

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

MASTER 2 : CRYPTOLOGIE ET SÉCURITÉ
INFORMATIQUE

PROJET DE FIN D'ÉTUDES

Wave - Un procédé de signature à base de codes correcteurs

Suzanne LANSADÉ
Eva PALANDJIAN

Encadrant:
Gilles ZEMOR

Février, 2020



Sommaire

Introduction	2
1 Le schéma de signature Wave	3
1.1 La famille de codes $(U, U+V)$ -généralisés	3
1.2 Le principe de signature	6
1.3 Le décodage avec trappe	7
1.4 Implémentation et choix de paramètres	15
2 Uniformisation des signatures et syndromes	15
2.1 Une fuite d'information	15
2.2 La méthode du rejet	16
2.3 Choix des algorithmes de décodage	20
2.4 Estimation du nombre de rejet	21
3 Sécurité du schéma	23
3.1 Sécurité EUF-CMA	23
3.1.1 Définitions	24
3.1.2 Réduction au problème DOOM	24
3.1.3 Preuve formelle de la réduction	25
3.2 Indistinguabilité des codes $(U, U+V)$ -généralisés	28
Conclusion	29
Quelques démonstrations supplémentaires	30

Introduction

- Passage au post-quantique \rightarrow On cherche des alternatives à RSA et DH.
- Appel d'offre NIST
- On aimerait bien un système de signature utilisant les codes, puisque le problème du décodage d'un code aléatoire est NP-complet.
- Ça marche pas mal pour le chiffrement, mais encore très compliqué pour les signatures, comme en témoigne le tableau des soumissions au NIST pour le second tour.

	Proportion	Échange de clefs	Signature
Réseaux	46%	9	3
Codes	28%	7	0
Fonctions de hachage	4%	0	1
Multi-varié	15%	0	4
Isogénies	4%	1	0
Preuves ZK	4%	0	1

Figure 1: Comparaison des soumissions au NIST du second tour.

Alors pourquoi est-il si compliqué de faire des signatures avec des codes correcteurs ?

- car il est difficile de tomber dans l'ensemble des syndromes facilement décodables, ie. difficile de créer une fonction de hachage qui envoie le message m dans l'ensemble des syndromes possibles. En effet, pour un décodage au sens stricte il faudrait un syndrome s associé à un unique mot c du code, le plus proche de m .

quand on chiffre \rightarrow ne pose pas de problème.

quand on signe \rightarrow pose un problème car il est dur de trouver un syndrome de cette sorte.

Les solutions à ce problème ont pour l'instant soit été cassées, soit impraticables.

La solution de Wave est d'enlever la restriction au mot le plus proche. On cherche maintenant une famille de codes permettant de trouver, pour un mot quelconque, un des mots de code à distance ω . En particulier, la distance de décodage ω est très grande, ce qui assure typiquement de l'existence d'un

mot de code à distance ω .

Explication rapide du schéma wave + on cherchera à rendre les sorties uniformes + preuves de sécurité.

1 Le schéma de signature Wave

Nous allons détailler dans cette section le schéma de signature Wave. C'est un schéma de type hache et signe à base de codes correcteurs. Pour des raisons de clarté nous oublierons dans un premier temps la problématique du hachage. Nous la réintroduirons en fin de rapport afin de proposer une preuve formelle de la sécurité du schéma, où la fonction de hachage est alors nécessaire. Pour l'instant, nous considérerons que l'entrée de l'algorithme de signature est déjà un syndrome du code considéré.

Le schéma de signature Wave s'appuie sur une famille de codes appelés des codes $(U, U + V)$ -généralisés. La structure de ces codes nous permettra de proposer un algorithme de décodage \mathcal{D} utilisant une trappe T et donnant un avantage par rapport à un algorithme de décodage générique. Ce système s'appuie aussi sur la notion de fonctions GPV en moyenne, que nous détaillerons.

1.1 La famille de codes $(U, U + V)$ -généralisés

Pour définir la famille de code utilisée dans le schéma de signature Wave, on part de deux codes de longueur $n/2$ aléatoires de dimensions respectives k_u et k_v . On a premièrement la définition suivante :

Définition 1.1. (Code $(U, U + V)$.) Un code $(U, U + V)$ est un code de longueur n et de dimension $k = k_U + k_V$ et tel que :

$$(U, U + V) = \{(u, u + v) \text{ tel que } u \in U \text{ et } v \in V\}$$

En revanche, pour le système de signature Wave, nous n'utiliserons pas cette définition. En effet, on peut facilement tirer des informations sur la structure de ces codes.

Définition 1.2. (*hull*). Le *hull* d'un code \mathcal{C} est défini comme $\text{hull}(\mathcal{C}) := \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^\perp$

Proposition 1.3. Soit \mathcal{C} un code aléatoire binaire de longueur n et de dimension k , alors on s'attend à avoir $\dim(\text{hull}(\mathcal{C})) \sim \mathcal{O}(1)$. De plus :

$$\mathbb{P}(\dim(\text{hull}(\mathcal{C})) \leq t) \geq 1 - \mathcal{O}(2^{-t})$$

Proposition 1.4. Soit UV un code $(U, U + V)$ binaire permuté de longueur n tel que $k_U > k_V$, alors nous avons avec probabilité $1 - \mathcal{O}(2^{k_U - k_V})$

$$\dim(\text{hull}(UV)) = k_U - k_V$$

Preuve. En annexe. □

Ainsi nous ne pouvons pas utiliser les codes $(U, U + V)$ binaires où $\dim(U) > \dim(V)$ puisque nous pouvons facilement les distinguer de codes aléatoires. En effet, il suffit de calculer la dimension de leur *hull* puis de le comparer au résultat de la proposition 1.3. Pour résoudre ce problème, nous poserons $q = 3$ pour toute la suite du rapport. Nous utiliserons également une nouvelle famille de codes, les codes $(U, U + V)$ -généralisés :

Définition 1.5. (codes $(U, U + V)$ -généralisés) Soient n un entier pair et a, b, c, d quatre vecteurs de $\mathbb{F}_q^{n/2}$ tels que pour tout $i \in \llbracket 1, n/2 \rrbracket$:

$$a_i c_i \neq 0 \tag{1}$$

$$a_i d_i - b_i c_i \neq 0 \tag{2}$$

Soient U et V deux codes définis comme précédemment. Le code $(U, U + V)$ -généralisé correspond à l'ensemble :

$$\{(a.u + b.v, c.u + d.v) \text{ tel que } u \in U \text{ et } v \in V\}$$

où $x.y$ est le produit coordonnée par coordonnée des x_i et y_i .

Les conditions sur les vecteurs a, b, c, d permet de garantir que :

- toutes les coordonnées de $u \in U$ apparaîtront deux fois, ce qui sera nécessaire pour utiliser la structure du code dans notre algorithme de décodage (par l'équation (1)).
- la dimension du code $(U, U + V)$ -généralisé sera la somme des dimensions des codes U et V (par l'équation (2)).

Sans perte de généralité, nous posons pour toute la suite les vecteurs a, b, c, d tels que $a_i d_i - b_i c_i = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n/2 \rrbracket$.

Proposition 1.6. *Soient U, V, a, b, c et d définis comme précédemment. Soit UV le code $(U, U + V)$ -généralisé associé. Alors*

$$k = \dim(UV) = k_U + k_V.$$

De plus soient $G_U \in \mathbb{F}_q^{k_U \times n/2}$ (respectivement $G_V \in \mathbb{F}_q^{k_V \times n/2}$) et $H_U \in \mathbb{F}_q^{(n/2 - k_U) \times n/2}$ (respectivement $H_V \in \mathbb{F}_q^{(n/2 - k_V) \times n/2}$) les matrices génératrices et de parité des codes U et V . Soient A, B, C, D de $\mathbb{F}_q^{n \times n}$ les matrices diagonales de diagonale respectives les vecteurs a, b, c et d .

Alors la matrice de $\mathbb{F}_q^{(k_U + k_V) \times n}$:

$$G := \left(\begin{array}{c|c} G_U A & G_U C \\ \hline G_V B & G_V D \end{array} \right)$$

et la matrice $\mathbb{F}_q^{(n - k_U - k_V) \times n}$:

$$H := \left(\begin{array}{c|c} H_U D & -H_U B \\ \hline -H_V C & H_V A \end{array} \right)$$

sont des matrices génératrices et de parité du code UV .

Preuve. Remarquons d'abord que G engendre bien le code UV . Remarquons aussi que

$$G = \left(\begin{array}{c|c} G_U A & G_U C \\ \hline G_V B & G_V D \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} G_U & 0 \\ \hline 0 & G_V \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$$

Par définition des matrices G_V et G_U , la matrice $\left(\begin{array}{c|c} G_U & 0 \\ \hline 0 & G_V \end{array} \right)$ est de rang $k_U + k_V$. De plus les matrices A, B, C, D étant diagonales, le déterminant de la matrice $\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline B & D \end{array} \right)$ est le produit des $(a_i d_i - b_i c_i)$ pour $i \in \llbracket 1, n/2 \rrbracket$, et donc non-nul par définition des vecteurs a, b, c, d . On a donc bien $k = k_U + k_V$. On remarque aussi que $GH^T = 0$ et que H est de rang plein par le même raisonnement que précédemment, ce qui conclut la preuve. \square

1.2 Le principe de signature

Notre schéma de signature utilisera donc les codes $(U, U + V)$ -généralisés et la fonction syndrome comme fonction à sens unique, sous l'hypothèse de la difficulté de résoudre le problème du décodage.

Nous allons définir la notion de fonctions GPV en moyenne (GPVM). Pour cela, introduisons d'abord la notion de distance statistique.

