UNIVERSIDAD FIDÉLITAS
II-115 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO

Coordinación: Lic. Marco Corrales Chacón
mcorrales@ufidelitas.ac.cr
Elaborado por: Lic. Hernán Víquez Céspedes
Edición y Solución por: Prof. Edwin Villalobos Martínez

Contenidos **Página**

1 Álgebra: Operaciones con polinomios

Los polinomios al representar cantidades reales (desconocidas), se pueden establecer entre ellos operaciones cuyos algoritmos son muy similares a los empleados en el conjunto de los números reales para sumar, restar, multiplicar y dividir.

En este apartado, se estudian las estrategias metodológicas usuales que se utilizan para efectuar tales operaciones. Se recomienda ampliamente comprender el concepto de monomios semejantes, así como, recordar las propiedades de las potencias y los productos notables, para darle el mayor aprovechamiento a esta sección.

1.1 Suma-resta de polinomios

Para sumar - restar polinomios se identifican todos los términos semejantes presentes en la expresión. Posteriormente se **suman - restan** los coeficientes numéricos de esos términos semejantes manteniendo intacto el factor literal. Hay que tener cuidado cuando la expresión involucra signos de agrupación (paréntesis) pues se deben eliminar, de adentro hacia afuera, antes de agrupar los términos semejantes.

Se debe tomar en cuenta que las operaciones tiene prioridad según el orden en el que vayan apareciendo, es de izquierda a derecha conforme aparezca, primeramente las potencias (para nosotros son las fórmulas notables), en segundo lugar las divisiones y multiplicaciones (de igual manera conforme aparezcan de izquierda a derecha) y finalmente suma y resta, en el orden de aparición.

Para los signos de agrupación (llamados paréntesis) tenemos tres tipos: paréntesis redondos, cuadrados y llaves. Los signos de agrupación se resuelven de adentro hacia afuera, respetando la prioridad de operaciones. Otra consideración que se debe tener, es que si hay un signo de negativo **<u>delante</u>** de un paréntesis, para poder eliminar los paréntesis, se debe cambiar los signos de los términos dentro del paréntesis.

Para la multiplicación y división, también se definen las siguientes ley de signos:

$$+ \cdot + = + \qquad\qquad + \div + = +$$
$$- \cdot - = + \qquad\qquad - \div - = +$$
$$+ \cdot - = - \qquad\qquad + \div - = -$$
$$- \cdot + = - \qquad\qquad - \div + = -$$

1.2 Suma-resta de polinomios

Se le llama **términos semejantes** a los términos que tengan exactamente la misma parte literal, es decir, las mismas letras, con los mismos exponentes, los coeficientes numéricos (los números) pueden ser diferentes o iguales, veamos ejemplos:

- $3x^2; \frac{6}{5}x^2; -7x^2$ son términos semejantes, tienen exactamente la misma letra con el mismo exponente, en este caso: x^2
- $2x^2m; \frac{-12}{7}mx^2$ son términos semejantes, tienen exactamente las mismas letras y el mismo exponente para cada variable, independientemente del orden: x^2m
- $5y^3; -7y^3; \frac{y}{2}$ **no** son términos semejantes, pues aunque comparten la misma variable, los exponentes son diferentes.

Para sumar - restar polinomios se identifican todos los términos semejantes presentes en la expresión. Posteriormente se **suman - restan** los coeficientes numéricos de esos términos semejantes manteniendo intacto el factor literal. Hay que tener cuidado cuando la expresión involucra signos de agrupación (paréntesis) pues se deben eliminar, de adentro hacia afuera, antes de agrupar los términos semejantes.

Ejemplos: Suma-resta de polinomios con signos de agrupación

Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $-(-3x^2 + 4x^5 + 7) + (2x + 6x^5) - (x^2 - 7x^5 + 9)$

Solución

$-(-3x^2 + 4x^5 + 7) + (2x + 6x^5) - (x^2 - 7x^5 + 9)$ Eliminar los paréntesis, cambios de signos

$3x^2 - 4x^5 - 7 + 2x + 6x^5 - x^2 + 7x^5 - 9$ Suma y resta de términos semejantes

$(-4 + 6 + 7)\,x^5 + (3 - 1)\,x^2 + 2x - 7 - 9$

Este paso anterior, puede ser obviado, se introduce para recordar la suma y resta de términos semejantes, ya que lo anterior puede resolverse con el apoyo de la calculadora.

$\boxed{\textbf{R/: } 9x^5 + 2x^2 + 2x - 16}$

b) *(Opcional)* $-(7y^3 - 3y + 11) + (5y^2 + 9y^3 - 1) - (-y^3 - 4y^2 + 3y)$

Solución

$-(7y^3 - 3y + 11) + (5y^2 + 9y^3 - 1) - (-y^3 - 4y^2 + 3y)$ Eliminar paréntesis, cambio de signos

$-7y^3 + 3y - 11 + 5y^2 + 9y^3 - 1 + y^3 + 4y^2 - 3y$ Suma y resta de términos semejantes

$(-7 + 9 + 1)\, y^3 + (5 + 4)\, y^2 + (-3 + 3)\, y + -11 - 1$

Este paso anterior, puede ser obviado, se introduce para recordar la suma y resta de términos semejantes, ya que lo anterior puede resolverse con el apoyo de la calculadora.

$\boxed{\textbf{R/:}\ 3y^3 + 9y^2 - 12}$

c) *(Opcional)* $\left(3x^3 + 4x^2 - 7x + 1\right) + \left(9x^3 - 4x^2 - 6x\right) - \left(-7 - \dfrac{3}{2}x\right)$

Solución

$3x^3 + 4x^2 - 7x + 1 + 9x^3 - 4x^2 - 6x + 7 + \dfrac{3}{2}x$ Eliminar paréntesis, cambio de signos

$\boxed{\textbf{R/:}\ 12x^3 - \dfrac{23}{2}x + 8}$ Suma y resta de términos semejantes

d) *(Opcional)* $3x - \left\{x^4 - 2\left[x^3 - 3x^4 + 2\left(x^4 - x\right) + x^4\right] + 2x\right\}$

Solución

$3x - \left\{x^4 - 2\left[x^3 - 3x^4 + 2x^4 - 2x + x^4\right] + 2x\right\}$ Propiedad distributiva en el paréntesis redondo

$3x - \left\{x^4 - 2\left[x^3 - 2x\right] + 2x\right\}$ Suma y resta de términos semejantes

$3x - \left\{x^4 - 2x^3 + 4x + 2x\right\}$ Propiedad distributiva en el paréntesis cuadrado

$3x - \left\{x^4 - 2x^3 + 6x\right\}$ Suma y resta de términos semejantes

$3x - x^4 + 2x^3 - 6x$ Eliminar paréntesis, cambio de signos

$\boxed{\textbf{R/:}\ -x^4 + 2x^3 - 3x}$

1.3 Multiplicación de polinomios

La metodología que se aplica para multiplicar polinomios depende, en gran medida, de la cantidad de términos que cada producto presente. Por ejemplo, se pueden multiplicar monomios por binomios, binomios por binomios, o bien, polinomios por polinomios.

Para desarrollar correctamente una multiplicación de polinomios se debe tener en cuenta las fórmulas notables (también llamados productos notables) y las leyes de potencias.

1. *Leyes de potencias*

   Una potencia es una expresión de la forma $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n \text{ veces}}$, donde a es un número real llamado base de la potencia y n es un número entero llamado exponente, en palabras sencillas una potencia es una multiplicación de un número real por si mismo n veces. *Ejemplo:* $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. De acuerdo con lo anterior, se pude decir que el exponente de una potencia indica la cantidad de veces que se tiene que multiplicar la base por si misma, así por ejemplo, la expresión $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ es equivalente a multiplicar el número 2 cuatro veces por si mismo. Las potencias cumplen ciertas propiedades que resulta importante retomar, entre ellas se encuentran:

   a) ***Potencia de exponente cero***: toda potencia cuyo exponente sea cero da como resultado uno, sin importar la base que se tenga, es decir la expresión $a^0 = 1$, para cualquier número real a, $a \neq 0$. *Ejemplo:* $3^0 = 1$

   b) ***Potencia de exponente uno***: si una potencia posee exponente uno, el resultado de dicha potencia coincide con el número real de la base, es decir la expresión $a^1 = a$, para todo número real a. *Ejemplo:* $5^1 = 5$

   c) ***Multiplicación de potencias de igual base***: la multiplicación de dos o más potencias de igual base es equivalente a conservar la base y sumar los exponentes involucrados, es decir la expresión $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ es verdadera para todo número real a. *Ejemplo:* $x^3 \cdot x^4 = x^{3+4} = x^7$

   d) ***División de potencias de igual base***: para dividir dos o más potencias de igual base se conserva la base y se restan los exponentes involucrados. La expresión $a^n \div a^m = a^{n-m}$ es equivalente para todo número real a. *Ejemplo:* $\dfrac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = a^2$

   e) ***Potencia una potencia***: una potencia elevada a otra potencia es equivalente a conservar la base y multiplicar los exponentes, así por ejemplo si a es un número real cualquiera se satisface que $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$. *Ejemplo:* $\left(w^3\right)^2 = w^{3 \cdot 2} = w^6$

   f) ***Potencia de un producto***: si una multiplicación de números reales está elevada a una potencia se eleva cada factor involucrado a dicha potencia, es decir la expresión $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ se satisface para cualquier número real a. *Ejemplo:* $\left(2 \cdot x^2\right)^3 = (2)^3 \cdot (x^2)^3 = 8x^6$

g) ***Potencia de un cociente***: la potencia de un cociente (división) se distribuye entre el numerador y el denominador de la siguiente manera $(a \div b)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, dicha propiedad es válida para todo número real a. *Ejemplo:* $\left(\frac{3x}{5}\right)^2 = \frac{(3x)^2}{5^2} = \frac{9x^2}{25}$

h) ***Potencia de exponente negativo***: una potencia que posee un exponente negativo se puede transformar en una de exponente positivo, para ello se calcula el inverso multiplicativo de la base y se eleva al exponente dado positivo, matemáticamente hablando se tiene que $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ o bien $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$. *Ejemplo:* $\left(\frac{9}{x}\right)^{-3} = \left(\frac{x}{9}\right)^3 = \frac{x^3}{9^3} = \frac{x^3}{729}$

Otra consideración importante para resolver multiplicación de polinomios, es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, observemos:

$$a \cdot (b \pm c \pm \ldots \pm z) = a \cdot b + a \pm c \pm \ldots \pm a \cdot z$$

Ejemplo: Multiplicación de polinomios

Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $\left(7 - 3x + 3x^3\right)\left(x^2 + 2x\right) - (x + 1)(2 - x)$

Solución

$\left(7 - 3x + 3x^3\right)\left(x^2 + 2x\right) - (x + 1)(2 - x)$ Aplicar propiedad distributiva

En el segundo paréntesis, se resolverá la multiplicación, dentro de un paréntesis, por tener un signo negativo delante del producto, y por prioridad de de operaciones, se resuelve primero la multiplicación, antes del cambio de signo. Por ser el primer ejercicio, se muestra paso a paso, la propiedad distributiva.

$7 \cdot x^2 + 7 \cdot 2x - 3x \cdot x^2 - 3x \cdot 2x + 3x^3 \cdot x^2 + 3x^3 \cdot 2x - (x \cdot 2 - x \cdot x + 2 \cdot 1 - x \cdot 1)$

$7x^2 + 14x - 3x^3 - 6x^2 + 3x^5 + 6x^4 - \left(2x - x^2 + 2 - x\right)$ Eliminar paréntesis, cambiar paréntesis

$7x^2 + 14x - 3x^3 - 6x^2 + 3x^5 + 6x^4 - 2x + x^2 - 2 + x$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\textbf{R/: } 3x^5 + 6x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 13x - 2}$

b) *(Opcional)* $\left(7m^2 - 6\right)(m+1) + 3m(4m-4)$

Solución

$\left(7m^2 - 6\right)(m+1) + 3m(4m-4)$ Uso de la propiedad distributiva

$7m^3 + 7m^2 - 6m - 6 + 12m^2 - 12m$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\mathbf{R/:}\ 7m^3 + 19m^2 - 18m - 6}$

c) *(Opcional)* $(3x^2 - 8x + 7)(x^3 + x) - (x+2)(x-1)$

Solución

$(3x^2 - 8x + 7)(x^3 + x) - (x+2)(x-1)$ Aplicar propiedad distributiva

$3x^5 + 3x^3 - 8x^4 - 8x^2 + 7x^3 + 7x - \left(x^2 - x + 2x - 2\right)$ Eliminar paréntesis, cambiar paréntesis

$3x^5 + 3x^3 - 8x^4 - 8x^2 + 7x^3 + 7x - x^2 + x - 2x + 2$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\mathbf{R/:}\ 2 + 6x - 9x^2 + 10x^3 - 8x^4 + 3x^5}$

d) *(Opcional)* $\left(w^2 + 2\right)\left(w^3 + 5\right) - 6\left(2w^2 - 4w^3\right)$

Solución

$\left(w^2 + 2\right)\left(w^3 + 5\right) - 6\left(2w^2 - 4w^3\right)$ Aplicar propiedad distributiva

$w^5 + 5w^2 + 2w^3 + 10 - 12w^2 + 24w^3$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\mathbf{R/:}\ w^5 + 26w^3 - 7w^2 + 10}$

2. **Fórmulas Notables**

Las fórmulas o productos notables simplifican el trabajo de las multiplicaciones de polinomios, por lo que es importante identificar y desarrollar correctamente cada una de ellas. En este curso se trabajarán las siguientes:

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow$ Cuadrado de la suma de dos números

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow$ Cuadrado de la diferencia de dos números

c) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2 \rightarrow$ Diferencia de cuadrados

d) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \rightarrow$ Cubo de la suma de dos números

e) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \rightarrow$ Cubo de la diferencia de dos números

Ejemplo: Multiplicación de polinomios con fórmulas notables

1. Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $(3x-2)^3 - (1-2x)^2 + x^2(3x-1)$

Solución

Por prioridad de operaciones se deben resolver las fórmulas notables primeramente. Luego se aplica la propiedad distributiva en la última expresión. Observemos

