CÁLCULO NUMÉRICO

Sistemas de Equações Lineares

Gustavo Bono

Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Caruaru - Brasil

2017.2

1) Sistemas de EL: *Introdução*

- Uma **equação** e dita **linear** se cada termo contem não mais que uma variável e cada variável aparece na primeira potência;
- Um **sistema de equações lineares** e um conjunto finito de equações lineares nas mesmas variáveis;
- Um sistema com *m* equações e *n* incógnitas e como:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

onde,

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ são os coeficientes
$b_i \in \mathbb{R}$ são chamadas constantes
$x_j \in \mathbb{R}$ são as variáveis do problema
$i = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$

1) Sistemas de EL: *Introdução*

Este sistema pode ser escrito na forma matricial:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

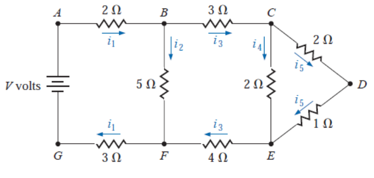
Definimos também a matriz completa de um sistema como $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ como $[\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b}]$,

$$[A|b] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Nos exemplos apresentados no capitulo sempre assumiremos que a matriz dos coeficientes A sempre é uma matriz real não singular.

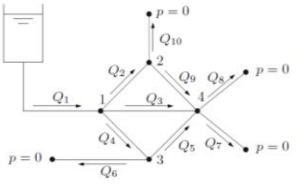
1) Sistemas de EL: *Introdução*

Muitos problemas de engenharia, física e matemática estão associados à solução de sistemas de equações lineares. Neste capitulo, apresentaremos técnicas numéricas empregadas para obter a solução desses sistemas.



Lei de Kirchhoff
(Lei das correntes e lei das tensões)

$$\begin{aligned} 5i_1 + 5i_2 &= V, \\ i_3 - i_4 - i_5 &= 0, \\ 2i_4 - 3i_5 &= 0, \\ i_1 - i_2 - i_3 &= 0, \\ 5i_2 - 7i_3 - 2i_4 &= 0. \end{aligned}$$



Hidráulica

$$\mathbf{A}\ \textit{presão} = \mathbf{b}$$

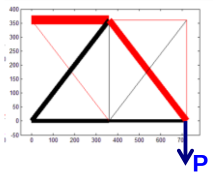
$$Q_j = \frac{1}{R_j L_j} \Delta p_j,$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} -0.370 & 0.050 & 0.050 & 0.070 \\ 0.050 & -0.116 & 0 & 0.050 \\ 0.050 & 0 & -0.116 & 0.050 \\ 0.070 & 0.050 & 0.050 & -0.202 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

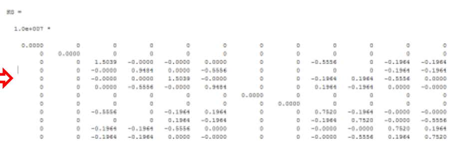
1) Sistemas de EL: *Introdução*

Muitos problemas de engenharia, física e matemática estão associados à solução de sistemas de equações lineares. Neste capitulo, apresentaremos técnicas numéricas empregadas para obter a solução desses sistemas.



Método dos Elementos Finitos

$$\mathbf{K}u = \mathbf{f}$$



1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

- Um conjunto de vetores $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$, ... , $\mathbf{x_n}$ e dito ser **Linearmente Independente** (**LI**) se

$$c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \cdots + c_n\mathbf{x_n} = \mathbf{0}$$

somente se $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$;

- Caso contrario, diz-se que o conjunto de vetores e **Linearmente Dependente** (**LD**);
- Exemplo: Os vetores

$$\mathbf{x_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{x_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

são LD, pois $\mathbf{x_3} = \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} \Rightarrow \mathbf{x_1} + \mathbf{x_2} - \mathbf{x_3} = \mathbf{0}$, ou seja,

$$c_1 = 1,\ c_2 = 1 \text{ e } c_3 = -1.$$

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

➢O **Posto de uma matriz** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido como o número máximo de vetores linhas (ou de vetores colunas) linearmente independentes (**LI**) de **A**;

➢ O numero de colunas LI de uma matriz é igual ao numero de linhas LI dessa matriz;

➢ Exemplo: seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se que as linhas 1 e 2 da matriz **A** são LI, e a $\text{linha}_3 = \text{linha}_1 + \text{linha}_2$. Logo, o posto da matriz **A** é 2.

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

➢O **Posto de uma matriz** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido como o número máximo de vetores linhas (ou de vetores colunas) linearmente independentes (**LI**) de **A**;

➢ O numero de colunas LI de uma matriz é igual ao numero de linhas LI dessa matriz;

➢ Exemplo: seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se que as linhas 1 e 2 da matriz **A** são LI, e a $\text{linha}_3 = \text{linha}_1 + \text{linha}_2$. Logo, o posto da matriz **A** é 2.

➢O Determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada de ordem *n* um escalar. Por exemplo:

ordem *n = 1*

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left[a_{11}\right] = a_{11}$$

ordem *n = 2*

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

➢O **Posto de uma matriz** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é definido como o número máximo de vetores linhas (ou de vetores colunas) linearmente independentes (**LI**) de **A**;

➢ O numero de colunas LI de uma matriz é igual ao numero de linhas LI dessa matriz;

➢ Exemplo: seja a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota-se que as linhas 1 e 2 da matriz **A** são LI, e a $\text{linha}_3 = \text{linha}_1 + \text{linha}_2$. Logo, o posto da matriz **A** é 2.