Définition 1.7. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans le même espace ϵ . Soient \mathcal{D}_X et \mathcal{D}_Y leurs distributions respectives. On définit la distance statistique entre ces deux distributions comme :

$$\rho(\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y) := \frac{1}{2} \sum_{x \in \epsilon} |\mathcal{D}_X(x) - \mathcal{D}_Y(x)|.$$

Définition 1.8. (Fonctions GPVM). On appelle fonction GPV en moyenne une paire d'algorithmes (**Trapdoor**, **InvertAlg**) ainsi qu'un triplet de fonctions $(n(\lambda), k(\lambda), \omega(\lambda))$ en fonction d'un paramètre de sécurité λ , tels que :

- **Trapdoor** est un algorithme probabiliste et polynomial en 1^λ et renvoyant le couple (H, T) où $H \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times n}$ de rang $n - k$ et T est la trappe associée.
- **InvertAlg** est un algorithme probabiliste et polynomial prenant en entrée la trappe T et un syndrome $s \in \mathbb{F}_q^{n-k}$, et renvoyant $e \in \mathbb{F}_q^n$ de poids ω tel que $eH^T = s$.

De plus, pour *presque toutes* matrice H renvoyée par **Trapdoor**, la fonction est :

1. bien distribuée :
 $\rho(eH^T, s) \in \text{negl}(\lambda)$ où e est pris uniformément dans l'ensemble des mots de poids ω et de longueur n et s est pris uniformément dans \mathbb{F}_q^{n-k} .
2. sans fuite d'information *en moyenne* :
 $\rho(\text{InvertAlg}(s, T), e) \in \text{negl}(\lambda)$ où e est pris uniformément dans l'ensemble des mots de poids ω et de longueur n et s est pris uniformément dans \mathbb{F}_q^{n-k} .

3. À sens unique sans la trappe :

Pour tout algorithme probabiliste polynomial \mathcal{A} , on a

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}(H, s) = e \mid eH^T = s) \in \text{negl}(\lambda).$$

C'est une définition relaxée des fonctions GPV.

Nous générons notre paire de clés publique et privée comme :

$$(pk, sk) = (H, T) \leftarrow \text{Trapdoor}(\lambda)$$

Plus précisément, nous aurons donc pour clé publique la matrice de parité du code $(U, U + V)$, notée H , et pour clé privée, les matrices de parité des codes U et V , respectivement notées H_U et H_V .

Nous pouvons maintenant définir notre système de signature.

Sign^{sk}(s):

$e \leftarrow \text{InvertAlg}(s, T)$
renvoie e

Verify^{pk}(s, e'):

Si $e'H^T = s$ et $|e'| = \omega$
renvoie 1
renvoie 0

EXPLIQUER POURQUOI LE SYSTÈME FONCTIONNE.

1.3 Le décodage avec trappe

En partant de l'hypothèse que la matrice de parité \mathbf{H} du code $(U, U + V)$ -généralisé ressemble à une matrice aléatoire, la difficulté de créer une fausse signature sans connaître la trappe \mathbf{T} est exactement celle de résoudre le problème du décodage d'un code aléatoire, que l'on sait difficile. Nous allons expliciter dans cette section l'algorithme d'inversion de la fonction syndrome connaissant la trappe, et discuter de sa difficulté en fonction du poids ω de \mathbf{e} .

Notons $\mathcal{S}_{\omega, n}$ l'ensemble des mots de poids ω et de longueur n . On notera dans la suite \mathcal{S}_{ω} s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la longueur. On rappelle que l'algorithme **InvertAlg** cherche à inverser la fonction syndrome :

$$\begin{aligned} f_{\omega, \mathbf{H}} : \mathcal{S}_{\omega, n} &\rightarrow \mathbb{F}_q^{n-k} \\ \mathbf{e} &\mapsto \mathbf{eH}^T \end{aligned}$$

On rappelle que la fonction $f_{\omega, \mathbf{H}}$ avec $\mathbf{H} \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times n}$ s'inverse génériquement si $\omega \in \{\omega_{easy}^-, \omega_{easy}^+\}$, où :

$$\omega_{easy}^- := \frac{q-1}{q}(n-k) \quad \text{et} \quad \omega_{easy}^+ := k + \frac{q-1}{q}(n-k).$$

On rappelle aussi que la fonction $f_{\omega, \mathbf{H}}$ admet un inverse pour toute entrée $s \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ si $\omega \in \{\omega^-, \omega^+\}$, où :

$$\omega^- := \min \left\{ \omega \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{\omega}{n} (q-1)^\omega \geq q^{n-k} \right\}$$

$$\omega^+ := \max \left\{ \omega \in \llbracket 0, n \rrbracket, \binom{\omega}{n} (q-1)^\omega \geq q^{n-k} \right\}$$

Nous voulons donc un moyen d'inverser la fonction syndrome pour $\omega \in \llbracket \omega_{UV}^-, \omega_{UV}^+ \rrbracket$ avec ω_{UV}^- et ω_{UV}^+ tels que :

$$\llbracket \omega_{easy}^-, \omega_{easy}^+ \rrbracket \subsetneq \llbracket \omega_{UV}^-, \omega_{UV}^+ \rrbracket \subset \llbracket \omega^-, \omega^+ \rrbracket$$

Afin d'expliciter le décodage, introduisons la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}} : \mathbb{F}_q^{n/2} \times \mathbb{F}_q^{n/2} &\rightarrow \mathbb{F}_q^{n/2} \times \mathbb{F}_q^{n/2} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}, \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{d} \cdot \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Si cette fonction respecte les conditions sur les vecteurs $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ définies dans la définition 1.5, on dit qu'elle est UV-normalisée. Dans ce cas on peut vérifier qu'elle est bijective d'inverse :

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}}^{-1} : \mathbb{F}_q^{n/2} \times \mathbb{F}_q^{n/2} &\rightarrow \mathbb{F}_q^{n/2} \times \mathbb{F}_q^{n/2} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto (\mathbf{d} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{y}, -\mathbf{c} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Ainsi, pour chaque vecteur \mathbf{e} de \mathbb{F}_q^n , on peut associer deux vecteurs \mathbf{e}_U et \mathbf{e}_V de $\mathbb{F}_q^{n/2}$ tels que

$$(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V) = \varphi_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}}^{-1}(\mathbf{e}).$$

Proposition 1.9. *Inverser $f_{\omega, \mathbf{H}}$ pour un certain $\mathbf{s} \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ est équivalent à trouver $\mathbf{e} \in \mathbb{F}_q^n$ tel que:*

$$\mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_V \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V$$

où $\mathbf{s} = (\mathbf{s}^U, \mathbf{s}^V)$ avec $\mathbf{s}^U \in \mathbb{F}_q^{n/2-k_U}$ et $\mathbf{s}^V \in \mathbb{F}_q^{n/2-k_V}$.

Preuve. Nous voulons montrer que le syndrome de \mathbf{e} vaut $(\mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T, \mathbf{e}_V \mathbf{H}_V^T)$. Remarquons d'abord que nous avons

$$\begin{aligned} e &= \varphi(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V) \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_U + \mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_V, \mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_U + \mathbf{d} \cdot \mathbf{e}_V) \\ &= (\mathbf{e}_U A + \mathbf{e}_V B, \mathbf{e}_U C + \mathbf{e}_V D) \end{aligned}$$

avec A, B, C, D les matrices diagonales définie auparavant. De plus, notons que

$$H^T := \left(\begin{array}{c|c} D^T H_U^T & -C^T H_V^T \\ \hline -B^T H_U^T & A^T H_V^T \end{array} \right)$$

Nous avons $e \mathbf{H}^T = \mathbf{s} = (\mathbf{s}^U, \mathbf{s}^V)$. Ainsi, en calculant le syndrome de \mathbf{e} à l'aide des expressions précédentes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\begin{cases} (\mathbf{e}_U A + \mathbf{e}_V B) D^T \mathbf{H}_U^T - (\mathbf{e}_U C + \mathbf{e}_V D) B^T \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U \\ -(\mathbf{e}_U A + \mathbf{e}_V B) C^T \mathbf{H}_V^T + (\mathbf{e}_U C + \mathbf{e}_V D) A^T \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V \end{cases} \\ \iff &\begin{cases} \mathbf{e}_U (AD^T - CB^T) \mathbf{H}_U^T + \mathbf{e}_V (BD^T - CB^T) \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U \\ \mathbf{e}_U (CA^T - AC^T) \mathbf{H}_V^T + \mathbf{e}_V (DA^T - BC^T) \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V \end{cases} \end{aligned}$$

Comme A, B, C et D sont des matrices diagonales, elles sont égales à leur transposées et leur produit est commutatif. Nous avons alors :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_U (AD - BC) \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U \\ \mathbf{e}_V (AD - BC) \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V \end{cases}$$

De plus, nous avons posé, lors de la définition des codes $(U, U+V)$ -généralisées que nous utilisons que $\forall i \in \llbracket 1, n/2 \rrbracket \quad a_i d_i - b_i c_i = 1$, donc $AD - BC = I_{n/2}$. Nous obtenons donc bien le résultat souhaité, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U \\ \mathbf{e}_V \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V \end{cases}$$

□

Ainsi, on aura :

```

InvertAlg(s, T) :
  (sU, sV) = s
  eU = DECODE_U(sU)
  eV = DECODE_V(sV)
  renvoie φa,b,c,d(eU, eV)

```

Si l'on choisit un algorithme générique pour DECODE_U et DECODE_V, alors nous obtiendrons un vecteur \mathbf{e} de poids $\omega \in \{\omega_{easy}^-, \omega_{easy}^+\}$. Nous allons montrer comment utiliser les propriétés des codes $(U, U+V)$ -généralisés pour permettre un décodage hors de cet intervalle.

