# Μηχανική Μάθηση

## Project B

Τσόγκας Ευάγγελος 3150185

# Αλγόριθμος EM σε μίξη Gaussian κατανομών

## Εξισώσεις

Η μίξη Gaussian κατανομών είναι της μορφής:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{K} \pi_\kappa \prod_{d=1}^{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\kappa^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x_d-\mu_{kd})^2}$$

Όπου,

$$N(x|\mu_k, \sigma_\kappa^2) = \prod_{d=1}^{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\kappa^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x_d-\mu_{kd})^2}$$

Σκοπός είναι η μεγιστοποίηση της λογαριθμικής πιθανοφάνειας:

$$L(\pi, \mu, \sigma^2) = \sum_{n=1}^{N} \log \sum_{k=1}^{K} \pi_\kappa \, N(x_n|\mu_k, \sigma_\kappa^2)$$

**Ε βήμα:**

$$\gamma(z_{nk}) = \frac{\pi_\kappa N(x_n|\mu_k, \sigma_\kappa^2)}{\sum_{j=1}^{K} \pi_j \, N\left(x_n\middle|\mu_j, \sigma_j^2\right)}$$

**Μ βήμα:**

$$\mu_\kappa = \frac{\sum_{n=1}^{N} \gamma(z_{nk}) x_n}{\sum_{n=1} \gamma(z_{nk})}$$

$$\sigma_\kappa^2 = \frac{\sum_{n=1}^{N} \sum_{d=1}^{D} \gamma(z_{nk})(x_{nd} - \mu_{kd})^2}{D \sum_{n=1}^{N} \gamma(z_{nk})}$$

$$\pi_k = \frac{\sum_{n=1}^{N} \gamma(z_{nk})}{N}$$

## Αριθμητική ευστάθεια και σύγκλιση του αλγορίθμου

Για λόγους debugging αν ισχύει η παρακάτω συνθήκη το πρόγραμμα τερματίζεται, καθώς σημαίνει πως υπάρχει λάθος:

$$L^{new}(\pi, \mu, \sigma^2) - L^{old}(\pi, \mu, \sigma^2) < 0$$

Πρέπει πάντα να ισχύει:

$$L^{new}(\pi, \mu, \sigma^2) \geq L^{old}(\pi, \mu, \sigma^2)$$

Για έλεγχο σύγκλισης εξετάζεται αν:

$$L^{new}(\pi, \mu, \sigma^2) - L^{old}(\pi, \mu, \sigma^2) < \varepsilon$$

Όπου ε κάποιος πολύ μικρός αριθμός πχ. $10^{-6}$.

### Αριθμητική ευστάθεια

Για την αριθμητική ευστάθεια του αλγορίθμου οι εξισώσεις των εκ των υστέρων πιθανοτήτων και της λογαριθμικής πιθανοφάνειας προσαρμόζονται ως εξής:

**1.**

$$\gamma(z_{nk}) = \frac{\pi_\kappa N(x_n|\mu_k, \sigma_\kappa^2)}{\sum_{j=1}^{K} \pi_j N\left(x_n|\mu_j, \sigma_j^2\right)} = \frac{e^{\log \pi_\kappa N\left(x_n|\mu_k, \sigma_\kappa^2\right)}}{\sum_{j=1}^{K} e^{\log \pi_j N\left(x_n|\mu_j, \sigma_j^2\right)}}$$

Θέτουμε $f_k = \log \pi_\kappa N(x_n|\mu_k, \sigma_\kappa^2) = log\, \pi_\kappa + log \prod_{d=1}^{D} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\kappa^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x_d - \mu_{kd})^2}$

$$= log\, \pi_\kappa + \sum_{d=1}^{D} (log\ e^{-\frac{1}{2\sigma_k^2}(x_d - \mu_{kd})^2} - log\sqrt{2\pi\sigma_\kappa^2})$$

$$= log\, \pi_\kappa + \sum_{d=1}^{D} ( - \frac{1}{2\sigma_k^2}(x_d - \mu_{kd})^2 - \frac{1}{2}\log 2\pi\sigma_\kappa^2)$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε το $m = \max(f_1, \dots, f_k)$

