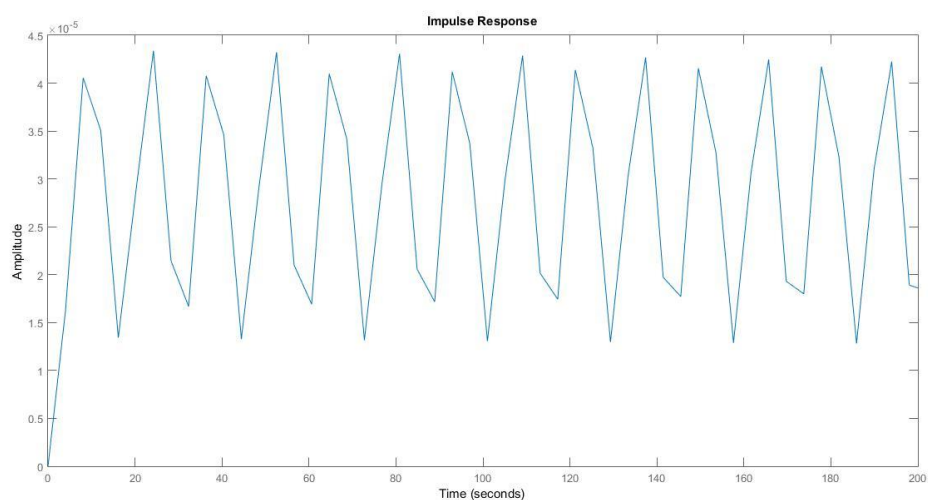
$$C(s) = \frac{0.00000026}{(s + 11.03)} + \frac{0.00001178 - j0.00005087}{(s + 2.6350 - j0.3581)} + \frac{0.00001178 + j0.00005087}{(s + 2.6350 + j0.3581)} + \frac{-0.00002381}{s} + \frac{0.00002849}{s}$$

No domínio do tempo temos:

$$c(t) = 2.6 \times 10^{-7} e^{-11.03t} + 0.00002356 e^{(-2.635 + j0.3581)t} + 4.68 \times 10^{-6}$$

Plotando o gráfico no MATLAB temos a figura 11.

Figura 11 – Resposta a entrada senoidal



## 5. ANÁLISE DA ESTABILIDADE

### 5.1. Avaliar as raízes de Q(S)

Q(s) é o polinômio denominador da função de transferência da malha fechada (ftmf). Portanto, quando todas as raízes desse polinômio, Q(s), possuem parte real negativa o sistema é considerado estável.

Pode-se obter as raízes desse polinômio através do comando pole(ftmf).

```
>> pole(ftmf)
ans =
    -15.0000
    -15.0000
    -1.2999
    -0.0001
```

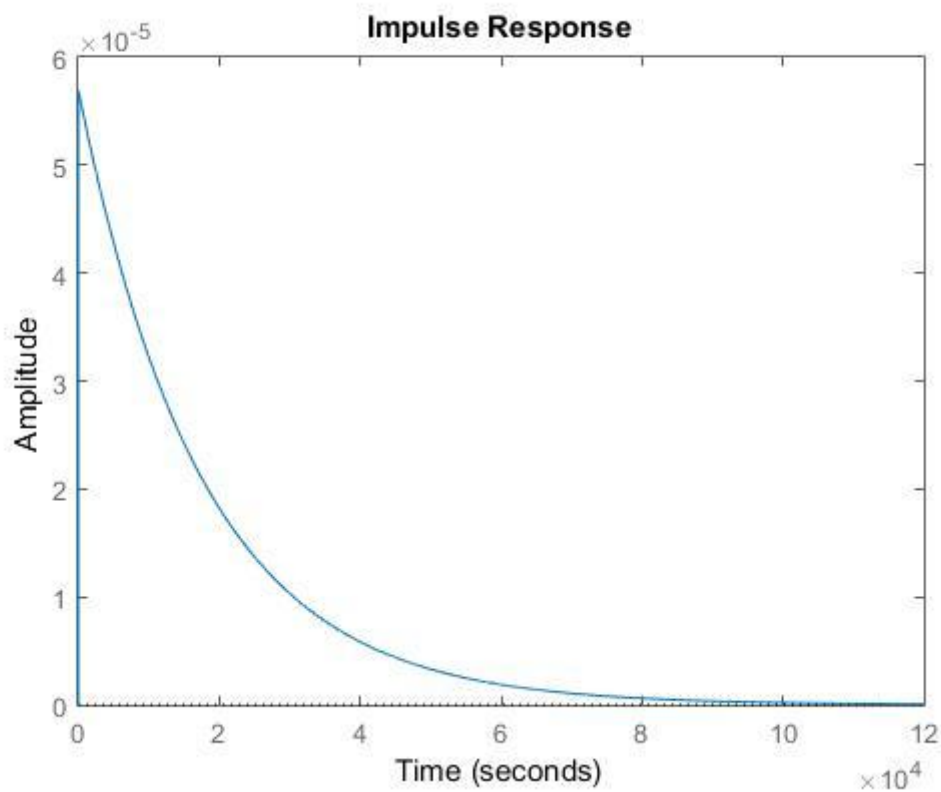
Logo, é possível observar que as raízes reais do polinômio são negativas, fazendo com que o sistema se torne estável.

