CÁLCULO NUMÉRICO

Equações Diferencias Ordinárias

Gustavo Bono

Universidade Federal de Pernambuco
Centro Acadêmico do Agreste
Núcleo de Tecnologia
Caruaru - Brasil

2017.2

1) EDO: *Introdução*

Muitos problemas encontrados em engenharia e outras ciências podem ser formulados em termos de **Equações Diferenciais**. Por exemplo: mecânica dos fluidos, fluxo de calor, vibrações, reações químicas e nucleares, economia, biologia, trajetórias balísticas, teoria dos satélites artificiais, estudo de redes elétricas, curvaturas de vigas, estabilidade de aviões, e outras aplicações estão relacionadas com equações diferenciais.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma introdução à resolução de **Equações Diferenciais Ordinárias** (**EDO**) através de métodos numéricos.

A equação:

$$y' = f(x, y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

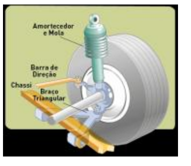
é chamada ***Equação Diferencial de primeira ordem***. Nesta equação, f é uma função real dada, de duas variáveis reais x e y, sendo y a **variável dependente** função incógnita da **variável independente**, x. Além disso, y e f podem ser vetores, caso em que teremos um *sistema de equações diferenciais de primeira ordem*. Neste capítulo, somente trataremos apenas o caso escalar.

1) EDO: *Introdução*

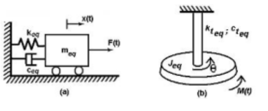
$$y' = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Quando a função envolve uma única variável independente, a equação é denominada como **EDO**, caso contrário, quando a equação envolva dois ou mais variáveis independentes temos uma ***Equação Diferencial Parcial*** (***EDP***).

As equações diferenciais também são classificadas em relação a sua ordem. Por exemplo, a equação que descreve a posição x de um sistema massa-mola com amortecimento é a *equação de segunda ordem* dada por:



$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



Cálculo Numérico – UFPE – 2017.2 – Prof. GUSTAVO BONO

Campus AGRESTE

1) EDO: *Introdução*

$$y' = f(x,y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

Quando a função envolve uma única variável independente, a equação é denominada como **EDO**, caso contrário, quando a equação envolva dois ou mais variáveis independentes temos uma ***Equação Diferencial Parcial*** (***EDP***).

As equações diferenciais também são classificadas em relação a sua ordem. Por exemplo, a equação que descreve a posição x de um sistema massa-mola com amortecimento é a *equação de segunda ordem* dada por:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Equações de ordem superior podem ser reduzidas a um sistema de equações de primeira ordem. Definindo-se uma nova variável $y = dx/dt$ e substituída na equação anterior, obtemos:

$$m\frac{dy}{dt} + cy + kx = 0$$

Cálculo Numérico – UFPE – 2017.2 – Prof. GUSTAVO BONO

Campus AGRESTE

$$m\frac{dy}{dt} + cy + kx = 0$$

Assim, a equação de primeira ordem obtida é equivalente à equação original de segunda ordem.

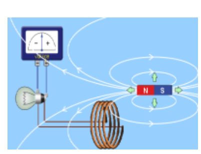
Resolver a equação $y' = f(x, y)$ corresponde a se determinar uma função $y = y(x)$, diferenciável, com $x \in [a, b]$ tal que $y'(x) = f(x, y(x))$. Qualquer função que satisfaça esta propriedade é uma solução da equação diferencial. Por exemplo, a função $y(x) = Ce^{x}$ é, para qualquer valor da constante C, uma solução da equação diferencial $y' = y$. Assim, cada equação diferencial de primeira ordem possui um número infinito de soluções. Contudo, podemos selecionar uma solução particular, se junto com a equação diferencial for dado o valor da solução $y(x)$ em um ponto, por exemplo, $y(x_0) = y_0$ (chamada ***condição inicial***). Se para a equação diferencial: $y' = y$ for dado que $y(0) = 1$ então obtemos $C = 1$ e agora a solução é $y(x) = e^{x}$.