Remarque 1.10. Pour tout $\mathbf{e} = \varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}}(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V)$, on a pour tout $i \in \llbracket 1, n/2 \rrbracket$:

$$\begin{cases} a_i \mathbf{e}_U(i) + b_i \mathbf{e}_V(i) &= \mathbf{e}(i) \\ c_i \mathbf{e}_U(i) + d_i \mathbf{e}_V(i) &= \mathbf{e}(i + n/2) \end{cases}$$

Choisir la valeur de \mathbf{e}_U en fonction de la valeur de \mathbf{e}_V nous permettra donc d'influer sur le poids de \mathbf{e} . On aura alors :

```

InvertAlg(s, T) :
  (sU, sV) = s
  eV = DECODE_V(sV)
  eU = DECODE_U(sU, eV)
  renvoie φa,b,c,d(eU, eV)

```

Proposition 1.11. Soit \mathbf{e}_V une sortie de DECODE_V. Soit DECODE_U un algorithme prenant en entrée \mathbf{s}_U et \mathbf{e}_V et renvoyant \mathbf{e}_U tel que $\mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}_U^T$ et tel que pour k_U positions de \mathbf{e}_U

$$\begin{cases} a_i \mathbf{e}_U(i) + b_i \mathbf{e}_V(i) &\neq 0 \\ c_i \mathbf{e}_U(i) + d_i \mathbf{e}_V(i) &\neq 0 \end{cases}$$

Alors $\mathbf{e} = \varphi_{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}}(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V)$ a au moins $2k_U$ coordonnées non nulles. De plus les $n - k_U$ autres coordonnées sont uniformément distribuées sur \mathbb{F}_q .

On a alors

$$\mathbb{E}(|\mathbf{e}|) = \frac{q-1}{q}n + \frac{2k_U}{q}$$

et on peut alors espérer obtenir en temps polynomial des erreurs de poids :

$$\omega_{UV}^+ = \begin{cases} \frac{q-1}{q}n + \frac{2k}{q} & \text{si } k \leq \frac{n}{2} \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve. La preuve étant similaire à celle de la proposition 1.12, nous ne la détaillerons pas ici. □

Proposition 1.12. *Soit \mathbf{e}_V une sortie de `DECODE_V`. Soit `DECODE_U` un algorithme prenant en entrée \mathbf{s}_U et \mathbf{e}_V et renvoyant \mathbf{e}_U tel que $\mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}_U^T$ et tel que pour k_U positions de \mathbf{e}_U*

$$\begin{cases} a_i \mathbf{e}_U(i) + b_i \mathbf{e}_V(i) & = & 0 \\ c_i \mathbf{e}_U(i) + d_i \mathbf{e}_V(i) & = & 0 \end{cases} \quad (3)$$

On peut alors espérer obtenir en temps polynomial des erreurs de poids :

$$\omega_{UV}^- = \begin{cases} \frac{q-1}{q}(n - 2k) & \text{si } k \leq \frac{n}{2q} \\ \frac{2(q-1)^2}{(2q-1)q}(n - k) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4)$$

Preuve. Il n'existe de solution au système (3) que si $\mathbf{e}_V(i) = 0$ car pour tout i on a $a_i d_i - b_i c_i \neq 0$. De ce fait, à l'inverse du cas où nous souhaitons des erreurs de gros poids, l'ensemble d'indices où l'on peut gagner deux fois est réduit à $n/2 - |\mathbf{e}_V|$. De ce fait le poids minimal que nous pouvons espérer pour \mathbf{e}_V est $|\mathbf{e}_V|_{\min} := \frac{q-1}{q}(n/2 - k_V)$. Ainsi :

- Si $k_U \leq n/2 - |\mathbf{e}_V|_{\min}$, nous pouvons obtenir des erreurs e telles que :
 - $2k_U$ coordonnées sont nulles.
 - Les autres coordonnées sont uniformément distribuées.
- Sinon, nous pouvons obtenir des erreurs e telles que :
 - $2(n/2 - |\mathbf{e}_V|_{\min})$ sont nulles.
 - $k_U - (n/2 - |\mathbf{e}_V|_{\min})$ autres coordonnées sont nulles tandis que $k_U - (n/2 - |\mathbf{e}_V|_{\min})$ sont non nulles.
 - Les autres coordonnées sont uniformément distribuées.

Nous allons maintenant détailler le calcul de ω_{UV}^- . Supposons que notre code a une dimension $k = k_U + k_V$ et rappelons que nous cherchons à obtenir une erreur de la forme $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_U + \mathbf{e}_V)$ avec k_U coordonnées nulles.

On commence par décoder \mathbf{e}_V avec un algorithme générique. Nous pouvons donc découper ce dernier en fonction de son poids $|\mathbf{e}_V|$ de la façon suivante : $\mathbf{e}_V = (0, \mathbf{e}_V'')$ avec $0 \in \mathbb{F}_q^{n/2-|\mathbf{e}_V|}$ et $\mathbf{e}_V''(i) = 0 \ \forall i$. On écrit alors \mathbf{e}_U à l'aide du même découpage : $\mathbf{e}_U = (\mathbf{e}_U', \mathbf{e}_U'')$ avec $\mathbf{e}_U' \in \mathbb{F}_q^{n/2-|\mathbf{e}_V|}$ et $\mathbf{e}_U'' \in \mathbb{F}_q^{|\mathbf{e}_V|}$.

Nous allons dans cette démonstration, montrer la deuxième partie de l'égalité. Supposons que $k_U \geq n/2 - |\mathbf{e}_V|$, ce qui signifie que nous voulons choisir plus de coordonnées nulles qu'en dispose \mathbf{e}_U' . Nous allons donc, lors de notre algorithme, fixer toutes les coordonnées de \mathbf{e}_U' à zéro, et il nous restera à annuler $k_U - (n/2 - |\mathbf{e}_V|)$ coordonnées de \mathbf{e}_U'' . Nous obtenons alors

$$|\mathbf{e}_U| = \frac{q-1}{q}(n/2 - k_U)$$

$$|\mathbf{e}_U + \mathbf{e}_V| = k_U - n/2 + |\mathbf{e}_V| + \frac{q-1}{q}(n/2 - k_U)$$

En effet, comme nous annulons $k_U - n/2 + |\mathbf{e}_V|$ coordonnées de \mathbf{e}_U'' et que $\mathbf{e}_V''(i) = 1 \ \forall i$, ces mêmes coordonnées sont non nulles pour $\mathbf{e}_U'' + \mathbf{e}_V''$. Il reste alors $n/2 - k_U$ coordonnées qui seront non nulles si $\mathbf{e}_U''(i) \neq -\mathbf{e}_V''(i)$.

Nous avons alors une erreur \mathbf{e} de poids :

$$|\mathbf{e}| = |\mathbf{e}_U| + |\mathbf{e}_U + \mathbf{e}_V| = 2\frac{q-1}{q}(n/2 - k_U) + k_U - n/2 - |\mathbf{e}_V|$$

Ici, nous supposons que notre algorithme de décodage nous renvoie \mathbf{e}_V de poids minimum, nous avons donc

$$|\mathbf{e}_V| = |\mathbf{e}_V|_{\min} = \frac{q-1}{q}(n/2 - k_V) = \frac{q-1}{q}(n/2 - k + k_U)$$

Ainsi nous obtenons une erreur dont le poids est :

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}| &= 2\frac{q-1}{q}(n/2 - k_U) + k_U - n/2 - \frac{q-1}{q}(n/2 - k + k_U) \\ &= n \left(\frac{3}{1} \frac{q-1}{q} - \frac{1}{2} \right) + k_U \left(1 - \frac{q-1}{q} \right) - k \frac{q-1}{1} \\ &= n \frac{2q-3}{2q} + k_U \frac{1}{q} + k \frac{1-q}{1} \end{aligned}$$

Pour minimiser le poids de \mathbf{e} nous devons donc prendre k_U le plus petit possible. Comme nous avons supposé avoir $k_U \geq n/2 - |\mathbf{e}_V|$, nous prenons donc

$$\begin{aligned} k_U &= \frac{n}{2} - |\mathbf{e}_V| \\ &= \frac{n}{2} - \frac{q-1}{q}(n/2 - k + k_U) \\ &= \frac{n}{2q} + k \frac{q-1}{q} - k_U \frac{q-1}{q} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne alors $k_U = \frac{n}{2(2q-1)} + k \frac{q-1}{q}$.

Par définition, nous avons $k_U \leq k$, nous pouvons se servir de cette conditions pour minorer k :

$$\begin{aligned} \frac{n}{2(2q-1)} + k \frac{q-1}{q} &\leq k \\ \frac{n}{2(2q-1)} &\leq k \frac{q-1}{2q-1} \\ \frac{n}{2} &\leq k \end{aligned}$$

Nous nous trouvons donc bien dans le deuxième cas : lorsque $k \geq n/2$. Finalement, nous pouvons calculer le poids de \mathbf{e} minimum :

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}| &= n \frac{2q-3}{2q} + \left(\frac{n}{2(2q-1)} + k \frac{q-1}{q} \right) \frac{1}{q} + k \frac{1-q}{1} \\ &= n \left(\frac{2q-3}{2q} + \frac{1}{2(2q-1)q} \right) + k \left(\frac{q-1}{(2q-1)q} + \frac{1-q}{1} \right) \\ &= n \frac{4q^2 - 8q + 4}{2q(2q-1)} + k \frac{-2q^2 + 4q - 2}{(2q-1)q} \\ &= n \frac{2(q-1)^2}{q(2q-1)} + k \frac{-2(q-1)^2}{(2q-1)q} \\ &= \frac{2(q-1)^2}{q(2q-1)}(n-k) \end{aligned}$$

Nous avons donc bien le résultat souhaité lorsque $k \geq \frac{n}{2q}$. La démonstration du cas où $k \leq \frac{n}{2q}$ étant équivalente, nous ne la ferons pas ici.

□

On récapitule les différents cas dans la figure 2.

