CÁLCULO NUMÉRICO

Interpolação Polinomial

Gustavo Bono

Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Caruaru - Brasil

2017.2

1) Interpolação Polinomial: *Introdução*

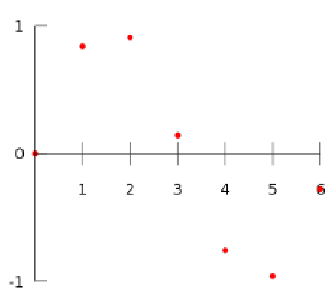
Suponha que temos um conjunto de pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ e os valores de uma função $f(x)$ nestes pontos $y_0 = f(x_0), \dots, y_n = f(x_n)$.

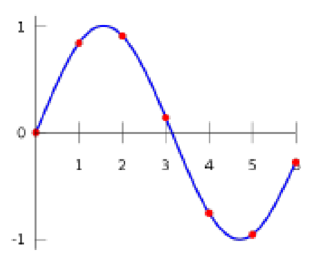
Interpolar a função $f(x)$ nos pontos $x_1, \dots, x_n$ consiste em aproximá-la por uma função g(x) tal que:

$$g(x_0) = y_0$$

$$\dots$$

$$g(x_2) = y_2$$





- Iremos supor que a função interpolante $g(x)$ é um **polinômio**.
- Porque polinômios? Polinômios são facilmente computáveis, suas derivadas e integrais são também polinômios, entre outros motivos.
- A interpolação polinomial é usada para aproximar uma função $f(x)$, principalmente, nas seguintes situações:
  - Não conhecemos a expressão analítica de $f(x)$. Isto é, somente conhecemos o valor da função em um conjunto de pontos (isso ocorre frequentemente quando se trabalha com dados experimentais).
  - $f(x)$ é complicada e de difícil manejo.
    - Interpolação será usada também para calcular a integral numérica de $f(x)$.
    - Veremos mais sobre isso em **Integração Numérica**.

- O problema geral da interpolação por meio de polinômios consiste em, **dados** $n+1$ pontos distintos

$$x_0, x_1, \dots, x_n$$

e $n+1$ números $y_0, y_1, \dots, y_n$, valores de uma função $y = f(x_n)$ em $x_0, x_1, \dots, x_n$, isto é

$$y_0 = f(x_0),\ y_1 = f(x_1),\ \dots\ y_n = f(x_n)$$

- Determinar um polinômio $P_n(x)$ de grau no máximo n tal que:

$$\boxed{P_n(x_0) = y_0,\ P_n(x_1) = y_1,\ \dots\ P_n(x_n) = y_n}$$

Veremos que tal polinômio <u>existe e é único</u>, desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam <u>distintos</u>.

- Sendo assim, procuramos um polinômio na forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ \dots + a_n x^n$$

- Para isso é preciso encontrar os coeficientes $a_0, a_1, \dots a_n$ de tal forma que $P_n(x)$ satisfaça

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ \dots + a_n x_0^n = y_0$$
$$P_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ \dots + a_n x_1^n = y_1$$
$$\vdots$$
$$P_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ \dots + a_n x_n^n = y_n$$

que pode ser visto como um sistema de equações lineares $(n+1) \times (n+1)$ onde as incógnitas são $a_0, a_1, \dots, a_n$.

1) Interpolação Polinomial: *Introdução*

- Escrevendo de forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- A matriz de coeficientes é chamada de <u>Matriz de Vandermonde</u>. Sabe-se que det(**A**) ≠ 0 desde que os pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$ sejam **distintos**.

Teorema

Dados $n + 1$ pontos <u>distintos</u> $x_0, x_1, \dots, x_n$ e seus valores $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, … ,$y_n = f(x_n)$, existe um <u>único</u> polinômio $P_n(x)$, de grau ≤ n, tal que:

$$P_n(x_i) = f(x_i), \qquad i = 0, 1, \dots, n$$

Cálculo Numérico – 2017.2 – Prof. Gustavo Bono

EXEMPLO: Interpolação linear

Este exemplo consiste em encontrar a reta que passa pelos pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1). Existe uma única reta que passa esses pontos. Então procuramos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

tal que

$$(i) \quad P_1(x_0) = a_0 + a_1 x_0 = y_0$$

$$(ii) \quad P_1(x_1) = a_0 + a_1 x_1 = y_1$$

De (i) temos que $a_0 = y_0 - a_1 x_0$. Substituindo em (ii) temos que

$$y_0 - a_1 x_0 + a_1 x_1 = y_1$$

$$a_1(x_1 - x_0) = y_1 - y_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

EXEMPLO: Interpolação linear

Como

$$a_0 = y_0 - a_1 x_0$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

temos

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x$$

$$P_1(x) = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x$$

$$P_1(x) = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

Basta avaliar $P_1(x)$ em $x = x_0$ e $x = x_1$ para verificar que de fato este é o polinômio interpolador de (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

Exemplo de interpolação linear

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
tan (x)	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

use interpolação linear para estimar o valor de tan (1.15).