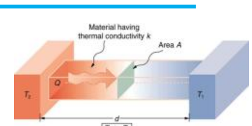
A equação diferencial, juntamente com a condição inicial, constituem um **Problema de Valor Inicial** (**PVI**), isto é:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

A grande maioria das equações encontradas na engenharia e na física não podem ser solucionadas analiticamente, o recurso de que dispomos é o emprego de método numéricos.

Law	Mathematical Expression	Variables and Parameters
Newton's second law of motion	$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$	Velocity (v), force (F), and mass (m)
Fourier's heat law	$q = -k'\frac{dT}{dx}$	Heat flux (q), thermal conductivity (k') and temperature (T)
Fick's law of diffusion	$J = -D\frac{dc}{dx}$	Mass flux (J), diffusion coefficient (D), and concentration (c)
Faraday's law (voltage drop across an inductor)	$\Delta V_L = L\frac{di}{dt}$	Voltage drop (ΔV_L), inductance (L), and current (i)





1) EDO: *Introdução*

Uma propriedade importante dos métodos computacionais para a solução de:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

é a discretização, que consiste em obter a solução aproximada do **PVI** não num intervalo continuo $a <= x <= b$, mas sim num conjunto discreto de pontos $\{x_n / n = 0, 1, \ldots, N\}$.

A sequencia de pontos $\{ x_n \}$ é definida por:

$$x_n = x_0 + n\,h \quad \text{com} \quad n = 0, 1, \ldots, N$$

onde $x_0 = a$, $x_N = b$ e $N = (b - a) / h$.

Dizemos que o comprimento do intervalo, $\boldsymbol{h}$, é o **tamanho do passo**, os pontos x_n são os **pontos da malha** e $\boldsymbol{N}$ é o **número de passos**.

1) EDO: *Introdução*

Ao se aproximar numericamente a solução de uma equação diferencial – através de um processo de integração numérica – uma série de *erros* surgem, os quais podem ser classificados como:

Erro de truncamento local (ETL): é o erro existente em uma iteração da integração numérica ao substituirmos um processo *infinito* por um *finito*;

Erro de arredondamento local (EAL): é causado pela precisão finita do computador em uso;

Erro de truncamento global (ETG): é a acumulação dos ETL ao longo do processo de integração; porém, ele existiria mesmo que se utilizasse uma aritmética de precisão infinita, pois é inerente ao *método* e independente do computador utilizado;

Erro de arredondamento global (EAG): é a acumulação de todos os EAL;

Erro total (ETT): é a soma dos ETG e EAG.

Derivação Numérica

Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica

Antes de discutir os vários métodos numéricos para determinação (aproximada) da solução do **PVI**, vamos a estudar a derivação numérica.

Consideremos uma função *f* que pode ser linear ou não, vamos admitir que *f* seja contínua e suficientemente derivável em relação a *x* e *y*. Tomando uma expansão em série de Taylor para $y\,(x_{i+1})$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1} - x_i)^2 + \ldots + R_n \\
&= f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \ldots + R_n
\end{aligned}
$$

onde o último termo é o *erro de truncamento local.*

Truncando a equação depois do termo da primeira derivada pode-se escrever:

$$
\begin{aligned}
f(x_{i+1}) &= f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1} - x_i) + R_1 \\
&= f(x_i) + f'(x_i)h + R_1
\end{aligned}
$$

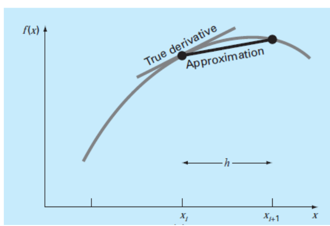
Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica: *Diferença Progressiva*

