CÁLCULO NUMÉRICO

Integração Numérica

Gustavo Bono

Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Caruaru - Brasil

2017.2

Campus AGRESTE

1) Integração Numérica: *Introdução*

- Calcular **integrais** é uma tarefa rotineira na engenharia/física, aparecendo em muitos problemas;
- Diferente de outras operações matemáticas, a integração de funções não é uma tarefa simples. Por exemplo, pode-se derivar quase qualquer tipo de função, independentemente de sua complexidade;
- Por exemplos precisamos integrar para:

❑ **Calcular o comprimento da curva da pela função *f* entre *a* e *b***

2 THE ARC LENGTH FORMULA If f' is continuous on $[a, b]$, then the length of the curve $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, is

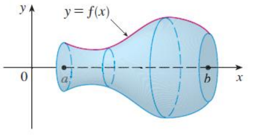
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Campus AGRESTE

1) **Integração Numérica:** *Introdução*

❑ Calcular a área de uma superfície de revolução



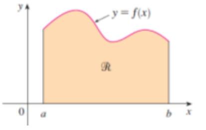
(a) Surface of revolution

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

❑ Centro de massa e momento estático

$$\bar{x} = \frac{1}{A}\int_a^b x f(x)\, dx \qquad \bar{y} = \frac{1}{A}\int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$



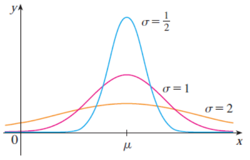
$$M_x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \rho \cdot \tfrac{1}{2}[f(\bar{x}_i)]^2\, \Delta x = \rho \int_a^b \tfrac{1}{2}[f(x)]^2\, dx$$

$$M_y = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} \rho \bar{x}_i f(\bar{x}_i)\, \Delta x = \rho \int_a^b x f(x)\, dx$$

Campus AGRESTE

1) **Integração Numérica:** *Introdução*

❑ Probabilidade e estatística (função de distribuição)

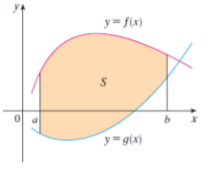


$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}\, dx = 1$$

❑ Área entre duas curvas

2 The area A of the region bounded by the curves $y = f(x)$, $y = g(x)$, and the lines $x = a$, $x = b$, where f and t are continuous and $f(x) \geqslant t(x)$ for all x in $[a, b]$, is

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$



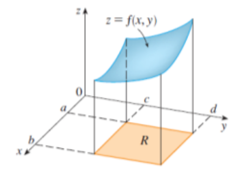
Campus AGRESTE

1) Integração Numérica: *Introdução*

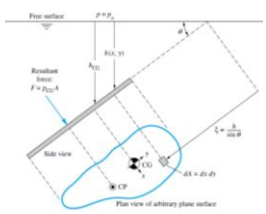
❑ Calculo de volume

If $f(x, y) \geq 0$, then the volume V of the solid that lies above the rectangle R and below the surface $z = f(x, y)$ is

$$V = \iint_R f(x, y)\, dA$$



❑ Determinação da força hidrostática



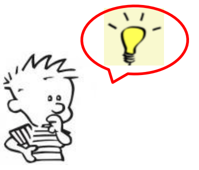
$$F = \int p\, dA = \int (p_a + \gamma h)\, dA = p_a A + \gamma \int h\, dA$$

1) Integração Numérica: *Introdução*

❑ Calculo da área

$f(x)$

$g(x)$



2 The area A of the region bounded by the curves $y = f(x)$, $y = g(x)$, and the lines $x = a$, $x = b$, where f and g are continuous and $f(x) \geq g(x)$ for all x in $[a, b]$, is

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

Resolver as integrais

- $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\, log\, \frac{x^2 + x\sqrt{2+1}}{x^2 - x\sqrt{2+1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[arc\ tg \frac{x}{\sqrt{2}-x} + arc\ tg \frac{x}{\sqrt{2}+x}\right]$$

- $$\int_0^{\pi} \cos(4x)\cos(3\,\mathrm{sen}(x))\,dx = \pi\left(\frac{3}{2}\right)^4 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-9/4)^k}{k!(k+4)!}$$

- $$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\, dx = \int \sin^m x\,(\cos^2 x)^k \cos x\, dx = \int \sin^m x\,(1-\sin^2 x)^k \cos x\, dx$$

No presente capitulo estamos interessados em estudar métodos numéricos para calcular de forma aproximada a integral de uma função com uma variável real em um intervalo $[a, b]$.