Assim

$$(x_0, y_0) = (1.1, 1.9648), \qquad (x_1, y_1) = (1.2, 2.5722)$$

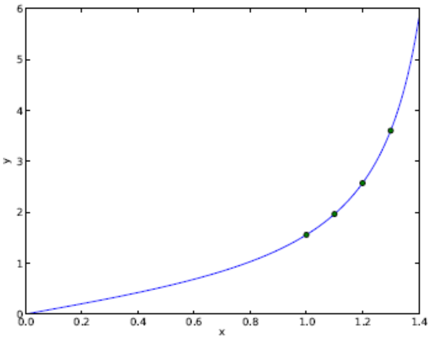
e portanto

$$\tan(1.15) \approx 1.9648 + \frac{(2.5722 - 1.9648)}{(1.2 - 1.1)}(1.15 - 1.1) = 2.2685$$

Valor exato: $\tan(1.15) = 2.2345$

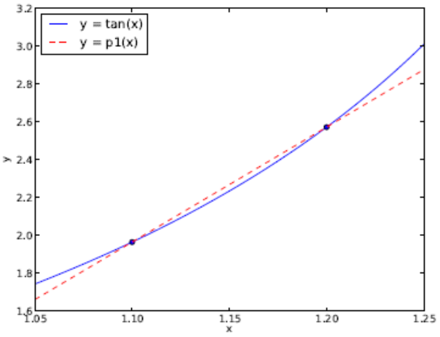
Resultado obtido com a interpolação linear

Exemplo



Resultado obtido com a interpolação linear (zoom)

Exemplo



De forma geral, dados (x_i, y_i) para $i = 0, 1, \ldots, n$, para encontrar o polinômio $P_n(x)$, precisamos resolver o sistema de equação lineares

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

usando algum método que já estudamos (Eliminação Gaussiana, Decomposição LU, etc).

Exemplo

x	-1	0	1
f(x)	0.54	1	0.54

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola estes pontos.

Exemplo

$$a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^{\ 2} = 0.54$$
$$a_0 + a_1(0) + a_2(0)^{\ 2} = 1.00$$
$$a_0 + a_1(1) + a_2(1)^{\ 2} = 0.54$$

isto é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1^2 \\ 1 & 0 & 0^2 \\ 1 & 1 & 1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.54 \\ 1 \\ 0.54 \end{bmatrix}$$

Resolvendo est sistema encontramos que $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $a_2 = -0.46$ e portanto

$$P_2(x) = 1 - 0.46x^2$$

Observações:

- Veremos formas mais simples de se obter o polinômio interpolante, sem a necessidade de resolver um sistema de equações linares.
- Além disso, a matriz de Vandermonde costuma ser **mal condicionada**, o que leva a perda de precisão na solução quando temos que resolver o sistema.

2.1) Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

Forma de Lagrange

Para ilustrar a ideia vamos começar com um exemplo onde temos três pontos distintos (x_0, y_0), (x_1, y_1) e (x_2, y_2). Queremos encontrar o polinômio

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

que satisfaz

$$P_2(x_i) = y_i, \qquad \mathrm{i} = 0, 1, 2$$

Para os dados fornecidos.

2.1 Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

Forma de Lagrange

Uma fórmula para encontrar tal polinômio é a seguinte:

$$P_2(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

onde

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

As funções $L_0(x)$, $L_1(x)$ e $L_2(x)$ são chamadas de *funções de base de Lagrange* para interpolação quadrática.

2.1) Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

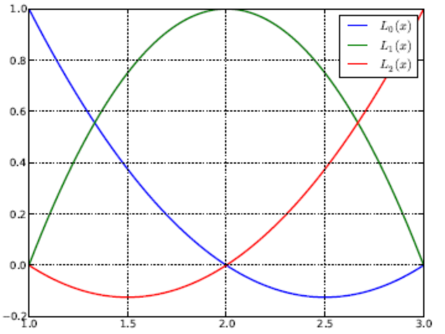


Figura: Exemplo das funções de base de Lagrange quadráticas.