Fórmula a usar: $(a-b)^3$	Desarrollo $a^3 - 3 \cdot a^2 \cdot b + 3 \cdot a \cdot b^2 - b^3$
Expresión del ejercicio $(3x-2)^3 =$ $(3x-2)^3 =$	Desarrollo Tome $a = 3x, b = 2$ $(3x)^3 - 3 \cdot (3x)^2 \cdot 2 + 3 \cdot 3x \cdot (2)^2 - 2^3$ $27x^3 - 54x^2 + 36x - 8$
Fórmula a usar: $(a-b)^2$	Desarrollo $a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$
Expresión del ejercicio $(1-2x)^2 =$ $(1-2x)^2 =$	Desarrollo Tome $a = 1, b = 2x$ $(1)^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2x + (2x)^2$ $1 - 4x + 4x^2$

$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - \left(1 - 4x + 4x^2\right) + 3x^3 - x^2$ Cambio de signos, eliminar paréntesis

$27x^3 - 54x^2 + 36x - 8 - 1 + 4x - 4x^2 + 3x^3 - x^2$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\textbf{R/:}\ 30x^3 - 59x^2 + 40x - 9}$

b) *(Opcional)* $y(y-6)^2 - (3y+1)^3 + 3(y^3 - 8)$

Solución

Por prioridad de operaciones se deben resolver las fórmulas notables primeramente. Luego se aplica la propiedad distributiva en la última expresión. Observemos

Fórmula a usar: $(a-b)^2$	Desarrollo $a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2$
Expresión del ejercicio	Desarrollo
$(y-6)^2 =$	Tome $a = y, b = 6$
	$y^2 - 2\cdot y\cdot 6 + 6^2$
$(y-6)^2 =$	$y^2 - 12y + 36$
Fórmula a usar: $(a+b)^3$	Desarrollo $a^3 + 3\cdot a^2\cdot b + 3\cdot a\cdot b^2 + b^3$
Expresión del ejercicio	Desarrollo
$(3y+1)^3 =$	Tome $a = 3y, b = 1$
	$(3y)^3 + 3\cdot(3y)^2\cdot 1 + 3\cdot 3y\cdot 1^2 + (1)^3$
$(3y+1)^3 =$	$27y^3 + 27y^2 + 9y + 1$

$y\left(y^2 - 12y + 36\right) - \left(27y^3 + 27y^2 + 9y + 1\right) + 3y^3 - 24$ Cambio de signos. Propiedad distributiva

$y^3 - 12y^2 + 36y - 27y^3 - 27y^2 - 9y - 1 + 3y^3 - 24$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\textbf{R/: } -25 + 27y - 39y^2 - 23y^3}$

c) *(Opcional)* $-(3x-1)(3x+1)-(x-2)^2$

Solución

Por prioridad de operaciones se deben resolver las fórmulas notables primeramente. Luego se aplica la propiedad distributiva en la última expresión. Observemos

Fórmula a usar:	Desarrollo
$(a-b)(a+b)$	a^2-b^2
Expresión del ejercicio	Desarrollo
$(3x-1)(3x+1)=$	Tome $a=3x, b=1$
	$(3x)^2-1^2$
$(3x-1)(3x+1)=$	$9x^2-1$
Fórmula a usar:	Desarrollo
$(a-b)^2$	$a^2-2\cdot a\cdot b+b^2$
Expresión del ejercicio	Desarrollo
$(x-2)^2=$	Tome $a=x, b=2$
	$x^2-2\cdot x\cdot 2+2^2$
$(x-2)^2=$	x^2-4x+4

$-\left(9x^2-1\right)-\left(x^2-4x+4\right)$ Cambio de signos, eliminar paréntesis

$-9x^2+1-x^2+4x-4$ Suma y resta de términos semejantes

$\boxed{\textbf{R/: } -10x^2+4x-3}$

2. Dados los siguientes polinomios definidos en la variable y

$$R(y)=y^3+1: \quad S(y)=7-y; \quad T(y)=y^6-3y^2-3y+1$$

Determine el polinomio reducido de efectuar la operación:

$$[R(y)]^2-5y\,[S(y)]^3-2T(y)$$

Solución

En este ejemplo, se sustituyen los polinomios en el ejercicio dado, vamos a desarrollar de una vez las fórmulas notables.

$\left(y^3+1\right)^2-5y\cdot(7-y)^3-2\cdot\left(y^6-3y^2-3y+1\right)$ Desarrollo de fórmulas notables, Distributividad

$y^6+2y^3+1-5y\cdot\left(343-147y+21y^2-y^3\right)-2y^6+6y^2+6y-2$

$y^6+2y^3+1-1715y+735y^2-105y^3+5y^4-2y^6+6y^2+6y-2$

$\boxed{\textbf{R/: } -y^6+5y^4-103y^3+741y^2-1709y-1}$

3. *(Opcional)* Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = 2x - 3 \;\;,\;\; Q(x) = x + 6 \;\;,\;\; R(x) = 7 - 5x$$

Determine la expresión algebraica más simple que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[P(x)]^3 + 2x^2 \cdot Q(x) - 3R(x)$$

Solución

$(2x - 3)^3 + 2x^2 \cdot (x + 6) - 3 \cdot (7 - 5x)$ Fórmula Notable, Propiedad Distributiva

$8x^3 - 24x^2 + 54x - 27 + 2x^3 + 12x^2 - 21 + 15x$ Suma y Resta de términos semejantes

$\boxed{\textbf{R/: } 10x^3 - 24x^2 + 69x - 48}$

1.4 División de polinomios

1.4.1 División de polinomio por monomio

Para dividir un polinomio por un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio por el monomio, en el caso del factor literal, se deben usar leyes de potencia, además se utiliza la propiedad:

$$(a \pm b \pm ... \pm z) \div c = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \pm ,,, \pm \frac{z}{c}$$

Ejemplo. División de polinomio por monomio

Efectué las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

a) $\left(12x^4 - 7x^2 - 9x^5 + 3x^3\right) \div 3x^2$

Solución

$\left(12x^4 - 7x^2 - 9x^5 + 3x^3\right) \div 3x^2$

$\frac{12x^2}{3x^2} - \frac{7x^2}{3x^2} - \frac{9x^5}{3x^2} + \frac{3x^3}{3x^2}$

$\boxed{\textbf{R/: } 4x^2 - \frac{7}{3} - 3x^3 + x}$

b) *(Opcional)* $\frac{-18m^2 + 21m^6 - 9m^5}{9m^2}$

Solución

$\frac{-18m^2 + 21m^6 - 9m^5}{9m^2}$

$\frac{-18m^2}{9m^2} + \frac{21m^6}{9m^2} - \frac{9m^5}{9m^2}$

$\boxed{\textbf{R/: } -2 + \frac{7}{3}m^4 - m^3}$

1.4.2 División de polinomio por polinomio o División algebraica

La división de un polinomio por otro polinomio, comúnmente llamada **división algebraica**, se desarrolla siguiendo cada uno de los siguientes pasos:

a) Se deben ordenar los términos del dividendo y del divisor en orden descendente (de mayor a menor) con respecto a una de las variables, si falta alguna de las variables se debe completar el polinomio con un cero.

b) Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor, el resultado es el primer término del **cociente** $C(x)$.

c) Se multiplica el cociente por cada término del divisor y los resultados se van colocando debajo de cada término del dividendo y se restan uno a uno.

d) El polinomio obtenido es el nuevo dividendo con el cual se repiten los pasos b y c anteriores.

e) Se continúa con los pasos $b), c)$ y $d)$ hasta que se obtenga un polinomio de grado menor que el divisor. Éste se llamará **residuo** $R(x)$.

Se debe considerar lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo} \longleftarrow P(x) & \;\; Q(x) \longrightarrow \text{divisor} \\ \cline{2-2} \text{residuo} \longleftarrow R(x) \quad & C(x) \longrightarrow \text{cociente} \end{array}$$

La división de la forma $P(x) \div Q(x)$ o $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se puede expresar como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

La división algebraica es posible si el polinomio del dividendo es de grado mayor o igual al polinomio del divisor.

Ejemplo: Método de división algebraica

Dados los polinomios $P(x)$ y $Q(x)$, efectúe la operación $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y exprese el resultado de la forma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

a) $P(x) = 2x^4 + 2x^2 - x + 4$ y $Q(x) = x^2 - 2x + 1$

Solución

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & & +2x^2 & -x & +4 & x^2 - 2x + 1 \\ \cline{6-6}
-2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 + 4x + 8 \\ \cline{1-3}
& 4x^3 & & -x & & \\
& -4x^3 & +8x^2 & -4x & & \\ \cline{2-4}
& & 8x^2 & -5x & +4 & \\
& & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{3-5}
& & & 11x & -4 &
\end{array}$$

De lo anterior, tenemos que:

$P(x) = 2x^4 + 2x^2 - x + 4; Q(x) = x^2 - 2x + 1; C(x) = 2x^2 + 4x + 8; R(x) = 11x - 4$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{2x^4 + 2x^2 - x + 4}{x^2 - 2x + 1} = 2x^2 + 4x + 8 + \frac{11x - 4}{x^2 - 2x + 1}}$$

b) $P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1$ y $Q(x) = 2 + x^2$

Solución

$$\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & -2x^2 & & -1 & x^2 + 2 \\ \cline{5-5}
-2x^3 & & -4x & & 2x - 2 \\ \cline{1-3}
& -2x^2 & -4x & -1 & \\
& 2x^2 & & +4 & \\ \cline{2-4}
& & -4x & +3 &
\end{array}$$

De lo anterior, tenemos que:

$P(x) = 2x^3 - 2x^2 - 1; Q(x) = x^2 + 2; C(x) = 2x - 2; R(x) = -4x + 3$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{2x^3 - 2x^2 - 1}{2 + x^2} = 2x - 2 + \frac{-4x + 3}{2 + x^2}}$$

c) *(Opcional)* $P(x) = 2x - 4x^2 + 3x^3 - 1$ y $Q(x) = 1 + x^2 + 2x$

Solución

$$
\begin{array}{rrrr|l}
3x^3 & -4x^2 & +2x & -1 & x^2+2x+1 \\
\cline{5-5}
-3x^3 & -6x^2 & -3x & & 3x-10 \\
\cline{1-3}
 & -10x^2 & -x & -1 & \\
 & 10x^2 & +20x & +10 & \\
\cline{2-4}
 & & 19x & +9 &
\end{array}
$$

De lo anterior, tenemos que:

$P(x) = 2x - 4x^2 + 3x^3 - 1; Q(x) = x^2 + 2x + 1; C(x) = 3x - 10; R(x) = 19x + 9$

$$\boxed{\textbf{R/:}\frac{2x-4x^2+3x^3-1}{1+x^2+2x} = 3x-10+\frac{19x+9}{1+x^2+2x}}$$

d) *(Opcional)* $P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5$ y $Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

Solución

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
3x^4 & & -3x^2 & +x & -5 & x^3-2x^2+x-3 \\
\cline{6-6}
-3x^4 & +6x^3 & -3x^2 & +9x & & 3x+6 \\
\cline{1-4}
 & 6x^3 & -6x^2 & +10x & -5 & \\
 & -6x^3 & +12x^2 & -6x & +18 & \\
\cline{2-5}
 & & 6x^2 & +4x & +13 &
\end{array}
$$

De lo anterior, tenemos que:

$P(x) = 3x^4 - 3x^2 + x - 5; Q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 3; C(x) = 3x + 6; R(x) = 6x^2 + 4x + 13$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{3x^4-3x^2+x-5}{x^3-2x^2+x-3} = 3x+6+\frac{6x^2+4x+13}{x^3-2x^2+x-3}}$$

1.4.3 División Sintética

La división sintética es un procedimiento abreviado para determinar el cociente y el residuo que se obtiene al dividir un polinomio $P(x)$ de grado n, con $n \geq 1$, por un polinomio de la forma $x - \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Es importante tomar muy en cuenta ***la forma*** que debe tener el divisor para poder determinar si la división sintética es posible de realizar o no.

Ejemplo: Método de división sintética

Determine el cociente y el residuo que se obtiene al efectuar cada una de las siguientes divisiones.

a) $\left(-9x^2 + x + 3 + x^4\right) \div (x + 3)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & -9 & 1 & 3 \\ -3 & & -3 & 9 & 0 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

Donde: $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = x^3 - 3x^2 + 1; \quad R(x) = 0}$

b) $(4x^3 + 3x^2 - 5x + 2) \div (x - 3)$ $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = 4x^2 + 15x + 40; \quad R(x) = 122}$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & 3 & -5 & 2 \\ 3 & & 12 & 45 & 120 \\ \hline & 4 & 15 & 40 & 122 \end{array}$$

Donde: $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = 4x^2 + 15x + 40; \quad R(x) = 122}$

c) $(8x^3 + 8x^2 + 22x - 15) \div (2x - 1)$ $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = 4x^2 + 6x + 14; \quad R(x) = \dfrac{-1}{2}}$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 8 & 8 & 22 & -15 \\ \frac{1}{2} & & 4 & 6 & 14 \\ \hline & 8 & 12 & 28 & -1 \end{array}$$

Donde: $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = 8x^2 + 12x + 28; \quad R(x) = -1}$

d) *(Opcional)* $(-8x^3 + x^4 - 16 + 2x) \div (x - 8)$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -8 & 0 & 2 & -16 \\ 8 & & 8 & 0 & 0 & 16 \\ \hline & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Donde: $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = x^3 + 2; \quad R(x) = 0}$

e) *(Opcional)* $(5 - 3x^2 + x^3 + x) \div (-2 + x)$ $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = x^2 - x - 1; \quad R(x) = 3}$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & & 2 & -2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}$$

Donde: $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = x^2 - x - 1; \quad R(x) = 3}$

1.5 Práctica Complementaria

1. Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

   a) $(3m - 5)^2 + (-5m - 1)(3m + 2)$ $\boxed{\textbf{R/: } -6m^2 - 43m + 23}$

   b) $-(2x + 5)^3 - (x + 2)^2 - (x + 1)$ $\boxed{\textbf{R/: } -8x^3 - 61x^2 - 155x - 130}$

   c) $(x + 3)^3 - (x + 1)^2 + (2x - 1)^2$ $\boxed{\textbf{R/: } x^3 + 12x^2 + 21x + 27}$

   d) $-5a(8 + 2a^2)^2 \div (a^2 + 4)$ $\boxed{\textbf{R/: } -20a^3 - 80a}$

   e) $(14x^4 - 10x^3) \div -2x^3(5 - 7x)$ $\boxed{\textbf{R/: } 25 - 70x + 49x^2}$

   f) $\left(x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + 5\right) \div (x^2 - 2)$ $\boxed{\textbf{R/: } C(x) = x^2 + 3x - 2, R(x) = x + 1}$

   g) $\left(3x^3 - 35 + 12x - 16x^2\right) \div (x - 5) + \left(4 - x^2\right)(6x - 1) - \left(7x^2 - 11 + 15x - x^3\right)$