## 5.2. Impulso unitário

Um sistema será estável quando a sua saída possuir uma tendência ao de sua entrada, dessa forma, para o caso da entrada impulso unitário, o sistema será estável quando seu valor tende a zero no infinito.

No sistema que está sendo simulado, essa condição pode ser comprovada por meio do gráfico da resposta ao impulso unitário na figura 12. Logo, tem-se um sistema estável.

Figura 12 – Resposta ao impulso unitário



### 5.3. Análise de Routh

Na tabela de Routh, para que o sistema seja considerado estável, não deve ocorrer mudança de sinal nos termos da primeira coluna da tabela.

$$Q(s) = s^3 + 16,3s^2 + 19,5s + 0,0011$$

Tabela 2 – Tabela de Routh

$s^3$	1	19,5	0
$s^2$	16,3	0,0011	0
$s^1$	19,5	0	
$s^0$	0,0011	0	
	0		

Conclui-se que o sistema é estável, pois não houve mudança de sinal na primeira coluna.

#### 5.3.1. Análise da variação da constante $K_p$

O critério de Routh pode ser usado para determinar o intervalo de  $K_p$  para o qual o sistema se torna estável. Mantendo  $K_p$  como uma incógnita, a função de malha aberta se torna:

$$\frac{0,0011}{s(s+15)(s+1,3)}$$

Fazendo a tabela de Routh:

Tabela 3 – Tabela de Routh

$s^3$	1	1,3	0
$s^2$	15	$0,0011K_p$	0
$s^1$	$\frac{317,85 - 0,0011K_p}{16,3}$	0	
$s^0$	$0,9903K_p$	0	
	0		

Para o sistema ser estável, a coluna 1 não pode mudar de sinal, logo:

$$\frac{317,85 - 0,0011K_p}{16,3} > 0 \text{ e } 0,0011K_p > 0$$

Sendo assim,  $K_p$  deve estar entre o intervalo:

$$K_p < \frac{317,85}{0,0011}$$

$$K_p < 288\,954,6$$

Esse resultado pode ser comprovado observando o gráfico do lugar das raízes, permite-se observar as regiões estáveis, quadrantes esquerdos, e as regiões instáveis, quadrante direito. Gerou-se o gráfico por meio do comando `rlocus(g)` e obtemos o intervalo de  $K_p$  pelo comando `rlocfind(g)`, podendo ser observado nas figuras 13 e 14.