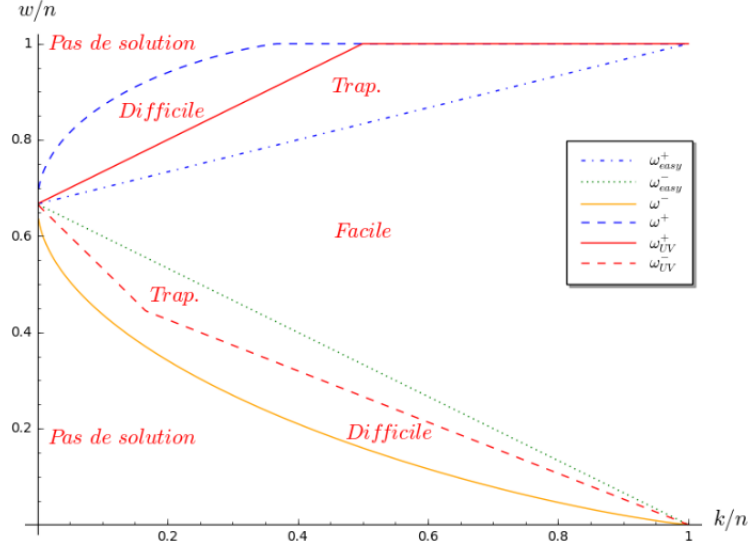


Figure 2: Comparaison des distances w/n avec et sans trappe en fonction du rendement.

La connaissance de la trappe apporte donc bien un avantage puisqu'elle permet un décodage pour des erreurs de poids ne permettant pas de décodage générique.

Remarque 1.13. En pratique, notre système de signature comporterait une fonction de hachage. Ainsi, la fonction de signature prendrait en entrée un mot m quelconque. Puis un aléa r serait pris aléatoirement dans $\{0, 1\}^{\lambda_0}$. On aurait $s \leftarrow \text{Hash}(m, r)$, qui serait alors signé. **Sign** renvoie alors le couple (e, r) .

La fonction **Verify** prend en entrée $(m, (e', r))$, récupère $s \leftarrow \text{Hash}(m, r)$ puis fait ses vérifications. Ainsi un attaquant ne peut pas falsifier une signature à partir d'un vecteur e choisi aléatoirement dans S_ω et en récupérant $s = e\mathbf{H}^T$. Sans la fonction de hachage, il aurait alors signé s .

1.4 Implémentation et choix de paramètres

TODO

2 Uniformisation des signatures et syndromes

2.1 Une fuite d'information

Afin d'assurer la sécurité du système, il est nécessaire que les $\mathbf{e} \in f_{w,\mathbf{H}}^{-1}(\mathbf{s})$ ne révèlent pas d'information sur la structure du code $(U, U+V)$ -généralisé utilisé.

Or, si la sortie \mathbf{e}_V de `DECODE_V` n'est pas uniforme, alors des corrélations entre les coordonnées \mathbf{e}_i et $\mathbf{e}_{i+n/2}$ du vecteur \mathbf{e} .

Par exemple, prenons le cas où $q = 3$, et où pour tout $i \in \{1, n/2\}$, $a_i = c_i = d_i = 1$ et $b_i = 0$, et où `DECODE_V` est l'algorithme de Prange.

On a alors pour tout $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_U + \mathbf{e}_V)$

$$|\mathbf{e}_V| = \# \{1 \leq i \leq n/2 \mid e_i \neq e_{i+n/2}\}$$

Proposition 2.1. *Si le vecteur \mathbf{e}_V est obtenu par l'algorithme de Prange, alors il est de poids moyen $\frac{2}{3}(\frac{n}{2} - k_V)$.*

Alors, pour tout $i \in \{1, n/2\}$, on a :

$$\mathbb{P}(\mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}_{i+n/2}) = \frac{2}{3(n/2)}(n/2 - k_V)(1 + o(1))$$

En revanche, pour les autres paires (i, j) , on a :

$$\mathbb{P}(\mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}_j) = \frac{4wn - 3w^2 - w}{n(n-1)}$$

Ces deux probabilités n'ont donc aucune raison d'être égales. On a donc une fuite d'information. En effet, dans la pratique et afin de cacher la structure, on effectue une permutation sur les coordonnées de \mathbf{e} lors de la signature. Si un attaquant récupère suffisamment de signatures, il pourra donc en analysant la fréquence des $\mathbf{e}_i \neq \mathbf{e}_j$ retrouver cette permutation. Il est donc nécessaire pour la sécurité du schéma de s'assurer de l'uniformité des sorties de l'algorithme `sign`.

2.2 La méthode du rejet

Afin de s'assurer un \mathbf{e} uniforme dans son ensemble, nous allons :

- choisir \mathbf{e}_V de façon à ce qu'il soit uniforme dans son ensemble
- mettre des conditions de rejet sur \mathbf{e}_U en fonction du poids de \mathbf{e}_V afin de supprimer le biais sur l'ensemble

$$m_1(x) := \# \{1 \leq i \leq n/2 ; |(x_i, x_{i+n/2})| = 1\}$$

Avant d'expliciter nos algorithmes, il est nécessaire d'introduire quelques notations et définitions.

Notation 2.2. On notera :

- \mathbf{e}^{unif} la variable aléatoire tirée uniformément dans l'ensemble $S_{w,n}$
- \mathbf{e}_V^{unif} la variable aléatoire tirée uniformément dans les mots de $\mathbb{F}_q^{n/2}$
- \mathbf{e}_U^{unif} la variable aléatoire tirée uniformément dans les mots de $\mathbb{F}_q^{n/2}$ conditionné au vecteur \mathbf{e}_V^{unif}

Définition 2.3. (uniforme en poids et m_1 -uniforme)

- **DECODE_V** est dit uniforme en poids si ces sorties \mathbf{e}_V sont telles que $\mathbb{P}(\mathbf{e}_V)$ n'est fonction que du poids de \mathbf{e}_V quand \mathbf{s}^V est tiré uniformément dans son ensemble.
- **DECODE_U** est dit m_1 -uniforme si ces sorties \mathbf{e}_U sont telles que $\mathbb{P}(\mathbf{e}_U \mid \mathbf{e}_V)$ n'est fonction que du poids de \mathbf{e}_V et de $m_1(\varphi(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V))$.

Lemme 2.4. Soit \mathbf{e} la sortie de **InvertAlg** avec \mathbf{s}_U et \mathbf{s}_V choisis uniformément dans leurs ensembles. Soit **DECODE_V** uniforme en poids et **DECODE_U** m_1 -uniforme. Si pour tout y et z

$$|\mathbf{e}_V| \sim |\mathbf{e}_V^{unif}| \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}) = z \mid |\mathbf{e}_V| = y) = \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}^{unif}) = z \mid |\mathbf{e}_V^{unif}| = y)$$

Alors

$$\mathbf{e} \sim \mathbf{e}_V^{unif}.$$

Preuve. Nous allons montrer qu'avec les hypothèses précédentes nous avons
 $\forall x \in S_\omega \quad \mathbb{P}(\mathbf{e} = x) = \mathbb{P}(\mathbf{e}^{unif} = x)$.
 Soit $x \in S_\omega$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{e} = x) &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U, \mathbf{e}_V = x_V) \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | \mathbf{e}_V = x_V) \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) \end{aligned}$$

Notre but étant de faire apparaître les expressions énoncées lors du lemme, nous allons exprimer ces deux probabilités en fonction de $|x_V| = y$ et de $m_1(x) = z$.

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V, |\mathbf{e}_V| = y) \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V | |\mathbf{e}_V| = y) \mathbb{P}(|\mathbf{e}_V| = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(|\mathbf{e}_V| = y)}{n(y)} \end{aligned}$$

avec $n(y) := \# \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{F}_3^{n/2} \mid |\mathbf{e}| = y \right\}$. De la même façon, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | |\mathbf{e}_V| = y) &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U, m_1(\mathbf{e}) = z \mid |\mathbf{e}_V| = y) \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U \mid m_1(\mathbf{e}) = z, |\mathbf{e}_V| = y) \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}) = z \mid |\mathbf{e}_V| = y) \\ &= \frac{\mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}) = z \mid |\mathbf{e}_V| = y)}{n(y, z)} \end{aligned}$$

avec $n(y, z) := \# \left\{ \mathbf{e} \in \mathbb{F}_3^{n/2} \mid m_1(\mathbf{e}) = z \text{ et } |\mathbf{e}_V| = y \right\}$.

Ainsi nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathbf{e} = x) &= \frac{\mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}) = z \mid |\mathbf{e}_V| = y)}{n(y, z)} \frac{\mathbb{P}(|\mathbf{e}_V| = y)}{n(y)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}^{unif}) = z \mid |\mathbf{e}_V^{unif}| = y)}{n(y, z)} \frac{\mathbb{P}(|\mathbf{e}_V^{unif}| = y)}{n(y)} \\ &\quad \text{par les hypohèses} \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \mathbb{P}(\mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \\ &= \mathbb{P}(\mathbf{e}^{unif} = x) \end{aligned}$$

□

Ainsi, pour que \mathbf{e} soit uniformément distribué sur S_ω , il suffit de choisir `DecodeV` de façon à ce que ses sorties soient uniformement sur $\mathbb{F}_q^{n/2}$ puis d'ajouter

une condition de rejet sur les sorties de **DecodeU** de façon à ce que $m_1(\mathbf{e})$ conditionnée à $|\mathbf{e}_V|$ soit distribué comme $m_1(\mathbf{e}^{unif})$ conditionnée à $|\mathbf{e}_V^{unif}|$.
On peut alors introduire l'algorithme suivant :

Algorithme 1 DecodeUV($\varphi, \mathbf{s}, \mathbf{H}_V, \mathbf{H}_U$)

Entrées: $\varphi, \mathbf{s} \in \mathbb{F}_q^{n-k}$ un syndrome, $\mathbf{H}_V \in \mathbb{F}_q^{(\frac{n}{2}-k_V) \times \frac{n}{2}}$, $\mathbf{H}_U \in \mathbb{F}_q^{(\frac{n}{2}-k_U) \times \frac{n}{2}}$

Sortie: $\mathbf{e} = \varphi(e_U, e_V)$ avec $\mathbf{e}_U \mathbf{H}_U^T = \mathbf{s}^U$ et $\mathbf{e}_V \mathbf{H}_V^T = \mathbf{s}^V$

- 1: $\mathbf{e}_V \leftarrow \text{DecodeV}(\mathbf{s}^V, \mathbf{H}_V)$
 - 2: **Faire**
 - 3: $\mathbf{e}_U \leftarrow \text{DecodeU}(\varphi, \mathbf{e}_V, \mathbf{s}^U, \mathbf{H}_U)$
 - 4: $\mathbf{e} \leftarrow \varphi(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V)$
 - 5: **Tant que** $\text{rand}([0, 1]) > \mathbf{r}_U(|\mathbf{e}_V|, m_1(\mathbf{e}))$
 - 6: **Retourne** \mathbf{e}
-

Avec :

$$r(s, t) := \frac{1}{M(t)} \frac{q^{unif}(s, t)}{q(s, t)}$$

$$q(s, t) := \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}) = s \mid |\mathbf{e}_V| = t)$$

$$q^{unif}(s, t) := \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}^{unif}) = s \mid |\mathbf{e}_V^{unif}| = t)$$

$$M(t) := \max_{0 \leq s \leq t} \frac{q^{unif}(s, t)}{q(s, t)}$$

Pour montrer que la sortie de notre algorithme **DecodeUV** suit bien une distribution uniforme, énonçons le lemme suivant :

Lemme 2.5. *Soient X et X^{unif} deux variables aléatoires à valeur dans un même ensemble \mathcal{X} telles que :*

- X suit une distribution quelconque,
- X^{unif} suit une distribution uniforme.