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS, PART 1 If f is continuous on $[a, b]$, then the function g defined by

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad a \leq x \leq b$$

is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b), and $g'(x) = f(x)$.

THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS, PART 2 If f is continuous on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

where F is any antiderivative of f, that is, a function such that $F' = f$.

Para se obter a integral devemos encontrar uma primitiva F(x). Isto é, encontrar uma função F ’(x) = f(x) para todo $x \in [a,b]$.

1) Integração Numérica: *Revisão de Cálculo*

Por exemplo:

$$\int_a^b x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

Achar a primitiva $F(x) = \int_a^b f(u)\,du$ não é uma tarefa simples.

Não existe uma método geral que forneça a primitiva F(x) para uma função arbitrária f(x). Existem algumas regras de integração (ver C1, C2) que podem nos auxiliar em alguns casos.

1) Integração Numérica: *Revisão de Cálculo*

➢ Regras de integração

1 TABLE OF INDEFINITE INTEGRALS

$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$	$\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
$\int k\,dx = kx + C$	
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$
$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \tan^{-1}x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \sin^{-1}x + C$
$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$	$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$

1) **Integração Numérica:** *Revisão de Cálculo*

➢ Principais técnicas de integração:

(1) Substituição de variáveis

4 THE SUBSTITUTION RULE If $u = g(x)$ is a differentiable function whose range is an interval I and f is continuous on I, then

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

EXAMPLE 2 Evaluate $\int \sqrt{2x+1}\,dx$.

SOLUTION 1 Let $u = 2x + 1$. Then $du = 2\,dx$, so $dx = du/2$. Thus the Substitution Rule gives

$$\begin{aligned}\int \sqrt{2x+1}\,dx &= \int \sqrt{u}\,\frac{du}{2} = \tfrac{1}{2}\int u^{1/2}\,du \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C = \tfrac{1}{3}u^{3/2} + C \\ &= \tfrac{1}{3}(2x+1)^{3/2} + C\end{aligned}$$

1) **Integração Numérica:** *Revisão de Cálculo*

➢ Principais técnicas de integração:

(2) Integração por partes

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

EXAMPLE 2 Evaluate $\int \ln x\,dx$.

SOLUTION Here we don't have much choice for u and dv. Let

$$u = \ln x \qquad dv = dx$$

Then

$$du = \frac{1}{x}\,dx \qquad v = x$$

Integrating by parts, we get

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\,\frac{dx}{x} \\ &= x\ln x - \int dx \\ &= x\ln x - x + C\end{aligned}$$

➢ Principais técnicas de integração:

3) Integrais com potências de funções trigonométricas

EXAMPLE 2 Find $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx$.

SOLUTION We could convert $\cos^2 x$ to $1 - \sin^2 x$, but we would be left with an expression in terms of $\sin x$ with no extra $\cos x$ factor. Instead, we separate a single sine factor and rewrite the remaining $\sin^4 x$ factor in terms of $\cos x$:

$$\sin^5 x \cos^2 x = (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x = (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x$$

Substituting $u = \cos x$, we have $du = -\sin x \, dx$ and so

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - \cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x \, dx \\ &= \int (1 - u^2)^2 u^2 (-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6) \, du \\ &= -\left(\frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\right) + C \\ &= -\tfrac{1}{3}\cos^3 x + \tfrac{2}{5}\cos^5 x - \tfrac{1}{7}\cos^7 x + C\end{aligned}$$

➢ Principais técnicas de integração:

(4) Integrais com raízes

EXAMPLE 5 Evaluate $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$, where $a > 0$.

SOLUTION 1 We let $x = a \sec \theta$, where $0 < \theta < \pi/2$ or $\pi < \theta < 3\pi/2$. Then $dx = a \sec \theta \tan \theta \, d\theta$ and

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2 \tan^2\theta} = a|\tan\theta| = a \tan\theta$$

Therefore

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \sec\theta \tan\theta}{a \tan\theta} \, d\theta \\ &= \int \sec\theta \, d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C\end{aligned}$$

The triangle in Figure 4 gives $\tan\theta = \sqrt{x^2 - a^2}/a$, so we have

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right| + C \\ &= \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a + C\end{aligned}$$

Writing $C_1 = C - \ln a$, we have

$$\boxed{1} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C_1$$

1) Integração Numérica: *Revisão de Cálculo*

- Principais técnicas de integração:

(5) Frações parciais

EXAMPLE 3 Find $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, where $a \neq 0$.