   $\boxed{\textbf{R/: } -5x^3 - 3x^2 + 8x + 14}$

2. Dados los siguientes polinomios

$$N(a) = 6a^4 - 3a^2 \ , \ M(a) = 2a^2 - 3a \ , \ P(a) = 2a - 6a^4$$

Determine la expresión algebraica más simple que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[M(a)]^3 - \frac{5}{2}P(a) - 5M(a) \cdot N(a)$$

$\boxed{\textbf{R/: } -52a^6 + 54a^5 + 99a^4 - 72a^3 - 5a}$

3. Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = x^4 - 2x^2 - 6x - 1 \ , \ Q(x) = x^3 - 6x^2 + 4 \ , \ R(x) = 2x - 2$$

Determine la expresión algebraica más simple que se obtiene al efectuar las operaciones

$$P(x) + 2Q(x) - [R(x)]^2$$

$\boxed{\textbf{R/: } x^4 + 2x^3 - 18x^2 + 2x + 3}$

4. Dados los siguientes polinomios definidos en la variable y

$$R(y) = y^3 + 11; \quad S(y) = 5 - y; \quad T(y) = 7y^6 - 4y^2 + 3y - 1$$

Determine el polinomio reducido de efectuar la operación:

$$[R(y)]^2 - 3y\,[S(y)]^3 - 4T(y)$$

$\boxed{\textbf{R/: } 125 - 27y^6 - 387y + 3y^4 + 241y^2}$

5. Efectúe cada una de las siguientes divisiones de polinomios.

   a) $(m^3 - 5m - m^5 + 12) \div (m^2 - 5)$ $\boxed{\textbf{R/: } R(x) = -25m + 12; C(x) = -m^3 - 4m}$

   b) $(8a^2 - 3a + 4a^3 - a^5 - 5) \div (a^2 - 3)$ $\boxed{\textbf{R/: } R(a) = -19; C(a) = -a^3 + a + 8}$

   c) $(m^5 - 4m^3 + 6m^2 - 21m + 18) \div (2 + m)$ $\boxed{\textbf{R/: } R(m) = 84; C(m) = m^4 - 2m^3 + 6m - 33}$

   d) $(5m^4 - 21m^3 - 5m^2 - 63m - 60) \div (m - 3)$ $\boxed{\textbf{R/: } R(m) = -456; C(m) = 5m^3 - 6m^2 - 23m - 132}$

2 Factorización

La factorización, al igual que los temas anteriores de álgebra tratados en este curso, surge por la necesidad del hombre de resolver ecuaciones que presenten términos cuadráticos (este tema se tratará en las próximas semanas), los babilónicos fueron los primeros en hacer uso de la factorización para resolver este tipo de ecuaciones.

En álgebra, al igual que en aritmética básica, una factorización consiste en descomponer una expresión algebraica en términos de ***factores***, cada uno de ellos serán divisores del polinomio original.

Ahora bien, la factorización será ***completa*** si cada uno de los factores es *irreducible*, es decir, si ya no se puede factorizar ninguno de ellos. Por otro lado, existen métodos que permiten obtener la descomposición factorial de una expresión algebraica dada, entre ellos se pueden mencionar: el método de factorización por *factor común*, por *fórmulas notables*, *agrupación*, *inspección*,*división sintética* e incluso, combinando los anteriores.

A continuación, se exponen cada uno de estos métodos a partir de ejemplos concretos que permitan comprender el tema en cuestión; y en el trascurrir de los mismos se irán trabajando ejercicios con métodos combinados.

2.1 Factorización por el método de factor común

El factor común de un polinomio es el mayor monomio o polinomio por el cual es divisible cada uno de los términos del polinomio original, para extraerlo solo se debe observar lo que se "repita" en cada término y luego la ley distributiva de la multiplicación se encarga de escribir dicho polinomio como el producto de ese factor común por otro polinomio.

Para factorizar un polinomio por este método se deben seguir los siguientes pasos:

1. Determinar un máximo común divisor $(m.c, d)$ de los coeficientes numéricos.
2. Si hay letras independientes que se repitan en **todos** los términos se pone en el factor común la de menor grado.
3. Si hay paréntesis que se repitan en **todos** los términos se pone el de menor grado.
4. Se divide cada término del polinomio original por el factor común.

Ejemplo: Factorización por factor común

Factorice al máximo cada polinomio, simplifique si es posible.

a) $8y^2 + 6y^3 - 2y^4$

Solución

Determinar el máximo común divisor de los factores numéricos

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 6 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & \end{array}$$

$m.c.d\,(8,6,2) = 2$

Factor literal es la **variable de menor exponente**

F. literal: y^2

F. común: producto del $m.c.d$ y el factor literal determinado.

F. común: $2y^2$

$$2y^2 \cdot \left(\frac{8y^2}{2y^2} + \frac{6y^3}{2y^2} - \frac{2y^4}{2y^2}\right)$$

$\boxed{\textbf{R/: } 2y^2\left(4 + 3y - y^2\right)}$

b) $2(y-3)^2 - 6y(y-3)$

Solución

$$2\,(y-3) \cdot \left[\frac{2\,(y-3)^2}{2\,(y-3)} - \frac{6y\,(y-3)}{2\,(y-3))}\right]$$

Determinar el m.c.d

$$\begin{array}{cc|c} 2 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & \end{array}$$

$m.c.d\,(2,6) = 2$

F. literal: $(y-3)$

F. común: $2\,(y-3)$

$2\,(y-3)\,[y - 3 - 3y]$

Se resuelven las operaciones resultantes

$2\,(y-3)\,[-2y - 3]$

Se extrae "un menos" a f. común

$\boxed{\textbf{R/: } -2(y-3)(2y+3)}$

c) $7(x-5)^2 - 4x(5-x)$

Solución

Extraer un menos a factor común, en el 2do paréntesis:

$7(x-5)^2 - -4x(x-5)$

$7(x-5)^2 + 4x(x-5)$

$(x-5)\left[\frac{7(x-5)^2}{(x-5)} + \frac{4x(x-5)}{(x-5)}\right]$

$(x-5)\left[7(x-5) + 4x\right]$

$(x-5)\left[7x - 35 + 4x\right]$

$\boxed{\textbf{R/: } (x-5)(11x-35)}$

Determinar el m.c.d

$\begin{array}{cc|c} 7 & 4 & 1 \end{array}$

$m.c.d\,(7,4) = 1$

F. literal: $(x-5)$

F. común: $(x-5)$

d) *(Opcional)* $24a^3 - 18a^2 - 36a^4$

Solución

$m.c.d\,(24,18,36) = 6$, factor literal: a^2

F.común: $6a^2$

$6a^2\left(\frac{24a^3}{6a^2} - \frac{18a^2}{6a^2} - \frac{36a^4}{6a^2}\right)$

$\boxed{\textbf{R/: } 6a^2\left(4a - 3 - 6a^2\right)}$

e) *(Opcional)* $(2x+4)(x-3) - 5(x-3)$

Solución

F.común: $(x-3)$

$(x-3)(2x+4-5)$

$\boxed{\textbf{R/: } (x-3)(2x-1)}$

2.2 Factorización por el método de productos notables

Las fórmulas notables juegan un papel fundamental para factorizar polinomios, (he ahí la importancia de recordarlas siempre) pues si se reconoce el desarrollo de alguna de ellas se podría expresar el polinomio dado como un producto irreducible de otros polinomios, obteniendo así una factorización.

Una vez que usted identifica que un polinomio corresponde al desarrollo de una fórmula notable verifique que cumple con las condiciones establecidas en los productos notables para así poder efectuar la factorización requerida.

Este método nos introduce dos fórmulas notables más, las cuales son la *diferencia* y la *suma* de cubos, las mismas se detallan a continuación:

a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \rightarrow$ Diferencia de cubos

b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \rightarrow$ Suma de cubos

Nota: Los trinomios cuadráticos que resultan al desarrollar las fórmulas notables de la suma y diferencia de cubos (por ejemplo el término $a^2 + ab + b^2$) ***nunca*** serán factorizables, por lo que es innecesario gastar tiempo buscando algún método de factorización que permite factorizar estos términos.

Ejemplo: Factorización por productos notables

Factorice al máximo cada polinomio, simplifique si es posible.

a) $500x^{15} + 108x^9$

Solución

Primero se determina el factor común, pues la expresión posee primeramente factor común:

$4x^9\left(125x^6 + 27\right)$, la expresión de este paréntesis, tiene la forma: $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Tome: $a^3 = 125x^6 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125x^6} \Rightarrow a = 5x^2; b^3 = 27 \Rightarrow b = \sqrt[3]{27} \Rightarrow b = 3$

Construimos la suma de cubos:

$\boxed{\textbf{R/: } 4x^9\left(5x^2 + 3\right)\left(25x^4 - 15x^2 + 9\right)}$

b) $16 - y^4$

Solución

Este ejercicio no presenta factor común, tiene la forma: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, llamada *Diferencia de Cuadrados*, pues los términos están separados por una resta, y ambos términos posee raíz cuadrada, observemos:

Tomando $a^2 = 16 \Rightarrow a = \sqrt{16} \Rightarrow a = 4; b^2 = y^4 \Rightarrow b = \sqrt{y^4} \Rightarrow b = y^2$

$$\left(4 - y^2\right)\left(4 + y^2\right)$$

En el primer paréntesis se puede aplicar nuevamente *Diferencia de Cuadrados*. En el segundo paréntesis **NO es posible aplicar** *Diferencia de cuadrados*, ya que esta separado por una suma, además, no está definida una fórmula para la expresión de la forma $a^2 + b^2$.

Ahora tome: $a^2 = 4 \Rightarrow a = \sqrt{4} \Rightarrow a = 2; b^2 = y^2 \Rightarrow b = \sqrt{y^2} \Rightarrow b = y$, así:

$$\boxed{\textbf{R/: } (2-y)(2+y)\left(4+y^2\right)}$$

c) $(x-1)^3 - 8x^3$

Solución

Este ejercicio presenta la forma $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ Diferencia de cubos, observemos:

Tomando: $a^3 = (x-1)^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{(x-1)^3} \Rightarrow a = (x-1); b^3 = 8x^3 \Rightarrow b = \sqrt[3]{8x^3} \Rightarrow b = 2x$, así:

$$[(x-1) - 2x]\left[(x-1)^2 + (x-1)\cdot 2x + (2x)^2\right]$$

Se resuelven las operaciones pertinentes:

$$[x - 1 - 2x]\left[x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 2x + 4x^2\right]$$

$$[-x-1]\left[7x^2 - 4x + 1\right]$$

$$\boxed{\textbf{R/: } -(x+1)\left(7x^2 - 4x + 1\right)}$$

d) *(Opcional)* $875w^8 - 189w^5$

Solución

Este ejercicio, primeramente se debe factorizar usando factor común:

$7w^5\left(125w^3 - 27\right)$

La expresión contenida en el paréntesis tiene la forma:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ Diferencia de cubos, así:

Tomando: $a^3 = 125w^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{125w^3} \Rightarrow a = 5w; b^3 = 27 \Rightarrow b = \sqrt[3]{27} \Rightarrow b = 3$, finalmente:

$\boxed{\textbf{R/:}\ 7w^5\,(5w-3)\left(25w^2 + 15w + 9\right)}$

e) *(Opcional)* $24m^5 + 3m^2$

Solución

Este ejercicio, primeramente presenta factor común:

$3m^2\left(8m^3 + 1\right)$

Ahora la expresión del paréntesis tiene la forma de la *Suma de cubos*, observemos:

Tome: $a^3 = 8m^3 \Rightarrow a = \sqrt[3]{8m^3} \Rightarrow a = 2m; b^3 = 1 \Rightarrow b = \sqrt[3]{1} \Rightarrow b = 1$, así

$\boxed{\textbf{R/:}\ 3m^2\,(2m+1)\left(4m^2 - 2m + 1\right)}$

2.3 Factorización por el método de inspección (Apoyo con calculadora)

Cuando un trinomio en general $px^2 + qx + r$ no corresponde al desarrollo de alguna fórmula notable su factorización podría desarrollarse fácilmente mediante el método de inspección, este método se basa en la siguiente relación dada para a, b, c y d números reales

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 - (ad + bc)x + bd$$

En el fondo, se están buscando números reales $p = ac$, $q = ad + bc$ y $r = bd$ tales que permitan factorizar al polinomio $px^2 + qx + r$ de la siguiente manera $px^2 + qx + r = (ax + b)(cx + d)$.