Pour tout $x \in \mathcal{X}$ on pose :

$$r(x) := \frac{1}{M} \frac{\mathbb{P}(X^{unif} = x)}{\mathbb{P}(X = x)}$$

$$M := \max_{y \in \mathcal{X}} \frac{\mathbb{P}(X^{unif} = y)}{\mathbb{P}(X = y)}$$

Alors la variable aléatoire Y définie telle que pour tout x :

1. On tire θ uniformément dans l'intervalle $[[0, 1]]$,
2. Si $\theta \leq r(x)$, alors Y prend la valeur x .
3. Sinon, Y ne prends aucune valeur.

Alors la variable Y suit une loi uniforme.

Preuve. Remarquons d'abord que pour tout x :

$$0 \leq r(x) = \frac{1}{M} \frac{\mathbb{P}(X^{unif} = x)}{\mathbb{P}(X = x)} = \left(\inf_y \frac{\mathbb{P}(X = y)}{\mathbb{P}(X^{unif} = y)} \right) \frac{\mathbb{P}(X^{unif} = x)}{\mathbb{P}(X = x)} \leq 1$$

Donc les coordonnées de r sont bien des probabilités.

On remarque aussi que,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{"y soit accepté"}) &:= \mathbb{P}(\theta \leq r(x) \quad \text{et} \quad X = x) \\ &:= \mathbb{P}(\theta \leq r(x)) \times \mathbb{P}(X = x) \end{aligned}$$

De plus, la probabilité que $Y = x$ est égale à la probabilité que x ai été

tiré et qu'il ai été accepté. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, on a alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = x) &:= \frac{\mathbb{P}(\theta \leq r(x)) \times \mathbb{P}(X = x)}{\sum_{y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(\theta \leq r(y)) \times \mathbb{P}(X = y)} \\
&:= \frac{r(x) \times \mathbb{P}(X = x)}{\sum_{y \in \mathcal{X}} r(y) \times \mathbb{P}(X = y)} \quad \left(\text{car } \mathbb{P}(\theta \leq r(x)) = r(x) \right) \\
&:= \frac{\mathbb{P}(X^{unif} = x)}{M \times \sum_{y \in \mathcal{X}} 1/M \times \mathbb{P}(X^{unif} = y)} \quad \left(\text{car } \sum_{y \in \mathcal{X}} \mathbb{P}(X^{unif} = y) = 1 \right) \\
&:= \mathbb{P}(X^{unif} = x)
\end{aligned}$$

□

On peut alors énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.6. *Si `DecodeV` est uniforme en poids et si `DecodeU` est m_1 -uniforme, alors on a $\mathbf{e} \sim \mathbf{e}^{unif}$.*

Preuve. Soit \mathbf{e}'_U le vecteur obtenu à la sortie de la boucle dans `DECODE_UV`. Notons pour tout $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$q'(i, j) := \mathbb{P}(m_1(\mathbf{e}'_U) = i \mid |\mathbf{e}'_V| = j)$$

On a alors par le lemme 2.12

$$q'(i, j) = q^{unif}(i, j)$$

De plus la sortie de l'algorithme `DECODE_V` est uniforme, ce qui conclut la preuve. □

2.3 Choix des algorithmes de décodage

À FAIRE :

description explicite de `DECODE_V`

description explicite de `DECODE_U`

EXPLIQUER POURQUOI ON AJOUTE LE d .

Avec $d \in [0, k_U]$, qui permettra de montrer que notre sortie est uniforme.

Algorithme 2 DecodeU($\varphi, \mathbf{e}_V, \mathbf{s}^U, \mathbf{H}_U$)

```
1:  $t \leftarrow |\mathbf{e}_V|$ 
2:  $k_0 \leftarrow \mathcal{D}_U^t$ 
3: Faire
4:    $\mathcal{I} \leftarrow$  ensemble d'information de  $\langle \mathbf{H}_U \rangle^\perp$ 
5:    $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$  de taille  $k - d$  tel que  $|\mathbf{e}_V|_{\mathcal{J}} = k_0$ 
6:    $x_U \leftarrow \{x \in \mathbb{F}_3^{n/2} \mid \forall j \in \mathcal{J}, x_j \notin \{-\frac{b_i}{a_i} \mathbf{e}_{V_i}, -\frac{d_i}{c_i} \mathbf{e}_{V_i}\}\}$ 
7:    $\mathbf{e}_U \leftarrow \text{PRANGE}(\mathbf{H}_U, \mathbf{s}^U, \mathcal{I}, x_U)$ 
8: Tant que  $|\varphi(\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V)| \neq \omega$ 
9: Retourne  $\mathbf{e}_U$ 
```

Algorithme 3 DecodeV(\mathbf{s}^V)

```
1:  $c$  mot aléatoire du code  $V$ 
2:  $\mathbf{s} \leftarrow$  le syndrome  $\mathbf{s}^V$  paddé avec des zéros
3:  $\mathbf{e}_V \leftarrow \mathbf{s} + c$ 
4: Retourne  $\mathbf{e}_V$ 
```

2.4 Estimation du nombre de rejet

Nous souhaitons estimer le nombre de rejets effectué dans notre algorithme **DecodeUV** utilisant les algorithmes **DecodeU**, **DecodeV** définis précédemment. Pour cela, introduisons la définition suivante:

Définition 2.7. (Bon ensemble). Soient $d \leq k \leq n$, $\mathbf{H} \in \mathbb{F}_3^{(n-k) \times n}$ et $\varepsilon \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$ de taille $k - d$. On dit que ε est un bon ensemble pour \mathbf{H} si \mathbf{H}_{ε} est de rang plein. Sinon, on dit que ε est un mauvais ensemble.

Pour estimer ce nombre de rejets moyen, nous allons comparer \mathbf{e} la sortie de **DecodeUV** avec \mathbf{e}^{unif} une erreur aléatoire uniforme de poids ω .

Nous savons que la sortie de **DecodeV** est uniforme, nous allons donc étudier la sortie de **DecodeU**. Nous introduisons pour cela **VarDecodeU** qui fonctionne de la même façon que **DecodeU** quand \mathcal{J} est un bon ensemble pour \mathbf{H} et qui renvoie une erreur aléatoire selon la distribution \mathcal{D}_U^t sur \mathcal{J} dans le cas contraire. Il n'y a donc aucune raison que la sortie soit une solution du problème de décodage lorsque \mathcal{J} n'est pas un bon ensemble pour \mathbf{H} . Nous pouvons facilement voir que **VarDecodeU** est m_1 -uniforme.

La sortie de l'algorithme **DecodeUV** utilisant **VarDecodeU** est alors uniforme,

on la note \mathbf{e}^{unif} .

Définition 2.8.

- $J_{x_V, l}^{unif}$ et un ensemble choisi uniformément tel que $J_{x_V, l}^{unif} \subseteq \llbracket 1, n/2 \rrbracket$, il est de cardinal $k_U - d$ et $\#J_{x_V, l}^{unif} \cap \text{Supp}(x_V) = k_0$.
- $J_{x_V, l}^{\mathbf{H}_U}$ est défini de la même façon avec une contrainte supplémentaire : il fait parti des bons ensembles pour \mathbf{H}_U .

Pour plus de simplicité, nous les noterons par la suite J^{unif} et $J^{\mathbf{H}_U}$.

Pour pouvoir compter le nombre de rejets, nous allons avoir besoin des lemmes suivants dont les preuves sont en annexes.

Lemme 2.9. *Nous pouvons majorer la distance statistique entre la sortie de l'algorithme utilisant **DecodeU** et celle de l'algorithme utilisant **VarDecodeU** de la façon suivante :*

$$\rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) \leq \sum_{x_V, l} \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif}) \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V)$$

Lemme 2.10. *L'espérance de la différence statistique entre l'ensemble J^{unif} choisi uniformément et l'ensemble $J^{\mathbf{H}_U}$ choisi parmi les bons ensembles pour \mathbf{H} peut être majorée comme suit :*

$$\mathbb{E}(\rho(J^{unif}, J^{\mathbf{H}_U})) \leq \frac{3^{-d}}{2}$$

Lemme 2.11. *(Inégalité de Markov).*

Soit Z une variable aléatoire supposée presque sûrement positive ou nulle, alors

$$\forall a > 0 \quad \mathbb{P}(Z > a) \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{a}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant :

Théorème 2.12. *Soit \mathbf{e} la sortie de **DecodeUV** et \mathbf{e}^{unif} la variable aléatoire uniformément distribuée parmi les mots de poids ω . On a :*

$$\mathbb{P}(\rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) > 3^{-d/2}) \leq \frac{3^{-d/2}}{2}$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(\rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) > 3^{-d/2}) \\
& \leq 3^{d/2} \mathbb{E}(\rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif})) \quad \text{par l'inégalité de Markov} \\
& \leq 3^{d/2} \mathbb{E} \left(\sum_{x_V, l} \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif}) \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) \right) \quad \text{d'après le lemme 2.9} \\
& \leq 3^{d/2} \left(\sum_{x_V, l} \frac{3^{-d}}{2} \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) \right) \quad \text{par (2.10)} \\
& = 3^{d/2} \frac{3^{-d}}{2} \left(\sum_{x_V, l} \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) \right) \\
& = \frac{3^{-d/2}}{2}
\end{aligned}$$

□

La probabilité d'avoir un rejet équivaut à la probabilité d'avoir une distance significative entre \mathbf{e} et \mathbf{e}^{unif} . D'après le théorème 2.12, nous voyons donc qu'en faisant augmenter d , nous serons en mesure d'effectuer très peu de rejets.