Figura 13 – Gráfico do lugar da raízes

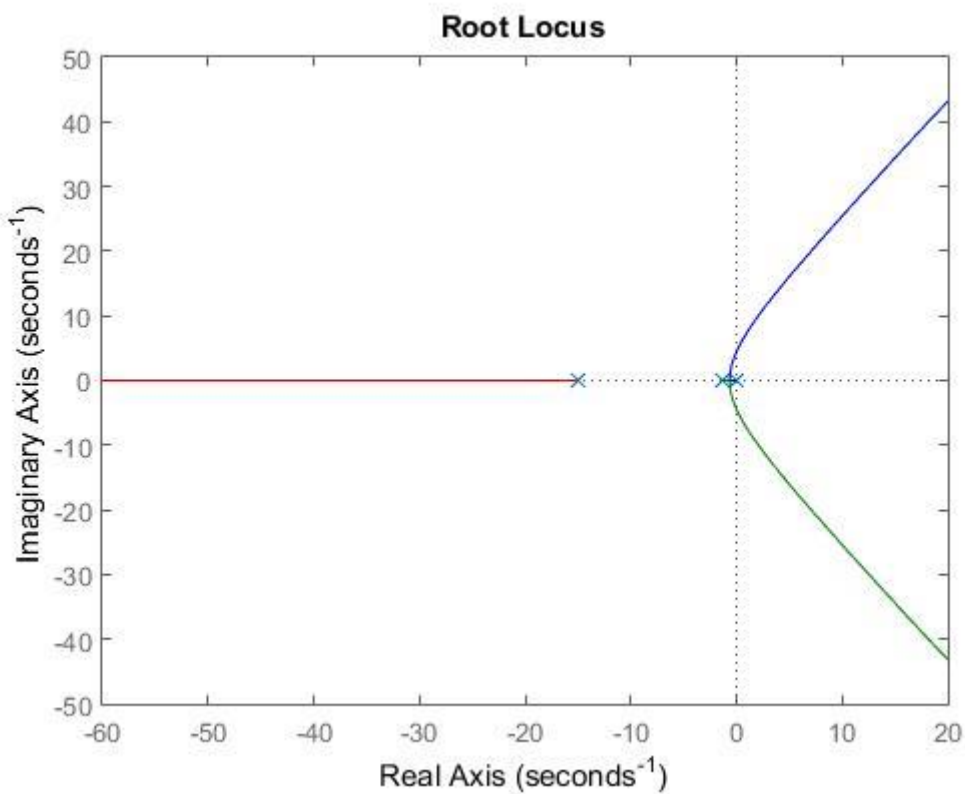
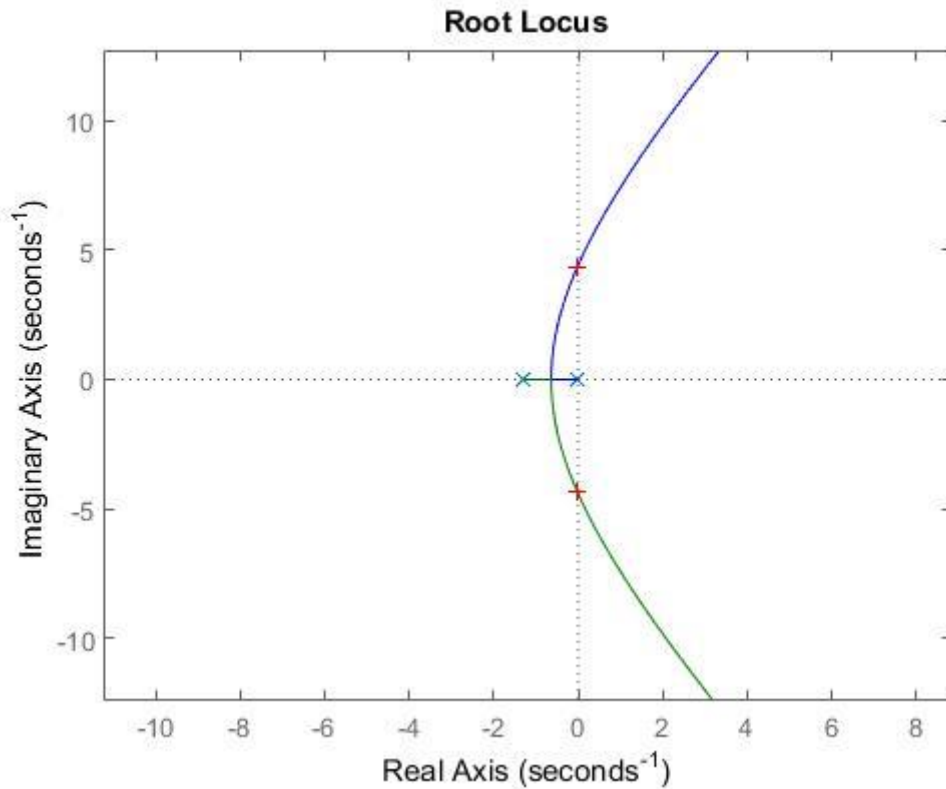




Figura 14 – Gráfico do lugar da raízes - zoom



```
>> rlocus(g)
>> rlocfind(g)
Select a point in the graphics window
selected_point =
    -0.0237 - 4.3344i
ans =
    2.7483e+05
```

Pode-se notar que o valor encontrado para o limite de  $K_p$ , no limiar da estabilidade, foi 274 830, se aproximando do valor calculado pelo critério de Routh, 288 954.