Un diagrama de lo anterior puede ayudar a entender un poco más el proceso, observe:

$$\begin{array}{ccccc} a & & b & \longrightarrow & bc \\ \cdot & \times & \cdot & & + \\ c & & d & \longrightarrow & ad \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ p & & r & & q \end{array}$$

Ejemplo: Factorización por inspección

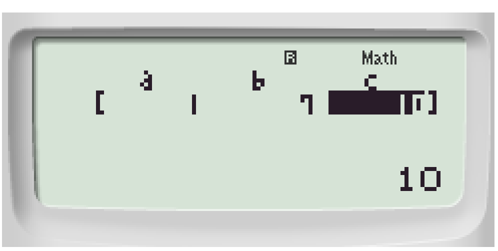
Factorice al máximo cada polinomio, simplifique si es posible.

a) $10 + x^2 + 7x$

Solución

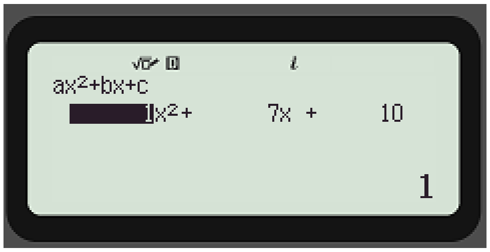
Acomodamos el polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$, observe

$x^2 + 7x + 10$, para nuestro polinomio tenemos que $a = 1$ (coeficiente numérico que acompaña a x^2), $b = 7$ (coeficiente numérico que acompaña a x) y $c = 10$ (término constante). usaremos esto con el apoyo de la calculadora:



Esta opción se activa con la secuencia de teclas, si el modelo de la calculadora es **fx-570ES PLUS** o modelos anteriores: $\boxed{\text{Mode (Menu)}}$, $\boxed{5}$, $\boxed{3}$

Si la calculadora es modelo **Classwiz**, la secuencia de teclas es: $\boxed{\text{Menu}}$, $\boxed{(-)}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$. Se visualiza de la siguiente manera:



En cualquier caso, se obtiene lo siguiente:

$x = -2; x = -5$ **esto no es la solución**, pues la calculadora no resuelve factorización, resuelve una ecuación cuadrática, por lo cuál se debe cambiar el signo al acomodar cada paréntesis (por obtener dos valores para x), observe:

$(x+2)(x+5)$, así:

$\boxed{\textbf{R/: } (x+2)(x+5)}$

b) $7y^2 - 35y + 28$

Solución

Primeramente debe obtenerse un factor común, pues este trinomio los tres términos tienen como factor común: 7, si no se realiza esto, y se procede en la calculadora, esta no omite el factor común, pues la calculadora **no resuelve factorización, solo ecuaciones**, nosotros lo usamos de apoyo, observe

$7\left(y^2 - 5y + 4\right)$, ahora tomamos $a = 1, b = -5, c = 4$, la calculadora trabaja en términos de x, nuestro trinomio en términos de y, ajustamos:

$y = 4; y = 1$, acomodando y no olvidar el factor común determinado inicialmente:

$\boxed{\textbf{R/: } 7(y-1)(y-4)}$

c) $3 + 5x - 12x^2$

Solución

En este caso (cualquier ejemplo similar) vamos a procurar que la variable de mayor exponente sea positiva, pues el negativo al trabajar con la calculadora, se omite, insistiendo que la calculadora no resuelve factorización, resuelve ecuaciones, observe:

$-\left(12x^2 - 5x - 3\right)$ ahora tomando $a = 12, b = -5, c = -3$, observe: $x = \dfrac{3}{4}; x = \dfrac{-1}{3}$, para poder acomodar los factores, el denominador debe multiplicar a la variable, al denominador se le cambia el signo, sin omitir el signo menos que se determino a factor común, así:

$\boxed{\textbf{R/: } -(4x-3)(3x+1)}$

d) $21n^4 + 27n^3 + 6n^2$

Solución

$3n^2\left(7n^2 + 9n + 2\right)$ Factor común: $3n^2$

Tomando $a = 7, b = 9, c = 2$

$\boxed{\textbf{R/: } 3n^2(n+1)(7n+2)}$

e) *(Opcional)* $-x^2 - 6x - 9$

Solución

En este caso, se saca el menos a factor común: $-\left(x^2 + 6x + 9\right)$, tomando $a = 1, b = 6, c = 9$, al utilizar únicamente la calculadora da como resultado como: $x = -3$, pero solo una vez, como estamos resolviendo una factorización, se coloca con la variable la constante cambiando el signo, y que solo "aparezca una vez" es que se repite el término, por eso coloca al cuadrado:

$\boxed{\textbf{R/: } -(x+3)^2}$

f) *(Opcional)* $6x^2 + 7x - 5$

Solución

Tomando: $a = 6, b = 7, c = -5$, así: $x = \dfrac{1}{2}; x = \dfrac{-5}{3}$:

$\boxed{\textbf{R/: } (3x+5)(2x-1)}$

2.4 Factorización por el método de división sintética

La *división sintética* es un método que nos permite factorizar polinomios dividiendo el polinomio original por una expresión adecuada de la forma $x \pm a$, donde $a \in \mathbb{R}$. Este método se debe aplicar única y exclusivamente cuando la agrupación **falla**, pues de lo contrario se gasta mucho tiempo.

Ejemplo: Factorización por división sintética

Factorice al máximo cada polinomio, simplifique si es posible.

a) $36 - 24x + x^5 - 23x^2 + 3x^4 - 9x^3$

Solución

Paso 1: Acomodar el polinomio respecto a la variable de mayor exponente al grado menor (que es la constante).
$x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 23x^2 + 24x + 36$

Paso 2: Buscamos los divisores del término constante, en nuestro ejercicio sería 36 y los divisores del coeficiente numérico de la variable de mayor exponente:

* $Div\ 36 : \pm 1, \pm, 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$
* $Div\ 1 : \pm 1$

Paso 3: Se dividen los términos de la constante por los divisores del coeficiente numérico de la variable de mayor exponente:

$$\frac{Div\ 36}{Div\ 1} = \pm 1, \pm, 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$$

Paso 4: Usando la calculadora, se determinan cuales de esos divisores, al sustituirlos por la variable x, da como resultado 0, en este caso se obtiene que los divisores son: $-3, 2$ y -1, en este caso se determinaron tres divisores, pues el polinomio es de grado 5, y vamos hacer tantas divisiones para llegar a un polinomio de grado 2, que se puede trabajar como los ejercicios anteriores, observemos:

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 3 & -9 & -23 & 24 & 36 \\
-3 & & -3 & 0 & 27 & -12 & -36 \\
\hline
 & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & -9 & 4 & 12 \\
2 & & 2 & 4 & -10 & -12 \\
\hline
 & 1 & 2 & -5 & -6 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

Ahora se acomoda un paréntesis por cada divisor usado, además de la variable acompañado por el divisor cambiando de signo al divisor, y un último paréntesis por el cociente de la división final, observe:

$(x+3)(x-2)(x+1)\left(x^2+x-6\right)$, el trinomio se realiza con inspección, con apoyo de la calculadora, así:

$(x+3)(x-2)(x+1)(x-2)(x+3)$, así:

$\boxed{\textbf{R/: } (x-2)^2(x+3)^2(x+1)}$

Nota: El orden en el que se usan los divisores, no influye en el resultado final.

b) $2x^4 - x^3 - 6x^2 + 39x - 18$

Solución

$Div\ 18: \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18;\quad Div\ 2: \pm1, \pm2$

$\frac{Div\ 18}{Div\ 2} = \pm1, \pm2, \pm3, \pm6, \pm9, \pm18, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{9}{2}$. En este ejercicio se necesitan dos divisores, para llegar llegar a un polinomio de grado 2, los divisores posibles son:

$x = -3, x = \dfrac{1}{2}$, como observación los divisores no necesariamente deben ser números enteros.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 2 & -1 & -6 & 39 & -18 \\ -3 & & -6 & 21 & -45 & 18 \\ \hline & 2 & -7 & 15 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -7 & 15 & -6 \\ \frac{1}{2} & & 1 & -3 & 6 \\ \hline & 2 & -6 & 12 & 0 \end{array}$$

Así: $(x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(2x^2-6x+12\right) = (x+3)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)2\left(x^2-3x+6\right)$

$\boxed{\textbf{R/: } (x+3)(2x-1)(x^2-3x+6)}$

c) *(Opcional)* $-15x^2 - 18x + 3x^4 - 8 - 7x^3$

Solución

$3x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 18x - 8$

$Div\, 8 : \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8; \quad Div\, 3 : \pm 1, \pm 3$

$\dfrac{Div\, 8}{Div\, 3} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \dfrac{1}{3}, \pm \dfrac{2}{3}, \pm \dfrac{4}{3}, \pm \dfrac{8}{3}$, los divisores a usar son: $x = 4, x = \dfrac{-2}{3}$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 3 & -7 & -15 & -18 & -8 \\ 4 & & 12 & 20 & 20 & 8 \\ \hline & 3 & 5 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 3 & 5 & 5 & 2 \\ -\frac{2}{3} & & -2 & -2 & -2 \\ \hline & 3 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$(x-4)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)\left(3x^2 + 3x + 3\right)$

$(x-4)\left(x+\dfrac{2}{3}\right)3\left(x^2 + x + 1\right)$

$\boxed{\textbf{R/:}\ (x-4)(3x+2)(x^2+x+1)}$

d) *(Opcional)* $x^5 - 6x^4 - 12x^3 + 82x^2 - 45x + 300$

$\boxed{\textbf{R/:}\ (x-5)^2(x^2+3)(x+4)}$

Solución

$$\begin{array}{c|cccccc} & 1 & -6 & -12 & 82 & -45 & 300 \\ 5 & & 5 & -5 & -85 & -15 & -300 \\ \hline & 1 & -1 & -17 & -3 & -60 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & -17 & -3 & -60 \\ 5 & & 5 & 20 & 15 & 60 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 4 & 3 & 12 \\ -4 & & -4 & 0 & -12 \\ \hline & 1 & 0 & 3 & 0 \end{array}$$

2.5 Práctica Complementaria

Factorice al máximo cada uno de los siguientes polinomios, utilice para ello el método que mejor se ajusta, simplifique si es necesario.

a) $16x^6 - x^2$ $\boxed{\textbf{R/: } x^2(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)}$

b) $p^6 - 1$ $\boxed{\textbf{R/: } (p-1)(p^2+p+1)(p+1)(p^2-p+1)}$

c) $9(x-1)^3 - (x-1)$ $\boxed{\textbf{R/: } (x-1)(3x-4)(3x-2)}$

d) $9y^3 - 6y^2 + y$ $\boxed{\textbf{R/: } y(3y-1)^2}$

e) $1 - 18x^2 + 81x^4$ $\boxed{\textbf{R/: } (1-3x)^2(1+3x)^2}$

f) $2x^3 - 6x^2 - 20x$ $\boxed{\textbf{R/: } 2x(x+2)(x-5)}$

g) $8x^4 - 6x^2 + 1$ $\boxed{\textbf{R/: } (2x-1)(2x+1)(2x^2-1)}$

h) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$ $\boxed{\textbf{R/: } (x+1)^2(x-2)(2x+3)}$

i) $3x + 5x^2 - 12x^3$ $\boxed{\textbf{R/: } -x(4x-3)(3x+1)}$

j) $(2a-1)^3 - 27a^3$ $\boxed{\textbf{R/: } -(a+1)(19a^2-7a+1)}$

k) $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 13x - 6$ $\boxed{\textbf{R/: } (x+1)^2(2x+3)(x-2)}$

l) $4x - 24x^2 - 3x^3 + 2x^4 + 48$ $\boxed{\textbf{R/: } (x-4)(x+2)^2(2x-3)}$

m) $-9 + x^4 - 8x^2 - 9x + x^3$ $\boxed{\textbf{R/: } (x-3)(x+3)(x^2+x+1)}$

n) $-x^6 + 7x^5 - 10x^4 - 20x^3 + 45x^2 - 27x + 54$ $\boxed{\textbf{R/: } -(2+x)(x^2+1)\,(x-3)^3}$

3 Operaciones con Expresiones Algebraicas Racionales

Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, si $Q(x) \neq 0$, la expresión $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, se llama **fracción algebraica racional**o **expresión algebraica racional**.

3.1 Simplificación de expresiones algebraicas racionales

Para simplificar una expresión algebraica racional (una expresión fraccionaria) se factoriza al máximo tanto el numerador como el denominador de la fracción original, haciendo uso de los métodos de factorización analizados en la semana anterior, por último se aplica la ley de cancelación de términos semejantes.

Nota: es importante recordar que la relación que guardan los factores del numerador y los del denominador, una vez factorizados, es de multiplicación, por lo que es posible aplicar la ley de cancelación de términos semejantes.

Ejemplo: Simplificación de expresiones

Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones algebraicas racionales.

a) $\dfrac{a^3 + 1}{a^4 - a^3 + a - 1}$

Solución

Paso 1: Factorizar de forma independiente numerador y denominador, los métodos de factorización puede coincidir pero no es condición necesaria.

- $a^3 + 1 = (a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$ esto por suma de cubos.
- $a^4 - a^3 + a - 1 = (a-1)(a+1)\left(a^2 - a + 1\right)$, este por división sintética

Paso 2: Sustituir las expresiones originales, por las expresiones factorizadas.

$$\frac{(a+1)\left(a^2 - a + 1\right)}{(a-1)(a+1)(a^2 - a + 1)}$$

Paso 3: Simplificar los términos del numerador y denominador, que estén separados únicamente por multiplicación y que se encuentre un término en el numerador y otro en el denominador:

$$\frac{\cancel{(a+1)}\cancel{\left(a^2 - a + 1\right)}}{(a-1)\cancel{(a+1)}\cancel{\left(a^2 - a + 1\right)}}$$

$\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{1}{a-1}}$

b) *(Opcional)* $\dfrac{x^3 - 6x^2}{x^2 - 12x + 36}$

Solución

Factorizar numerador y denominador:

- $x^3 - 6x^2 = x^2(x-6)$ por factor común.
- $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$ por inspección (apoyo de la calculadora)

Sustituir las expresiones que se factorizaron:

$$\frac{x^2(x-6)}{(x-6)^2}$$

$$\frac{x^2\cancel{(x-6)}}{\cancel{(x-6)^2}}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{x^2}{x-6}}$$

c) *(Opcional)* $\dfrac{1 - x^2}{x^2 + x - 2}$

Solución

Factorizar numerador y denominador:

- $1 - x^2 = -\left(x^2 - 1\right) = -(x-1)(x+1)$ por factor común.
- $x^2 + x - 2 = (x-1)(x-2)$ por inspección (apoyo de la calculadora)

Sustituir:

$$\frac{-(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}$$

Simplificamos:

$$\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x-2)}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{-(x+1)}{(x+2)}}$$

3.2 Multiplicación de expresiones algebraicas racionales

Para *multiplicar* expresiones algebraicas racionales proceda de la siguiente manera:

a) Factorice al máximo los numeradores y los denominadores de cada una de las fracciones involucradas, utilizando cualquier método de factorización estudiado la semana anterior.

b) Multiplique los numeradores y los denominadores de cada fracción entre sí.

c) Simplifique la fracción resultante, si es posible, aplicando la ley de cancelación de términos semejantes.

d) Efectué las operaciones resultantes.