➢O Determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada de ordem *n* um escalar. Por exemplo:

ordem *n = 3*

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

➢Singularidade da matriz

- uma matriz **A** com det(**A**) = 0 é dita **SINGULAR**;
- quando det(**A**) ≠ 0 então a matriz **A** é dita **NÃO SINGULAR**;

➢ Sendo a matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ não singular, a sua inversa é representada por $\mathbf{A}^{-1}$ e é definida de forma que:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

onde **I** é a matriz identidade de ordem *n*;

$$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.}$$

➢Por exemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja um sistema **A x** = **b**, com uma matriz quadrada $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tem-se as seguintes possibilidades quando ao vetor solução **x**:

Primeiro caso: Solução única (*consistente* e *determinado*)

Segundo caso: Infinitas soluções (*consistente* e *indeterminado*)

Terceiro caso: Nenhuma solução (*inconsistente*)

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

Classificação dos Sistemas de Equações Lineares

Sistema *Consistente*

Sistema *Inconsistente*

Sistema *Consistente* e *Determinado*

Sistema *Consistente* e *Indeterminado*

Solução ÚNICA

INFINITAS soluções

NÃO ADMITE solução

posto (**Ab**) = *posto* (**A**) = n
det (**A**) $\neq$ 0

posto (**Ab**) = *posto* (**A**) = k < n
det (**A**) $\neq$ 0

posto (**Ab**) > *posto* (**A**) = k < n
det (**A**) = 0

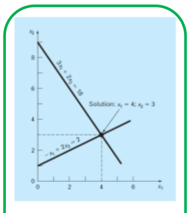
Cálculo Numérico – 2017.2 – Prof. Gustavo Bono

1) Sistemas de EL: *Conceitos fundamentais*

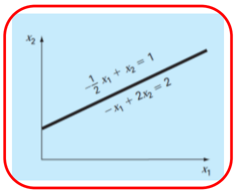
Primeiro caso: Solução única (*consistente* e *determinado*)

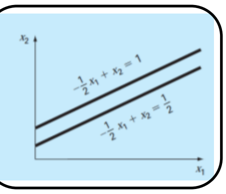
Segundo caso: Infinitas soluções (*consistente* e *indeterminado*)

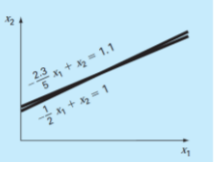
Terceiro caso: Nenhuma solução (*inconsistente*)



$$3x_1 + 2x_2 = 18$$
$$-x_1 + 2x_2 = 2$$







Sistema
MAL CONDICIONADO !!

1) Sistemas de EL: *Métodos numéricos diretos e iterativos*

- Serão estudados métodos numéricos para encontrar a solução do sistema de equações lineares **A x** = **b** onde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$;
- Considera-se que **A** é uma matriz quadrada e não singular;
- Os métodos que serão estudados podem ser divididos em:

Métodos Diretos: Um método é *direto* quando a solução exata $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é obtida realizando-se um número finito de operações aritméticas em $\mathbb{R}$.

- Sistemas triangulares
- Eliminação de Gauss
- Descomposição LU
- Descomposição de Cholesky

Método Iterativos: Um método é *iterativo* quando a solução $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é obtida como limite de uma sequencia de aproximações sucessivas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$, isto é $\lim_{n \to \infty} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_n| = 0$.

- Método de Jacobi
- Método de Gauss-Seidel

2) Sistemas de EL: *Sistema Triangular Inferior (STI)*

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Procedimento de **substituição** (substituições sucessivas) para o sistema **L x** = **b**, temos:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} \, x_j \right) \Big/ l_{ii} \qquad i = 1, \dots, n$$

Exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -6 & 8 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 48 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \\ x_3 = 5, \quad x_4 = \dfrac{21}{9} \end{cases}$$

2) Sistemas de EL: *Sistema Triangular Superior (STS)*

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Procedimento de **retro-substituição** (substituição regressiva / retroativa) para o sistema **U x** = **b**, temos:

$$x_i = \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} \, x_j \right) \Big/ u_{ii} \qquad i = 1, \dots, n$$

Exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \\ x_3 = 2 \end{cases}$$

Método de Eliminação de Gauss

Carl Friedrich Gauss
1777-1855
(matemático alemão)

O **método de Eliminação de Gauss**, também conhecido como escalonamento, é um método para resolver sistema lineares. Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando o sistema de equações em uma matriz triangular superior *equivalente* que pode ser resolvida por ***retro-substituição***.

Dois sistemas lineares de dimensões *n* x *n* são equivalentes desde que os seus conjuntos de soluções sejam os mesmos. Naturalmente estas operações elementares devem preservar a solução do sistema e consistem em:

1) multiplicação de um linha por uma constante não nula;
2) substituição de uma linha por ela mesma somada a um múltiplo de outra linha;
3) permutação de duas linhas.

Exemplo 3: Sistemas equivalentes

$$\left.\begin{aligned} x+y&=8 \\ -x+y&=-2 \end{aligned}\right\} \ (1) \qquad \Leftrightarrow \qquad \left.\begin{aligned} x+y&=8 \\ 2y&=6 \end{aligned}\right\} \ (2)$$

2) Sistemas de EL: *Método de Eliminação de Gauss*

O **método de Eliminação de Gauss**, também conhecido como escalonamento, é um método para resolver sistema lineares. Este método consiste em manipular o sistema através de determinadas operações elementares, transformando o sistema de equações em uma matriz triangular superior *equivalente* que pode ser resolvida por ***retro-substituição***.

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\ \ddots \qquad \vdots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{array}\right.$$

Cada etapa da eliminação progressiva consiste em zerar os termos abaixo da diagonal principal das primeiras (*n-1*) colunas, através de operações elementares.

2) Sistemas de EL: *Método de Eliminação de Gauss*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

Eliminação progressiva

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3/a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{aligned}$$

Retro-substituição

Exemplo 4: Método de Eliminação Gaussiana

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) Sistemas de EL: *Método de Eliminação de Gauss*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Passo 1: considerando que $a_{11} \neq 0$, eliminamos os elementos abaixo da diagonal principal na primeira coluna.

Multiplicamos a 1ª equação por a_{21}/a_{11} e subtraímos da 2ª equação. Este procedimento é repetido para o resto das equações. Observe que não alteramos a primeira linha.

Após essa etapa zeramos todos os elementos abaixo da diagonal principal da 1ª coluna.

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}x_2 + \cdots + \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}x_n = \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}\right)x_2 + \cdots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\right)x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1$$

$$a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2$$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Campus AGRESTE

2) Sistemas de EL: *Método de Eliminação de Gauss*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \cdots + a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned}$$

Passo 2: considerando que $a_{22} \neq 0$, eliminamos os elementos abaixo da diagonal principal na 2ª coluna.

Multiplicamos a 2ª equação por a'_{32}/a'_{22} e subtraímos da 3ª eq. . Este procedimento é repetido para o resto das equações. Observe que não alteramos a segunda linha.

