

# Θεωρία Παιγνίων και Αποφάσεων

## Προγραμματιστική Εργασία

Ονοματεπώνυμο: Ευάγγελος Τσόγκας

ΑΜ: 3150185

### Περίληψη

Στην παρούσα εργασία υλοποίησα τον αλγόριθμο μάθησης Best Response Dynamics για την εύρεση σημείων ισορροπίας κατά Nash σε παίγνια εκλογικών διαδικασιών. Πιο συγκεκριμένα, υλοποίησα δύο παραλλαγές του αλγορίθμου για κάθε έναν από τους εκλογικούς κανόνες Plurality και Borda. Στη συνέχεια, περιγράφω λεπτομερώς την υλοποίηση, τα πειράματα και τα συμπεράσματα. Ανέπτυξα το πρόγραμμα σε Python και έκανα χρήση της βιβλιοθήκης NumPy για ευκολία και ταχύτητα στις πράξεις πινάκων.

### 1. Υλοποίηση του Best Response Dynamics

Το πρώτο βήμα του αλγορίθμου αποτελεί την αρχικοποίηση του παιγνίου. Το παίγνιο αποτελεί έναν πίνακα  $n \times m$ , (όπου  $n$  οι ψηφοφόροι και  $m$  οι υποψήφιοι), ο οποίος περιέχει τις ψήφους κάθε ψηφοφόρου για κάθε υποψήφιο. Αυτές οι ψήφοι αρχικοποιούνται με βάση τον εκλογικό κανόνα που χρησιμοποιείται και ο νικητής με βάση τις πραγματικές προτιμήσεις είναι αυτός που έχει τις περισσότερες ψήφους σε αυτό το στάδιο.

Στη συνέχεια, ξεκινάει το loop του αλγορίθμου το οποίο τερματίζεται είτε όταν κανένας ψηφοφόρος δεν θέλει να αλλάξει στρατηγική, δηλαδή το παίγνιο έχει ισορροπήσει, είτε όταν φτάσει τον μέγιστο αριθμό επαναλήψεων  $t_{max}=1000$ . Σε κάθε γύρο (επανάληψη) του αλγορίθμου, αρχικά υπολογίζω τον τρέχον νικητή, δηλαδή τον υποψήφιο με τις

περισσότερες ψήφους. Αφού βρεθεί ο νικητής, για κάθε ψηφοφόρο ελέγχω αν θέλει να αλλάξει την στρατηγική του γνωρίζοντας τι έχουν ψηφίσει οι υπόλοιποι. Κίνητρο για να αλλάξει τη στρατηγική του αποτελεί η εκλογή κάποιου υποψηφίου ο οποίος είναι πιο πάνω στις προτιμήσεις του σε σχέση με τον τρέχον νικητή. Αυτό μπορεί να συμβεί αν δώσει παραπάνω ψήφους σε κάποιον διαφορετικό υποψήφιο. Οι στρατηγικές και ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται, καθορίζονται από τον εκλογικό κανόνα που χρησιμοποιείται. Μόλις βρεθεί κάποιος που θέλει να αλλάξει στρατηγική, γίνονται οι απαραίτητες αλλαγές στις ψήφους του και προχωράει ο αλγόριθμος στον επόμενο γύρο. Αν κανένας ψηφοφόρος δεν θέλει να κάνει κάποια αλλαγή, τότε ο αλγόριθμος σταματάει, αφού έχει βρεθεί το σημείο ισορροπίας και υπολογίζεται ο νικητής με τις περισσότερες ψήφους στην ισορροπία.

## 1.1 Υλοποίηση για τον κανόνα Plurality

### α) Αρχικοποίηση

Με τον κανόνα Plurality, κάθε ψηφοφόρος δίνει μια ψήφο στην πρώτη του προτίμηση και 0 ψήφους στους υπόλοιπους υποψηφίους.