La multiplicación de expresiones algebraicas racionales se puede expresar como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x) \cdot R(x)}{Q(x) \cdot T(x)}, \text{ con } Q(x), T(x) \neq 0$$

Ejemplo: Multiplicación de expresiones

Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

a) $\dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 2x - 8} \cdot \dfrac{x^2 - 16}{x^2 + 4x} \cdot \dfrac{x^2 - 6x}{x + 2}$

Solución

Paso 1: Factorizar al máximo numeradores y denominadores de cada fracción:

$x^2 - 3x - 10 = \left(x+2\right)\left(x-5\right)$; $x^2 - 2x - 8 = \left(x+2\right)\left(x-4\right)$

$x^2 - 16 = \left(x-4\right)\left(x+4\right)$; $x^2 + 4x = x\left(x+4\right)$

$x^2 - 6x = x\left(x-6\right)$

Paso 2: Sustituir los polinomios factorizados:

$$\frac{(x+2)(x-5)}{(x+2)(x-4)} \cdot \frac{(x-4)(x+4)}{x(x+4)} \cdot \frac{x(x-6)}{x+2}$$

Paso 3: Simplificar y multiplicar

$$\frac{\cancel{(x+2)}(x-5)}{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-4)}} \cdot \frac{\cancel{(x-4)}\cancel{(x+4)}}{\cancel{x}\cancel{(x+4)}} \cdot \frac{\cancel{x}(x-6)}{x+2}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{(x-5)(x-6)}{x+2}}$$

b) *(Opcional)* $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+8x+16}\cdot\dfrac{3x+12}{x-1}$

Solución

Factorización:

$x^2+2x-3=\left(x-1\right)\left(x+3\right)$; $x^2+8x+16=\left(x+4\right)^2$

$3x+12=3\left(x+4\right)$

$$\frac{(x-1)(x+3)}{(x+4)^2}\cdot\frac{3(x+4)}{x-1}$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{(x+4)^2}}\cdot\frac{3\cancel{(x+4)}}{\cancel{x-1}}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{3(x+3)}{(x+4)}}$$

3.3 División de expresiones algebraicas racionales

Para *dividir* expresiones algebraicas racionales proceda de la siguiente manera:

a) Factorice al máximo el numerador y el denominador de cada una de las expresiones racionales involucradas.

b) Convierta la división en una multiplicación, invirtiendo el numerador y el denominador sólo de la fracción que se encuentra a la derecha inmediata de la división. Tenga presente los signos de agrupación.

c) Proceda de la misma forma que en los pasos $b), c)$ y $d)$ de la multiplicación.

La división de expresiones algebraicas racionales se puede expresar como:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \div \frac{R(x)}{T(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot \frac{T(x)}{R(x)} = \frac{P(x) \cdot T(x)}{Q(x) \cdot R(x)}, \text{ con } Q(x), T(x), R(x) \neq 0$$

De una manera análoga se puede expresar en **fracción compuesta**, así:

$$\frac{\frac{P(x)}{Q(x)}}{\frac{R(x)}{T(x)}} = \frac{P(x) \cdot T(x)}{Q(x) \cdot R(x)} \text{ con } Q(x), T(x), R(x) \neq 0$$

Ejemplo: División de expresiones

Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

a) $\dfrac{y-4}{y^2-4} \div \dfrac{y^2-3y-4}{y^2+5y+6}$

Solución

Paso 1: Factorizar tanto numeradores como denominadores al máximo.

- $y^2 - 4 = (y-2)(y+2)$
- $y^2 - 3y - 4 = (y-4)(y+1)$
- $y^2 + 5y + 6 = (y+2)(y+3)$

Paso 2: Sustituir la respectiva factorización.

$$\frac{y-4}{(y-2)(y+2)} \div \frac{(y-4)(y+1)}{(y+2)(y+3)}$$

Paso 3: Convertimos la división en multiplicación, invirtiendo el numerador y denominador de la fracción que se encuentra a la derecha de la división.

$$\frac{y-4}{(y-2)(y+2)} \cdot \frac{(y+2)(y+3)}{(y-4)(y+1)}$$

Paso 4: Simplificar y multiplicar

$$\frac{\cancel{y-4}}{(y-2)\cancel{(y+2)}} \cdot \frac{\cancel{(y+2)}(y+3)}{\cancel{(y-4)}(y+1)}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{y+3}{(y-2)(y+1)}}$$

b) *(Opcional)* $\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-4} \div \dfrac{3x^2-x-2}{x^2-x-6} \cdot \dfrac{3x^2-4x-4}{2x^2-7x+3}$

Solución

En este ejercicio se debe respetar la prioridad de operaciones, con la división como prioridad, por se la primera operación que aparece de izquierda a derecha, primeramente factorizamos:

- $2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$
- $x^2-4=\left(x-2\right)\left(x+2\right)$
- $3x^2-x-2=(x-1)(3x+2)$
- $x^2-x-6=\left(x+2\right)\left(x-3\right)$
- $3x^2-4x-4=(x-2)(3x+2)$
- $2x^2-7x+3=(x-3)(2x-1)$

Sustituimos:

$$\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-2)(x+2)} \div \frac{(x-1)(3x+2)}{(x+2)(x-3)} \cdot \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-3)(2x-1)}$$

Invertimos **únicamente** la fracción que esta a la derecha de la división:

$$\frac{(x-1)(2x-1)}{(x-2)(x+2)} \cdot \frac{(x+2)(x-3)}{(x-1)(3x+2)} \cdot \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-3)(2x-1)}$$

Simplificamos

$$\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(2x-1)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} \cdot \frac{\cancel{(x+2)}\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(3x+2)}} \cdot \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(3x+2)}}{\cancel{(x-3)}\cancel{(2x-1)}}$$

$\boxed{\textbf{R/: } 1}$

c) *(Opcional)* $\dfrac{a^3+a}{a^2-a} \div \dfrac{a^2-a}{a^2-2a+1}$

Solución

$$\frac{a\left(a^2+1\right)}{a(a-1)} \div \frac{a(a-1)}{(a-1)^2} = \frac{\cancel{a}\left(a^2+1\right)}{\cancel{a}\cancel{(a-1)}} \cdot \frac{\cancel{(a-1)^2}}{a\cancel{(a-1)}}$$

$\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{a^2+1}{a}}$

3.4 Suma-resta de expresiones algebraicas racionales

Para sumar - restar expresiones algebraicas racionales proceda de la siguiente manera:

a) Factorice a máximo cada uno de los denominadores de las fracciones involucradas.

b) Determine el denominador común de todas las fracciones involucradas en la operación.

c) Efectúe el proceso de homogenización, es decir, se divide el denominador común por cada denominador y su resultado se multiplica por cada numerador.

d) Se efectúan las operaciones en el numerador de la nueva fracción resultante al terminar el proceso de homogenización.

e) Se simplifica si es posible.

Ejemplo: Suma-resta de expresiones

Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

a) $\dfrac{x+1}{x^2-x-20} - \dfrac{x+4}{x^2-4x-5} + \dfrac{x+5}{x^2+5x+4}$

Solución

Paso 1: Factorizar **<u>únicamente</u>** los denominadores de cada fracción.

$$\frac{x+1}{(x-5)(x+4)} - \frac{x+4}{(x-5)(x+1)} + \frac{x+5}{(x+4)(x+1)}$$

Paso 2: Determinar el denominador común.

Denominador común: $(x-5)(x+4)(x+1)$

Paso 3: Efectuar el proceso de homogenización, dividiendo el denominador común por cada denominador, y dicho resultado multiplicarlo por cada numerador.

$$\frac{(x+1)\cdot(x+1) - (x+4)\cdot(x+4) + (x+5)\cdot(x-5)}{(x-5)(x+4)(x+1)}$$

Considere:

* $(x+1)\cdot(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
* $(x+4)\cdot(x+4) = (x+4)^2 = x^2 + 8x + 16$
* $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

Paso 4: Efectúe las operaciones pertinentes en el numerador, **NO** se efectúa ninguna operación en el denominador.

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - \left(x^2 + 8x + 16\right) + x^2 - 25}{(x-5)(x+4)(x+1)}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 - 8x - 16 + x^2 - 25}{(x-5)(x+4)(x+1)}$$

$$\frac{x^2 - 6x - 40}{(x-5)(x+4)(x+1)}$$

Paso 5: Factorizar el numerador, y simplificar al máximo si es posible.

$$\frac{(x-10)(x+4)}{(x-5)(x+4)(x+1)}$$

$$\frac{(x-10)\cancel{(x+4)}}{(x-5)\cancel{(x+4)}(x+1)}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } \frac{x-10}{(x-5)(x+1)}}$$

b) $\dfrac{2x+6}{x^2-6x+9} + \dfrac{5x}{x^2-9} - \dfrac{7}{x-3}$

Solución

Paso 1: Factorizar **<u>únicamente</u>** los denominadores.

$$\frac{2x+6}{(x-3)^2} + \frac{5x}{(x-3)(x+3)} - \frac{7}{x-3}$$

Paso 2: Determinar el denominador común: $(x-3)^2(x+3)$. En el caso del **<u>denominador común</u>**, cuando hay potencias, se escoge **la potencia de mayor exponente**.

Paso 3: Efectuar el proceso de homogenización, dividiendo el denominador común por cada denominador, y dicho resultado multiplicarlo por cada numerador.

$$\frac{(2x+6)\cdot(x+3) + 5x\cdot(x-3) - 7\cdot(x-3)(x+3)}{(x-3)^2(x+3)}$$

Considere:

- $(2x+6)(x+3) = 2x^2+6x+6x+18 = 2x^2+12x+18$
- $5x \cdot (x-3) = 5x^2 - 15x$
- $-7 \cdot (x-3)(x+3) = -7\left(x^2-9\right) = -7x^2+63$

Paso 4: Efectúe las operaciones **únicamente** del numerador.

$$\frac{2x^2+12x+18+5x^2-15x-7x^2+63}{(x-3)^2(x+3)}$$

$$\frac{-3x+81}{(x-3)^2(x+3)}$$

Paso 5: Factorizar, en este caso no es posible simplificar, pero si se debe factorizar al máximo.

$$\boxed{\textbf{R/:}\ \frac{-3(x-27)}{(x-3)^2(x+3)}}$$

c) $\dfrac{x^2-3x+9}{x^3+27} \div \dfrac{x-2}{x^3+3x^2} - \dfrac{2x^2}{x^2-4} \to$ Recordar prioridad de operaciones

Solución

Se debe efectuar primeramente la división por prioridad de péraciones, en donde se factorizarán tanto numerador y denominador, de las fracciones que abarcan la división. La fracción ubicada a la derecha de la resta, se le puede factorizar **únicamente** el denominador.

$$\frac{x^2-3x+9}{(x+3)(x^2-3x+9)} \div \frac{x-2}{x^2(x+3)} - \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{\cancel{x^2-3x+9}}{\cancel{(x+3)}\cancel{\left(x^2-3x+9\right)}} \cdot \frac{x^2\cancel{(x+3)}}{x-2} - \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x^2}{x-2} - \frac{2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x^2 \cdot (x+2) - 2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x^3+2x^2-2x^2}{(x-2)(x+2)}$$

$$\boxed{\textbf{R/:}\ \frac{x^3}{(x-2)(x+2)}}$$

d) $\left(\dfrac{-x}{x+1}+\dfrac{2x}{1-x^2}\right)\cdot\dfrac{-3x^2+5x-2}{x} \rightarrow$ Signos de agrupación primero

Solución

Pir signos de agrupación, se resuelve inicialmente el paréntesis redondo.

$$\left(\frac{-x}{x+1}-\frac{2x}{x^2-1}\right)\cdot\frac{-\left(3x^2-5x+2\right)}{x}$$

$$\left(\frac{-x}{x+1}-\frac{2x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{-(x-1)(3x-2)}{x}$$

$$\left(\frac{-x(x-1)-2x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{-(x-1)(3x-2)}{x}$$

$$\left(\frac{-x^2+x-2x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{-(x-1)(3x-2)}{x}$$

$$\left(\frac{-x^2-x}{(x-1)(x+1)}\right)\cdot\frac{-(x-1)(3x-2)}{x}$$

$$\left(\frac{-\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}}\right)\cdot\frac{-\cancel{(x-1)}(3x-2)}{\cancel{x}}$$

$\boxed{\textbf{R/: } 3x-2}$

e) $\left(\dfrac{5}{x+4}+x-2\right)\left(x+3-\dfrac{5}{x-1}\right)$

Solución

$$\left(\frac{5}{x+4}+\frac{x-2}{1}\right)\left(\frac{x+3}{1}-\frac{5}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{5+(x-2)(x+4)}{x+4}\right)\left(\frac{(x+3)(x-1)-5}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{5+x^2+4x-2x-8}{x+4}\right)\left(\frac{x^2-x+3x-3-5}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{x^2+2x-3}{x+4}\right)\left(\frac{x^2+2x-8}{x-1}\right)$$

$$\left(\frac{(x-1)(x+3)}{x+4}\right)\left(\frac{(x-2)(x+4)}{x-1}\right)=\left(\frac{\cancel{(x-1)}(x+3)}{\cancel{x+4}}\right)\left(\frac{(x-2)\cancel{(x+4)}}{\cancel{x-1}}\right)$$

$\boxed{\textbf{R/: } (x-2)(x+3)}$

e) *(Opcional)* $\dfrac{1}{x^2-1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

Solución

$$\frac{1}{(x-1)\,(x+1)} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\frac{x+1-2(x-1)}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\frac{x+1-2x+2}{(x+1)^2(x-1)}$$

$$\boxed{\mathbf{R/:}\ \frac{3-x}{(x-1)(x+1)^2}}$$

f) *(Opcional)* $\left(x - \dfrac{2}{x-1}\right) \div \left(-2 + \dfrac{12}{x+4}\right)$

Solución

$$\left(\frac{x}{1} - \frac{2}{x-1}\right) \div \left(\frac{-2}{1} + \frac{12}{x+4}\right)$$

$$\left(\frac{x(x-1)-2}{x-1}\right) \div \left(\frac{-2(x+4)+12}{x+4}\right)$$

$$\left(\frac{x^2-x-2}{x-1}\right) \div \left(\frac{-2x-8+12}{x+4}\right)$$

$$\left(\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}\right) \div \left(\frac{-2x+4}{x+4}\right)$$

$$\left(\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}\right) \div \left(\frac{-2\,(x-2)}{x+4}\right)$$

$$\left(\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{x-1}\right) \cdot \left(\frac{x+4}{-2\cancel{(x-2)}}\right)$$

$$\boxed{\mathbf{R/:}\ \frac{-(x-1)(x+4)}{2}}$$

3.5 Práctica Complementaria

1. Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones algebraicas racionales.

   a) $\dfrac{15x^3 - 7x^2 - 2x}{2x - 3x^2}$ $\boxed{\textbf{R/: } -5x - 1}$

   b) $\dfrac{y^2 - 6y + 9}{5y^2 - 17y + 6}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{y-3}{5y-2}}$

   c) $\dfrac{n + 1 - n^3 - n^2}{n^3 - n - 2n^2 + 2}$ $\boxed{\textbf{R/: } -\dfrac{1+n}{n-2}}$

2. Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

   a) $\dfrac{9y^2 - 4}{10y^3 + 15y} \cdot \dfrac{40y^2 - 10y^3}{y^2 - 2y + 7} \div \dfrac{3y^2 - 14y + 8}{2y^2 + 3}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{-2y(3y^2 - 4)}{(3y-2)(y^2 - 2y + 7)}}$

   b) $\left(\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{x-1}{x+1}\right) \div \left(\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{x-1}{x+1}\right)$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{x^2+1}{2x}}$

   c) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^4 - 81} \cdot \dfrac{3x - 15}{x^2 - 4} \div \dfrac{9x^3 - 1125}{x^2 + x - 6}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{x-1}{3(x-3)(x^2+9)(x^2+5x+25)}}$

   d) $\dfrac{x^2}{x^2 - 8x + 15} + \dfrac{12}{x-5} - \dfrac{8}{x-3}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{(x+2)^2}{(x-3)(x-5)}}$

   e) $\dfrac{5}{x+1} + \dfrac{3}{x-1} + \dfrac{10}{x^2-1}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{8}{x-1}}$

   f) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x-10} - \dfrac{5x+11}{x^2+4x-5} + \dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{(2x+15)(x+1)}{(x+5)(x-1)(x-2)}}$

   g) $\left[\dfrac{b^3 + 4b^2 - 5b}{b^2 - 2b + 1} \div \dfrac{b^2 + b - 2}{b^3 + 8}\right] \cdot \dfrac{b-1}{b^3 - 2b^2 + 4b}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{b+5}{b-1}}$

   h) $\dfrac{x^2 - 3x + 9}{x^3 + 27} \div \dfrac{x-2}{x^3 + 3x^2} \cdot \dfrac{2x^2}{x^2 - 4}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{2x^4}{(x-2)^2(x+2)}}$

   i) $\dfrac{x^2 + x - 2}{x^4 - 81} \cdot \dfrac{3x - 15}{x^2 - 4} \div \dfrac{9x^3 - 1125}{x^2 + x - 6}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{a^3}{a^3+1} + \dfrac{a+3}{a^2-a+1} - \dfrac{a-1}{a+1}}$

4 Racionalización de numeradores y denominadores

El proceso de racionalizar una expresión algebraica racional con radicales consiste en multiplicar el numerador y el denominador de la fracción original por una expresión adecuada, a la que se le llamará *factor racionalizador*.