Após essa etapa zeramos todos os elementos abaixo da diagonal principal da 2ª coluna.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\vdots \\ a''_{n3}x_3 + \cdots + a''_{nn}x_n &= b''_n \end{aligned}$$

Passo 3, Passo 4, ..., Passo k

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\ &\ddots \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}$$

Campus AGRESTE

2) Sistemas de EL: *Método de Eliminação de Gauss*

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\
a''_{33}x_3 + \cdots + a''_{3n}x_n &= b''_3 \\
\vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\
a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}
\end{aligned}
$$

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

No processo de eliminação os elementos a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$, ..., $a_{kk}^{(k-1)}$ que aparecem na diagonal da matriz **A** são chamados de **pivôs**.

Se os pivôs não se anulam, isto é, se $a_{kk} \neq 0$, *k=1,...,n*, durante o processo, então a eliminação procede com sucesso e por fim chegamos ao seguinte sistema triangular superior.

Em seguida resolvemos esse sistema usando **retro-substituição**.

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}} \qquad \text{for } i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

2) Sistemas de EL: *Algoritmo de Eliminação de Gauss*

Eliminação progressiva

```
(a)  DOFOR k = 1, n − 1
       DOFOR i = k + 1, n
         factor = a_i,k / a_k,k
         DOFOR j = k + 1 to n
           a_i,j = a_i,j − factor · a_k,j
         END DO
         b_i = b_i − factor · b_k
       END DO
     END DO
```

Substituição regressiva (retro-substituição)

```
(b)  x_n = b_n / a_n,n
     DOFOR i = n − 1, 1, −1
       sum = b_i
       DOFOR j = i + 1, n
         sum = sum − a_i,j · x_j
       END DO
       x_i = sum / a_i,i
     END DO
```

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}$$

for $i = n-1, n-2, \ldots, 1$

O laço exterior move-se para abaixo na matriz de uma linha pivô para a próxima.

O laço do meio move-se para baixo da linha pivô, para cada uma das linhas subsequentes onde a eliminação é efetuada.

O laço interior progride ao longo das colunas para eliminar ou modificar os elementos de uma linha particular.

2) Sistemas de EL: *Estratégia de Pivoteamento*

Exemplo 5: aplicar o método de Eliminação Gaussiana

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos realizar uma operação elementar de troca de linhas. Este tipo de operação quando realizada em um sistema, não altera a solução. Sendo assim, vamos a trocar as linhas **2** e **3**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Finalmente, chegamos a um sistema triangular superior, cuja solução pode ser obtida usando a ***retro-substituição***.

2) Sistemas de EL: *Estratégia de Pivoteamento*

- A estratégia de pivoteamento é importante pois:
  - **evita a propagação de erros numéricos**
  - nos fornece meios de evitar problemas durante a Eliminação Gaussiana quando o **pivô** a_{kk} no passo k é **igual a zero** e precisamos calcular o multiplicador

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{kk}}$$

- Assim, através da troca de linhas, podemos encontrar uma linha de tal forma que o novo pivô é não-zero, permitindo que a Eliminação Gaussiana continue até obter uma matriz triangular superior.
- No pivoteamento parcial, em cada passo k, **o pivô é escolhido como o maior elemento em módulo** abaixo de a_{kk} (inclusive), isto é

$$\text{Encontrar } r \text{ tal que: } \; |a_{rk}| = \max |a_{ik}|, \;\; k \leq i \leq n$$

Feita a escolha do pivô, trocamos as linhas r e k e o algoritmo procede.

2) Sistemas de EL: *Pivoteamento Parcial*

Exemplo 6: aplicar o método de Eliminação Gaussiana com *pivoteamento parcial* no sistema **A** x = **b**.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -2 & 2 \\ 4 & 9 & -3 & 8 \\ -2 & -3 & 7 & 10 \end{array}\right]$$

A cada passo k:

- encontrar o pivô do passo k
- se necessário, trocar as linhas
- calcular o multiplicador m_{ik}
- para $i = k+1 : n$, calcular

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - m_{ik}\, a_{kj}^{(k-1)}$$

2) Sistemas de EL: *Elementos com grande diferença de escala*

Exemplo 7: aplicar o método de Eliminação Gaussiana sem e com *pivoteamento parcial*. Em cada caso, analisar o resultado frente à aritmética de ponto flutuante quando $0 < |\varepsilon| \ll 1$.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 2 \\ 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Método de Gauss - Jordan

Carl Friedrich Gauss
1777-1855
(matemático alemão)

Wilhelm Jordan
1842-1899
(engenheiro e matemático alemão)

3) Sistemas de EL: *Método de Gauss-Jordan*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & b'_2 \\ & & a''_{33} & b''_3 \end{array}\right]$$

Eliminação progressiva

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x_3 &= b''_3/a''_{33} \\ x_2 &= (b'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 &= (b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{aligned}$$

Retro-substituição

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & b_2^{(n)} \\ 0 & 0 & 1 & b_3^{(n)} \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1^{(n)} \\ x_2 &= b_2^{(n)} \\ x_3 &= b_3^{(n)} \end{aligned}$$

O método de Gauss-Jordan é uma variação da eliminação de Gauss. A maior diferença é que, quando uma variável é eliminada no método de G-J, ela é eliminada de todas as outras equações, não só das posteriores. Além disso, todas as linhas são normalizadas pela divisão pelo seu elemento pivô.

Então, o passo de eliminação resulta na matriz identidade e não em uma matriz triangular. Consequentemente, não é necessário usar a retro-susbtituição para obter o resultado.

3) Sistemas de EL: *Método de Gauss-Jordan*

Exemplo 8: Use o método de Gauss-Jordan para resolver o sistema. Usar 6 algarismos significativos durante os cálculos.

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85$$
$$0.1x_1 + 7x_2 - 0.3x_3 = -19.3$$
$$0.3x_1 - 0.2x_2 + 10x_3 = 71.4$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & 7.85 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0.1 & 7 & -0.3 & -19.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & 71.4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 & -19.5617 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

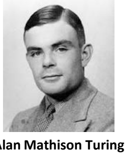
$$\begin{bmatrix} 1 & -0.0333333 & -0.066667 & 2.61667 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & -0.190000 & 10.0200 & 70.6150 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 10.01200 & 70.0843 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -0.0680629 & 2.52356 \\ 0 & 1 & -0.0418848 & -2.79320 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