Τελικά,

$$\gamma(z_{nk}) = \frac{e^{f_k - m}}{\sum_{j=1}^{K} e^{f_j - m}}$$

**2.**

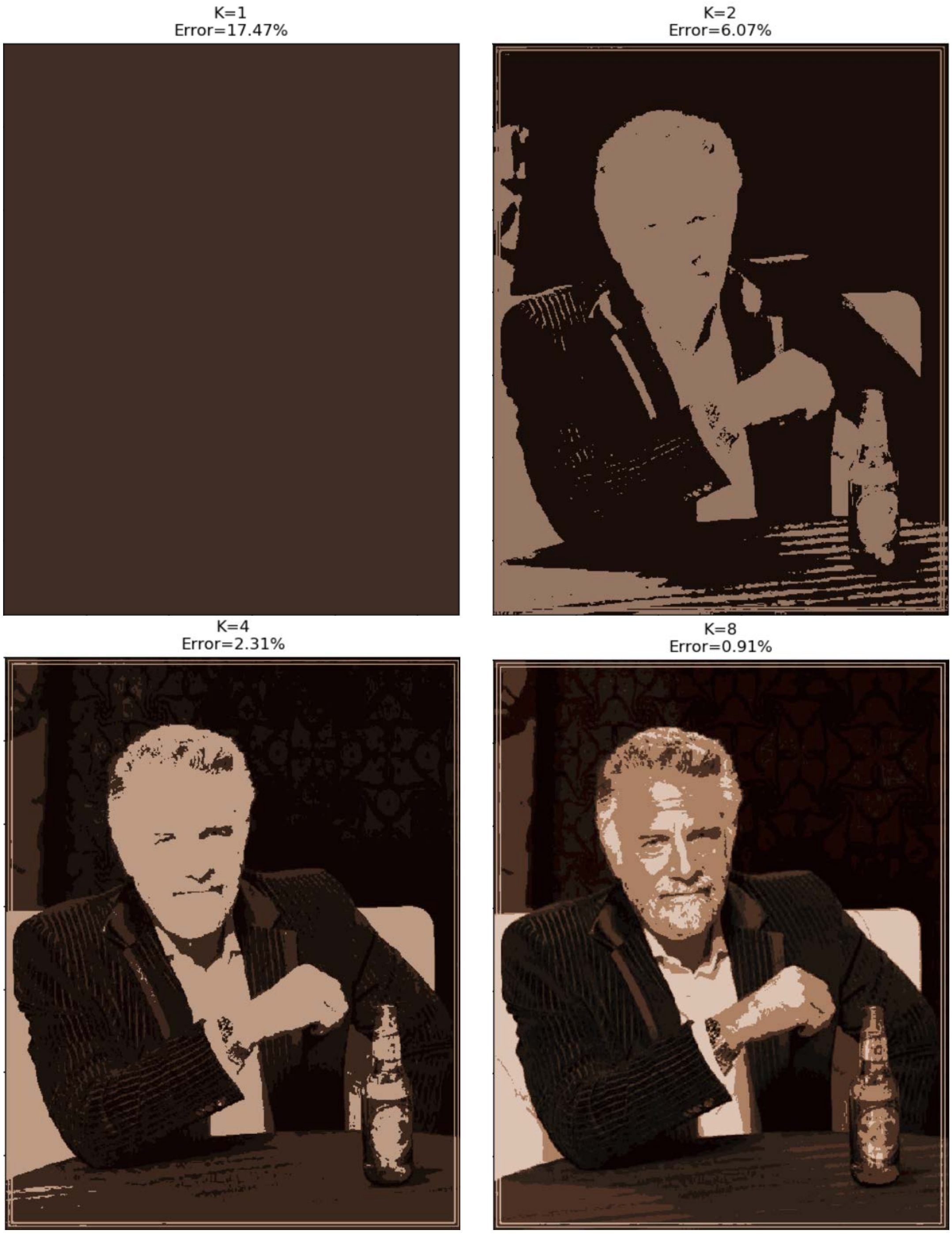
Κατά παρόμοιο τρόπο για τη λογαριθμική πιθανοφάνεια:

$$L(\pi, \mu, \sigma^2) = \sum_{n=1}^{N} \log \sum_{k=1}^{K} \pi_\kappa N(x_n | \mu_k, \sigma_\kappa^2) = \sum_{n=1}^{N} \log \sum_{k=1}^{K} e^{f_k - m + m}$$