2.1) Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

Essas funções possuem a seguinte propriedade

$$L_i(x_j) = \begin{cases} 1 & se\ i = j \\ 0 & se\ i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 0, 1, 2$. E ainda cada uma possui grau 2.

Consequentemente $P_2(x)$ tem grau ≤ 2 e assim fica claro que este polinômio interpola os dados, pois

$$P_2(x_0) = y_0 \underbrace{L_0(x_0)}_{=1} + y_1 \underbrace{L_1(x_0)}_{=0} + y_2 \underbrace{L_2(x_0)}_{=0} = y_0$$

$$P_2(x_1) = y_0 L_0(x_1) + y_1 L_1(x_1) + y_2 L_2(x_1) = y_1$$

$$P_2(x_2) = y_0 L_0(x_2) + y_1 L_1(x_2) + y_2 L_2(x_2) = y_2$$

Cálculo Numérico – 2017.2 – Prof. Gustavo Bono

Exemplo

Voltando ao exemplo anterior

x	-1	0	1
f(x)	0.54	1	0.54

Assim

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)} = \frac{x(x-1)}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} = \frac{x^2-1}{-1} = 1-x^2$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{x(x+1)}{2}$$

Exemplo

Obtemos então

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$= (0.54)\frac{x(x-1)}{2} + (1)(1-x^2) + (0,54)\frac{x(x+1)}{2}$$

$$= \frac{0.54}{2}x(x-1+x+1) + 1 - x^2$$

$$= 0.54x^2 + 1 - x^2$$

$$= 1 - 0.46x^2$$

Observe que este é o mesmo polinômio obtido anteriormente, pois como vimos este polinômio é único.

2.1) Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

Forma de Lagrange – Caso Geral

Vamos considerar que agora temos $n+1$ pontos:

$$(x_0, y_0), \ldots,, (x_n, y_n)$$

e queremos encontrar um polinômio $P_n(x)$ de grau $\leq n$ que interpola os pontos acima. Definido os polinômios de Lagrange:

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)}$$

$$= \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

logo o polinômio interpolador (na forma de Lagrange) é dado por:

$$\boxed{P_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \cdots + y_nL_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_iL_i(x)}$$

2.1) Interpolação Polinomial: *Forma de Lagrange*

Exemplo

Dada a seguinte tabela

x	1	1.1	1.2	1.3
tan (x)	1.5574	1.9648	2.5722	3.6021

podemos construir polinômios interpoladores de grau $n = 1, 2, 3$, com os seguintes nós

$$x_0 = 1, \qquad x_1 = 1.1, \qquad x_2 = 1.2, \qquad x_3 = 1.3$$

Sem descrever a construção temos os seguintes resultados

x	1	2	3
$P_n(x)$	2.2685	2.2435	2.2296
erro	-0.0340	-0.0090	0.0049

considerando que o valor exato é $\tan(1.15) = 2.2345$.

2.1) **Interpolação Polinomial:** *Forma de Lagrange*

Forma de Lagrange – Algoritmo

Entrada: n : número de pontos
x, y : vetores de dados
z : valor a interpolar

Saída: r : valor interpolado

```
r = 0;
Para i = 1 até n faça
   c = 1;
   d = 1;
   Para j = 1 até n faça
      Se i ≠ j então
         c = c*(z - x_j);
         d = d*(x_i - x_j);
   r = r + y_i*(c/d);
```


2.2) **Interpolação Polinomial:** *Diferenças Divididas*

Diferenças divididas

- Antes de estudarmos a forma de Newton para se obter o polinômio interpolador, iremos apresentar o conceito de operador de diferença dividida.
- Considere a função $f(x)$. A diferença dividida de *ordem zero* é simplesmente o valor de f no ponto x_i

$$f[x_i] = f(x_i)$$

- Considere agora dois pontos distintos x_0 e x_1, definimos

$$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

que é chamada de diferença dividida de primeira ordem de $f(x)$.

2.2) **Interpolação Polinomial:** *Diferenças Divididas*

Podemos definir os operadores de diferença dividida de ordem mais alta de forma **recursiva**:

- segunda ordem

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

- terceira ordem

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1,x_2,x_3]-f[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

- n-ésima ordem

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, \ldots, x_n] - f[x_0, \ldots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

* Lembrando que a definição é válida para $x_0, x_1, \ldots, x_n$ distintos.

2.2) **Interpolação Polinomial:** *Diferenças Divididas*

- Observe que, do lado direito de cada uma das expressões de diferença dividida de ordem > 1, precisamos aplicar sucessivamente a definição de diferença dividida até que os cálculos envolvam apenas o valor da função nos pontos.
- Exemplo:

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}$$

$$= \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

- Entretanto, como veremos a seguir, podemos calcular as diferenças divididas de uma função, de uma forma mais simples e sistemática.

