Universidade de Brasília
Departamento de Matemática
Prof. Celius A. Magalhães

Cálculo III

Notas da Aula 30*

Teorema de Green II

O teorema de Green tem várias aplicações, e em diversas áreas. Uma delas é a Lei de Ampère, que será detalhada a seguir. A partir desta lei é possível obter uma expressão explícita para o campo magnético, e então estudar várias de suas propriedades.

União de Domínios Simples

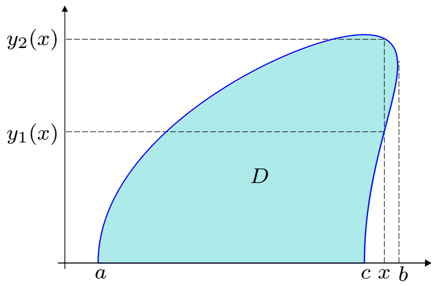
Para as aplicações é necessário generalizar um pouquinho as condições nas quais o teorema de Green pode ser aplicado.

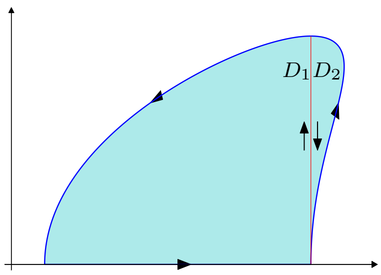
Até agora o teorema garante que, se $D \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio simples (da forma R_x e R_y) e $F = (L, M)$ é um campo de classe C^1, então vale a igualdade

$$\oint_{\partial D} L\,dx + M\,dy = \iint_D (M_x - L_y)\,dxdy$$

No entanto, agora que essa igualdade já foi demonstrada, pode-se concluir que ela vale também no caso em que D é uma união de dois domínios simples.

Considere, por exemplo, o caso em que o domínio tem a forma ilustrada na figura ao lado. É um domínio na forma R_y, mas não é da forma R_x, pois a função $y_1(x)$ não é derivável no ponto c. Não sendo simultaneamente R_x e R_y, o domínio não é simples.





Mas D pode ser dividido nos domínios D_1 e D_2, ambos simples. Veja a figura ao lado. Com a orientação positiva, os bordos ∂D_1 e ∂D_2 possuem uma parte em comum e, nessa parte, as orientações são contrarias. Daí segue-se que as correspondentes integrais de linha se cancelam nesta parte, e portanto

$$\oint_{\partial D} L\,dx + M\,dy = \oint_{\partial D_1} L\,dx + M\,dy + \oint_{\partial D_2} L\,dx + M\,dy$$

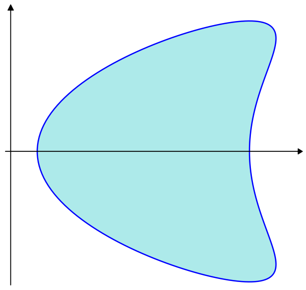
Como D_1 e D_2 são simples, o Teorema de Green pode ser aplicado a eles, e portanto

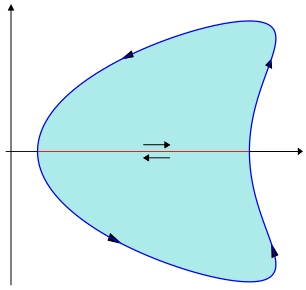
$$\begin{aligned}\oint_{\partial D} L\,dx + M\,dy &= \oint_{\partial D_1} L\,dx + M\,dy + \oint_{\partial D_2} L\,dx + M\,dy \\ &= \iint_{D_1} (M_x - L_y)\,dxdy + \iint_{D_2} (M_x - L_y)\,dxdy \\ &= \iint_D (M_x - L_y)\,dxdy\end{aligned}$$

*Texto digitado e diagramado por **Angélica Lorrane** a partir de suas anotações de sala

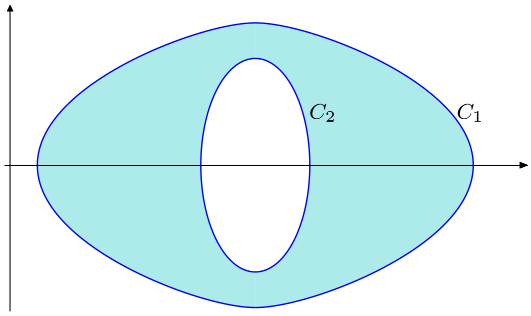
Isso mostra que o teorema vale se o domínio puder ser dividido em domínios simples.