A equação pode-se reescrita como:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)} + O(x_{i+1} - x_i) \quad \text{ou} \quad f'(x_i) = \frac{\Delta f_i}{h} + O(h)$$

Essa equação recebe a designação formal nos métodos numéricos de **diferença dividida finita**, onde,



Δf_i → primeira *diferença progressiva* (*forward difference*)

h → tamanho do passo

Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica: *Diferença Regressiva*

A ST pode ser expandida regressivamente para calcular um valor anterior com base no valor atual como em:

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_i - x_{i-1}) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_i - x_{i-1})^2 - \ldots + R_n$$
$$= f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 - \ldots + R_n$$

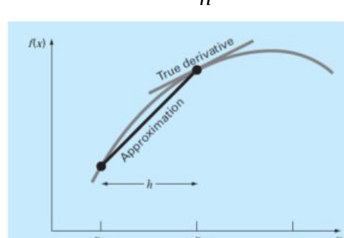
Truncando a equação depois do termo da primeira derivada e reordenando:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} + O(x_i - x_{i-1}) \quad \text{ou} \quad f'(x_i) = \frac{\nabla f_i}{h} + O(h)$$

onde,

∇f_i → primeira *diferença regressiva* (*backward difference*)

h → tamanho do passo



Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica: *Diferença Centrada*

Uma terceira forma de aproximar a primeira derivada consiste em subtrair da expansão em ST progressiva a expansão em ST regressiva:

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_{i+1}-x_i)^2 + \ldots + R_n$$

$$-$$

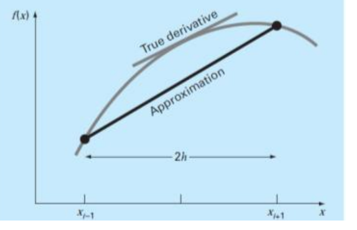
$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)(x_i-x_{i-1}) + \frac{f''(x_i)}{2!}(x_i-x_{i-1})^2 - \ldots + R_n$$

Obtendo-se finalmente a *diferença centrada*:

$$f(x_{i+1}) = f(x_{i-1}) + 2f'(x_i)h + 2\frac{f^{(3)}(x_i)}{3!}h^3 + \ldots + R_n$$

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + \frac{f^{(3)}(x_i)}{6}h^2 - \ldots \quad \text{ou}$$

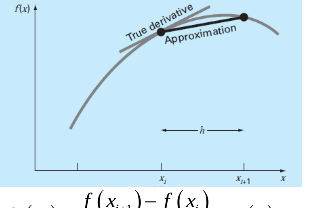
$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$



Campus AGRESTE

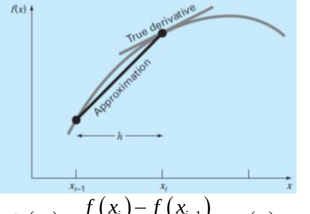
2) Derivação Numérica

Diferença Progressiva



$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1}-x_i)} + O(h)$$

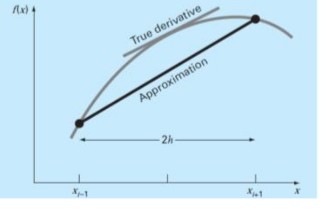
Diferença Regressiva



$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i-x_{i-1})} + O(h)$$

Diferença Centrada

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$



Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica: *Derivadas de ordem superior*

A expansão em ST também pode ser empregada para determinar derivadas de ordem mais altas. Para fazer isso, escreve-se uma expansão em ST progressiva para $f\,(x_{i+2})$ em termos de $f\,(x_i)$:

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots$$

Multiplicando por 2 a expansão em ST progressiva e subtraindo da equação anterior obtemos:

$$f(x_{i+2}) - 2\,f(x_{i+1}) = -\,f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

Reescrevendo:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2\,f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Segunda diferença dividida finita Progressiva

Campus AGRESTE

2) Derivação Numérica: *Derivadas de ordem superior*

Manipulações similares podem ser usadas para deduzir uma **versão regressiva**:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2\,f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

e uma **versão centrada**:

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2\,f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Como no caso das aproximações da primeira derivada, o caso centrado é mais acurado. Observe também que a versão centrada pode ser expressa alternativamente por:

$$f''(x_i) \cong \frac{\dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}}{h}$$

Assim, da mesma forma como a derivada segunda é uma derivada da derivada, a aproximação pela segunda diferença dividida é a diferença de duas diferenças divididas.