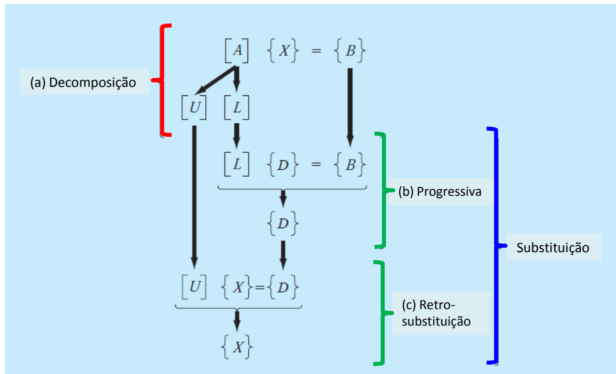
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3.0000 \\ 0 & 1 & 0 & -2.5000 \\ 0 & 0 & 1 & 7.0000 \end{bmatrix}$$

Decomposição LU



Alan Mathison Turing
1912-1954
(matemático britânico)

4) Sistemas de EL: *Decomposição LU*



4) Sistemas de EL: *Obtenção das matrizes L e U*

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

1ª linha de U

$$a_{11} = 1\,\boxed{u_{11}} \Rightarrow u_{11} = a_{11}$$
$$a_{12} = 1\,\boxed{u_{12}} \Rightarrow u_{12} = a_{12}$$
$$\cdots$$
$$a_{1n} = 1\,\boxed{u_{1n}} \Rightarrow u_{1n} = a_{1n}$$

2ª linha de U

$$a_{22} = l_{21}u_{12} + 1\,\boxed{u_{22}} \Rightarrow u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}$$
$$a_{23} = l_{21}u_{13} + 1\,\boxed{u_{23}} \Rightarrow u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13}$$
$$\cdots$$
$$a_{2n} = l_{21}u_{1n} + 1\,\boxed{u_{2n}} \Rightarrow u_{2n} = a_{2n} - l_{21}u_{1n}$$

1ª coluna de L

$$a_{21} = \boxed{l_{21}}\,u_{11} \Rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}$$
$$a_{31} = \boxed{l_{31}}\,u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}$$
$$\cdots$$
$$a_{n1} = \boxed{l_{n1}}\,u_{11} \Rightarrow l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{11}}$$

2ª coluna de L

$$a_{32} = l_{31}u_{12} + \boxed{l_{32}}\,u_{22} \Rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$
$$a_{42} = l_{41}u_{12} + \boxed{l_{42}}\,u_{22} \Rightarrow l_{42} = \frac{a_{42} - l_{41}u_{1}}{u_{22}}$$
$$\cdots$$
$$a_{n2} = l_{n1}u_{12} + \boxed{l_{n2}}\,u_{22} \Rightarrow l_{n2} = \frac{a_{n2} - l_{n1}u_{12}}{u_{22}}$$

4) Sistemas de EL: *Algoritmo para obtenção das matrizes L e U*

$$\mathbf{LU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{kj}, \quad i \le j \Longrightarrow$$

$$l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\ u_{kj} \right) \Big/ u_{jj}, \quad i > j \Downarrow$$

Para $i = 1 : n$ **faça**
  Para $j = i : n$ **faça**
    $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}\ u_{kj}$;
  Para $j = i + 1 : n$ **faça**
    $l_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}\ u_{kj} \right) \Big/ u_{jj}$;

4) Sistemas de EL: *Decomposição LU através do método de Eliminação de Gauss*

Exemplo 9: Obtenha uma decomposição LU baseada no método de eliminação de Gauss.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) **Sistemas de EL:** *Decomposição LU através do método de Eliminação de Gauss com pivoteamento*

Continua no quadro !!

4) **Sistemas de EL:** *Decomposição LU através do método de Eliminação de Gauss com pivoteamento*

Exemplo 10: Obtenha uma decomposição LU considerando as seguintes matrizes **A** e **P**.

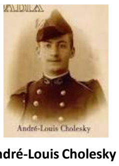
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplo 11: Resolva o sistema empregando a decomposição LU baseada no método de eliminação de Gauss.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$$

Decomposição de Cholesky



André-Louis Cholesky
1875-1918
(matemático e militar francês)

5) **Sistemas de EL:** *Decomposição de Cholesky*

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Pelo produto e igualdade de matrizes podemos obter os elementos de **G**.

Os elementos da **diagonal principal**:

$$\begin{aligned} a_{11} &= g_{11}^2 \\ a_{22} &= g_{21}^2 + g_{22}^2 \\ &\vdots \\ a_{nn} &= g_{n1}^2 + g_{n2}^2 + \ldots + g_{nn}^2 \end{aligned}$$

de forma geral podemos escrever:

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}\,, \quad i = 1 : n$$

Campus AGRESTE

5) **Sistemas de EL:** *Decomposição de Cholesky*

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}\mathbf{G}^T$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0 \\ g_{21} & g_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{21} & \dots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & g_{nn} \end{bmatrix}$$

Para os elementos **fora da diagonal principal**:

$$\begin{aligned} a_{21} &= g_{21}g_{11} & \qquad a_{32} &= g_{31}g_{21} + g_{32}g_{22} \\ a_{31} &= g_{31}g_{11} & a_{42} &= g_{41}g_{21} + g_{42}g_{22} \\ &\vdots & &\vdots \\ a_{n1} &= g_{n1}g_{11} & a_{n2} &= g_{n1}g_{21} + g_{n2}g_{22} \end{aligned}$$

de forma geral podemos escrever:

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} g_{ik}g_{jk}}{g_{jj}}\,, \quad i = j+1 : n, \quad j = 1 : n$$

Campus AGRESTE

```
DOFOR k = 1, n
  DOFOR i = 1, k − 1
    sum = 0.
    DOFOR j = 1, i − 1
      sum = sum + a_ij · a_kj
    END DO
    a_ki = (a_ki − sum)/a_ii
  END DO
  sum = 0.
  DOFOR j = 1, k − 1
    sum = sum + a²_kj
  END DO
  a_kk = √(a_kk − sum)
END DO
```

$$g_{ij} = \frac{a_{ij} - \boxed{\sum_{k=1}^{j-1} g_{ik} g_{jk}}}{g_{jj}}$$

$$g_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \boxed{\sum_{k=1}^{i-1} g_{ik}^2}}$$

Exemplo 12: Aplique a decomposição de Cholesky à matriz simétrica:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & -7 \\ 2 & -7 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 11 \\ -31 \end{Bmatrix}$$