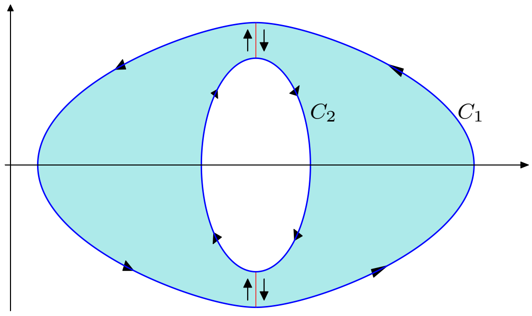
Um vez feita essa conclusão pode-se dar um passo adiante e concluir que o teorema vale em domínios como o ilustrado na figura da esquerda abaixo. Esse domínio não é R_x, pois não é a região entre dois gráficos de funções na variável x. No entanto, como ilustra a figura da direita, o domínio pode ser dividido em dois outros nos quais vale o teorema, e o mesmo argumento usando acima mostra que também vale para o domínio original.





Ainda os mesmos argumentos podem ser usados para mostrar que o teorema vale em domínios como o ilustrado abaixo, com um "buraco" no seu interior. O domínio está ilustrado na figura da esquerda, e a da direita ilustra uma divisão em domínios onde vale o teorema.





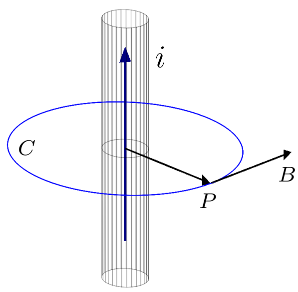
Em razão do "buraco", o bordo do domínio é a união das curvas C_1 e C_2 ilustradas acima, e vale observar um fato curioso: a orientação da curva C_2 é contrária à da curva C_1! Veja a figura da direita. Essa mudança é essencial para que o Teorema de Green possa ser aplicado corretamente e, em geral, a definição de orientação positiva é aquela dada a seguir. Observe que o bordo do domínio ilustrado acima está orientado positivamente segundo essa definição.

Definição 1 (Regra da mão esquerda)**.** *O sentido positivo do bordo ∂D é aquele que deixa o domínio à esquerda de quem faz o percurso.*

Lei de Ampère

Por volta de 1820, Oersted realizou uma experiência interessante, aproximando uma agulha imantada de um fio por onde passava uma corrente estacionária. Ele notou então, pela primeira vez, que essas correntes produzem campos magnéticos.

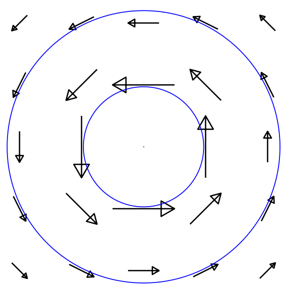
A figura ilustra a situação, onde a seta maior indica o sentido da corrente, o círculo representa as linhas de força e o vetor B o campo magnético. Assim, a direção e o sentido do campo podem ser determinados apenas com o uso da agulha imantada.



Para o estudo da intensidade, entretanto, são necessárias experiências mais elaboradas, e Ampère foi o primeiro a perceber a importância da circulação para esse estudo. Assim, supondo que a corrente está ao longo do eixo $\mathcal{O}z$, e indicando por C um círculo de centro na origem e raio r, a lei de Ampère afirma que

$$\oint_C \langle B, T \rangle \, ds = \mu_0 \, i \tag{1}$$

onde i é a intensidade da corrente e $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ N/A^2 é a constante magnética. O curioso dessa lei é que a integral de linha é sobre um círculo de raio r e, em princípio, depende deste raio. Mas, segundo a lei, a integral de linha é constante, e independente do raio do círculo!