SOLUTION The method of partial fractions gives

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x-a)(x+a)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}$$

and therefore $\qquad A(x+a) + B(x-a) = 1$

Using the method of the preceding note, we put $x = a$ in this equation and get $A(2a) = 1$, so $A = 1/(2a)$. If we put $x = -a$, we get $B(-2a) = 1$, so $B = -1/(2a)$. Thus

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx$$

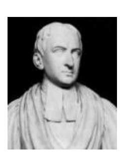
$$= \frac{1}{2a} \left(\ln|x-a| - \ln|x+a| \right) + C$$

Since $\ln x - \ln y = \ln(x/y)$, we can write the integral as

6 $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

Fórmulas de Newton - Cotes

Isaac Newton
1643-1727
(Matemático e físico Inglês)

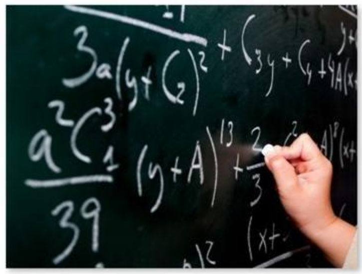


Roger Cotes
1682-1716
(Matemático Inglês)

2) Integração Numérica: *Fórmulas Fechadas de Newton-Cotes*

3) Integração Numérica: *Análise do Erro*

4) Integração Numérica: *Regras de Integração Generalizadas*



5) Integração Numérica: *Análise dos Erros das Fórmulas Generalizadas*

Método dos Coeficientes Indeterminados

Até o momento obtimos uma regra para integração numérica, integrando o polinômio interpolador do integrando.

A seguir veremos uma forma alternativa de derivar as fórmulas de integração numérica.

As fórmulas de integração numérica são do tipo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum w_i f(x_i)$$

onde w_i são constantes e $f(x_i)$ são os valores da função f nos pontos x_i.

Por exemplo:

- *Trapézio* $$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)] - \frac{h^3}{12} f''(\xi), \quad \text{where} \quad x_0 < \xi < x_1.$$
- *Simpson (1/3)* $$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(\xi), \quad \text{where} \quad x_0 < \xi < x_2.$$
- *Simpson (3/8)* $$\int_{x_0}^{x_3} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] - \frac{3h^5}{80} f^{(4)}(\xi),$$ $$\text{where} \quad x_0 < \xi < x_3.$$

No *método dos Coeficientes Indeterminados*, consideramos os pontos $x_0, \dots, x_n$ dados e buscamos determinar os coeficientes $w_0, \dots, w_n$ de tal forma que a fórmula de integração numérica:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum w_i f(x_i)$$

seja **exata** para certos tipos de funções, como por exemplo quando $f(x)$ é um polinômio de grau <= n.

EXEMPLO 1

Procuramos uma fórmula do tipo

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

que será *exata* para todos os *polinômios de grau <= 2*, isto é, quando $f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$ então a fórmula de integração numérica fornece o valor exato da integral.

6) Integração Numérica: *Método dos Coeficientes Indeterminados*

Como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right] dx$$
$$= c_0 \int_a^b dx + c_1 \int_a^b x\,dx + c_2 \int_a^b x^2 dx$$

Basicamente, exigir que a fórmula integre a função $f(x)$ exatamente é o mesmo que exigir que a fórmula integre as funções base 1, x e x^2 exatamente. Assim temos que:

$$f(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad w_0 1 + w_1 1 + w_2 1 = \int_a^b dx$$
$$f(x) = x \quad \Rightarrow \quad w_0 x_0 + w_1 x_1 + w_2 x_2 = \int_a^b x\,dx$$
$$f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad w_0 x_0^2 + w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \int_a^b x^2 dx$$