## 6. ANÁLISE DO ERRO ESTACIONÁRIO

### 6.1. Erro estacionário ao degrau unitário

O cálculo do erro em estado estacionário é feito com base no teorema do valor final, partindo da função de transferência:

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{S R(s)}{1 + G(s)} \right)$$

Para entrada degrau unitário ( $R(s) = \frac{1}{s}$ ):

$$0,0011$$

-----

$$s \quad (s+15) \quad (s+1,3)$$

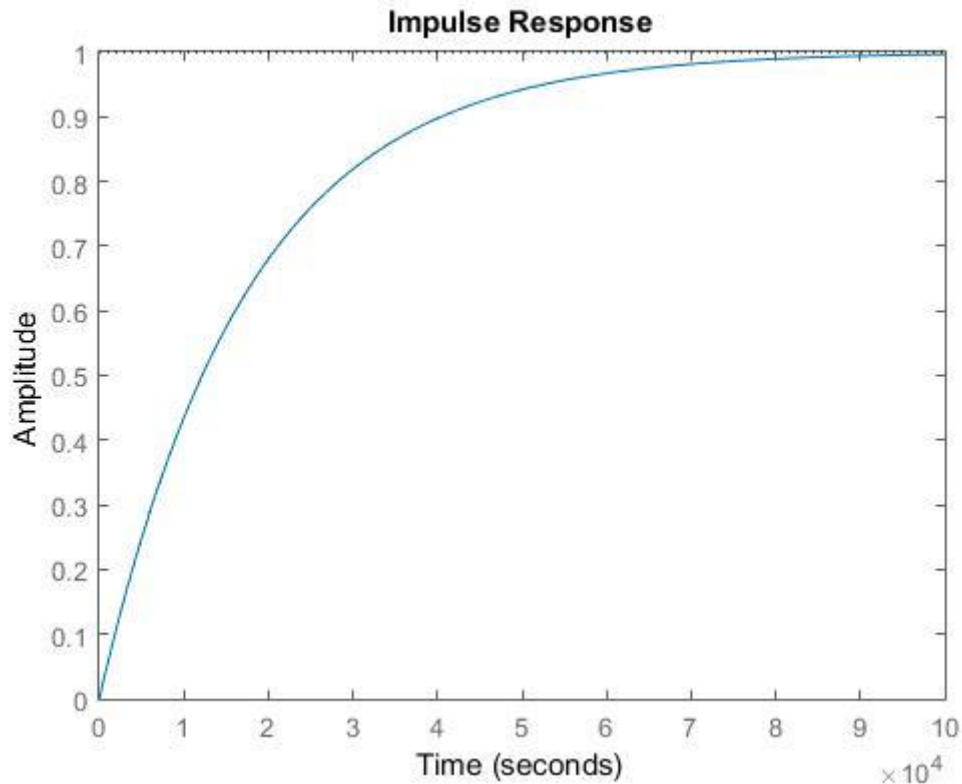
$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{S R(s)}{1 + G(s)} \right) = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{0,0011}{S(S + 15)(S + 1,3)} \right] = \frac{0,0011}{0} = \infty$$

$$e(t)_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Portanto, para uma entrada degrau unitário o erro é zero. A figura 15 mostra a resposta ao aplicar uma entrada degrau unitário, pode-se observar pelo gráfico que o valor da saída se torna o mesmo da entrada depois do transitório, ou seja, mostra que o erro é zero, como calculado anteriormente.

Figura 15 – Resposta ao degrau unitário



## 6.2. Erro estacionário à rampa unitária

Para entrada rampa unitária ( $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ):

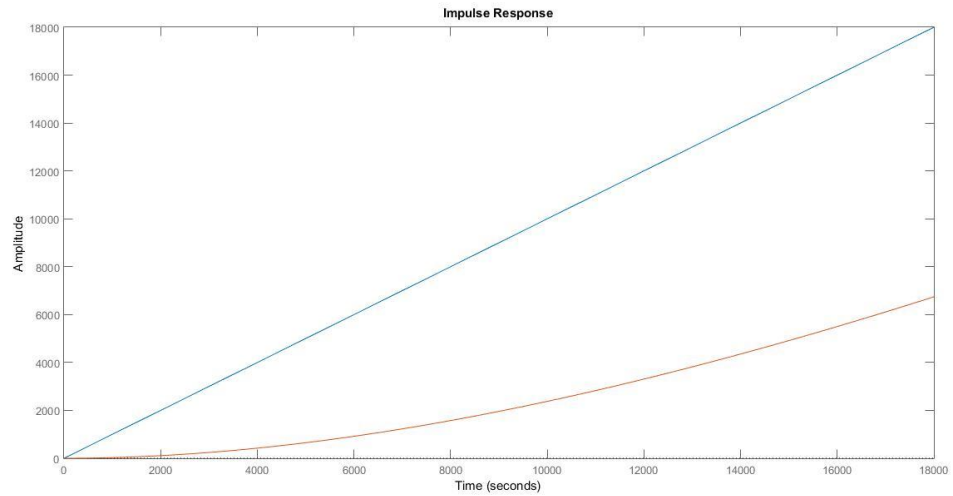
$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{S R(s)}{1 + G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{S (1/S^2)}{1 + G(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{S} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right]$$

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{S} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S + S G(s)} \right)$$

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{S + \frac{0,0011}{(S + 15)(S + 1,3)}} \right) = \frac{1}{0 + \frac{0,0011}{(0 + 15)(0 + 1,3)}} = 17\,727,27$$

Portanto o erro da rampa é de 17 727 . As figura 16 representam o gráfico da entrada (R) e a saída (C), o erro é a diferença entre a amplitude de entrada e saída valor próximo ao calculado.