Esse comportamento pode ser explicado como segue. Se o raio do círculo é pequeno, o seu comprimento também é pequeno, mas a intensidade do campo é grande. Se o círculo aumenta, o seu comprimento também aumenta, mas a intensidade do campo diminui. Assim, a lei de Ampère afirma que um aumento no raio do círculo corresponde a uma diminuição da intensidade do campo, e isso de maneira a que a circulação permaneça constante. Esse comportamento está ilustrado na figura ao lado.

Bem, após esses entretantos, pode-se passar ao cálculo da intensidade do campo. Indique por $P(t) = (r\cos(t), r\,\mathrm{sen}(t))$, $t \in [0, 2\pi]$, uma parametrização positiva do círculo C e por $T(t) = P'(t)/\|P'(t)\|$ o vetor unitário tangente. Como B é tangente ao círculo, tem-se que $B(P(t)) = \|B(P(t))\|T(t)$. Além disso, por simetria, a intensidade de B é constante ao longo de C, isto é, $\|B(P(t))\| = k$ para todo $t \in [0, 2\pi]$. Segue-se que $B(P(t)) = k\,T(t)$, e portanto

$$\langle B(P(t)), T(t)\rangle = \langle k\,T(t), T(t)\rangle = k\langle T(t), T(t)\rangle = k$$

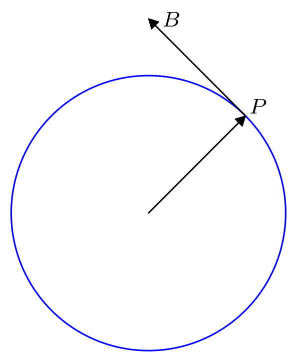
Mas então, da lei de Ampère,

$$\mu_0 i = \oint_C \langle B, T\rangle\, ds = \int_0^{2\pi} \langle B(P(t)), T(t)\rangle \|P'(t)\|\, dt = k\int_0^{2\pi} \|P'(t)\|\, dt = k\,2\pi r$$

de onde segue-se que$\|B(P(t))\| = k = \mu_0 i/2\pi r$.

Ótimo, essa é a intensidade ao longo de C, onde $\|P(t)\| = r$. Em um ponto qualquer $P = (x, y)$, com $\|P\| \neq 0$, a intensidade é dada por

$$\|B(P)\| = \frac{\mu_0 i}{2\pi\|P\|} = \frac{\mu_0 i}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}$$



Resta ainda determinar a direção e sentido do campo. Mas essa é fácil! Da figura ao lado, basta girar o ponto $P = (x, y)$ de $\pi/2$ no sentido anti-horário para obter que a direção e sentido do campo magnético é dado por $Q = (-y, x)$. Considerando o vetor unitário $U = Q/\|Q\|$, obtém-se finalmente que a expressão do campo B é dada por

$$\begin{aligned} B(P) = \|B(P)\|U &= \frac{\mu_0 i}{2\pi\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \end{aligned}$$

Campo Gradiente $\times$ Campo Irrotacional

Um campo $F = (L, M)$ de classe C^1 é um campo gradiente se $L = f_x$ e $M = f_y$ para alguma função f, que é dita a função potencial para o campo. Como as derivadas parciais mistas comutam, se F é um campo gradiente então

$$M_x - L_y = (f_y)_x - (f_x)_y = f_{yx} - f_{xy} = 0$$

e portanto o campo é *irrotacional*, segundo o definição dada na aula passada.

Assim, todo campo gradiente é também irrotacional. É natural então perguntar pela volta, se os campos irrotacionais são também campos gradientes. A resposta é *não*, e o contra exemplo é exatamente o campo magnético obtido acima. De fato, indicando por

$$L(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{-y}{x^2+y^2} \quad \text{e} \quad M(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

as coordenadas do campo, o primeiro fato a notar é que o domínio de B é o conjunto

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \neq (0,0)\}$$

que não inclui a origem $\mathcal{O}$, e portanto é um domínio com um "buraco" corresponde à este ponto. O segundo fato é que

$$L_y(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = M_x(x,y)$$

de onde segue-se que B é irrotacional, isto é, $M_x - L_y = 0$.