Campus AGRESTE

2) **Derivação Numérica:** *Derivadas de ordem superior*

Diferença Progressiva

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

2) **Derivação Numérica:** *Derivadas de ordem superior*

Diferença Regressiva

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
$f''(x_i) = \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
$f'''(x_i) = \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
$f''''(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

2) Derivação Numérica: *Derivadas de ordem superior*

Diferença Centrada

First Derivative	Error
$f'(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Second Derivative	
$f''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Third Derivative	
$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Fourth Derivative	
$f''''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
$f''''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) + 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

Campus AGRESTE

Problema de Valor Inicial (PVI)

Campus AGRESTE

3) Problema de Valor Inicial (PVI): *Métodos explícitos de passo simples*

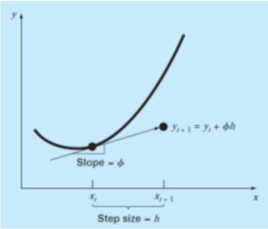
Este item é dedicado à solução de equações ordinárias diferencias (EDO) da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Nos **métodos explícitos de passo simples**, a solução numérica aproximada (x_{i+1}, y_{i+1}) é calculada a partir da solução conhecida no ponto (x_i, y_i) usando:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + \phi h$$



onde h é a largura do passo de integração e ϕ é uma constante que estima o valor da inclinação dy/dx no intervalo de x_i e x_{i+1}.

Basicamente, o método tem a forma geral:

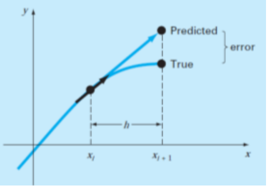
Valor novo = Valor antigo + Inclinação × Tamanho do passo

Método de EULER

Leonhard Euler
1707-1783
(matemático, físico e engenheiro suíço)

3.1) **PVI** – *Método de EULER*

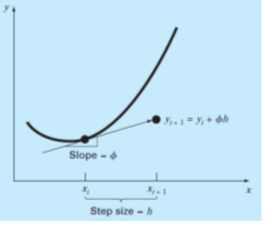
Neste método a inclinação no início do intervalo é tomada como uma aproximação da inclinação média em todo o intervalo, ou seja, a primeira derivada fornece uma estimativa direta da inclinação em x_i:



$$\phi = f(x, y)$$

em que $f(x_i, y_i)$ é uma equação diferencial calculada em x_i e y_i. Essa estimativa por ser substituída em:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h = y_i + f(x_i, y_i)h$$



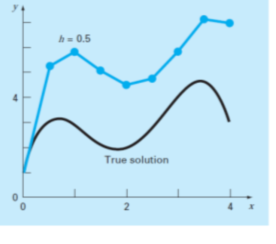
Essa fórmula é conhecida como **método de EULER** (ou Euler-Cauchy ou ponto-inclinação). Um novo valor de y é previsto usando a inclinação (igual à primeira derivada no valor original de x) para extrapolar linearmente sobre um tamanho de passo h.