Pelo **Teorema do Valor Médio**,

$$f(x_1) - f(x_0) = f'(c)(x_1 - x_0)$$

para algum c entre x_0 e x_1. Então

$$f[x_0, x_1] = f'(c)$$

e podemos ver que a diferença dividida é muito parecida com a derivada, especialmente se x_0 e x_1 são muito próximos.

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$ e $x_0 = 0.2$ e $x_1 = 0.3$. Então

$$f[x_0, x_1] = \frac{\cos(x_1) - \cos(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\cos(0.3) - \cos(0.2)}{0.3 - 0.2} = -0.2472\ldots$$

Note que

$$f'\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = -\sin\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right) = -0.2474\ldots$$

isto é

$$f[x_0, x_1] \approx f'\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)$$

Dada uma função $f(x)$ e um conjunto de pontos $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ podemos usar o seguinte esquema para calcular as suas diferenças divididas.

x_i	$f(x_i)$	$[x_i, x_j]$	$[x_i, x_j, x_k]$
x_0	$f[x_0] = f(x_0)$		
		$f[x_0, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_0]}{x_1-x_0}$	
x_1	$f[x_1] = f(x_1)$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$
		$f[x_1, x_2] = \frac{f[x_2]-f[x_1]}{x_2-x_1}$	
x_2	$f[x_2] = f(x_2)$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2,x_3]-f[x_1,x_2]}{x_3-x_1}$
		$f[x_2, x_3] = \frac{f[x_3]-f[x_2]}{x_3-x_2}$	
x_3	$f[x_3] = f(x_3)$		$f[x_2, x_3, x_4] = \frac{f[x_3,x_4]-f[x_2,x_3]}{x_4-x_2}$
		$f[x_3, x_4] = \frac{f[x_4]-f[x_3]}{x_4-x_3}$	
x_4	$f[x_0] = f(x_0)$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Exemplo

Seja $f(x) = \cos(x)$, encontre $f[x_0, x_1, x_2]$ onde $x_0 = 0.2, x_1 = 0.3, x_3 = 0.4$

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
0.2	0.980		
0.3	0.955	$\frac{0.955-0.98}{0.1}$	-0.475
0.4	0.921		

Observe que

$$\frac{1}{2} f''\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) = \frac{1}{2} f''(0.3) = -\frac{1}{2} cos(0.3) = -0.4777$$

$$f[0.2, 0.3, 0.4] \approx \frac{1}{2} f''(0.3)$$

2.2) Interpolação Polinomial: *Diferenças Divididas*

Analisando $f[x_0, x_1]$ vemos que

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f[x_1, x_0]$$

Ou seja, a ordem de x_0 e x_1 não importa. Podemos mostrar que de forma geral

$$f[x_0, \dots, x_n] = f\left[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}\right]$$

para qualquer permutação $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ de $(0, 1, \dots, n)$.

2.3) Interpolação Polinomial: *Forma de Newton*

Forma de Newton

Considere que os dados sejam gerados de uma função $f(x)$

$$y_i = f(x_i), \qquad i = 0,1, \dots, n$$

Usando as **diferenças divididas**

$$f[x_0, x_1], \qquad f[x_0, x_1, x_2], \qquad f[x_0, \dots, x_n]$$

Podemos escrever polinômios interpoladores

$$P_1(x), \qquad P_2(x), \qquad \dots, \qquad P_n(x)$$

De forma simples de calcular

$$P_1(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

$$P_2(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

$$= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$

Para o caso geral, temos

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

Que podemos escrever de forma recursiva como

$$\boxed{P_n(x) = P_{n-1}(x) + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})}$$

Observações:

- Desta forma, tendo em mãos um polinômio de grau $\leq n - 1$, sobre n pontos, podemos obter $P_n(x)$ apenas somando o último termo associado ao operador diferença dividida de ordem n.
- Note a semelhança com a série de Taylor.