1) Verificar se **A** satisfaz as condições do método de Cholesky (simétrica e positiva definida);
2) Decompor **A** em **G G**^{T};
3) Calcular o determinante de **A** usando a decomposição obtida;
4) Resolver o sistema **A x** = **b**, resolvendo os dois sistemas triangulares **G y** = **b** e **G**^{T} **x** = **y**.

```
>> A = [4 -2 2;-2 10 -7;2 -7 30]

A =

     4    -2     2
    -2    10    -7
     2    -7    30

>> b = [8;11;-31]

b =

     8
    11
   -31

>> x = A\b

x =

     3
     1
    -1
```

```
>> G = chol(A,'lower')

G =

     2     0     0
    -1     3     0
     1    -2     5

>> y = G\b

y =

     4
     5
    -5

>> x = transpose(G)\y

x =

     3
     1
    -1
```

Matriz Inversa

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Seja **A** uma matriz quadrada não singular (det(**A**) $\neq 0$), $\mathbf{A}^{-1} = [b_1 \,|\, b_2 \,|\, ... \,|\, b_n]$ a matriz inversa de **A**, onde b_j é a coluna j da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ e e_j é a coluna j da matriz identidade. De $\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, isto é:

$$\mathbf{A}[b_1 \,|\, b_2 \,|\, ... \,|\, b_n] = [e_1 \,|\, e_2 \,|\, ... \,|\, e_n]$$

$$\mathbf{A}\,b_j = e_j, \quad \text{com} \quad j = 1, 2, ..., n$$

Assim, podemos resolver as colunas j, $j = 1, 2, ..., n$ da matriz $\mathbf{A}^{-1}$ resolvendo os sistemas lineares apresentados no tópicos anteriores:

- Usando decomposição LU;
- Método de Cholesky;
- Método de Eliminação de Gauss;
- Método de Gauss-Compacto.

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

- Usando decomposição LU, obtemos as colunas de **A**$^{-1}$ fazendo:

$$\mathbf{A}\,b_i = \mathbf{L}\mathbf{U}\,b_i = e_i, \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

isto é, resolvendo os sistemas lineares:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\,y_i = e_i \\ \qquad\qquad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \mathbf{U}\,b_i = y_i \end{cases}$$

- Usando o método de Cholesky (somente para matrizes simétricas e positivas definidas), obtemos as colunas de **A**$^{-1}$ fazendo:

$$\mathbf{G}\,\mathbf{G}^T\,b_i = e_i, \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

isto é, resolvendo os sistemas lineares:

$$\begin{cases} \mathbf{G}\,y_i = e_i \\ \qquad\qquad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n \\ \mathbf{G}^T\,b_i = y_i \end{cases}$$

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

- Usando o método de Eliminação de Gauss, obtemos as colunas de **A**$^{-1}$ resolvendo os sistemas lineares:

$$\mathbf{A}\,b_i = e_i, \quad \text{com} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Usando o método de Gauss-Compacto com o mesmo esquema da resolução de sistemas matriciais, isto é, fazendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & & & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto, as colunas da matriz **X** são as colunas da matriz inversa de **A**, desde que **A A**$^{-1}$= **I**.

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

Passo 1:

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \qquad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}\boxed{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\boxed{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \boxed{\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.03333 \\ -0.1009 \end{Bmatrix} \Rightarrow A]^{-1} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0.33249 \\ -0.00518 \\ -0.01008 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

Passo 2:

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}\boxed{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix} \boxed{\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\boxed{\mathbf{x}} = \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & \boxed{0.004944} & 0 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0 \end{bmatrix}$$

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -0,1 & -0,2 \\ 0,1 & 7 & -0,3 \\ 0,3 & -0,2 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

Passo 3:

$$[U] = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0 & 7.00333 & -0.293333 \\ 0 & 0 & 10.0120 \end{bmatrix} \quad [L] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0333333 & 1 & 0 \\ 0.100000 & -0.0271300 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}\boxed{\mathbf{d}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{U}\boxed{\mathbf{x}} = \mathbf{d} \quad \Rightarrow \quad [A]^{-1} = \begin{bmatrix} 0.33249 & 0.004944 & 0.006798 \\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183 \\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988 \end{bmatrix}$$

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -0,1 & -0,2\\ 0,1 & 7 & -0,3\\ 0,3 & -0,2 & 10\end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

No MATLAB:

```
>> clear all
>> A = [3 -0.1 -0.2;0.1 7 -0.3;0.3 -0.2 10]

A =

    3.0000   -0.1000   -0.2000
    0.1000    7.0000   -0.3000
    0.3000   -0.2000   10.0000

>> Inversa_A = inv(A)

Inversa_A =

    0.3325    0.0049    0.0068
   -0.0052    0.1429    0.0042
   -0.0101    0.0027    0.0999

>>
```

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}0.33249 & 0.004944 & 0.006798\\ -0.00518 & 0.142903 & 0.004183\\ -0.01008 & 0.00271 & 0.09988\end{bmatrix}$$

6) Sistemas de EL: *Cálculo da matriz Inversa*

Exemplo 13: Considere a matriz:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -0,1 & -0,2\\ 0,1 & 7 & -0,3\\ 0,3 & -0,2 & 10\end{bmatrix}$$

Calcule $\mathbf{A}^{-1}$ utilizando a decomposição LU.

TAREFA: Resolver empregando o método de Gauss-Compacto !!

Cálculo Numérico – 2017.2 – Prof. Gustavo Bono

Métodos Iterativos

Ao lado dos métodos diretos (exatos) para resolver sistemas lineares, existem os métodos iterativos. Em certos casos, tais métodos são melhores do que os exatos, por exemplo, quando a matriz dos coeficientes é uma matriz esparsa (muitos elementos iguais a zero). Também são mais econômicos, no sentido que utilizam menos memória do computador, Além disso, possuem a vantagem de se autocorrigirem caso um erro seja cometido e podem ser usados para reduzir os erros de arredondamento na solução obtida por métodos exatos. Podem também, sob certas condições, ser aplicados para resolver um conjunto de equações não lineares.

Um método é **iterativo** quando o sistema de equações lineares **A x** = **b** pode ser resolvido por um processo que gera a partir de um vetor inicia $\mathbf{x}^{(0)}$ uma sequencia de vetores $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$, $\mathbf{x}^{(3)}$,..., $\mathbf{x}^{(n)}$ (aproximações da solução) que deve convergir para a solução e que são obtidos dos anteriores pela repetição do mesmo tipo de processo.

7) Sistemas de EL: *Métodos Iterativos*

Um método iterativo é **estacionário** se cada aproximante é obtido do anterior sempre pelo mesmo processo e pode ser escrito na forma:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

sendo a matriz **B** fixa durante o processo iterativo. A definição da matriz de iteração (**B**) do processo iterativo define o método de iteração (Jacobi, Gauss-Seidel, etc.)