3.1) **PVI** – *Método de EULER*

EXEMPLO 1: Use o método de Euler para integrar numericamente a equação:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

de $x = 0$ a $x = 4$ com um tamanho de passo de $0{,}50$. A condição inicial em $x = 0$ é $y = 1$.



x	y_{true}	y_{Euler}
0.0	1.00000	1.00000
0.5	3.21875	5.25000
1.0	3.00000	5.87500
1.5	2.21875	5.12500
2.0	2.00000	4.50000
2.5	2.71875	4.75000
3.0	4.00000	5.87500
3.5	4.71875	7.12500
4.0	3.00000	7.00000

A solução numérica de EDO envolve dois tipos de erros:

1. Erros de **truncamento** ou de **discretização** causados pela natureza das técnicas usadas para aproximar os valores de y;
2. Erros de **arredondamento** causados pelo número limitado de algarismos significativos que podem ser representados por um computador.

Os erros de truncamento são compostos de duas partes. A primeira é o erro de *truncamento local*, que resulta da aplicação do método em questão em um único passo. A segunda é o erro de *truncamento propagado*, que resulta das aproximações produzidas durante os passos anteriores. A soma dos dois é o erro de truncamento global ou total.

Uma visão do valor absoluto e das propriedades do erro de truncamento pode ser obtida deduzindo-se o método de Euler diretamente da expansão em série de Taylor.

A equação a ser integrada tem a forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(x, y\right) \qquad\qquad y' = f\left(x, y\right)$$

Fazendo uma expansão em ST em torno de um valor inicial (x_i, y_i),

$$y_{i+1} = y_i + y_i' h + \frac{y_i''}{2!} h^2 + \cdots + \frac{y_i^{(n)}}{n!} h^n + R_n$$

com $h = x_{i+1} - x_i$ e o resto R_n dado por $R_n = \dfrac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1}$

onde ξ está em algum ponto do intervalo entre x_{i+1} e x_i. Reescrevendo a expansão em ST em função de $y' = f(x,y)$, obtemos:

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) h + \frac{f'(x_i, y_i)}{2!} h^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_i, y_i)}{n!} h^n + O(h^{n+1})$$

em que $O(h^{n+1})$ especifica que o *erro de truncamento local* é proporcional ao tamanho do passo elevado à ($n+1$)-*ésima* potência.

3.1) PVI – *Análise de erro no método de EULER*

Subtraindo da expansão em ST a equação que define o método de Euler, obtemos o *erro de truncamento local verdadeiro*,

$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \cdots + O(h^{n+1})$$

para h suficientemente pequeno, os erros na equação em geral diminuem conforme a ordem aumenta, e o resultado frequentemente é representado por:

$$E_a = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 \qquad\qquad E_a = O(h^2)$$

em que E_a é o erro de truncamento local aproximado.

3.1) PVI – *Análise de erro no método de EULER*

EXEMPLO 2: Estime por série de Taylor o erro do método de Euler no problema resolvido no Ex. 1.

$$\frac{dy}{dx} = f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8,5$$

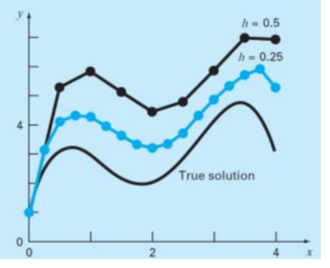
$$E_t = \frac{f'(x_i, y_i)}{2!}h^2 + \frac{f''(x_i, y_i)}{3!}h^3 + \frac{f^{(3)}(x_i, y_i)}{4!}h^4$$

Erro de truncamento Global $\Rightarrow$ $O(h)$

3.1) PVI – *Análise de erro no método de EULER*

Erro de truncamento Global ⇨ $O(h)$

1. O erro pode ser reduzido diminuindo-se o tamanho do passo;
2. O método fornecerá previsões livres de erros se a função subjacente (solução da EDO) for linear, porque, para uma reta, a segunda derivada seria nula.