Cálculo Numérico – UFPE – 2017.2 – Prof. GUSTAVO BONO

Calculando as integrais, obtemos:

$$\int_a^b dx = (b-a)$$

$$\int_a^b x\,dx = \frac{(b^2-a^2)}{2}$$

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{(b^3-a^3)}{3}$$

Assim, considerando que $x_0 = a$, $x_1 = (a+b)/2$ e $x_2 = b$, podemos escrever as equações de forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & \dfrac{a+b}{2} & b \\ a^2 & \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 & b^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b-a \\ \dfrac{(b^2-a^2)}{2} \\ \dfrac{(b^3-a^3)}{3} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo o sistema de equações lineares, obtemos os coeficientes da fórmula de integração:

$$w_0 = \frac{b-a}{6}, \quad w_1 = \frac{2(b-a)}{3}, \quad w_2 = \frac{b-a}{6}$$

Substituindo na equação, temos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2)$$

$$\approx \left(\frac{b-a}{6}\right) f(x_0) + \frac{2(b-a)}{3} f(x_1) + \left(\frac{b-a}{6}\right) f(x_2)$$

Considerando $h = (b - a)/2$ obtemos:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \left(\frac{h}{3}\right) f(x_0) + \left(\frac{4h}{3}\right) f(x_1) + \left(\frac{h}{3}\right) f(x_2)$$

$$\approx \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4 f(x_1) + f(x_2) \right]$$

Quadratura de Gauss

Carl Friedrich Gauss
1777-1855
(Alemanha)
Método apresentado o 16 de setembro de 1814 para a *Göttingen Society*.

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

As regras de integração de Newton-Cotes são simples e efetivas, mas possuem algumas desvantagens tais como:

- ❑ Uso de muitos pontos para interpolação de alta ordem pode gerar alguns problemas;
- ❑ As regras de Newton-Cotes fechadas requerem a avaliação de $f(x)$ nos pontos do extremo do intervalo, onde geralmente ocorrem singularidades;
- ❑ As regras do tipo Newton-Cotes, não possuem um grau de precisão tão alto quanto poderiam.

A quadratura gaussiana permite que muitas dessas desvantagens sejam contornadas.

Estamos interessados em obter uma fórmula de integração na forma:

$$I = \int_a^b f(x)dx = w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1) + \ldots + w_n f(x_n)$$

onde os coeficientes w_i assim como os pontos x_i para $i = 0, 1, \ldots, n$ devem ser determinados de forma a obter a melhor precisão possível.

As incógnitas do problema são:

- $x_0, x_1, \ldots, x_n$
- $w_0, w_1, \ldots, w_n$

ou seja, temos um total de ***(2 n + 2) incógnitas*** a serem determinadas.

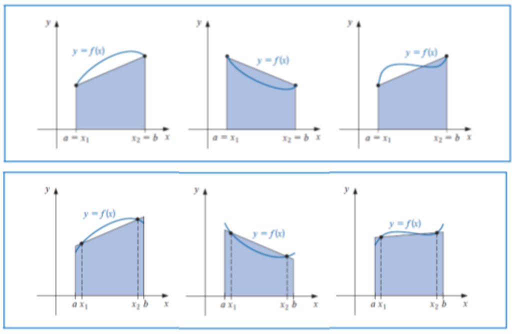
Sendo assim, podemos esperar que as regras que iremos obter sejam capazes de integrar exatamente polinômios de grau <= $2n + 1$ uma vez que estes são definidos por ($2\ n + 2$) parâmetros.

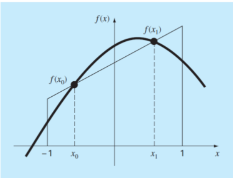
Vamos apresentar a ideia do método para o caso particular de **2 pontos**.

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1)$$ **2 Pontos**

Para aplicar a regras de Quadratura Guassiana vamos a considerar o intervalo [-1,1], sem perda de generalidade, já que sempre podemos fazer uma mudança de variável para mudar do intervalo [a,b] para [-1,1] para realizar a integração.

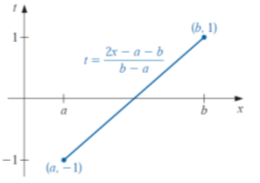




7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

Seja $x \in [a, b]$, vamos a considerar a seguinte ***mudança de variável***:

$$x(t) = \frac{(b-a)t}{2} + \frac{b+a}{2}, \qquad t \in [-1, 1]$$



Qualquer que seja $x \in [a, b]$, existe $t \in [-1, 1]$ tal que $x = x(t)$. Portanto:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = \frac{b-a}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2} dt$$

Substituindo na integral I, os valores de $x = x(t)$ e $dx = x'(t)\,dt$, obtemos:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x(t))\,x'(t)\,dt = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt$$

onde,

$$F(t) = f(x(t))\,x'(t) = f\left(t\frac{(b-a)}{2} + \frac{b+a}{2}\right)\frac{b-a}{2}$$