El factor racionalizador permite reescribir la expresión algebraica de una forma simplificada, por lo que esta tema será de gran utilidad en el curso Cálculo Diferencial e Integral I, específicamente cuando necesite trabajar la indeterminación de algunos límites.

La selección del factor racionalizador depende de la expresión a racionalizar, a continuación se exponen diferentes casos:

a) **Caso** 1**:** El numerador o el denominador de la expresión algebraica racional contiene dos términos en uno de los cuales (o en los dos) hay una raíz cuadrada, en este caso el factor racionalizador resulta ser el conjugado de dicha expresión.

Ejemplo: Racionalización Caso 1

Racionalice el numerador y/o el denominador de cada expresión algebraica racional según sea el caso, simplifique de ser necesario.

a) $\dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}$

Solución

$$\frac{\sqrt{x+5}-3}{x^2-16}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}}_{Factor\quad racionalizador}$$

El factor racionalizador toma $a=\sqrt{x+5}, b=3$

$$=\frac{\left(\sqrt{(x+5)}\right)^2-3^2}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

Aplicamos diferencia de cuadrados

$$=\frac{x+5-9}{(x-4)(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

Resolvemos las potencias y restamos términos semejantes

$$=\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}$$

Simplificamos

$$\boxed{=\frac{1}{(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}}$$

b) $\dfrac{\sqrt{x+5}-2}{3-\sqrt{8-x}}$

Solución

$$\frac{\sqrt{x+5}-2}{3-\sqrt{8-x}}\cdot\frac{\sqrt{x+5}+2}{\sqrt{x+5}+2}\cdot\frac{3+\sqrt{8-x}}{3+\sqrt{8-x}}$$ se racionaliza de manera doble

$$=\frac{\left[\left(\sqrt{x+5}\right)^2-2^2\right](3+\sqrt{8-x})}{\left[3^2-(\sqrt{8-x})^2\right](\sqrt{x+5}+2)}$$ Se aplica diferencia de cuadrados

$$=\frac{[x+5-4](3+\sqrt{8-x})}{[9-(8-x)](\sqrt{x+5}+2)}$$ Se resuelven las potencias, cuidado con el menos del denominador

$$=\frac{(x+1)(3+\sqrt{8-x})}{(9-8+x)(\sqrt{x+5}+2)}$$ Cambio de signos, resta de términos semejantes.

$$=\frac{\cancel{(x+1)}(3+\sqrt{8-x})}{\cancel{(x+1)}(\sqrt{x+5}+2)}$$ Simplificamos

$$\boxed{=\frac{3+\sqrt{8-x}}{\sqrt{x+5}+2}}$$

c) $\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{3-\sqrt{x+9}}$

Solución

$$\frac{\sqrt{x+4}-2}{3-\sqrt{x+9}}\cdot\frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}\cdot\frac{3+\sqrt{x+9}}{3+\sqrt{x+9}}$$ se racionaliza de manera doble

$$\frac{\left[\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2^2\right]\cdot\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{\left[3^2-\left(\sqrt{x+9}\right)^2\right]\cdot\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$ Se aplica diferencia de cuadrados

$$\frac{(x+4-4)\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{(9-(x+9))\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$

$$\frac{(x+4-4)\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{(9-x-9)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$ Cambio de signos

$$\frac{\cancel{x}\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{-\cancel{x}\left(\sqrt{x+4}+2\right)}$$ Suma y resta de términos semejantes

$$\boxed{\textbf{R/: }\frac{-\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{\sqrt{x+4}+2}}$$

d) *(Opcional)* $\dfrac{3x^2 - 3x}{\sqrt{2x-1} - x}$

Solución

$$\frac{3x\left(x-1\right)}{\sqrt{2x-1}-x} \cdot \frac{\sqrt{2x-1}+x}{\sqrt{2x-1}+x}$$

$$\frac{3x\left(x-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 - x^2}$$

$$\frac{3x\left(x-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{2x-1-x^2}$$

$$\frac{3x\left(x-1\right)\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{-\left(x^2-2x+1\right)}$$

$$\frac{3x\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{-\cancel{(x-1)}^2}$$

$$\boxed{\textbf{R/:}\ \frac{-3x\left(\sqrt{2x-1}+x\right)}{x-1}}$$

e) *(Opcional)* $\dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$

Solución

Debemos racionalizar tanto numerador como denominador, para el numerador multiplicamos por $x^2 + \sqrt{x}$, y el denominador por $\sqrt{x} + 1$, veamos:

$$\frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \cdot \underbrace{\frac{x^2 + \sqrt{x}}{x^2 + \sqrt{x}}}_{Factor\ \ racionalizador} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}}_{Factor\ \ racionalizador}$$

$$= \frac{(x^4 - x)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(x^2 + \sqrt{x})}$$ Se multiplica, se usa diferencia de cuadrados

$$= \frac{x\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{\cancel{(x-1)}(x^2 + \sqrt{x})}$$ Se factoriza el término del numerador, y se simplifica

$$\boxed{= \frac{x(x^2 + x + 1)(\sqrt{x} + 1)}{x^2 + \sqrt{x}}}$$

b) **Caso 2:** El numerador o el denominador de la expresión algebraica racional contiene dos términos en uno de los cuales (o en los dos) hay una raíz cúbica, en este caso el factor racionalizador resulta ser el término que complete las fórmulas notables de suma o diferencia de cubos, según sea el caso.

Ejemplo: Racionalización Caso 2

Racionalice el numerador y el denominador de cada expresión algebraica racional según sea el caso, simplifique de ser necesario.

a) $\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

Solución

$$\frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}\cdot\underbrace{\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}}_{Factor\quad racionalizador}$$

Racionalizamos con diferencia de cubos, tome $a=\sqrt[3]{x}, b=2$

$$=\frac{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-2^3}$$

Se multiplican las fracciones, aplicamos diferencia de cubos

$$=\frac{\cancel{(x-8)}\left(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4\right)}{\cancel{x-8}}$$

Simplificamos

$$\boxed{=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x}}{x^2-4x+4}$

Solución

$$=\frac{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{x}}{x^2-4x+4}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{2^3}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

Racionalizamos con diferencia de cubos, $a=\sqrt[3]{2}, b=\sqrt[3]{x}$

$$=\frac{\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\right]}{(x-2)^2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

Se aplica diferencia de cubos, se factoriza

$$=\frac{2-x}{(x-2)^2\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

Se resuelven las potencias.

$$=\frac{-\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)^2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

Cambio de signo en el numerador, simplifique

$$\boxed{=\frac{-1}{(x-2)\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}}$$

c) *(Opcional)* $\dfrac{2m^2 + 250m}{\sqrt[3]{m} + 5}$

Solución

$$\frac{2m\,(m+125)}{\sqrt[3]{m}+5} \cdot \frac{\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 25}{\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 25}$$

$$\frac{2m\,(m+125)\left(\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 25\right)}{\left(\sqrt[3]{m}\right)^3 + 5^3}$$

$$\frac{2m\cancel{(m+125)}\left(\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 25\right)}{\cancel{m+125}}$$

$$\boxed{\mathbf{R/:}\ 2m\left(\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt{m} + 25\right)}$$

d) *(Opcional)* $\dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

Solución

$$\frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}$$

$$\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 1^3}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)}$$

$$\frac{x+1-1}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)}$$

$$\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{R/:}\ \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x+1} + 1}}$$

4.1 Práctica Complementaria

Racionalice el numerador y el denominador de cada expresión algebraica según sea el caso, simplifique si es posible.

a) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}}$ $\boxed{\textbf{R/: } (x-2)\sqrt{x+2}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}}$

c) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{x^4-1}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{-1}{(x+1)(x^2+1)\left(1+\sqrt{x}\right)}}$

d) $\dfrac{x-4}{3-\sqrt{2x+1}}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{-(3+\sqrt{2x+1})}{2}}$

e) $\dfrac{x-\sqrt{2x-1}}{x^2-x}$ $\boxed{\textbf{R/: } \dfrac{x-1}{x(x+\sqrt{2x-1})}}$

5 Ecuaciones en una incógnita

Definición: Ecuación

Una ecuación es una igualdad entre dos expresiones algebraicas en una o más variables llamadas incógnitas.

Definición: Soluciones de una ecuación

Resolver una ecuación significa determinar el valor(es) real(es) que asume la incógnita tal que la proposición resulte verdadera; estos valores reales se denominan **soluciones** de la ecuación.

Definición: Conjunto solución

El mayor conjunto S que posee todas las soluciones de una ecuación se llama conjunto solución de esa ecuación.

5.1 Ecuaciones lineales o de primer grado

Definición: Ecuación Lineal

Una ecuación de primer grado con una incógnita es una ecuación de la forma $ax + b = 0$, donde a y b son números reales y x es variable.

Ejemplo: Ecuaciones Lineales

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones lineales.

a) $\dfrac{3x+1}{2} = 3 - \dfrac{x-1}{3}$

Solución

$$\frac{3x+1}{2} = 3 - \frac{x-1}{3}$$ Separe las fracciones como $\frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c}$

$$\frac{3x}{2} + \frac{1}{2} = 3 - \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$$ Agrupe variables de un lado, constante del otro

$$\frac{3x}{2} + \frac{x}{3} = 3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}$$ Lo que estaba sumando pasó a restar, y viceversa.

$$\frac{11x}{6} = \frac{17}{6}$$ Suma y resta de términos semejantes

$$x = \frac{17}{6} \div \frac{11}{6}$$

$$x = \frac{17}{11}$$

$$\boxed{\therefore S = \left\{ \frac{17}{11} \right\}}$$

b) $3x - 5 = 2x - (4 - x) - 1$

Solución

$3x - 5 = 2x - 4 + x - 1$ Cambio de signo, con el menos delante del paréntesis.

$3x - 2x - x = -4 - 1 + 5$ Términos constantes de un lado, variables del otro.

$0 = 0$ Suma de términos semejantes

Cuando se obtiene una igualdad verdadera, se dice que el conjunto solución son los números reales, es decir:

$\boxed{S = \mathbb{R}}$

c) $12x - 5 = 2x - (4 - 10x)$

Solución

$12x - 5 = 2x - 4 + 10x$ Cambio de signos

$12x - 2x - 10x = -4 + 5$ Términos constantes de un lado, variables del otro.

$0 = 1$ **¡Falso!**

Cuando se obtiene una igualdad falsa, se dice que el conjunto solución es conjunto vacío, es decir:

$\boxed{S = \varnothing}$

d) *(Opcional)* $2x + (x - 6) = -1 + 3x$

Solución

$2x + x - 6 = -1 + 3x$

$2x + x - x = -1 + 6$

$0 = 5$ **¡Falso!**

$\boxed{\textbf{R/: } S = \varnothing}$

e) *(Opcional)* $\dfrac{5x+7}{3} = \dfrac{6x+5}{4}$

Solución

$$\frac{5x+7}{3} = \frac{6x+5}{4}$$

$$\frac{5x}{3} + \frac{7}{3} = \frac{6x}{4} + \frac{5}{4}$$

$$\frac{5x}{3} - \frac{6x}{4} = \frac{5}{4} - \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{6}x = \frac{-13}{12}$$

$$x = \frac{-13}{12} \div \frac{1}{6}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{-\frac{13}{2}\right\}}$$

5.2 Ecuaciones cuadráticas o de segundo grado

Una ecuación de segundo grado con un incógnita es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$, y x es variable.

Soluciones de una ecuación cuadrática

Las soluciones de una ecuación cuadrática $ax^2+bx+c = 0$, están determinadas por la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\triangle}}{2a}$$

donde el discriminante está dado por $\triangle = b^2 - 4ac$. Además se tiene que:

1) Si $\triangle > 0$, existen dos soluciones reales y distintas.
2) Si $\triangle = 0$, existen dos soluciones reales iguales, esto se reduce a decir que existe una única solución real.
3) Si $\triangle < 0$, no existe solución real.