### β) Επιλογή στρατηγικής

Σε κάθε γύρο του αλγορίθμου, κάθε υποψήφιος εξετάζει τον τρέχον νικητή σε συνδυασμό με τις ψήφους των άλλων ψηφοφόρων, ώστε να αποφασίσει αν θέλει να αλλάξει στρατηγική ή όχι. Δεν εξετάζονται όλες οι πιθανές στρατηγικές, αλλά μόνο αυτές που αφορούν την απόδοση της ψήφου σε υποψηφίους που βρίσκονται πιο πάνω στην κατάταξη προτιμήσεων του εκάστοτε ψηφοφόρου σε σχέση με τον τρέχον νικητή. Επομένως, ο ψηφοφόρος ελέγχει αν με το να δώσει την ψήφο του σε κάποιον από αυτούς τους υποψηφίους, θα αλλάξει το εκλογικό αποτέλεσμα. Αν πράγματι έχει τη δυνατότητα να εκλέξει κάποιον προτιμότερο υποψήφιο, τότε δίνει την ψήφο του σε εκείνον.

## 1.2 Υλοποίηση για τον κανόνα Borda

### α) Αρχικοποίηση

Με τον κανόνα Borda, κάθε ψηφοφόρος δίνει  $m-1$ ,  $m-2$ ...0 ψήφους αντίστοιχα στους υποψηφίους με βάση την κατάταξή τους στις προτιμήσεις του.

### β) Επιλογή στρατηγικής

Ομοίως με τον κανόνα Plurality, στον κανόνα Borda κάθε ψηφοφόρος εξετάζει σε κάθε γύρο αν μπορεί να εκλέξει κάποιον προτιμότερο για αυτόν υποψήφιο. Το μέσο για να το πετύχει

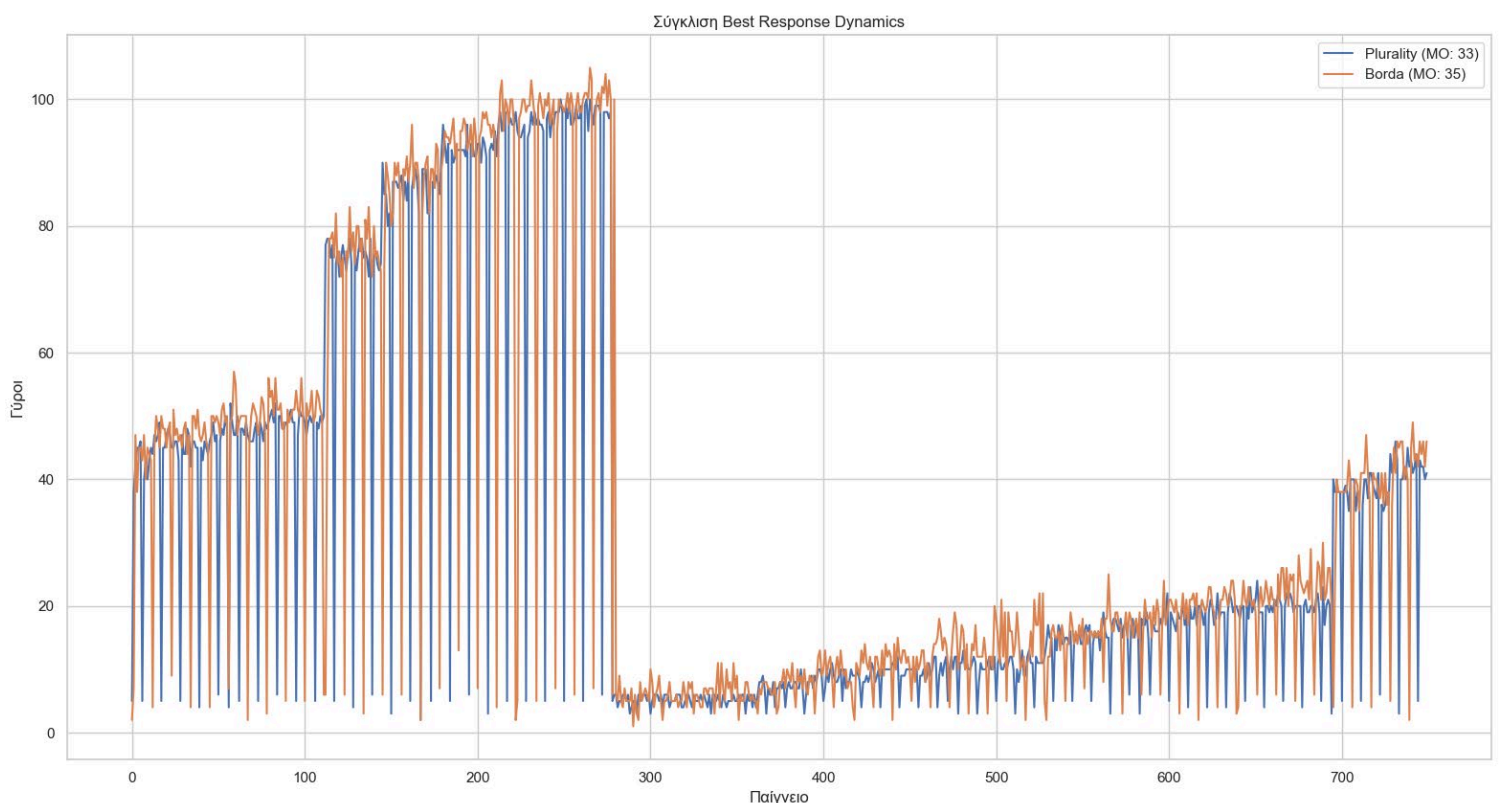
αυτό είναι απόδοση σε κάποιον  $m-1$  ψήφων, που αποτελούν τις περισσότερες ψήφους που μπορεί να δώσει μεμονωμένα σε κάποιον υποψήφιο. Επομένως, δεν εξετάζονται όλες οι πιθανές στρατηγικές που είναι  $m!$ , αλλά το μόνο που ελέγχει ο υποψήφιος είναι αν με το να δώσει  $m-1$  ψήφους μπορεί να εκλέξει κάποιον υποψήφιο που είναι πιο πάνω στις προτιμήσεις του σε σχέση με τον τρέχον νικητή. Αν βρει κάποιον, δίνει σε αυτόν  $m-1$  ψήφους και τις υπόλοιπες ( $m-2...0$ ) τις μοιράζει και πάλι με βάση την κατάταξη προτιμήσεων.