Campus AGRESTE

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

A integral agora fica definida como:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt \approx w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1)$$

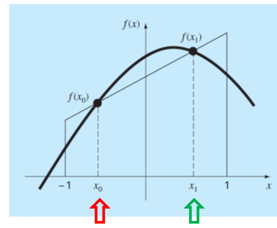
Cálculo Numérico – UFPE – 2017.2 – Prof. GUSTAVO BONO

Campus AGRESTE

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

A integral agora fica definida como:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1)$$
$$= 1F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 1F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$



- Fórmula de *Quadratura Gaussiana* (**2 pontos**) → Solução exata para polinômios de **grau <= 3**

- Fórmulas de Newton-Cotes (**2 pontos**): *Regra do Trapézio* → Integra apenas polinômios de **grau 1**

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

Para o caso de **3 pontos** a integral agora fica definida como:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) + w_2 F(t_2)$$

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

Para o caso de **3 pontos** a integral agora fica definida como:

$$I = \int_{-1}^{1} F(t)\,dt = w_0 F(t_0) + w_1 F(t_1) + w_2 F(t_2)$$
$$= \frac{5}{9} F\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} F(0) + \frac{5}{9} F\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

- Fórmula de *Quadratura Gaussiana* (**3 pontos**) $\longrightarrow$ Solução exata para polinômios de **grau <= 5**

- Fórmulas de Newton-Cotes (**3 pontos**): *Regra 1/3 de Simpson* $\longrightarrow$ Integra apenas polinômios de **grau 2**

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

EXEMPLO 2

Calcule a integral usando a Quadratura Gaussiana com **2** e **3 pontos**.

$$\int_1^3 3\,e^x\,dx = 52{,}101765$$

EXEMPLO 3

Calcule a integral usando as regras do Trapézio, 1/3 de Simpson, 3/8 de Simpson e Quadratura Gaussiana com **2** e **3 pontos**.

$$\int_1^3 x^6 - x^2 sen(2x)\,dx = 317{,}3442466$$

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^{n} w_j f(t_j)$$

n	t_j	w_j
1	0	2
2	$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
3	0	$\frac{8}{9}$
	$\pm\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\frac{5}{9}$
4	$\pm\sqrt{\left(3-2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$
	$\pm\sqrt{\left(3+2\sqrt{6/5}\right)/7}$	$\frac{18-\sqrt{30}}{36}$
5	0	$\frac{128}{225}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322+13\sqrt{70}}{900}$
	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}$	$\frac{322-13\sqrt{70}}{900}$

7) Integração Numérica: *Quadratura de Gauss*

$$I \cong c_0\, f(x_0) + c_1\, f(x_1) + \cdots + c_{n-1}\, f(x_{n-1})$$

Puntos	Factor de ponderación	Argumentos de la función	Error de truncamiento
2	$c_0 = 1.0000000$ $c_1 = 1.0000000$	$x_0 = -0.577350269$ $x_1 = 0.577350269$	$\cong f^{(4)}(\xi)$
3	$c_0 = 0.5555556$ $c_1 = 0.8888889$ $c_2 = 0.5555556$	$x_0 = -0.774596669$ $x_1 = 0.0$ $x_2 = 0.774596669$	$\cong f^{(6)}(\xi)$
4	$c_0 = 0.3478548$ $c_1 = 0.6521452$ $c_2 = 0.6521452$ $c_3 = 0.3478548$	$x_0 = -0.861136312$ $x_1 = -0.339981044$ $x_2 = 0.339981044$ $x_3 = 0.861136312$	$\cong f^{(8)}(\xi)$
5	$c_0 = 0.2369269$ $c_1 = 0.4786287$ $c_2 = 0.5688889$ $c_3 = 0.4786287$ $c_4 = 0.2369269$	$x_0 = -0.906179846$ $x_1 = -0.538469310$ $x_2 = 0.0$ $x_3 = 0.538469310$ $x_4 = 0.906179846$	$\cong f^{(10)}(\xi)$
6	$c_0 = 0.1713245$ $c_1 = 0.3607616$ $c_2 = 0.4679139$ $c_3 = 0.4679139$ $c_4 = 0.3607616$ $c_5 = 0.1713245$	$x_0 = -0.932469514$ $x_1 = -0.661209386$ $x_2 = -0.238619186$ $x_3 = 0.238619186$ $x_4 = 0.661209386$ $x_5 = 0.932469514$	$\cong f^{(12)}(\xi)$