No entanto, B não é um campo gradiente, o que decorre da lei de Ampère em (1) acima. De fato, o círculo C, de centro na origem e raio r, é um caminho fechado. Logo, se B fosse um campo gradiente, a integral em (1) seria nula, uma contradição.

Segue-se que B é exemplo de um campo irrotacional que não é gradiente. Isso ocorre porque, em razão do buraco correspondente à origem, o domínio de B não é simplesmente conexo. Veja as definições a seguir.

Definição 2. *Um domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ é*

i) conexo se quaisquer dois pontos de D podem ser ligados por um caminho inteiramente contido no domínio;

ii) simplesmente conexo se for conexo e, além disso, todo caminho fechado e simples em D contorna apenas pontos do domínio.

Intuitivamente, o domínio é conexo se tiver apenas uma parte, e é simplesmente conexo se tiver apenas uma parte e, além disso, não tiver "buracos".

Por exemplo, o domínio $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \text{ e } |y| \geq 1\}$ é constituído das duas partes $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \text{ e } y \geq 1\}$ e $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 3 \text{ e } y \leq -1\}$, e portanto não é conexo (veja a Fig. 1). Já o anel $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 3\}$ é conexo, mas não é simplesmente conexo, uma vez o círculo $x^2+y^2 = 2^2$ está contido no anel mas contorna pontos que não estão no domínio (veja a Fig. 2). Finalmente, a Fig. 3 ilustra um domínio que é simplesmente conexo.

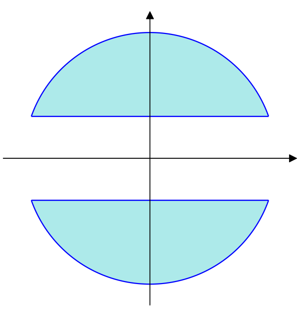


Fig. 1

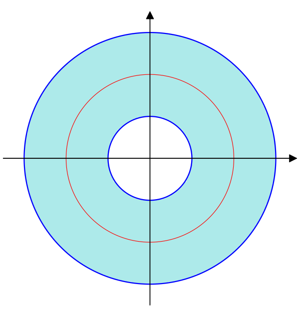


Fig. 2

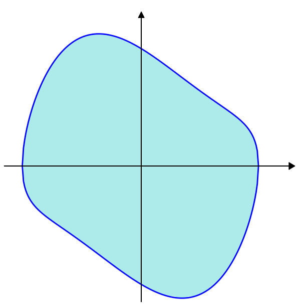


Fig. 3

Para campos definidos em domínios simplesmente conexo pode-se demonstrar o teorema a seguir, segundo o qual ser gradiente é sinônimo de ser irrotacional.

Teorema 1. *Suponha $F = (L,M)$ um campo de classe C^1 em um domínio simplesmente conexo $D \subset \mathbb{R}^2$. Então F é um campo gradiente se, e somente se, F é um campo irrotacional.*

Esse teorema esclarece a questão do campo magnético: ele é irrotacional, e deixa de ser gradiente em virtude de seu domínio não ser simplesmente conexo.

Exemplo 1. *Verifique que, restrito ao domínio* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$*, o campo magnético é um campo gradiente, e determine uma função potencial para este campo.*

Solução. Já foi visto que B é irrotacional. Além disso, é claro que o novo domínio é simplesmente conexo, e de acordo com o teorema acima ele é também um campo gradiente.

Para a função potencial deve-se obter uma função $f(x, y)$ tal que $f_x = L$ e $f_y = M$, onde L e M são as coordenadas do campo já definidas acima. Usando a substituição $u = x/y$ para integrar a igualdade $f_x = L$ na variável x, obtém-se que

$$f(x,y) = \int \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{-y}{x^2+y^2}\, dx = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{y}{y^2((x/y)^2+1)}\, dx = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \int \frac{1}{u^2+1}\, du$$
$$= -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \arctan(u) + g(y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \arctan(x/y) + g(y)$$