Polinômio interpolador na forma de Newton

$$\begin{aligned} P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots \\ + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0) \ldots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

é o polinômio de interpolação da função $y = f(x)$ sobre os pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$, isto é,

$$P_n(x_k) = f(x_k), \qquad k = 0,1, \ldots, n$$

Exemplo

Encontre o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os dados:

x	-1	0	1
f(x)	0.54	1	0.54

Pela forma de Newton temos

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2
-1	0.54	0.46	-0.46
0	1	-0.46	
1	0.54		

Logo o polinômio $P_2(x)$ na forma de Newton é dado por

$$P_2(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$= 0.54 + 0.46(x + 1) - 0.46(x + 1)(x - 0) = 1 - 0.46x^2$$

Exemplo 2

Encontre o polinômio que interpola os dados

x	0.1	0.3	0.4	0.6
f(x)	0.3162	0.5477	0.6325	0.7746

usando a forma de Newton

x	$f(x)$	ordem 1	ordem 2	ordem 3
0.1	0.3162	1.158	-1.0333	1.1494
0.3	0.5477	0.848	-0.4583	
0.4	0.6325	0.710		
0.6	0.7746			

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

2.3) **Interpolação Polinomial:** *Forma de Newton*

Exemplo 2

$$P_3(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1)$$
$$+f[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$
$$= 0.3162 + (1.158)(x - 0.1) + (-1.033)(x - 0.1)(x - 0.3)$$
$$+(1.1494)(x - 0.1)(x - 0.3)(x - 0.4)$$
$$= 1.1494x^3 - 1.95252x^2 + 1.789586X = 0.1556172$$

Vamos avaliar o polinômio em $x = 0.2$

$$P_3(0.2) = 0.3162 + (1.158)(0.2 - 0.1) + (-1.033)(0.2 - 0.1)(0.2 - 0.3)$$
$$+(1.1494)(0.2 - 0.1)(0.2 - 0.3)(0.2 - 0.4)$$
$$= 0.3162 = 91.158)(0.2 - 0.1) + (-1.033)(0.1)(-0.1)$$
$$+(1.1494)(0.1)(-0.1)(-0.2) = 0.4446288$$

3) **Interpolação Polinomial:** *Erro na Interpolação*

Estimativa do erro na interpolação

Sejam $x_0, \dots, x_n$ um conjunto de $n + 1$ pontos distintos. Seja $f(x)$ uma função $n +$ 1 continuamente diferenciável. Então, em qualquer ponto x entre $x_0, \dots, x_n$ o erro é dado por:

$$\boxed{E_n(x) = f(x) - P_n(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}}$$

onde ξ está entre $x_0, \dots, x_n$.

- A importância do teorema do erro é mais teórica do que prática, visto que não conhecemos o ponto ξ.
- Na prática para **estimar** o erro cometido ao aproximar o valor da função em um ponto por seu polinômio interpolador, usando o seguinte resultado.
- Seja $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Se $f(x)$ e suas derivadas até ordem $n+1$ são contínuas em $[a, b]$, então:

$$\boxed{|E_n(x)| \leq \frac{|x - x_0||x - x_1| \dots |x - x_n|}{(n+1)!} \max_{a \leq t \leq b} \left| f^{(n+1)}(t) \right|}$$

3) Interpolação Polinomial: *Erro na Interpolação*

Exemplo

Seja $f(x) = e^x$ e o polinômio que interpola $P_1(x)$ nos pontos $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Estimar o erro para um ponto x entre x_0 e x_1.

Pela fórmula do erro

$$|E_1(x)| \leq |x - x_0||x - x_1| \max_{x \in [x_0, x_1]} \frac{f''(x)}{2}$$

Considerando que $x_0 < x_1$ e que $f''(x) = e^x$, temos que

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} e^x = e^{x_1} \leq e^1$$

pois $x_0, x_1 \in [0, 1]$. Logo

$$|E_1(x)| \leq |x - x_0||x - x_1| \frac{e}{2}$$

3) Interpolação Polinomial: *Erro na Interpolação*

Exemplo

$$|E_1(x)| \leq |x - x_0||x - x_1|\frac{e}{2}$$

Vamos calcular agora o maior que $|x - x_0||x - x_1|$ pode tomar no intervalo $[x_0, x_1]$.

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1)$$

$$w'^{(x)} = (x - x_1) + (x - x_0) = 0 \rightarrow x = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

Considere que $x_1 - x_0 = h$, então $x = \frac{x_0 + x_0 + h}{2} = x_0 + \frac{h}{2}$. Logo

$$w\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) = \left(x_0 + \frac{h}{2} - x_0\right)\left(x_0 + \frac{h}{2} - x_0 - \mathrm{h}\right) = \frac{h}{2}\left(-\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^2}{4}$$

e assim

$$|E_1(x)| \leq \frac{h^2}{4}\frac{e}{2} = \frac{h^2 e}{8}$$

Dúvidas ??

Obrigado

Críticas e sugestões serão bem-vindas, pois assim poderão ser melhoradas as aulas/slides.
bonogustavo@gmail.com