Nota: Si el trinomio cuadrático estándar involucrado en la ecuación cuadrática es factorizable (por fórmula notable o inspección), resulta más sencillo obtener sus soluciones aplicando el siguiente teorema:

Teorema: Raíces de una ecuación

Si el producto de dos o más expresiones algebraicas es cero, necesariamente al menos uno de sus factores es cero, es decir:

$$a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ó } b = 0$$

Ejemplo: Ecuaciones Cuadráticas

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas.

a) $6x^2 - 13x + 5 = 0$

Solución

Esta ecuación tiene la forma estándar, así se sabe que: $a = 6, b = -13, c = 5$, se puede calcular el discriminante: $\triangle = b^2 - 4ac$, así:

$\triangle = (-13)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 5 = 49 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas, usando la fórmula general:

$$x = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{- - 13 + \sqrt{49}}{2 \cdot 6} \qquad x = \frac{- - 13 - \sqrt{49}}{2 \cdot 6}$$

$$x = \frac{5}{3} \qquad x = \frac{1}{2}$$

Este proceso se puede simplificar con el apoyo de la calculadora, con la secuencia de teclas:

- Si el modelo de la calculadora es **fx-570ES PLUS** o modelos anteriores: $\boxed{\text{Mode (Menu)}}$, $\boxed{5}$, $\boxed{3}$.
- Si la calculadora es modelo **Classwiz**, la secuencia de teclas es: $\boxed{\text{Menu}}$, $\boxed{(-)}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$.

$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right\}}$

b) $(3x - 2)^2 - (4x - 3)(4x + 3) = x - 5$

Solución

Se desarrollan las fórmulas notables y se iguala a 0, para lograr la forma $ax^2 + bx + c = 0$

$$9x^2 - 12x + 4 - \left(16x^2 - 9\right) - x + 5 = 0$$

$$9x^2 - 12x + 4 - 16x^2 + 9 - x + 5 = 0$$

$$-7x^2 - 13x + 18 = 0$$

Donde: $a = -7, b = -13, c = 18$. El discriminante $\triangle = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4 \cdot -7 \cdot 18 = 673 > 0$ la ecuación tiene 2 soluciones reales distintas.

$$x = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a} \qquad x = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2 \cdot a}$$

$$x = \frac{- - 13 + \sqrt{673}}{2 \cdot -7} \qquad x = \frac{- - 13 - \sqrt{673}}{2 \cdot -7}$$

$$x = \frac{-13 + \sqrt{673}}{14} \qquad x = \frac{-13 - \sqrt{673}}{14}$$

$$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{-\frac{13 + \sqrt{673}}{14}, \frac{\sqrt{673} - 13}{14}\right\}}$$

c) $3x(x-2) - (x-6) = 23(x-3)$

Solución

$3x^2 - 6x - x + 6 = 23x - 69$

$3x^2 - 6x - x - 23x + 6 + 69 = 0$

$3x^2 - 30x + 75 = 0$ donde $a = 3, b = -30, c = 75$ y el discriminante es: $\triangle = 0$, la ecuación solo tiene una única solución real, así:

$$\boxed{\textbf{R/: } S = \{5\}}$$

d) $(5x-2)^2 - (3x+1)^2 - x^2 - 60 = 0$

Solución

$25x^2 - 20x + 4 - \left(9x^2 + 6x + 1\right) - x^2 - 60 = 0$

$25x^2 - 20x + 4 - 9x^2 - 6x - 1 - x^2 - 60 = 0$

$15x^2 - 26x - 57 = 0$ donde $a = 15, b = -26, c = -57$, discriminante: $\triangle = 4096 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

$$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{3, \frac{-19}{15}\right\}}$$

e) *(Opcional)* $x^2 + 3x + 24 = 2x + 8$

Solución

$x^2 + 3x + 24 - 2x - 8 = 0$

$x^2 + x + 16 = 0$, donde $a = 1, b = 1, c = 16$, discriminante es: $\triangle = -63 < 0$, la ecuación no posee solución real.

$\boxed{\textbf{R/: } S = \{\}}$

f) *(Opcional)* $3x(x - 4) - 5 = -10(2x - 3)$

Solución

$3x^2 - 12x - 5 = -20x + 30$

$3x^2 - 12x - 5 + 20x - 30 = 0$

$3x^2 + 8x - 35 = 0$, donde $a = 3, b = 8, c = -35$, discriminante: $\triangle = 484 > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{-5, \frac{7}{3}\right\}}$

5.3 Ecuaciones polinomiales

Una ecuación polinomial es una ecuación de la forma

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

donde $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ son números reales y x_i son variables.

Nota: Para resolver ecuaciones polinomiales, siga los siguientes pasos:

a) Efectúe las operaciones necesarias para llevar la ecuación a su forma estándar.

b) Factorice el polinomio resultante y aplique el teorema de las *raíces de una ecuación* para determinar las soluciones. Se resolverán únicamente casos en los cuales el polinomio sea factorizable mediante alguno de los métodos estudiados en los lineamientos de la semana 2.

Ejemplo: Ecuaciones Polinómicas

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones polinomiales.

a) $16 - 36x - x^3 = 36x^2 - 3x^4$

Solución

$3x^4 - x^3 - 36x^2 - 36x + 16 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -1 & -36 & -36 & 16 \\ -2 & & -6 & 14 & 44 & -16 \\ \hline & 3 & -7 & -22 & 8 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -7 & -22 & 8 \\ \frac{1}{3} & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 3 & -6 & -24 & 0 \end{array}$$

$(x + 2)\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(3x^2 - 6x - 24\right) = 0$

$x + 2 = 0$ $\qquad x - \frac{1}{3} = 0$ $\qquad 3x^2 - 6x - 24 = 0$

$x = -2$ $\qquad x = \frac{1}{3}$ $\qquad x = 4, x = -2$

$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 4\right\}}$

b) $x^5 - x^4 - 4x^3 - 4x^2 - 5x - 3 = 0$

Solución

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -4 & -4 & -5 & -3 \\ -1 & & -1 & 2 & 2 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -2 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & & 3 & 3 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & & -1 & 0 & -1 \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x+1)^2(x-3)(x^2+1) = 0$

$(x+1)^2 = 0$ $\qquad x - 3 = 0$ $\qquad x^2 + 1 = 0$

$x = -1$ $\qquad x = 3$ $\qquad S = \varnothing$

$\boxed{\textbf{R/: } S = \{-1, 3\}}$

c) *(Opcional)* $51x^2 + 4x^4 = 57x + 20x^3 - 18$

Solución

$4x^4 - 20x^3 + 51x^2 - 57x + 18 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & -20 & 51 & -57 & 18 \\ \frac{3}{2} & & 6 & -21 & 45 & -18 \\ \hline & 4 & -14 & 30 & -12 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -14 & 30 & -12 \\ \frac{1}{2} & & 2 & -6 & 12 \\ \hline & 4 & -12 & 24 & 0 \end{array}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(4x^2 - 12x + 24\right) = 0$$

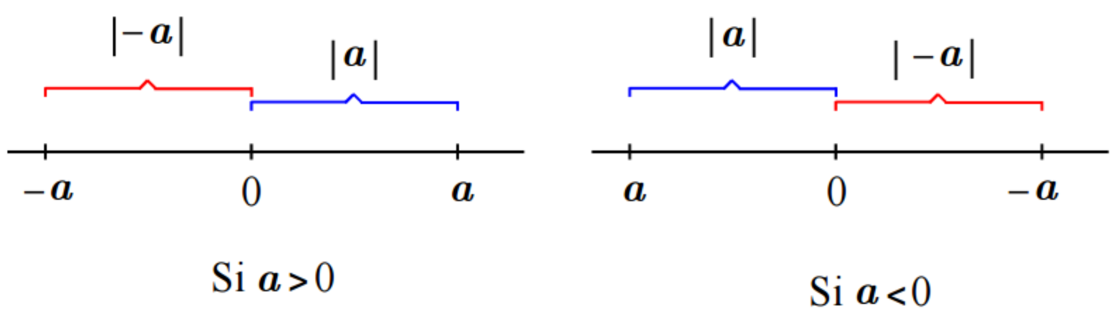
$$\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right\}}$$

5.4 Definición de valor absoluto

El valor absoluto de un número real x, denotada por $|x|$, se define de los números reales sobre los números reales positivos. Formalmente, el valor absoluto o módulo de todo número real x, está definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & ; \text{si } x \geq 0 \\ -x & ; \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Nota: Cualquier número a tiene su representación en la recta real. El valor absoluto de un número representa la distancia del punto a al origen. Observe en el dibujo siguiente que la distancia del a al origen es a unidades, igualmente la distancia del punto $-a$ al origen es a.



Ejemplo: Aplicar definición de valor absoluto

Aplique la definición de valor absoluto a cada una de las siguientes expresiones.

a) $|x+5|$

$$|x+5| = \begin{cases} x+5 & ; \text{si } x+5 \geq 0 \\ -(x+5) & ; \text{si } x+5 < 0 \end{cases}$$

b) $|x-7|$

$$|x-7| = \begin{cases} x-7 & ; \text{si } x-7 \geq 0 \\ -(x-7) & ; \text{si } x-7 < 0 \end{cases}$$

c) $|-2x+3|$

$$|-2x+3| = \begin{cases} -2x+3 & ; \text{si } -2x+3 \geq 0 \\ -(-2x+3) & ; \text{si } -2x+3 < 0 \end{cases}$$

5.5 Práctica Complementaria

Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $4 - 2v = -3(4v - 3) + 5v$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{1\}}$

b) $2x + (x - 6) = -1 + 3x$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{\}}$

c) $25(x + 2)^2 = (x - 7)^2 - 81$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{-11}{4}, -2\right\}}$

d) $(x + 3)(x - 1) = (4x - 1)(2x + 3)$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{-8}{7}, 0\right\}}$

e) $196(20 - x) = (64 - 2x)^2$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{4, 11\}}$

f) $(x + 7)(x + 3) = 21$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{-10, 0\}}$

g) $(x - 2)^2 = -4x + 2x^2$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{-2, 2\}}$

h) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{-2, -1, 1, 2\}}$

i) $25(x + 2)^2 = (x - 7) - 81$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \varnothing}$

j) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{-1, 2\}}$

k) $12 - 20x + 19x^2 - 6x^3 - 2x^4 + x^5 = 0$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{-3, 2\}}$

l) $8 + 4x - 26x^2 - x^3 + 6x^4 = 0$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{-2, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, 2\right\}}$

m) $\dfrac{x+1}{x+2} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{2x+1}{x+1}$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \{0. - 4\}}$

n) $\dfrac{2x^2}{x^2 + 2x + 1} - \dfrac{x}{x+1} = 1$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{-1}{3}\right\}}$

ñ) $\dfrac{6x+1}{x^2 - 4} - \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{x}{x-2}$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{-1}{2}, 3\right\}}$

o) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{x-2}{x+1} = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ $\boxed{\textbf{R/: } S = \left\{\frac{3}{4}\right\}}$

5.6 Práctica Complementaria

1. Determine el conjunto solución de cada inecuación.

   a) $-2(2x+1)+4x-3>(x-1)-3(x+1)$

   b) $27-81x+90x^2-46x^3+11x^4-x^5\leq 0$

   c) $36+36x-7x^2-8x^3-x^4\geq 0$

   d) $\dfrac{-x^3(x+1)^2(x-3)^5}{(x+1)(2-x)^3}<0$

6 Práctica General I Parcial

6.1 Operaciones con polinomios

1. Efectúe las operaciones indicadas y exprese el resultado como un polinomio reducido.

   a) $(x^4-5x^2-3x)-\dfrac{3}{2}(3x^3-8x^2-6)-(5x-1)^2$ R/ $8+7x-18x^2-\dfrac{9x^3}{2}+x^4$

   b) $(x^4-2x^2-6x-1)+2(x^3-6x^2+4)-(2x-2)^3$ R/ $15-30x+10x^2-6x^3+x^4$

   c) $\dfrac{x}{2}(x^2+8x-6)-(3x+1)^2+3(x^3-8)$ R/ $-25-9x-5x^2+\dfrac{7x^3}{2}$

   d) $(x^2-2)(4-5x)-2(4x^3-5x^2+6)-5(-3x^2-5x)$ R/ $-20+35x+29x^2-13x^3$

   e) $x^2(x-7)-2(x^3+2x-5)+3(3x^2+2)$ R/ $16-4x+2x^2-x^3$

   f) $(2x-3)^3+2x^2(x+6)-3(x+6)(7-5x)$ R/ $-153+123x-9x^2+10x^3$

   g) $(2a^2-3a)^3-\dfrac{5}{2}(6a^4-3a^2)-5(2a^2-3a)(6a^4-3a^2)$ R/ $\dfrac{15a^2}{2}-72a^3+69a^4+54a^5-52a^6$

   h) $5x^2(2x-3)-(8x^2-4x)\div(2x)+(5-2x)^3$ R/ $127-154x+45x^2+2x^3$

   i) $(12m-8m^3)\div(4m)-3m^2(m+8)+(6m-5)^3$ R/ $-122+450m-566m^2+213m^3$

   j) $4(a^2+2)-5a^4(a^2-5a)+(8a^7-6a^5)\div(2a)$ R/ $8+4a^2-3a^4+25a^5-a^6$

2. Considere los siguientes polinomios

$$A(x)=x^6-5x^3+6\ ;\ \ B(x)=x^2-1\ ;\ \ C(x)=20x^{10}-60x^5$$

   De acuerdo con los polinomios anteriores determine el polinomio reducido que se obtiene al efectuar las operaciones

$$3A(x)-2[B(x)]^3-\frac{1}{10}C(x)\div(x^5)$$

   R/ $26-6x^2-15x^3+6x^4-2x^5+x^6$

3. Considere los siguientes polinomios

$$P(x) = x + 1 \;\; ; \;\; Q(x) = 3x^5 - 4x^3 + 1 \;\; ; \;\; R(x) = x^2 - 3$$

De acuerdo con los polinomios anteriores determine el polinomio reducido que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[P(x)]^3 - 2Q(x) + 3(x+1)[R(x)]^2$$

R/ $26 + 30x - 15x^2 - 9x^3 + 3x^4 - 3x^5$

4. Considere los siguientes polinomios

$$M(x) = 2x^6 - 4x^4 + 2x - 1 \;\; ; \;\; N(x) = x^3 + 1 \;\; ; \;\; P(x) = x + 2$$

De acuerdo con los polinomios anteriores determine el polinomio reducido que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[N(x)]^3 + 2(x^2+1)[P(x)]^2 - M(x) \cdot N(x)$$

R/ $10 + 6x + 10x^2 + 12x^3 + 4x^4 + x^6 + 4x^7 - x^9$

5. Considere los siguientes polinomios

$$R(x) = x^2 + 1 \;\; ; \;\; S(x) = x^3 - 4x + 1 \;\; ; \;\; T(x) = x^3 - 3$$

De acuerdo con los polinomios anteriores determine el polinomio reducido que se obtiene al efectuar las operaciones

$$[T(x)]^3 - 2S(x) + 3(1-2x)[R(x)]^2$$

R/ $-26 + 2x + 6x^2 + 13x^3 + 3x^4 - 6x^5 - 9x^6 + x^9$

6.2 División Sintética y Algebraica

6. Determine el cociente $C(x)$ y el residuo $R(x)$ que se obtiene al efectuar cada una de las siguientes divisiones de polinomios.