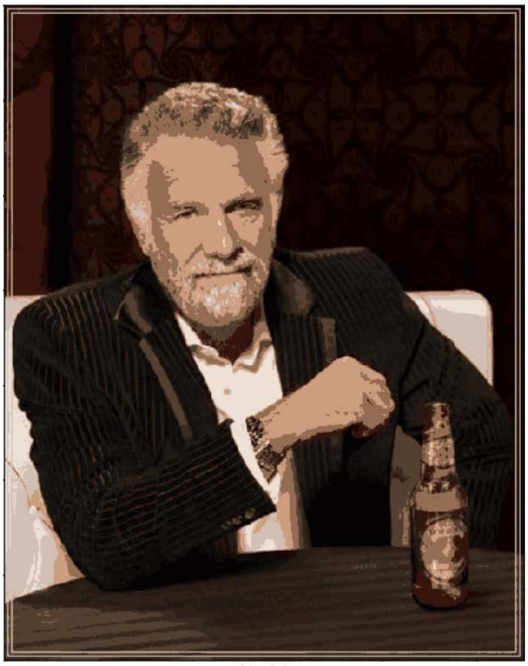
$$= \sum_{n=1}^{N} \log e^m \sum_{k=1}^{K} e^{f_k - m} = \sum_{n=1}^{N} (\mathrm{m} + log \sum_{k=1}^{K} e^{f_k - m})$$

## Εφαρμογή του αλγορίθμου και αποτελέσματα

Παρακάτω φαίνονται οι εικόνες για τιμές του K = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 και το οποίο αναγράφεται στο πάνω μέρος κάθε εικόνας, όπως επίσης και το κόστος ανακατασκευής της. Για K=1 σύγκλιση σε 2 επαναλήψεις. Για K = 2 σύγκλιση σε 46 επαναλήψεις. Για K = 4 σύγκλιση σε 70 επαναλήψεις. Για K = 8 σύγκλιση σε 180 επαναλήψεις. Για K = 16 σύγκλιση σε 259 επαναλήψεις. Για K = 32 και K = 64 χρήση μέγιστου αριθμού επαναλήψεων = 300.

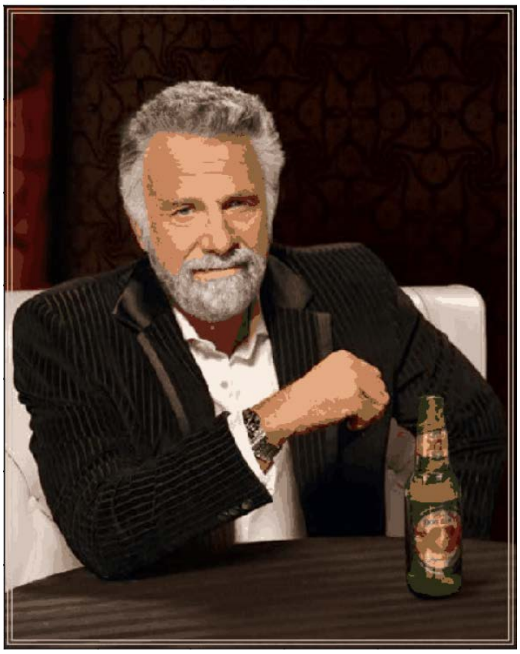


K=16
Error=0.48%



K=32
Error=0.28%

K=64
Error=0.19%



Αρχική εικόνα