## 2. Πειράματα και Συμπεράσματα

Προκειμένου να αξιολογήσω τους δύο εκλογικούς κανόνες Plurality και Borda παρήγαγα συνολικά 1500 παίγνια (750 για τον καθένα). Χρησιμοποίησα 5 διαφορετικές τιμές για το  $n$  και  $m$  οι οποίες είναι: 5, 10, 20, 50, 100. Για κάθε ζεύγος τιμών, παρήγαγα 30 παίγνια με τυχαία permutations προτιμήσεων. Τα δεδομένα κάθε παιγνίου δίνονται στο πρόγραμμα σε μορφή αρχείου .json.

### α) Αξιολόγηση ως προς τη σύγκλιση

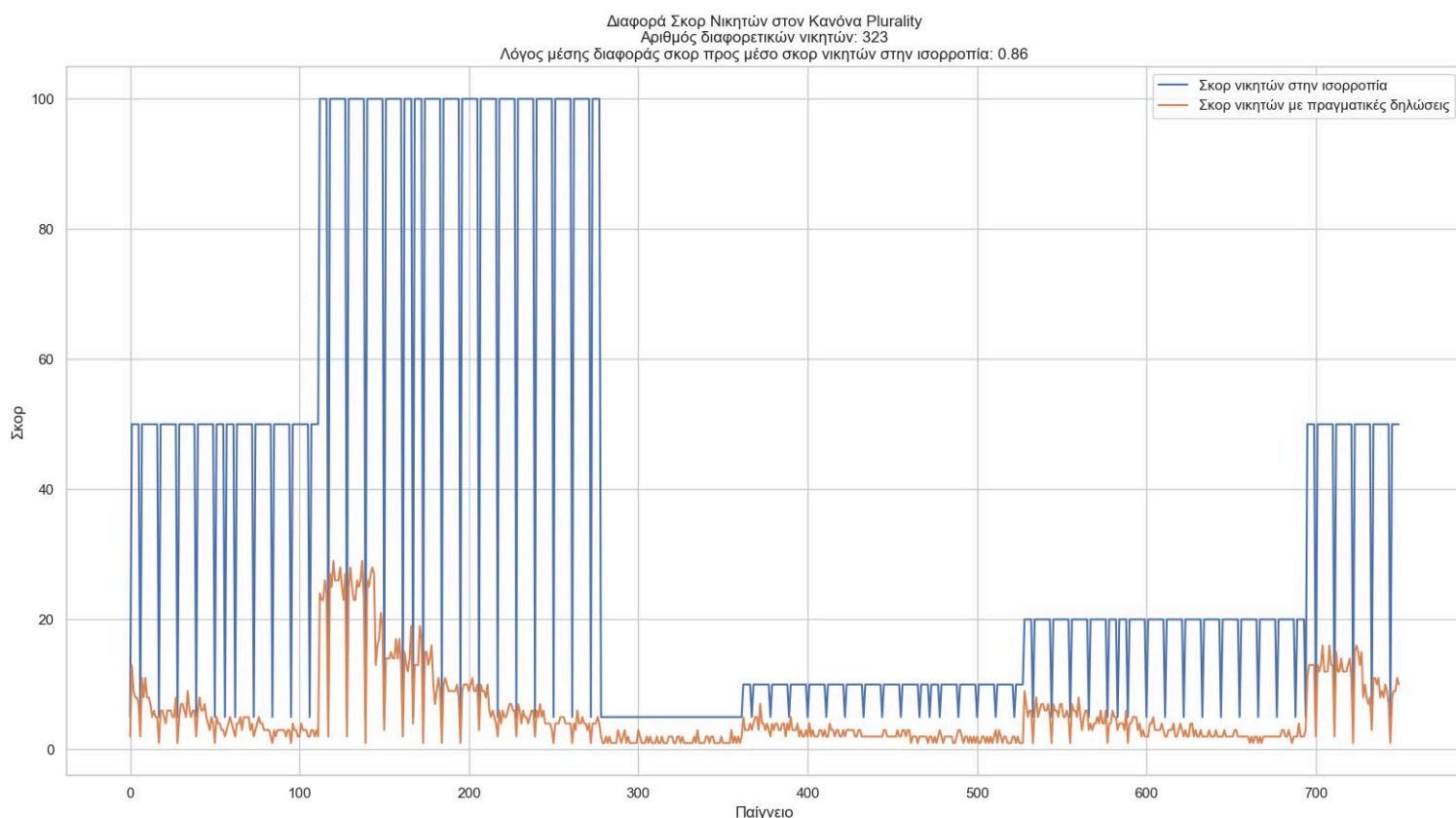
Όπως φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα η διαφορά των δύο κανόνων ως προς τη σύγκλιση δεν είναι σημαντική. Και οι δύο κανόνες συγκλίνουν σε όλα τα παίγνια με μέγιστο αριθμό γύρων λίγο παραπάνω από 100. Επίσης, ο μέσος όρος γύρων για τη σύγκλιση στον κανόνα Plurality είναι 33 και στον κανόνα Borda είναι 35. Επομένως, με βάση τη σύγκλιση δεν φαίνεται να είναι καλύτερος κάποιος από τους δύο.