Figura 16 – Gráfico da entrada (R) e a saída (C)



#### 6.2.1. Implementando um controlador proporcional – Integral

Para o caso em análise, temos que:

$$G(s) = \frac{0,0011}{s(s + 15)(s + 1,3)} \times \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right)$$

A função de transferência de malha fechada será:

$$FTMF(s) = \frac{0,0011K_p s + 0,0011K_i}{s^4 + 16,3s^3 + 19,5s^2 + 0,0011K_p s + 0,0011K_i}$$

Onde,

$$Q(s) = s^4 + 16,3s^3 + 19,5s^2 + 0,0011K_p s + 0,0011K_i$$

A tabela de Routh se torna:

$s^4$	1	19,5	$0,0011K_i$
$s^3$	16,3	$0,0011K_p$	0
$s^2$	$\frac{317,85 - 0,0011K_p}{16,3}$	$0,9903K_i$	0
$s^1$	$0,0011K_p - \frac{263,11K_i}{317,85 - 0,0011K_p}$	0	0
$s^0$	$0,0011K_i$	0	
	0		

Para o sistema ser estável a coluna 1 não pode mudar de sinal, logo:

$$\frac{317,85 - 0,0011K_p}{16,3} > 0$$

$$0,0011K_i > 0$$

$$0,0011K_p - \frac{263,11K_i}{317,85 - 0,0011K_p} > 0$$

Assim,

$$K_p < 288\,954,5$$

$$K_i > 0$$

$$\frac{263,11K_i}{317,85 - 0,0011K_p} < 0,0011K_p$$

$$263,11K_i < 0,3496K_p - 0,0011K_p^2$$

Para  $K_p$  e  $K_i$  foram escolhidos os seguintes valores:

$$K_p = 20$$

$$K_i = 1$$

Calculando a nova função de transferência:

$$G(s) = \frac{0,0011}{s(s+15)(s+1,3)} \times \left( K_p + \frac{K_i}{s} \right)$$

$$G(s) = \frac{0,0011}{s(s+15)(s+1,3)} \times \left( 20 + \frac{1}{s} \right)$$

$$G(s) = \frac{0,022}{s(s+15)(s+1,3)} \times \left( \frac{s+0,05}{s} \right)$$

$$G(s) = \frac{0,022 * (s+0,05)}{s^2(s+15)(s+1,3)}$$

Calculando o erro da rampa unitária, para entrada rampa unitária ( $R(s) = \frac{1}{s^2}$ ):

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s R(s)}{1 + G(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s (1/s^2)}{1 + G(s)} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right]$$

$$e(t)_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{s} \left( \frac{1}{1 + G(s)} \right) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{1}{s + s G(s)} \right)$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{0,022 * (s+0,05)}{s^2(s+15)(s+1,3)} \right] = \frac{0,0011}{0} = \infty$$

Dessa forma:

$$e(t)_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \frac{1}{1 + \infty} = 0$$