3 Sécurité du schéma

Pour montrer la sécurité du schéma, nous allons dans un premier temps montrer que sous l'hypothèse que la matrice de parité du code considéré est difficile à distinguer d'une matrice aléatoire, le schéma est sûr au sens EUF-CMA.

Nous montrerons ensuite qu'il est effectivement difficile de distinguer notre matrice de parité permutée d'une matrice aléatoire.

3.1 Sécurité EUF-CMA

Nous allons montrer que le schéma est sûr au sens EUF-CMA (Existential Unforgeability under Chosen Message Attacks). Pour cela nous ferons une réduction au problème DOOM.

3.1.1 Définitions

Soit \mathcal{A} un adversaire ayant accès à N_{sign} signatures de son choix. Soit les trois algorithmes suivants :

Algorithme 4 $\text{Init}(\lambda)$

- 1: $(pk, sk) \leftarrow \text{Gen}(1^\lambda)$
 - 2: $\mathbf{H}_{pk} \leftarrow pk$
 - 3: $(\varphi, \mathbf{H}_U, \mathbf{H}_V) \leftarrow sk$
 - 4: **Retourne** \mathbf{H}_{pk}
-

Algorithme 5 $\text{Sign}(s)$

- 1: $\mathbf{e} \leftarrow \mathcal{D}_{\varphi, \mathbf{H}_U, \mathbf{H}_V}(\mathbf{s})$
 - 2: **Retourne** \mathbf{e}
-

Algorithme 6 $\text{Fin}((s, e))$

- 1: **Retourne** $(\mathbf{e}\mathbf{H}_{pk}^T = s) \wedge (|\mathbf{e}| = \omega)$
-

Le jeu EUF-CMA se déroule comme suit. \mathcal{A} fait appel à **Init**. Il peut ensuite faire N_{sign} requêtes à **sign**. Le jeu est dit réussi si \mathcal{A} est capable de donner (s, e) accepté par **Fin** et tel que s n'est jamais été demandé à **Sign**.

On définit alors le succès EUF-CMA comme :

$$Succ_{Wave}^{EUF-CMA}(t, N_{sign}) := \max_{\mathcal{A}; |A| \leq t} (\mathbb{P}(\mathcal{A} \text{ réussit le jeu EUF-CMA de Wave})).$$

Le protocole est alors sûr au sens EUF-CMA si ce succès est négligeable.

Nous souhaitons donc montrer que notre système est sûr au sens EUF-CMA. Pour cela, nous allons dans la section suivante majorer ce succès par rapport au succès d'un problème connu, le problème DOOM.

3.1.2 Réduction au problème DOOM

Le problème DOOM. Soient des paramètres (n, q, k, ω, N) , où N est un entier.

I : \mathbf{H} une matrice uniforme de $\mathbb{F}_q^{(n-k) \times n}$ et $(\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_N)$ une liste de N syndromes.

Q : Décoder l'un des syndromes à la distance $w := \lfloor \omega n \rfloor$.

On définit alors le succès de DOOM comme :

$$Succ^{DOOM(n,q,k,N)}(t) := \max_{\mathcal{A}; |A| \leq t} (\mathbb{P}(\mathcal{A}(\mathbf{H}, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n) = \mathbf{e} \text{ tel que}$$

$$\mathbf{e}\mathbf{H}^T = \mathbf{s}_j \text{ pour un certain } j \in \{1, \dots, N\})).$$

La réduction à ce problème est naturelle pour un schéma de signature. Il suffit de s'assurer que l'on peut considérer notre matrice de parité comme une matrice d'un code aléatoire. Ainsi, si \mathcal{A} arrive à créer une signature valide sans connaître l'algorithme de décodage $\mathcal{D}_{\varphi, \mathbf{H}_U, \mathbf{H}_V}$, il a bien résolu le problème du décodage. Puisqu'on a montré préalablement que les sorties \mathbf{e} de **sign** sont uniformément distribuées sur S_ω , la connaissance des N_{sign} couples (\mathbf{s}, \mathbf{e}) ne donnent pas d'avantage à \mathcal{A} . Ainsi la réduction se fait naturellement.

3.1.3 Preuve formelle de la réduction

Afin de faire une preuve formelle de la sécurité EUF-CMA, nous allons changer le jeu en rajoutant une fonction de hachage. L'attaquant \mathcal{A} peut maintenant faire N_{hash} appelle à la fonction de hachage et ainsi obtenir des couples (m, s) . Il cherchera alors à créer une signature valide pour l'un d'entre eux. On retrouve bien la question du problème DOOM.

De plus, la fonction de signature prends maintenant en entrée un message quelconque. Elle prend ensuite un aléa r dans $\{0, 1\}^{\lambda_0}$. Le tout est alors donné à la fonction de hachage qui renvoie un syndrome valide.

Nous allons aussi introduire un système de jeux qui nous permettra de réduire la sécurité d'un système à un problème P . Soit \mathcal{A} un attaquant et \mathcal{R} un rival. Soient G_0, G_1, \dots, G_N un ensemble de jeux et soit $\mathbb{P}(G_i)$ la probabilité pour \mathcal{A} de répondre au défi posé par \mathcal{R} pour le jeu G_i . $\mathbb{P}(G_0)$ est alors la probabilité de cassé le système considéré et $\mathbb{P}(G_N)$ la probabilité de répondre au problème P .

L'idée est de changer pas à pas les jeux G_0 à G_N de façon à ce que :

$$\forall i \in 0, \dots, N-1, |\mathbb{P}(G_i) - \mathbb{P}(G_{i+1})| \in \text{negl}(\lambda) \implies |\mathbb{P}(G_0) - \mathbb{P}(G_N)| \in \text{negl}(\lambda)$$

où λ est un paramètre de sécurité. Autrement dis, les changements sur les jeux ne changent qu'à un facteur négligeable près les probabilités de succès de l'attaquant \mathcal{A} .

Il n'est pas possible de changer le comportement de \mathcal{A} puisqu'il est quelconque, en revanche nous pouvons modifier celui de R .

Théorème 3.1. (*Réduction de sécurité*).

Soit N_{sign} le nombre de requêtes faites à l'oracle de signature. Soit λ le paramètre de sécurité et $\lambda_0 = \lambda + 2\log_2(N_{sign})$. On a :

$$Succ_{Wave}^{EUF-CMA}(t, N_{sign}) \leq 2Succ^{DOOM(n,q,k,N)}(t) + \rho(\mathcal{D}_{rand}, \mathcal{D}_{pub})(t) +$$

$$f(\mathcal{U}_\omega, \mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}^{pk}}) + g(\epsilon) + c + \frac{N_{hash}}{2}\sqrt{\epsilon} + \frac{1}{2^\lambda}$$

où ϵ est une fonction en n qui décroît exponentiellement, \mathcal{D}_{rand} est la distribution des matrices prises aléatoirement dans $\mathbb{F}_q(n-k) \times n$, \mathcal{D}_{pub} celle des matrices prises aléatoirement dans l'ensemble des matrices de parité d'un code $(U, U+V)$ -généralisé (et U, V de dimension respectives k_U et k_V), f l'espérance de la distance calculatoire entre les deux distributions, g linéaire en ϵ et c une constante.

Preuve. (On trouvera le détail des preuves de probabilité en annexe de ce rapport.) On rappelle que G_0 correspond à notre jeu pour la sécurité EUF-CMA de Wave.

- G_1 : Le jeu G_1 est identique au jeu G_0 sauf si l'évènement

$$F := \{\text{Un même aléa } r \text{ a été tiré lors de deux requêtes d'un même message à l'oracle de signature}\}.$$

On a alors

$$\mathbb{P}(G_0) \leq \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(F)$$

Or pour $\lambda_0 = \lambda + 2\log_2(N_{sign})$, la probabilité que l'évènement F se produise est majorée par $\frac{1}{2^\lambda}$. C'est donc négligeable et le changement est autorisé.

- G_2 : Le passage au jeu G_2 permet d'empêcher \mathcal{A} de faire appel à l'oracle de signature sur les syndrome du problème DOOM. L'idée est de créer une liste suffisamment grande L_m d'aléas tous différents. On modifie alors la fonction `hash` de cette façon :

1. Si **hash** est appelée par la fonction **sign**, alors les aléas seront pris successivement dans L_m et associés à un vecteur erreur $\mathbf{e}_{m,r}$ (stocké) pris uniformément dans S_ω . Elle renvoie alors $\mathbf{s} = \mathbf{e}_{m,r} \mathbf{H}^T$.
2. En revanche si **hash** est appelée hors de la fonction **sign** par \mathcal{A} , alors elle son comportement dépendra de l'aléa. Si r est dans L_m elle se comporte comme si elle avait été appelée par **sign** et renvoie $\mathbf{e}_{m,r} \mathbf{H}^T$. Sinon elle renvoie successivement les syndromes du problème DOOM.