Campus AGRESTE

3.1) PVI – *Pseudocódigo para o método de EULER*

```
'set integration range
xi = 0
xf = 4
'initialize variables
x = xi
y = 1
'set step size and determine
'number of calculation steps
dx = 0.5
nc = (xf − xi)/dx
'output initial condition
PRINT x, y
'loop to implement Euler's method
'and display results
DOFOR i = 1, nc
  dydx = −2x^3 + 12x^2 − 20x + 8.5
  y = y + dydx · dx
  x = x + dx
  PRINT x, y
END DO
```

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8{,}5$$

Campus AGRESTE

3.1) PVI – *Pseudocódigo para o método de EULER*

```
'set integration range
xi = 0
xf = 4
'initialize variables
x = xi
y = 1
'set step size and determine
'number of calculation steps
dx = 0.5
nc = (xf − xi)/dx
'output initial condition
PRINT x, y
'loop to implement Euler's method
'and display results
DOFOR i = 1, nc
  dydx = −2x^3 + 12x^2 − 20x + 8.5
  y = y + dydx · dx
  x = x + dx
  PRINT x, y
END DO
```

<u>proc</u> <u>euler(input:</u> $h,\ t_0,\ t_1,\ x_0$; <u>output:</u> x)

$\quad n \leftarrow \frac{\lfloor t_1 - t_0 \rfloor}{|h|}$

$\quad t \leftarrow t_0$

$\quad x \leftarrow x_0$

$\quad$ <u>for</u> $k \leftarrow 0, 1, \ldots, n$ <u>do</u>

$\qquad x \leftarrow x + hf(t, x)$

$\qquad t \leftarrow t + h$

$\quad$ <u>endfor</u>

<u>endproc</u>

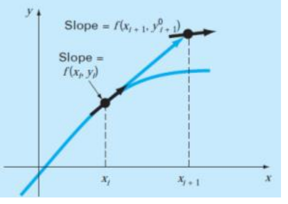
Campus AGRESTE

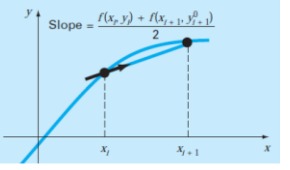
Método de HEUN

Karl Heun
1859-1929
(matemático alemão)

Campus AGRESTE

Uma fonte fundamental de erro no método de Euler é a suposição de que a derivada no início do intervalo pode ser usada no intervalo todo. Um método de melhorar a estimativa envolve a determinação de duas derivadas para o intervalo, uma no ponto inicial e outra no ponto final. Então é feita a média de duas derivadas para obter uma estimativa melhorada da inclinação no intervalo todo.





No método de Euler, a inclinação no início de um intervalo,

$$y_i' = f(x_i, y_i)$$

é usada para extrapolar linearmente para y_{i+1}:

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

$$y^0_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

No método de Euler padrão pararíamos nesse ponto. No entanto, no método de HEUN, o y^0_{i+1} calculado não é a resposta final, mas uma previsão intermediária. Essa equação é chamada de **equação preditora**. Ela fornece uma estimativa de y_{i+1} que permite o cálculo de uma estimativa da inclinação na extremidade final do intervalo:

$$y'_{i+1} = f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)$$

Calculando a inclinação média,

$$\bar{y}' = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}$$

Essa inclinação média é, então, usada para extrapolar linearmente de y_i para y_{i+1} usando o método de Euler

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y^0_{i+1}\right)}{2}h$$

3.2) PVI – *Método de HEUN*

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}^0\right)}{2} h$$

que é chamada de **equação corretora**.

O método de HEUN é uma ***abordagem do tipo preditor-corretor.*** Todos os métodos de passo múltiplo são desse tipo e serão estudados nos próximos itens.

Predictor $\Longrightarrow$ $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$

Corrector $\Longrightarrow$ $\boxed{y_{i+1}} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f\left(x_{i+1}, \boxed{y_{i+1}^0}\right)}{2} h$

Resolver de forma iterativa !!