Quando os processos variam de passo para passo, mas se repetem ciclicamente de ***s*** em ***s*** passos, dizemos que o processo é ***s**-cíclico*. Agrupando-se os ***s*** passos de cada ciclo num único passo composto, obtemos um método estacionário.

7) Sistemas de EL: *Normas de vetores e matrizes*

Para discutir o erro envolvido nas aproximações é preciso associar a cada vetor e matriz um valor não negativo que de alguma forma mede sua magnitude. As normas para vetores mais comuns são:

- Norma euclideana (ou norma L_2)

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Norma L_p

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

- Norma infinito (ou norma do máximo)

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

7) Sistemas de EL: *Normas de vetores e matrizes*

Normas vetoriais devem satisfazer às seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \|x\| \geq 0 \ \text{ e } \ \|x\| = 0 \ \text{ se, e somente se, } \ x = 0 \\
&b)\quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \ \text{ para todo escalar } \ \lambda \\
&c)\quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \text{ (desigualdade triangular)}
\end{aligned}
$$

Normas de matrizes tem que satisfazer às seguintes propriedades:

$$
\begin{aligned}
&a)\quad \|\mathbf{A}\| > 0 \ \text{ se } \ \mathbf{A} \neq 0, \quad \|\mathbf{A}\| = 0 \ \text{ se } \ \mathbf{A} = 0 \\
&b)\quad \|\alpha \mathbf{A}\| = |\alpha|\|\mathbf{A}\| \ \text{ onde } \alpha \text{ é um escalar} \\
&c)\quad \|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| \leq \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{B}\| \\
&d)\quad \|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{B}\| \\
&e)\quad \|\mathbf{A\,x}\| \leq \|\mathbf{A}\|\,\|\mathbf{x}\|
\end{aligned}
$$

7) Sistemas de EL: *Normas de vetores e matrizes*

Exemplo 14: Determinar as normas (linha, coluna e euclidiana) para a matriz:

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ \boxed{6 \quad 3 \quad 4} \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$\| A \|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ \boxed{(norma\ linha)} ; \qquad \boxed{\|\mathbf{A}\|_\infty = |6| + |3| + |4| = 13}$$

$$\| A \|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \ (norma\ coluna) ; \qquad \|\mathbf{A}\|_1 = |3| + |6| + |-1| = 10$$

$$\| A \|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} \ (norma\ euclidiana) . \qquad \|\mathbf{A}\|_e = (9+4+1+36+9+16+1+4+1)^{\frac{1}{2}} = 9$$

7) Sistemas de EL: *Critério de parada*

Para aplicar qualquer método iterativo escolhemos $\mathbf{x}^{(0)}$ como uma aproximação inicial para a solução do sistema **Ax** = **b**. Com essa aproximação inicial e um método numérico do tipo $\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\,\mathbf{x}^{(k)}$, refinamos a solução até obtê-la com uma determinada precisão (número de casas decimais corretas).

Para obtermos a solução com uma determinada precisão ε, empregamos a seguinte **critério de parada**:

$$\frac{\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}-\mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty}{\left\|\mathbf{x}^{(k+1)}\right\|_\infty}=\frac{\max\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|}{\max\left|x_i^{(k+1)}\right|}<\varepsilon$$

Na prática também adotamos um número máximo de iterações para evitar que o programa execute indefinidamente, caso o método não convirja para um determinado problema.

$$k < k_{max}$$

Método de Jacobi

Carl Gustav Jakob Jacobi
1804-1851
(matemático alemão)

7) Sistemas de EL: *Método de Jacobi*

O método de Jacobi pode ser obtido a partir do sistema linear:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= y_n \end{aligned}$$

Isolando o elemento x_1 da primeira equação temos:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{y_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}}$$

Note que utilizaremos os elementos $x_1^{(k)}$ da iteração k (à direita da equação) para estimar o elemento x_1 da próxima iteração.
Da mesma forma, isolando o elemento x_i de cada equação i, para todo $i = 2, \ldots, n$ podemos construir a iteração.

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{y_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{y_2 - \left(a_{21}x_1^{(k)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{y_2 - \left(a_{n1}x_1^{(k)} + \cdots + a_{n,n-2}x_{n-2}^{(k)} + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k)}\right)}{a_{nn}} \end{aligned}$$

7) Sistemas de EL: *Método de Jacobi*

Em notação compacta, o método de Jacobi consiste na iteração:

$$x^{(1)} = \text{aproximação inicial}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{y_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Exemplo 15: Resolva com o método de Jacobi o sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23 \\ 26 \end{Bmatrix}$$

```
>> A =[10 1;1 8];
>> b = [23;26];
>> x=A\b

x =

    2.0000
    3.0000
```

Iniciando com $\boxed{x^{(1)} = y^{(1)} = 0}$.

$$\boxed{\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{23 - y^{(k)}}{10} \\ y^{(k+1)} &= \frac{26 - x^{(k)}}{8} \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} x^{(2)} &= \frac{23 - \boxed{y^{(1)}}}{10} = \boxed{2{,}3} \\ y^{(2)} &= \frac{26 - \boxed{x^{(1)}}}{8} = \boxed{3{,}25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{(3)} &= \frac{23 - \boxed{y^{(2)}}}{10} = 1{,}975 \\ y^{(3)} &= \frac{26 - \boxed{x^{(2)}}}{8} = 2{,}9625 \end{aligned}$$

k + 1	*x (k+1)*	*y (k+1)*
2	2.3000	3.2500
3	1.9750	2.9625
4	2.0038	3.0031
5	1.9997	2.9995
6	2.0000	3.0000

Campus AGRESTE

7) Sistemas de EL: *Método de Jacobi*

Exemplo 16: Resolva o sistema:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

```
x =

   1.909198281099920
   3.194964416843296
   5.044807305525867
```

Usando o método de Jacobi com o vetor $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

k	0	1	2	3
x_1	0	2	1.92	1.91
x_2	0	3	3.19	3.1944
x_3	0	5	5.04	5.0446

k + 1	*x (k+1)*	*y (k+1)*	*z (k+1)*
2	2.000000000000000	3.000000000000000	5.000000000000000
3	1.920000000000000	3.190000000000000	5.040000000000000
4	1.909400000000000	3.194400000000000	5.044600000000000
5	1.909228000000000	3.194948000000000	5.044794000000000
6	1.909199000000000	3.194962860000000	5.044806680000001
7	1.909198362000000	3.194964364000001	5.044807267200000
8	1.909198283504000	3.194964412500000	5.044807303660000
9	1.909198281323200	3.194964416677880	5.044807305414960