On prend donc dans la fonction **sign** toujours le r suivant de L_m . On a alors changé le jeu en supprimant le cas où deux mêmes r sont tirés lors de la signature. Cela ne pose pas de problème grace au passage à G_1 . Le passage au jeu G_2 permettra ainsi de s'assurer par la suite que \mathcal{A} n'a pas fait d'appel à **sign** sur les syndromes du problème DOOM. On a alors

$$\mathbb{P}(G_1) \leq \mathbb{P}(G_2) + \frac{N_{hash}}{2} \sqrt{\epsilon}$$

où ϵ est une fonction en n qui décroît exponentiellement. C'est donc bien négligeable.

- G_3 : Le jeu G_3 permet à l'oracle de signature de se passer de l'algorithme de décodage, et donc de la trappe T . Il sera nécessaire pour remplacer la matrice du code $(U, U+V)$ -généralisé par la matrice aléatoire de l'instance du problème DOOM. Pour passer au jeu G_3 , on modifie la sortie de **sign**. Au lieu de renvoyer le couple (\mathbf{e}, r) où $\mathbf{e} = D_{\varphi, H_U, H_V}$, on renvoie le couple $(\mathbf{e}_{m,r}, r)$ préalablement stocké.

La différence de succès de dépend que de ω et des différence de distribution entre \mathcal{U}_ω et $\mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}$, où \mathcal{U}_ω est la distribution uniforme sur S_ω et où \mathcal{U}_ω et $\mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}$ est la distribution des couples (e, r) où r est un aléa uniforme dans $\{0, 1\}^{\lambda_0}$ et e est la sortie de l'algorithme de décodage avec trappe sur une entrée s prise uniformément dans \mathbb{F}_q^{n-k} . On a alors

$$\mathbb{P}(G_2) \leq \mathbb{P}(G_3) + f(\mathcal{U}_\omega, \mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}) + g(\epsilon) + c$$

où f et g sont linéaires et c une certaine constante.

- G_4 : On peut maintenant remplacer \mathbf{H}_{pk} par \mathbf{H}_0 . Ce changement ne pose pas de problème puisque **sign** n'utilise plus la trappe. En revanche, nous avons créé un distingueur entre la distribution ($:= \mathcal{D}_{rand}$)

des matrices prises aléatoirement dans $\mathbb{F}_q(n-k) \times n$ et la distribution ($:= \mathcal{D}_{pub}$) des matrices prises aléatoirement dans l'ensemble des matrices de parité d'un code $(U, U+V)$ -généralisé où U (resp. V) est un $[n/2, k_U]$ -code (resp. $[n/2, k_V]$ -code). On a alors

$$\mathbb{P}(G_3) \leq \mathbb{P}(G_4) + \rho(\mathcal{D}_{rand}, \mathcal{D}_{pub})(t)$$

- G_5 : On change ici la procédure de fin. On rajoute à la vérification la condition $r \notin L_m$. Ainsi on est bien sûr que \mathcal{A} réussit le jeu s'il répond au problème DOOM. Alors la probabilité que \mathcal{A} réussisse G_5 est exactement la probabilité que \mathcal{A} réussisse G_4 et $r \notin L_m$. On a alors

$$\mathbb{P}(G_4) \leq 2\mathbb{P}(G_5) + \rho(\mathcal{D}_{rand}, \mathcal{D}_{pub})(t)$$

où $\mathbb{P}(G_5)$ est exactement la probabilité pour \mathcal{A} de renvoyer $\mathbf{e}_j \in S_\omega$ et tel que $\mathbf{e}_j \mathbf{H}_0^T = \mathbf{s}_j$ pour un certain indice j du problème DOOM. On a donc

$$\mathbb{P}(G_5) \leq Succ_{DOOM}^{n,k,N_{hash},\omega}(t)$$

En rassemblant toutes les inégalités on termine la preuve. \square

3.2 Indistinguabilité des codes $(U, U+V)$ -généralisés

Le schéma Wave est, d'après ce qui précède, sûr à condition que l'on ne puisse pas distinguer une matrice de parité d'un code $(U, U+V)$ -généralisé d'une matrice de parité aléatoire.

Nous avons, tout au long de ce rapport, simplifié les notations et les algorithmes. Afin de discuter ce problème de distinction, il est nécessaire d'en réintroduire certaines.

La trappe du schéma Wave étant la structure du code $(U, U+V)$ -généralisé utilisé, nous devons nous assurer qu'on ne peut pas la retrouver à partir de la clé secrète. Nous introduisons donc une matrice $S \in \mathbb{F}_q^{(n-k) \times (n-k)}$ inversible et une matrice de permutation $P \in \mathbb{F}_q^{n \times n}$, la clé publique devient alors $pk = SHP$. Les matrices S et P faisant donc partie de la clé privée.

Lorsque $\dim(U) < \dim(V)$, il est possible de montrer que ce problème est NP-complet à l'aide d'une réduction au problème du mariage tri-dimensionnel lui-même NP-complet.

En revanche, dans le cas où $\dim(U) > \dim(V)$ nous avons montré précédemment qu'il est facile de distinguer un code binaire $(U, U + V)$ -généralisé d'un code aléatoire d'où le passage à $q > 2$. La démonstration du caractère NP-complet de Wave lorsque $q = 3$ et $\dim(U) > \dim(V)$ reste non achevée pour l'instant. Les auteurs du papier d'origine pensent néanmoins que la généralisation des codes $(U, U + V)$ comme nous l'avons présentée dans la définition 1.5 et notamment le grand choix des vecteurs a , b , c , et d offrent la possibilité d'étendre la réduction au problème du mariage tri-dimensionnel.

Conclusion

Quelques preuves supplémentaires

Démonstration du lemme 2.9

Nous allons avoir besoin dans la suite de la proposition suivante que nous ne démontrerons pas dans ce rapport :

Proposition .2. *Soient X et Y deux variables aléatoires dans le même espace A et Z une variable aléatoire dans l'espace B indépendante de X et Y . Alors, pour toute fonction f , nous avons :*

$$\rho(f(X, Z), f(Y, Z)) \leq \rho(X, Y)$$

Preuve du lemme 2.9. Rappelons que nous voulons montrer l'inégalité :

$$\rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) \leq \sum_{x_V, l} \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif}) \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V)$$

En écrivant $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V)$ et $\mathbf{e}^{unif} = (\mathbf{e}_U^{unif}, \mathbf{e}_V^{unif})$, nous pouvons majorer leur distance statistique

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) &= \rho((\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V), (\mathbf{e}_U^{unif}, \mathbf{e}_V^{unif})) \\ &\leq \sum_{x_U, x_V} \left| \mathbb{P}((\mathbf{e}_U, \mathbf{e}_V) = (x_U, x_V)) - \mathbb{P}((\mathbf{e}_U^{unif}, \mathbf{e}_V^{unif}) = (x_U, x_V)) \right| \\ &= \sum_{x_U, x_V} \left| \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | \mathbf{e}_V = x_V) - \mathbb{P}(\mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \right| \\ &= \sum_{x_U, x_V} \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) \left| \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | \mathbf{e}_V = x_V) - \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \right| \end{aligned}$$

Le passage de la troisième ligne à la quatrième se fait car $\mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) = \mathbb{P}(\mathbf{e}_V^{unif} = x_V)$.

Rappelons que k_0 est le poids de \mathbf{e}_V sur J , en ajoutant une condition sur la valeur de k_0 aux probabilités, nous obtenons donc la somme suivante :

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | \mathbf{e}_V = x_V) - \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) = \\ &\sum_l \left[\mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) - \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \right] \mathbb{P}(k_0 = l | \mathbf{e}_V = x_V) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc, comme majoration de la distance statistique, une somme sur les indices x_U , x_V et l . Nous allons maintenant étudier la somme sur les indices x_U .

Les ensembles \mathcal{J} étant inclus dans un ensemble d'information, l'aléa interne

de `DecodeU` et de `VarDecodeU` ne dépendent pas du choix de J^{unif} et $J^{\mathbf{H}_U}$. Nous pouvons voir que $\mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V)$ ne dépend que de x_U et $J^{\mathbf{H}_U}$ et $\mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V^{unif} = x_V)$ ne dépend que de x_U et J^{unif} . De plus, J^{unif} et $J^{\mathbf{H}_U}$ vivent dans le même espace. Ainsi d'après la proposition .2, nous avons

$$\sum_{x_U} \mathbb{P}(\mathbf{e}_U = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) - \mathbb{P}(\mathbf{e}_U^{unif} = x_U | k_0 = l, \mathbf{e}_V^{unif} = x_V) \leq \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif})$$

En combinant les différentes équations obtenues, nous avons alors :

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{e}, \mathbf{e}^{unif}) &\leq \sum_{x_V, l} \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif}) \mathbb{P}(\mathbf{e}_V = x_V) \mathbb{P}(k_0 = l | \mathbf{e}_V = x_V) \\ &= \sum_{x_V, l} \rho(J^{\mathbf{H}_U}, J^{unif}) \mathbb{P}(k_0 = l, \mathbf{e}_V = x_V) \end{aligned}$$

□

Démonstration du lemme 2.10

Lemme .3. Soient d et m deux entiers tels que $d < m$ et $M \leftarrow \mathbb{F}_3^{(m-d) \times m}$ alors $\mathbb{P}(\text{rg}(M) < m - d) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^d}$

Preuve. Soit P la probabilité que M ne soit pas de rang plein, c'est-à-dire de rang inférieur à $m - d$. Notons V_i le sous-espace vectoriel engendré par les i premières lignes de M . Si M n'est pas de rang plein c'est qu'au moins une de ses lignes est une combinaison linéaire des précédentes, c'est-à-dire qu'il existe un i tel que $\dim(V_i) = \dim(V_{i-1}) = i - 1$. On a alors

$$\begin{aligned} P &\leq \sum_{i=1}^{m-d} \mathbb{P}(\dim(V_i) = \dim(V_{i-1}) = i - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{m-d} \mathbb{P}(\dim(V_i) = i - 1 | \dim(V_{i-1}) = i - 1) \mathbb{P}(\dim(V_{i-1}) = i - 1) \\ &\leq \sum_{i=1}^{m-d} \mathbb{P}(\dim(V_i) = i - 1 | \dim(V_{i-1}) = i - 1) \end{aligned}$$