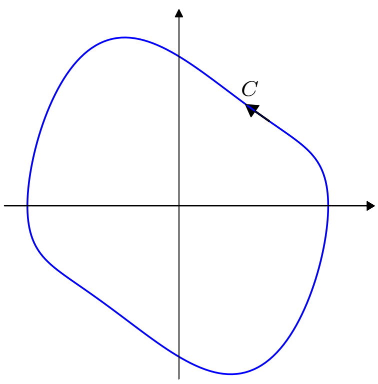
onde $g(y)$ é a constante de integração em relação à variável x. Já se tem então que $f(x, y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \arctan(x/y) + g(y)$. Para determinar $g(y)$ basta notar que

$$f_y(x,y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{1}{(x/y)^2+1} \frac{-x}{y^2} + g'(y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} + g'(y) \quad \text{e} \quad M(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$

e usar a igualdade $f_y = M$. Segue-se então que $g'(y) = 0$, e portanto $g(y) = k =$ constante. Assim, para qualquer constante k, $f(x, y) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \arctan(x/y) + k$ é uma função potencial para o campo magnético restrito ao domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$. A restrição é mesmo essencial, uma vez que o y aparece no denominador, e portanto não pode se anular. $\square$

Lei de Ampère Ampliada

O fato de o campo magnético B ser irrotacional pode ser usado para ampliar a lei de Ampère no sentido indicado a seguir.

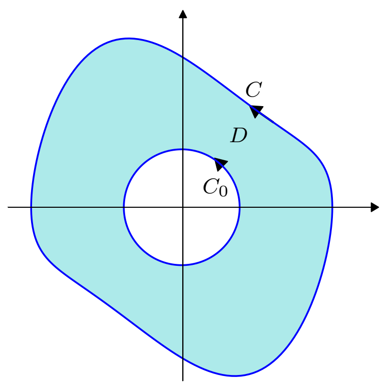


Considere um qualquer caminho fechado simples C, orientado no sentido anti-horário e com a origem em seu interior, como na figura. O que se pretende é mostrar que, mesmo sem conhecer uma parametrização do caminho, ainda assim se tem que

$$\oint_C \langle B, T\rangle\, ds = \mu_0 i$$

Para isso, não é possível aplicar o teorema de Green na região limitada por C, pois essa região contém a origem, onde o campo magnético não está definido.

A ideia é muito simples: usar um argumento de excisão, retirando-se um pequeno disco em torno da origem. Por um lado, a excisão permite a aplicação do teorema de Green, o que é muito bom. Mas, por outro, cria uma região com um "buraco", como ilustrado na figura ao lado.



Indique então por C_0 um círculo orientado no sentido anti-horário, centrado na origem e de raio pequeno o suficiente para estar dentro da região limitada por C. Indique ainda por D a região entre C e C_0. Veja a figura.

Ora! O primeiro ponto é que o teorema de Green pode ser aplicado no domínio D, que é uma união de domínios simples, como visto no início da aula. O segundo ponto é que, com as orientações introduzidas acima e em vista da regra da mão esquerda, o bordo de D tem orientação $\partial D = C \cup (-C_0)$.

Esclarecidos esses pontos, lembrando que o campo magnético $B = (L, M)$ é irrotacional, isto é, que $M_x - L_y = 0$, e aplicando o teorema de Green em D obtém-se que

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D (M_x - L_y)\, dxdy = \oint_{\partial D} \langle B, T \rangle\, ds \\ &= \oint_C \langle B, T \rangle\, ds + \oint_{-C_0} \langle B, T \rangle\, ds \\ &= \oint_C \langle B, T \rangle\, ds - \oint_{C_0} \langle B, T \rangle\, ds \end{aligned}$$

Finalmente, da lei de Ampère como enunciada em (1) e aplicada a C_0, segue-se que

$$\oint_C \langle B, T \rangle\, ds = \oint_{C_0} \langle B, T \rangle\, ds = \mu_0 i$$

Esta é a forma ampliada da lei de Ampère, em que a novidade está em que a curva C não precisa ser um círculo centrado na origem, mas pode ser *qualquer* curva fechada simples que inclui a origem em seu interior.