Campus AGRESTE

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Para estudar a convergência do método de Jacobi, vamos empregar a forma clássica dos métodos iterativos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

Para isso, vamos a dividir a matriz **A** como:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{L}}_{\text{triangular inferior}} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{triangular superior}}$$

Por exemplo, para uma matriz 3 x 3 temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim o método de Jacobi pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} \end{aligned}$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Sendo assim o método de Jacobi pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad &\Rightarrow \quad (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\Rightarrow \quad \mathbf{D}\mathbf{x} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x} \end{aligned}$$

e assim, podemos escrever o processo iterativo como:

$$\mathbf{D}\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}_J\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

onde para o método de Jacobi temos:

$$\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U}) \quad \Longrightarrow$$

Matriz de iteração **B** do método de Jacobi

$$\mathbf{c} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$$

Haverá **convergência do método de Jacobi** se

$$\|\mathbf{B}\|_\infty < 1$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Basta apenas um dos critérios dados a seguir seja satisfeito para garantir a convergência, independentemente da aproximação inicial $\mathbf{x}^{(0)}$.

- O critério das linhas:

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^*| < 1 ,$$

- O critério das colunas:

$$\max_{1\leq j\leq n} \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} |a_{ij}^*| < 1 ,$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Exemplo 17: Verificar se a matriz satisfaz o critério das linhas.

$$\begin{bmatrix} 4 & 0.24 & -0.08 \\ 0.09 & 3 & -0.15 \\ 0.04 & -0.08 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 9 \\ 20 \end{Bmatrix}$$

$$\max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^*| < 1 ,$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Definição: uma matriz **A** é **estritamente diagonalmente dominante** se:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}| \ , \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

- Matriz estritamente diagonalmente dominante satisfazem o critério das linhas
- O método de Jacobi converge para matrizes estritamente diagonalmente dominante.

Exemplo 15: Verificar se a matriz é estritamente diagonalmente dominante.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Jacobi*

Exemplo 18: Resolva o sistema utilizando o método de Jacobi.

$$\begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7 \\ -8 \\ 6 \end{Bmatrix}$$

- Verificar o critério das linhas;
- Ou então basta verificar que a matriz **A** é estritamente diagonalmente dominante;
- Fórmula de iteração para o problema:

$$x_1^{(k+1)} = 0.7 - 0.2x_2^{(k)} - 0.1x_3^{(k)}$$
$$x_2^{(k+1)} = -1.6 - 0.2x_1^{(k)} - 0.2x_3^{(k)}$$
$$x_3^{(k+1)} = 0.6 - 0.2x_1^{(k)} - 0.3x_2^{(k)}$$

k	1	2	3	4	5
x_1	0.7	0.96	0.978	0.9994	0.9979
x_2	-1.6	-1.86	-1.98	-1.9888	-1.9996
x_3	0.6	0.94	0.966	0.966	0.9968

Método de Gauss-Seidel

Carl Friedrich Gauss
1777-1855
(matemático alemão)

Philipp Ludwig von Seidel
1821-1896
(matemático alemão)

Assim, como no método de Jacobi, no método de Gauss-Seidel também isolamos o elemento x_i da equação i. Porém, perceba que a equação para $x_2^{(k+1)}$ depende de $x_1^{(k)}$ na iteração k. Intuitivamente podemos pensar em usar $x_1^{(k+1)}$ que acabou de ser calculado e temos portanto:

$$x_2^{(k+1)} = \frac{y_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}}$$

Aplicando esse raciocínio podemos construir o método de Gauss-Seidel como:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{y_1 - \left(a_{12}x_2^{(k)} + \cdots + a_{1n}x_n^{(k)}\right)}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{y_2 - \left(a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}x_n^{(k)}\right)}{a_{22}} \\ &\vdots \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{y_2 - \left(a_{n1}x_1^{(k+1)} + \cdots + a_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)}\right)}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Em notação compacta, o método de Gauss-Seidel consiste na iteração:

$$x^{(1)} = \text{aproximação inicial}$$

$$x_i^{(k+1)} = \frac{y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=1+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

À medida que cada novo valor de x é calculado pelo de Gauss-Seidel, ele é imediatamente usado na próxima equação para se determinar outro valor de x. Assim, se a solução estiver convergindo, a melhor estimativa disponível será empregada.

Exemplo 19: Resolva com o método de Gauss-Seidel o sistema:

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 23 \\ 26 \end{Bmatrix}$$

Iniciando com $x^{(1)} = y^{(1)} = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} x^{(k+1)} &= \frac{23 - y^{(k)}}{10} \\ y^{(k+1)} &= \frac{26 - x^{(k+1)}}{8} \end{aligned}}$$

$$x^{(2)} = \frac{23 - y^{(1)}}{10} = 2{,}3$$

$$y^{(2)} = \frac{26 - x^{(2)}}{8} = 2{,}9625$$

$$x^{(3)} = \frac{23 - y^{(2)}}{10} = 2{,}00375$$

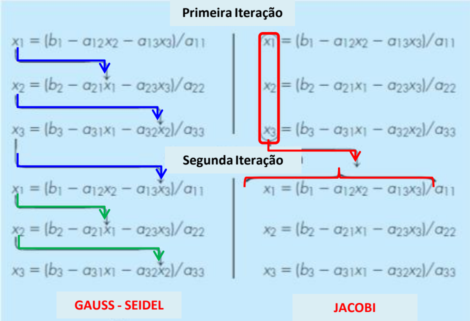
$$y^{(3)} = \frac{26 - x^{(3)}}{8} = 2{,}9995312$$

No *exemplo 12* (método de Jacobi):

k + 1	*x (k+1)*	*y (k+1)*
2	2.3000	3.2500
3	1.9750	2.9625
4	2.0038	3.0031
5	1.9997	2.9995
6	2.0000	3.0000

7) Sistemas de EL: *Diferença entre os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel*

A diferença entre os métodos de Jacobi e de Gauss-Seidel é descrita a seguir:



Embora haja certos casos para os quais o método de Jacobi é útil, a utilização das melhores estimativas disponíveis no método de G-S em geral o torna o preferido.