Si $\dim(V_{i-1}) = i - 1$, alors $\dim(V_i) = i - 1$ est équivalent à dire que la ligne i de la matrice est une combinaison linéaire des $i - 1$ précédentes. Nous avons

donc :

$$\mathbb{P}(\dim(V_i) = i - 1 | \dim(V_{i-1}) = i - 1) = \frac{3^{i-1}}{3^m} = \frac{1}{3^{m-i+1}}$$

Nous pouvons donc conclure avec :

$$\begin{aligned} P &\leq \sum_{i=1}^{m-d} \frac{1}{3^{m-i+1}} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^{-d}} - \frac{1}{2 \cdot 3^m} \\ &\leq \frac{1}{2 \cdot 3^{-d}} \end{aligned}$$

□

Preuve du lemme 2.10. Nous voulons ici montrer que

$$\mathbb{E} \left(\rho \left(J_{x_V, l}^{unif}, J_{x_V, l}^{\mathbf{H}_U} \right) \right) \leq \frac{3^{-d}}{2}$$

Notons $n_{U,d}$ le nombre de sous-ensembles de $\llbracket 1, n/2 \rrbracket$ de taille $k_U - d$ ie $n_{U,d} = \binom{n/2}{k_U - d}$. On a alors

$$\rho(J^{unif}, J^{\mathbf{H}_U}) = \frac{N}{n_{U,d}}$$

avec $N = \#\{J \subset \llbracket 1, n/2 \rrbracket \text{ de taille } k_U - d \text{ mauvais pour } \mathbf{H}_U\}$.

Notons X_i l'événement "le sous-ensemble ε_i est un mauvais ensemble pour \mathbf{H}_U ", c'est-à-dire la matrice M_{ε_i} n'est pas de rang plein. D'après le lemme .3, nous avons $\mathbb{P}(X_i = 1) \leq \frac{1}{2 \cdot 3^d}$. De plus, nous pouvons maintenant écrire

$$N = \sum_{i=1}^{n_{U,d}} X_i.$$

Ainsi nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left(\rho \left(J_{x_V, l}^{unif}, J_{x_V, l}^{\mathbf{H}_U} \right) \right) &= \mathbb{E} \left(\frac{N}{n_{U, d}} \right) \\
&= \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n_{U, d}} X_i}{n_{U, d}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_{U, d}} \mathbb{E} \left(\frac{X_i}{n_{U, d}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_{U, d}} \frac{\mathbb{P}(X_i = 1)}{n_{U, d}} \\
&\leq \frac{1}{2 \cdot 3^d}
\end{aligned}$$

□

Démonstration de la proposition 1.4

Preuve de la proposition 1.4. La dimension d'un *hull* étant invariante par permutation nous allons ici montrer que nous avons $\dim(\text{hull}(U, U + V)) = k_U - k_V$ avec probabilité $1 - \mathcal{O}(2^{k_U - k_V})$. Par définition du *hull*, nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{hull}(U, U + V) &= (U, U + V) \cap (U, U + V)^\perp \\
&= (U, U + V) \cap (V^\perp + U^\perp, V^\perp)
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall u \in U$ et $\forall v \in V$ tels que $(u, u + v) \in \text{hull}(U, U + V)$, il existe $u_t \in U^\perp$ et $v_t \in V^\perp$ tels que

$$\begin{cases} u = v_t + u_t \\ u + v = v_t \end{cases} \iff \begin{cases} v = u_t \\ u + v = v_t \end{cases}$$

Donc $v \in V \cap U^\perp$. De plus, nous avons

$$\dim(V) + \dim(U^\perp) = \frac{n}{2} + k_V - k_U < \frac{n}{2}$$

Alors, avec probabilité $1 - \mathcal{O}(2^{k_V - k_U})$ sur le choix des codes, nous aurons $V \cap U^\perp = 0$ et $v = u^\perp = 0$. Ainsi, les vecteurs de $\text{hull}(U, U + V)$ seront de la

forme (x, x) où $x \in U \cap V^\perp$ avec probabilité $1 - 0(2^{k_V - k_U})$. De même on a,

$$\dim(U) + \dim(V^\perp) = \frac{n}{2} + k_U - k_V < \frac{n}{2}$$

Alors avec probabilité $1 - 0(2^{k_V - k_U})$, on aura

$$\dim(\text{hull}((U, U + V))) = \dim(U \cap V^\perp) = k_U - k_V$$

ce qui conclue la preuve. \square

Démonstration du théorème 3.1

Preuve du théorème 3.1.

- **Passage de G_0 à G_1 :** Montrons que

$$\mathbb{P}(F) \leq \frac{1}{2^\lambda}$$

. Remarquons d'abord que la probabilité de n'avoir aucune collision sur t tirages indépendants et uniforme dans un ensemble de taille n est majoré par t^2/n (admis). Dans notre cas, $t = N_{\text{sign}}$ et $n = 2^{\lambda_0}$. Ainsi avec $\lambda_0 = \lambda + 2 \log_2 N_{\text{sign}}$, on en déduit que

$$\mathbb{P}(F) \leq \frac{N_{\text{sign}}^2}{2^{\lambda_0}} = \frac{1}{2^{\lambda_0 - 2 \log_2 N_{\text{sign}}}} = \frac{1}{2^\lambda}$$

ce qui conclu la preuve.

- **Passage de G_1 à G_2 :** Montrons que

$$\mathbb{P}(G_1) \leq \mathbb{P}(G_2) + \frac{N_{\text{hash}}}{2} \sqrt{\epsilon}$$

où ϵ est une fonction en n qui décroît exponentiellement. Nous utiliserons la proposition suivante (admise) :

Proposition .4. *Soient les variables aléatoires discrètes X_i et Y_i où $i \in \{1, 2\}$ de même domaine \mathcal{A}_i . Notons pour $a_i \in \mathcal{A}_i$:*

- $p(.|a_i)$ la distribution de X_2 conditionnée à l'évènement $X_1 = a_i$
- $q(.|a_i)$ la distribution de Y_2 conditionnée à l'évènement $Y_1 = a_i$

Alors nous avons,

$$\rho(X_1, X_2, Y_1, Y_2) \leq \sup_{a_i \in \mathcal{A}_i} \rho(p(\cdot|a_i), q(\cdot|a_i)) + \rho(X_1, Y_1).$$

Les distributions des jeux G_1 et G_2 diffèrent par les sorties de la fonction de hachage. Dans le jeu G_1 les sorties X_i sont uniformément distribuées dans \mathbb{F}_q^{n-k} . Dans le jeu G_2 , les sorties Y_i valent $\mathbf{e}\mathbf{H}^T$ avec e uniformément distribué dans S_ω si $r \in L_m$, sinon Y_i est uniformément distribuée. On a,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(G_1) - \mathbb{P}(G_2) &= \sum_{\mathbf{H}} \mathbb{P}(\mathbf{H}_{pk} = \mathbf{H}) (\mathbb{P}(G_1 | \mathbf{H}_{pk} = \mathbf{H}) - \mathbb{P}(G_2 | \mathbf{H}_{pk} = \mathbf{H})) \\ &\leq \mathbb{E}_{\mathbf{H}_{pk}} (\rho(X_1, \dots, X_{N_{hash}}, Y_1, \dots, Y_{N_{hash}})) \end{aligned} \quad (5)$$

Proposition .5. Soit X la distribution uniforme dans \mathbb{F}_q^{n-k} et Y la distribution de $\mathbf{e}\mathbf{H}^T$ avec e uniformément distribué dans S_ω . Alors

$$\mathbb{E}_{H_{pk}} (\rho(X, Y)) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\epsilon}$$

où ϵ est une borne qui décroît exponentiellement avec n .

Par les deux propositions précédentes et par un raisonnement par récurrence, on termine la preuve.

- **Passage de G_2 à G_3 :** Nous avons

$$\mathbb{P}(G_2) \leq \mathbb{P}(G_3) + f(\mathcal{U}_\omega, \mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}) + g(\epsilon) + c$$

où f et g sont linéaires et c une certaine constante. La fonction en ϵ découle d'un raisonnement similaire au raisonnement précédent. Ensuite, à constante près, les différences de distributions entre les jeux G_2 et G_3 ne dépendent que de l'espérance de la distance statistique entre les distributions \mathcal{U}_ω et $\mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}$, où \mathcal{U}_ω est la distribution uniforme sur S_ω et où $\mathcal{D}_\omega^{\mathbf{H}_{pk}}$ est la distribution des couples (e, r) où r est un aléa uniforme dans $\{0, 1\}^{\lambda_0}$ et e est la sortie de l'algorithme de décodage avec trappe sur une entrée s prise uniformément dans \mathbb{F}_q^{n-k} .

- **Passage de G_3 à G_4 :** La différence entre ces deux jeux ne vient que de la distance entre la distributions des matrices de parité de nos codes $(U, U + V)$ -généralisés et celle des matrices prises uniformément dans \mathbb{F}_q^{n-k} .
- **Passage de G_4 à G_5 :** Le jeu G_5 diffère du jeu G_4 uniquement par la vérification finale. Soit le couple (e, r) la réponse de \mathcal{A} comme signature d'un message m . Sa probabilité de succès pour le jeu G_5 est exactement la probabilité de l'évènement "réussit G_4 et $r \notin L_m$ ". Si la signature est valide, alors m n'a jamais été demandé à l'oracle de signature, donc \mathcal{A} n'a jamais eu accès aux éléments de L_m . Donc les événements sont indépendants et nous avons,

$$\mathbb{P}(G_5) = (1 - 2^{-\lambda_0})^{N_{sign}} \mathbb{P}(G_4).$$

où $\lambda_0 \leq \log_2(N_{sign}^2)$. Donc

$$(1 - 2^{-\lambda_0})^{N_{sign}} \geq (1 - \frac{1}{N_{sign}^2})^{N_{sign}} \geq \frac{1}{2}$$

D'où $\mathbb{P}(G_5) \geq \frac{1}{2} \mathbb{P}(G_4)$.

□