## β) Αξιολόγηση ως προς τα εκλογικά αποτελέσματα

Σε καθένα κανόνα βρίσκω δύο ειδών νικητών μαζί με τις συνολικές τους ψήφους: τον νικητή με βάση τις πραγματικές προτιμήσεις και τον νικητή στο σημείο ισορροπίας.

Παρατηρώντας τα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε πως με τον κανόνα Plurality και ο αριθμός των δύο διαφορετικών νικητών είναι μεγαλύτερος, αλλά και η μέση διαφορά σκορ των νικητών είναι μεγαλύτερη σε σύγκριση με τον κανόνα Borda. Για την ακρίβεια ο αριθμός διαφορετικών νικητών στους δύο κανόνες είναι 323 και 177 αντίστοιχα, ενώ ο λόγος της μέσης διαφοράς σκορ προς το μέσο σκορ νικητών στην ισορροπία είναι 0.86 και 0.4 αντίστοιχα. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε πως με τον κανόνα Borda ο αλγόριθμος Best Response Dynamics έχει καλύτερο κοινωνικό όφελος σε σύγκριση με τον κανόνα Plurality.



Διαφορά Σκορ Νικητών στον Κανόνα Borda  
Αριθμός διαφορετικών νικητών: 177  
Λόγος μέσης διαφοράς σκορ προς μέσο σκορ νικητών στην ισορροπία: 0.4