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Gauss-Seidel*

Para estudar a convergência do método, vamos empregar a forma clássica dos métodos iterativos:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

Para isso, vamos a dividir a matriz **A** como:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\mathbf{L}}_{\text{triangular inferior}} + \underbrace{\mathbf{D}}_{\text{diagonal}} + \underbrace{\mathbf{U}}_{\text{triangular superior}}$$

Por exemplo, para uma matriz 3 x 3 temos:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sendo assim o método de Gauss-Seidel pode ser escrito como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

7) **Sistemas de EL:** *Convergência do método de Gauss-Seidel*

Sendo assim o método de G-S pode ser escrito como:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{L} + \mathbf{D} + \mathbf{U})\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

e assim, podemos escrever o processo iterativo como:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{D})\mathbf{x}^{(k+1)} = -\mathbf{Ux}^{(k)} + \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{Ux}^{(k)} + (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{B}_{GS}\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

onde para o método de Gauss-Seidel temos:

$$\mathbf{B}_{GS} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U} \quad \Longrightarrow$$

Matriz de iteração **B** do método de G-S

$$\mathbf{c} = (\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{b}$$

Haverá **convergência do método de Gauss-Seidel** se

$$\|\mathbf{B}\|_{\infty} < 1$$

7) **Sistemas de EL:** *Convergência do método de Gauss-Seidel*

O método iterativo pode ser definido como:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{Bx}^{(k)} + \mathbf{c}$$

- Matriz de iteração **B** do **método de Jacobi**

$$\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{U})$$

- Matriz de iteração **B** do **método de Gauss-Seidel**

$$\mathbf{B}_{GS} = -(\mathbf{L} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{U}$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Gauss-Seidel*

O método de Gauss-Seidel converge se satisfaz o **critério das linhas** ou o **critério de Sassenfeld**.

- **Critério das linhas**

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}^{*}| \; < \; 1 \; ,$$

- **Critério de Sassenfeld**

$$\boxed{\max_{1\le i\le n} \beta_i < 1}$$

$$\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right)$$

Exemplo 20: Verificar se a matriz satisfaz o critério de Sassenfeld.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\max_{1\le i\le n} \beta_i < 1}$$

$$\beta_i = \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|}\beta_j + \sum_{j=i+1}^{n} \frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right)$$

7) Sistemas de EL: *Convergência do método de Gauss-Seidel*

Exemplo 21: Resolva o sistema de equações utilizando o método de Gauss-Seidel, com $\varepsilon < 10^{-2}$.

- A matriz não é estritamente diagonalmente dominante. Nada podemos afirmar sobre a convergência;
- Aplicar o critério das linhas;
- Aplicar o critério de Sassenfeld.

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Iterando, obtemos:

k	1	2	3	4
x_1	1.0	1.025	1.0075	1.0016
x_2	0.75	0.95	0.9913	0.9987
x_3	-0.875	-0.9875	-0.9994	-1.0002

Verificando a norma do erro, temos:

$$\frac{||\mathbf{x}^{(4)} - \mathbf{x}^{(3)}||_\infty}{||\mathbf{x}^{(4)}||_\infty} = \frac{\max\{|1.0016-1.0075|, |0.9987-0.9913|, |-1.0002+0.9994|\}}{\max\{|1.0016|, |0.9987|, |-1.0002|\}}$$

$$= \frac{0.0074}{1.0016} = 0.0074 < 10^{-2}$$

8) Sistemas de EL: *Número de operações*

1. *Eliminação de Gaussiana* $\Longrightarrow$ $\dfrac{4n^3 + 9n^2 - 7n}{6}$
2. *Decomposição LU* $\Longrightarrow$ $\dfrac{4n^3 + 9n^2 - n}{6}$
3. *Decomposição LU - Crout* $\Longrightarrow$ $\dfrac{4n^3 + 15n^2 - 13n}{6}$
4. *Método de Jacobi*
5. *Método de Gauss-Seidel*

(4 e 5): $k\left(2n^2 - n\right) \qquad k \in \mathbf{N}$

8) Sistemas de EL

Método	Procedimiento	Problemas y soluciones potenciales
Eliminación de Gauss	$\left[\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc\|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ & a'_{22} & a'_{23} & c'_2 \\ & & a''_{33} & c''_3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = c''_3/a''_{33} \\ x_2 = (c'_2 - a'_{23}x_3)/a'_{22} \\ x_1 = (c_1 - a_{12}x_1 - a_{13}x_3)/a_{11} \end{array}$	**Problemas:** Mal condicionamiento, Redondeo, División entre cero. **Soluciones:** Alta precisión, Pivoteo parcial
Descomposición *LU*	Descomposición; Sustitución hacia atrás; $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$; Sustitución hacia adelante	**Problemas:** Mal condicionamiento, Redondeo, División entre cero. **Soluciones:** Alta precisión, Pivoteo parcial
Método de Gauss-Seidel	$\left.\begin{array}{l} x_1^i = (c_1 - a_{12}x_2^{i-1} - a_{13}x_3^{i-1})/a_{11} \\ x_2^i = (c_2 - a_{21}x_1^i - a_{23}x_3^{i-1})/a_{22} \\ x_3^i = (c_3 - a_{31}x_1^i - a_{32}x_2^i)/a_{33} \end{array}\right\}$ Continúa iterativamente hasta $\left\| \frac{x_i^i - x_i^{i-1}}{x_i^i} \right\| 100\% < \varepsilon_s$ para todas las x_i	**Problemas:** Divergente o converge lentamente. **Soluciones:** Dominancia diagonal, Relajación

8) Sistemas de EL

1. Quais são os custos (número de operações) de resolver um sistema linear com os métodos de *eliminação de Gauss*, decomposição *LU* e decomposição de *Cholesky* ?
2. Qual é o custo (número de operações) para calcular a matriz inversa de **A** ?
3. Que representa o número de condicionamento de uma matriz ? Como se calcula o número de condicionamento ?
4. Quais são as principais funções usadas na resolução de sistema de equações lineares no MATLAB/Octave/etc. ?
5. Os comandos no MATLAB/Octave/etc. são baseados em quais métodos ?
6. Quais vantagens apresenta o método de *Gauss-Seidel com Sobre-Relaxação Sucessiva (SRS)* ? O fator de peso (ω) pode variar entre que valores ?

Dúvidas ??

Obrigado

Críticas e sugestões serão bem-vindas, pois assim poderão ser melhoradas as aulas/slides.
bonogustavo@gmail.com