Portanto, podemos constatar que o erro estacionário à entrada Rampa Unitária, quando adiciona-se um controlador proporcional, é zero. Calculando o erro pelo MATLAB.

```
>> Gp=zpk([-0.05],[0,0,-15,-1.3],0.022)
Gp =
    0.022 (s+0.05)
-----
    s^2 (s+15) (s+1.3)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> ftmf2=minreal(Gp/(1+Gp))
ftmf2 =
          0.022 (s+0.05) (s+15)
-----
    (s+15)^2 (s+1.299) (s^2 + 0.001082s + 5.646e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.

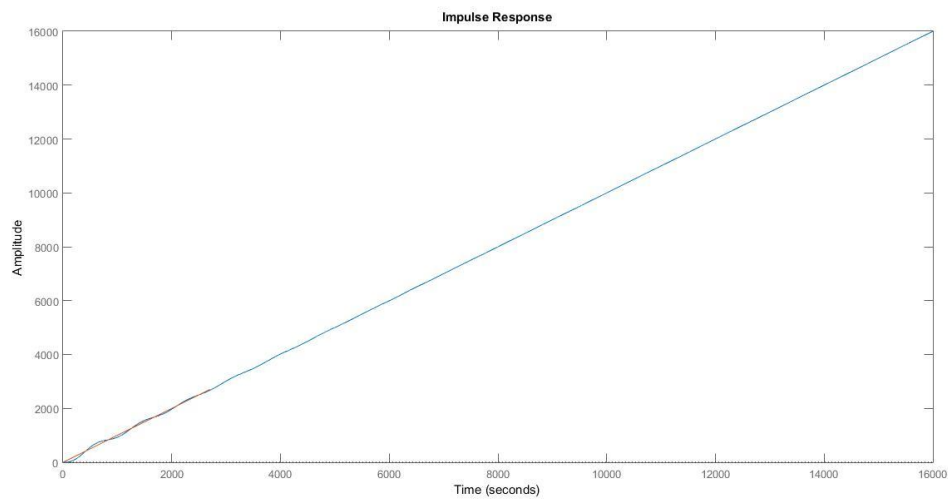
>> R_raampa=zpk([], [0,0],1)
R_raampa =
    1
---
    s^2
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> C=R_raampa*ftmf2
C =
          0.022 (s+0.05) (s+15)
-----
    s^2 (s+15)^2 (s+1.299) (s^2 + 0.001082s + 5.646e-05)
Continuous-time zero/pole/gain model.

>> impulse(C,R_raampa)
```

A figura 17 mostra que as retas da entrada  $r(t)$  e a saída  $c(t)$  estão sobrepostas, confirmando o que foi calculado, ou seja, o erro neste caso é igual a zero. Dessa forma, podemos utilizar esse controlador proporcional para eliminar o erro.

Figura 17 – Resposta à Rampa Unitária com Controlador Proporcional



## 7. ANÁLISE DO TRANSITÓRIO

Para a análise do transitório, escolheu-se um ponto no gráfico do lugar das raízes para o sistema subamortecido. O ponto escolhido foi:

```
>> rlocus(g)
>> rlocfind(g)
Select a point in the graphics window
selected_point =

    -0.3824 + 2.7992i
ans =
    1.1149e+05
```

Portanto,

$K = 111490$ ;  
 $\nabla = -0.3824$ ;  
 $W_d = 2.7992$ .

Calculando os parâmetros:

$W_n \rightarrow$  Frequência natural não amortecida do sistema

$$W_n^2 = W_d^2 + \nabla^2$$

$$W_n = \sqrt{2.7992^2 + (-0.3824)^2} = 2.8252$$

$\xi \rightarrow$  Coeficiente de amortecimento

$$\xi = \frac{\nabla}{W_n} = 0.1354$$

$M_p \rightarrow$  Ultrapassagem máxima

$$M_p = 1 + e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 1 + e^{\frac{-\pi(0,1354)}{\sqrt{1-(0,1354)^2}}} = 1,6509$$

$P.O. \rightarrow$  Sobreelevação percentual

$$P.O. = 100 e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 65,09\%$$

$T_p \rightarrow$  Tempo de pico

$$T_p = \frac{\pi}{W_d} = \frac{3,1416}{2,7992} = 1,1223s$$

$T_s \rightarrow$  Tempo de estabilização

Considerando que a saída atingiu e permaneceu dentro de 2% do seu valor final, tem se que:

$$T_s = \frac{4}{\xi W_n} = \frac{4}{(0,1354)(2,8252)} = 10,46 s$$

Através do MATLAB, substituindo o valor de K encontrado no lugar de Kp=1 e obtendo o gráfico via “step(fmf)”, para comprovar os cálculos:

```
>> k=111490
k =
    111490
>> gk = g*k
gk =
    123.87
-----
s (s+15) (s+1.3)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```



```
>> ftmf_k=minreal(gk/(1+gk))

ftmf_k =

          123.87
-----
(s+15.56) (s^2 + 0.7416s + 7.961)
Continuous-time zero/pole/gain model.
```

```
>> tf(ftmf_k)