Como critério de parada para a convergência do corretor pode-se empregar:

Iteração presente   Iteração anterior

$$|\varepsilon_a| = \left| \frac{y_{i+1}^j - y_{i+1}^{j-1}}{y_{i+1}^j} \right| 100\%$$

3.2) PVI – *Análise de erro no método de HEUN*

O *erro de truncamento local* para este método é da forma:

$$|\,e_n\,| \leq \frac{h^3}{12} \max_{t \in I} \phi''(t)$$

onde $y = \phi(t)$ é a solução exata o **erro de truncamento global**, ou seja, o erro acumulado depois de m passos, é da forma:

$$|\,E_n\,| \leq C\,h^2$$

onde C é uma constante. Portanto, quando o passo h é reduzido por um fator de ½, pode-se esperar que o erro de truncamento global seja reduzido por um fator de ¼.

Note que esta melhoria de precisão é conseguida com maior esforço computacional, pois é preciso estimar $f(x, y)$ duas vezes a fim de passar de y_i para y_{i+1} .

3.2) PVI – *Método de HEUN*

EXEMPLO 3: Use o método de Heun para integrar numericamente a equação:

$$y' = 4e^{0,8x} - 0,5y$$

de $x = 0$ a $x = 4$ com um tamanho de passo de $1,0$. A condição inicial em $x = 0$ é $y = 2$.

Predictor $\Longrightarrow$ $y_{i+1}^0 = y_i + f(x_i, y_i)h$

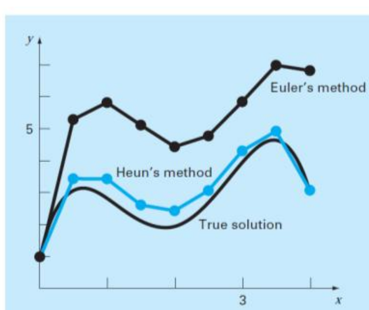
Corrector $\Longrightarrow$ $y_{i+1} = y_i + \dfrac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^0)}{2}h$

		Iterations of Heun's Method			
		1		15	
x	y_{true}	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)	y_{Heun}	$\lvert\varepsilon_t\rvert$ (%)
0	2.0000000	2.0000000	0.00	2.0000000	0.00
1	6.1946314	6.7010819	8.18	6.3608655	2.68
2	14.8439219	16.3197819	9.94	15.3022367	3.09
3	33.6771718	37.1992489	10.46	34.7432761	3.17
4	75.3389626	83.3377674	10.62	77.7350962	3.18

Campus AGRESTE

3.2) PVI – *Método de HEUN*

EXEMPLO 4: Use o método de Heun para integrar numericamente o problema dado no Ex. 1



Campus AGRESTE

Método de Ponto Médio

Campus AGRESTE

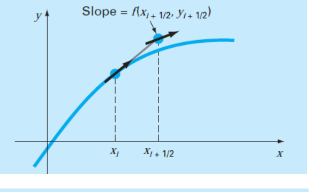
3.3) PVI – *Método do Ponto Médio*

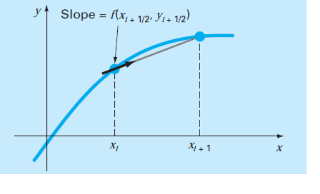
Outra modificação simples no método de Euler consiste em prever um valor de y no ponto médio do intervalo, o método denomina-se **método do ponto médio** (ou *polígono melhorado* ou de *Euler modificado*).

$$y_{i+1/2} = y_i + f(x_i, y_i)\frac{h}{2}$$

$$y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$$

$$\boxed{y_{i+1} = y_i + f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})h}$$





Campus AGRESTE

Métodos de RUNGE-KUTTA

Carl D.T. Runge
1856-1927
(matemático alemão)

Martin Wilhelm Kutta
1867-1944
(matemático alemão)

3.4) PVI – *Métodos de RUNGE-KUTTA*

Dúvidas ??

Obrigado

Críticas e sugestões serão bem-vindas, pois assim poderão ser melhoradas as aulas/slides.
bonogustavo@gmail.com