8) Integração Numérica: *Prós e Contras*

Método	Puntos necesarios para una aplicación	Puntos requeridos para *n* aplicaciones	Error de truncamiento	Aplicación	Dificultad de programación	Comentarios
Regla del trapecio	2	$n + 1$	$\simeq h^3 f''(\xi)$	Amplia	Fácil	
Regla de Simpson 1/3	3	$2n + 1$	$\simeq h^5 f^{(4)}(\xi)$	Amplia	Fácil	
Regla de Simpson 1/3 y 3/8	3 o 4	≥ 3	$\simeq h^5 f^{(4)}(\xi)$	Amplia	Fácil	
Newton-Cotes de mayor grado	≥ 5	N/D	$\simeq h^7 f^{(6)}(\xi)$	Rara	Fácil	
Integración de Romberg	3			Requiere que se conozca $f(x)$	Moderada	No es tan apropiado para datos tabulares
Cuadratura de Gauss	≥ 2	N/D		Requiere que se conozca $f(x)$	Fácil	No es tan apropiado para datos tabulares

Tabela 1. Comparação das características dos principais métodos de integração

Campus AGRESTE

8) Integração Numérica: *Prós e Contras*

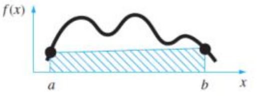
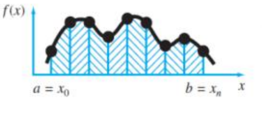
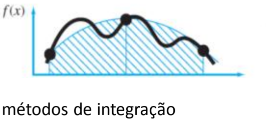
Método	Formulación	Interpretación gráfica	Error
Regla del trapecio	$I \simeq (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$		$-\frac{(b-a)^3}{12}f''(\xi)$
Regla del trapecio de aplicación múltiple	$I \simeq (b-a)\frac{f(x_0)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_i)+f(x_n)}{2n}$		$-\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$
Regla de Simpson 1/3	$I \simeq (b-a)\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6}$		$-\frac{(b-a)^5}{2880}f^{(4)}(\xi)$

Tabela 2. Resumos das informações dos principais métodos de integração

Campus AGRESTE

8) Integração Numérica: *Prós e Contras*

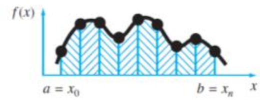
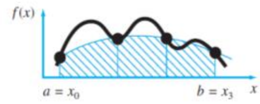
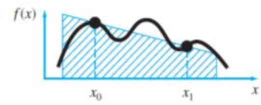
Método	Formulación	Interpretación gráfica	Error
Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple	$I \simeq (b-a)\dfrac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{j=2,4}^{n-2} f(x_j)+f(x_n)}{3n}$		$-\dfrac{(b-a)^5}{180n^4}\bar{f}^{(4)}$
Regla de Simpson 3/8	$I \simeq (b-a)\dfrac{f(x_0)+3f(x_1)+3f(x_2)+f(x_3)}{8}$		$-\dfrac{(b-a)^5}{6\,480}f^{(4)}(\xi)$
Cuadratura de Gauss	$I \simeq c_0 f(x_0)+c_1 f(x_1)+\cdots+c_{n-1} f(x_{n-1})$		$\simeq f^{(2n+2)}(\xi)$

Tabela 2. (Parte 2) Resumos das informações dos principais métodos de integração

8) Integração Numérica

1. As fórmulas abertas de Newton – Cotes se aplicam para integrar que tipos de problemas ?
2. Quais são as principais propriedades dos *polinômios ortogonais* ?
3. Que características apresentam as fórmulas de *Gauss-Legendre*, *Gauss-Chebyshev*, *Gauss-Laguerre* e *Gauss-Hermite*, entre outras? Se aplicam para integrar que tipos de problemas ?
4. Como se pode resolver numericamente uma integral dupla e tripla ?
5. Quais são as principais funções usadas para a integração numérica no MATLAB/Octave/etc. ?
6. Os comandos no MATLAB/Octave/etc. são baseados em quais métodos ?

Dúvidas ??

Obrigado

Críticas e sugestões serão bem-vindas, pois assim poderão ser melhoradas as aulas/slides.
bonogustavo@gmail.com