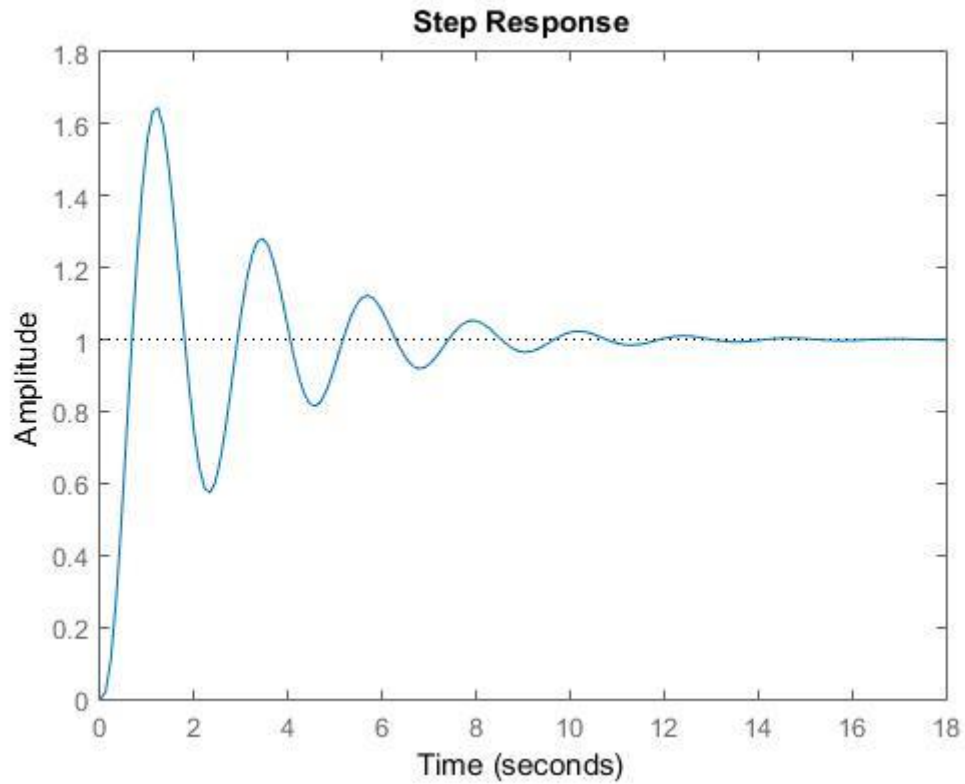
ans =

          123.9
-----
s^3 + 16.3 s^2 + 19.5 s + 123.9
Continuous-time transfer function.
```

```
>> step(ftmf_k)
```

Podemos observar na figura 19 que os valores encontrados por meio do gráficos são aproximados com os valores calculados.

Figura 19 – Resposta ao degrau unitário



Para um PO de 42% temos:

$P.O. \rightarrow$  Sobrelevação percentual

$$P.O. = 100 e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$42 = 100 e^{\frac{-\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$\xi = 0,26617$$

Para um  $T_s$  de 80 segundos, temos:

$$T_s = \frac{4}{\xi W_n} = 80$$

$$80 = \frac{4}{0,26 W_n}$$

$$W_n = 0,1878$$

Onde,

$$\xi = \frac{\nabla}{W_n}$$

$$\nabla = \xi * W_n = 0,0498 = 0,05$$

$$W_n^2 - \nabla^2 = W_d^2$$

$$W_d = 0,18102$$

Então usando rlocfind(g) em ponto próximo a -0,05+0,18102i, temos:

```
>> rlocfind(g)
Select a point in the graphics window
selected_point =
-0.5234 + 1.8159i
```

```
ans =
4.9014e+04
```

Conclui-se que para um PO de 42%, o valor de k é igual a 49 014.

## 8. ANÁLISE DA RESPOSTA EM FREQUÊNCIA

Para analisar a resposta em frequência, primeiramente calcula-se os parâmetros.

Margem de ganho:

$$MG = \frac{1}{|GH(jW_\pi)|}$$

Onde,  $W_\pi$  é a frequência de cruzamento de fase, ou seja, a frequência na qual o argumento de  $GH(jW_\pi)$  é igual à  $-180^\circ$ .

$$\phi_{pm} = [-\arg GH(jW_1)]$$

Onde  $W_1$  é a frequência de cruzamento de ganho, para a qual o modulo de  $GH(jW_1)$  é igual à 1.

Para o sistema analisado,

$$GH(S) = \frac{0,0011}{S(S+15)(S+1,3)}$$

Logo,

$$\begin{aligned} GH(jW) &= \frac{0,0011}{jW(jW+15)(jW+1,3)} = \frac{0,0011}{(jW)^3 + 16,3(jW)^2 + 19,5(jW)} \\ &= \frac{0,0011}{-jW^3 - 16,3W^2 + j19,5W} = \frac{0,9903}{-16,3W^2 + j(19,5W - W^3)} \\ |GH(jW)| &= \frac{0,0011}{\sqrt{(-16,3W^2)^2 + (19,5W - W^3)^2}} \\ \arg GH(jW) &= -\tan^{-1} \left( \frac{19,5W - W^3}{-16,3W^2} \right) \end{aligned}$$

Calculando  $W_\pi$  e  $W_1$ :

$$W_1 = |GH(jW)| = 1$$

$$1 = \frac{0,0011}{\sqrt{(-16,3W^2)^2 + (19,5W - W^3)^2}}$$

$$W^6 + 223,69W^4 + 380,25W^2 - 0.00000121 = 0$$

Utilizando o MATLAB temos que a raiz real positiva é:

```
>> p = [ 1 0 -223.69 0 380.25 0 -0.00000121]
p =
    1.0000         0 -223.6900         0  380.2500         0 -
0.0000
>> r=roots(p)
r =
-14.8989
 14.8989
 -1.3088
  1.3088
 -0.0001
  0.0001
```

$$W = 0,0001$$

Para  $W_\pi$ :

$$W_\pi = \arg GH(jW) = -180^\circ = -\tan^{-1}\left(\frac{19,5W - W^3}{-16,3W^2}\right)$$

$$-180^\circ = \tan^{-1}\left(\frac{19,5W - W^3}{-16,3W^2}\right)$$

$$0 = \frac{19,5W - W^3}{-16,3W^2}$$

$$0 = 19,5W - W^3$$

Utilizando o MATLAB temos que a raiz real positiva é:

```
>> q = [-1 0 19.5 0]
q =
 -1.0000         0  19.5000         0
```

```
>> r1=roots(q)
r1 =
      0
    4.4159
   -4.4159
```

$$W_{\pi} = 4,4159$$

Calculando a Margem de Ganho:

$$MG = \frac{1}{|GH(jW_{\pi})|} = \frac{1}{\frac{0,0011}{\sqrt{(-16,3W^2)^2 + (19,5W - W^3)^2}}}$$

Para  $W_{\pi}=4,4159$ :

$$MG = \frac{1}{|GH(jW_{\pi})|}$$

$$= \frac{\sqrt{(-16,3(4,4159)^2)^2 + (19,5(4,4159) - (4,4159)^3)^2}}{0,0011}$$

$$MG = 288\,957,1$$

$$MG = -20 \log(288957,1)$$

$$MG = -109,2db$$

Calculando a Margem de Fase:

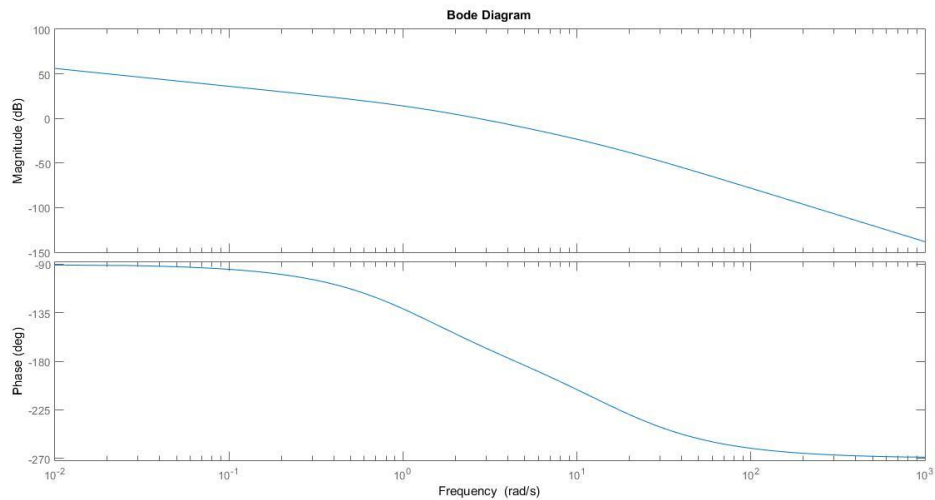
$$\phi_{pm} = [\arg GH(jW_1)] = -\tan^{-1} \left( \frac{19,5W - W^3}{-16,3W^2} \right)$$

$$\phi_{pm} = -\tan^{-1} \left( \frac{19,5(0,0001) - (0,0001)^3}{-16,3(0,0001)^2} \right)$$

$$\phi_{pm} = -\tan^{-1} \left( \frac{0,0195 - 0,000000000001}{-0,60197} \right)$$

$$\phi_{pm} = 89,95^{\circ}$$

Figura 22 - Diagrama de bode para a função de transferência analisada.



## 9. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A análise matemática e computacional do comportamento de um sistema de controle no que diz respeito a sua estabilidade, erro, transitório, dentre outros, apresentado no decorrer deste trabalho evidencia e resume, de certa forma, boa parte dos conteúdos de sistemas de controle tratados em sala de aula. Criando a possibilidade de verificar, por intermédio de simulação, os gráficos obtidos através da aplicação de diferentes teorias de servomecanismos.