   a) $(2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2) \div (x^3 - 2x^2 + x - 3)$ R/ $C(x) = 2x^2$, $R(x) = 2 - 5x + 7x^2$
   b) $(3x^4 - 3x^2 + x - 5) \div (x^2 + 3)$ R/ $C(x) = -12 + 3x^2$, $R(x) = 31 + x$
   c) $(-2x^3 + 4x^2 + x) \div (2x + 1)$ R/ $C(x) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{5x}{2} - x^2$, $R(x) = \dfrac{3}{4}$
   d) $(8x^5 + 1) \div (2x^3 - 1)$ R/ $C(x) = 4x^2$, $R(x) = 4x^2 + 1$
   e) $(x^3 - 3x^2 + 6x - 1) \div (x^2 - 4x + 5)$ R/ $C(x) = 1 + x$, $R(x) = -6 + 5x$

f) $(3x^4 - 2x^3 + 4x - 7) \div (x + 3)$ R/ $C(x) = -95 + 33x - 11x^2 + 3x^3$, $R(x) = 278$

g) $(3x^4 + 4x^3 - 5x^2 + 3x + 1) \div (x + 2)$ R/ $C(x) = 5 - x - 2x^2 + 3x^3$, $R(x) = -9$

h) $(-2x^4 + 3x^2 - 5) \div (x - 3)$ R/ $C(x) = -45 - 15x - 6x^2 - 2x^3$, $R(x) = -140$

i) $(x^5 + 4x^4 - 5x + 1) \div (x + 1)$ R/ $C(x) = -8 + 3x - 3x^2 + 3x^3 + x^4$, $R(x) = 9$

j) $(x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5) \div (x - 5)$ R/ $C(x) = 73 + 14x + 2x^2 + x^3$, $R(x) = 360$

6.3 Factorización de polinomios

7. Factorice al máximo cada una de los siguientes polinomios, utilice para ello el método que mejor se ajusta.

a) $(2 + 5a)^2 - 3a(2 + 5a)$ R/ $2(2 + 5a)(a + 1)$

b) $4x^7 - 6x^6 - 4x^3 + 6x^2$ R/ $2x^2(-1 + x)(1 + x)(-3 + 2x)(1 + x^2)$

c) $(x^2 - 7x + 1)^2 - (x^2 + 5x - 3)^2$ R/ $-8(-1 + 3x)(-1 - x + x^2)$

d) $2x^4 - 5x^3 - 11x^2 + 20x + 12$ R/ $(-3 + x)(-2 + x)(2 + x)(1 + 2x)$

e) $(a^3 - 125) - (a - 5)^3 - 5a^3(a - 5)$ R/ $-5a(-5 + a)(-3 + a^2)$

f) $(x - 1)^3 - 8x^3$ R/ $-(1 + x)(1 - 4x + 7x^2)$

g) $4x^4 - 13x^2 + 9$ R/ $(-1 + x)(1 + x)(-3 + 2x)(3 + 2x)$

h) $-10x^3 + 5x^2 - 5(2x - 1)^2$ R/ $-5(-1 + 2x)(-1 + 2x + x^2)$

i) $x^4 + x^3 - 8x^2 - 9x - 9$ R/ $(-3 + x)(3 + x)(1 + x + x^2)$

j) $2x^4 + 4x^2 - 2x^3 - 16 - 8x$ R/ $2(-2 + x)(1 + x)(4 + x^2)$

6.4 Fracciones algebraicas racionales

8. Simplifique al máximo cada una de las siguientes expresiones algebraicas racionales.

a) $\dfrac{4a^2 - 1}{8a^3 - 1}$ R/ $\dfrac{1 + 2a}{1 + 2a + 4a^2}$

b) $\dfrac{b - 3}{(5b - 14)b - 3}$ R/ $\dfrac{1}{1 + 5b}$

c) $\dfrac{n - 3}{(3n - 8)n - 3}$ R/ $\dfrac{1}{1 + 3n}$

d) $\dfrac{a + 2}{(a + 1)(a + 2) + 3a + 6}$ R/ $\dfrac{1}{4 + a}$

e) $\dfrac{y - 2}{y(2y - 4) + (y - 4) + 2}$ R/ $\dfrac{1}{1 + 2y}$

9. Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

a) $\dfrac{a^2+1}{3a-6} \div \left(\dfrac{a^3+a}{6a-12} \cdot \dfrac{4a+8}{a-3}\right)$ R/ $\dfrac{-3+a}{2a(2+a)}$

b) $\dfrac{x^2-x-12}{x^2-49} \cdot \dfrac{x^2-x-56}{x^2+x-20} \div \dfrac{x^2-5x-24}{x+5}$ R/$\dfrac{1}{x-7}$

c) $\dfrac{x^4-27x}{x^2+7x-30} \cdot \dfrac{x^2+20x+100}{x^3+3x^2+9x} \div \dfrac{x^2-100}{x-3}$ R/ $\dfrac{x-3}{x-10}$

d) $\dfrac{a+1}{a-1} \cdot \dfrac{3a-3}{2a+2} \div \dfrac{a^2+a}{a^2+a-2}$ R/ $\dfrac{3(a-1)(a+2)}{2a(a+1)}$

e) $\dfrac{a^2-8a+7}{a^2-11a+30} \cdot \dfrac{a^2-36}{a^2-1} \div \dfrac{a^2-a-42}{a^2-4a-5}$ R/ 1

10. Efectúe las operaciones indicadas en cada caso y simplifique si es posible.

a) $\dfrac{2}{x-3} + \dfrac{3}{x+2} - \dfrac{4x-7}{x^2-x-6}$ R/ $\dfrac{1}{x-3}$

b) $\dfrac{a^3}{a^3+1} + \dfrac{a+3}{a^2-a+1} - \dfrac{a-1}{a+1}$ R/ $\dfrac{3a^2+2a+4}{a^3+1}$

c) $\dfrac{a}{3a+6} - \dfrac{1}{6a+12} + \dfrac{a+12}{12a+24}$ R/ $\dfrac{5}{12}$

d) $\dfrac{a+3}{a^2-1} + \dfrac{a-1}{2a+2} + \dfrac{a-4}{4a-4}$ R/ $\dfrac{3a^2-3a+10}{4(a^2-1)}$

e) $\dfrac{3x+2}{x^2+3x-10} - \dfrac{5x+1}{x^2+4x-5} + \dfrac{4x-1}{x^2-3x+2}$ R/ $\dfrac{2x^2+27x-5}{x^3+2x^2-13x+10}$

f) $\dfrac{2x+1}{12x+8} - \dfrac{x^2}{6x^2+x-2} + \dfrac{2x}{16x-8}$ R/ $\dfrac{3x^2+2x-1}{4(6x^2+x-2)}$

6.5 Racionalización

11. Racionalice el numerador o el denominador de cada expresión algebraica racional, simplifique de ser necesario.

a) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$ R/ $\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$

b) $\dfrac{x-7}{\sqrt{x-4}-\sqrt{3}}$ R/ $\sqrt{x-4}+\sqrt{3}$

c) $\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$ R/ $\dfrac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{\sqrt{2x+1}+3}$

d) $\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$ R/ $\dfrac{\sqrt{6x^2+3}-3x}{-3(x-1)}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ R/ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$ R/ $\dfrac{-1}{\sqrt[3]{(10-x)^2}+2\sqrt[3]{10-x}+4}$

g) $\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$ R/ $\dfrac{\sqrt[3]{x^2}+4\sqrt[3]{x}+16}{\sqrt{x}+8}$

h) $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$ R/ $\dfrac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

6.6 Ecuaciones Lineales, Cuadráticas y Polinomiales

12. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $2(x^2-4x)-2x^2+12=0$ R/ $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

b) $2x^2-(x-1)^2=5x$ R/ $S=\left\{\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$

c) $x(x^2-1)+x^2(x^2-1)-3(x^2-1)=0$ R/ $S=\left\{-1,1,\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$

d) $3a^4-7a^3+5a^2-7a+2=0$ R/ $S=\left\{\dfrac{1}{3},2\right\}$

e) $(x^2-1)^2+17=9x^2$ R/ $S=\{-3,3,\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

f) $x(x^2-8)(x^2-7x+11)=x(x^2-7x+11)$ R/ $S=\left\{-3,0,3,\dfrac{7\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$

g) $3x^4+7x^3-33x^2=10-33x$ R/ $S=\left\{-5,\dfrac{2}{3},1\right\}$

h) $16-36x-x^3=36x^2-3x^4$ R/ $S=\left\{-2,\dfrac{1}{3},4\right\}$

i) $\dfrac{m+3}{2}+\dfrac{m-1}{2}=\dfrac{m-2}{3}+3$ R/ $S=\{2\}$

j) $\dfrac{5(x-1)^2}{4}+\dfrac{x}{2}=25$ R/ $S=\left\{\dfrac{4\pm\sqrt{491}}{5}\right\}$

k) $\dfrac{1}{10}(7v-54)+\dfrac{9}{2}=\dfrac{1}{2}(27-v)$ R/ $S=\{12\}$

l) $4x^3-8x^2+5x-1=0$ R/ $S=\left\{\dfrac{1}{2},1\right\}$

m) $x^4-2x^3-7x^2-2x-8=0$ R/ $S=\{-2,4\}$

n) $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ R/ $S = \{1\}$

ñ) $6x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$ R/ $S = \left\{-2, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

o) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$ R/ $S = \left\{\frac{-26}{3}, 0\right\}$

p) $(4x-1)(2x+3) = (x+3)(x-1)$ R/ $S = \left\{\frac{-8}{7}, 0\right\}$

q) $(x+1)^2 - 5x = 2x^2 + 1$ R/ $S = \{-3, 0\}$

13. Determine el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones.

a) $2(x^2 - 4x) - 2x^2 + 12 = 0$ R/ $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$

b) $2x^2 - (x-1)^2 = 5x$ R/ $S = \left\{\frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$

c) $x(x^2-1) + x^2(x^2-1) - 3(x^2-1) = 0$ R/ $S = \left\{-1, 1, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$

d) $3a^4 - 7a^3 + 5a^2 - 7a + 2 = 0$ R/ $S = \left\{\frac{1}{3}, 2\right\}$

e) $(x^2-1)^2 + 17 = 9x^2$ R/ $S = \{-3, 3, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

f) $x(x^2-8)(x^2-7x+11) = x(x^2-7x+11)$ R/ $S = \left\{-3, 0, 3, \frac{7 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

g) $3x^4 + 7x^3 - 33x^2 = 10 - 33x$ R/ $S = \left\{-5, \frac{2}{3}, 1\right\}$

h) $16 - 36x - x^3 = 36x^2 - 3x^4$ R/ $S = \left\{-2, \frac{1}{3}, 4\right\}$

i) $\frac{5(x-1)^2}{4} + \frac{x}{2} = 25$ R/ $S = \left\{\frac{4 \pm \sqrt{491}}{5}\right\}$

j) $4x^3 - 8x^2 + 5x - 1 = 0$ R/ $S = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

k) $x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x - 8 = 0$ R/ $S = \{-2, 4\}$

l) $x^5 + x^3 - x^2 - 1 = 0$ R/ $S = \{1\}$

m) $6x^4 + 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$ R/ $S = \left\{-2, \frac{-1}{2}, \frac{2}{3}, 1\right\}$

n) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$ R/ $S = \left\{\frac{-26}{3}, 0\right\}$

ñ) $(4x-1)(2x+3) = (x+3)(x-1)$ R/ $S = \left\{\frac{-8}{7}, 0\right\}$

o) $(x+1)^2 - 5x = 2x^2 + 1$ R/ $S = \{-3, 0\}$

p) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ R/ $S = \{-3, -1, 1, 3\}$

q) $8x^6 + 15x^3 - 2 = 0$ R/ $S = \left\{-\sqrt[3]{2}, \frac{1}{2}\right\}$

r) $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$ R/ $S = \{-4, -3, 3, 4\}$

s) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$ R/ $S = \left\{1, \sqrt[3]{6}\right\}$

t) $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ R/ $S = \left\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$

PRÁCTICA I PARCIAL[1]

1. Dados los polinomios $P(x) = 5 + 3x^3 - 4x^2 - 5x + x^4; Q(x) = x^2 - 2$ ¿Cuál es el resultado de la operación $P(x) \div Q(x)$?

   (a) $1 - x$

   (b) $x^2 + 3x - 2$

   (c) $1 + x$

   (d) $-x^2 - 3x + 2$

   R/: c

2. ¿Cuál es la factorización completa del polinomio $(3a + 5)^2 - 49a^2$?

   (a) $5\,(4a - 5)\,(2a - 1)$

   (b) $(5 + 4a)\,(2a - 1)$

   (c) $(5 - 4a)\,(10a+)$

   (d) $-5\,(4a - 5)\,(2a + 1)$

   R/: d

3. ¿Cuál es la expresión totalmente simplificada después de racionalizar la expresión $\dfrac{x - \sqrt{2x-1}}{2x-2}$?

   (a) $\dfrac{x - 1}{2\left(x + \sqrt{2x - 1}\right)}$

   (b) $\dfrac{1 - x}{a\left(x - \sqrt{2x - 1}\right)}$

   (c) $\dfrac{x + 1}{2\left(x - \sqrt{2x - 1}\right)}$

   (d) $\dfrac{x - 1}{2\left(x - \sqrt{2x - 1}\right)}$

   R/: a

[1] Ejercicios elaborados por Prof. Edwin Villalobos Martínez.

4. Considere la siguiente proposición que relaciona una expresión algebraica con su simplificación al máximo.

$$\frac{a+1}{a-1}\cdot\frac{3a-3}{2a+2}\div\frac{a^2+a}{a^2+a-2}=\frac{3\,(1-a)\,(a+2)}{2a\,(a-1)}$$

Indique si es Falso o Verdadero. $\boxed{\textbf{R/: } \text{Falso}}$

5. ¿Cuál es uno de los factores al realizar la factorización completa del polinomio $-9+x^4-9x+x^3-8x^2$?

(a) $-x-3$

(b) $-x+3$

(c) $1+x^2+x$

(d) $1-x$

$\boxed{\textbf{R/: } c}$

6. ¿Cuál es una solución de la ecuación $(x-2)^2=-4x+2x^2$?

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{-1}{2}$

(c) 3

(d) -2

$\boxed{\textbf{R/: } -2}$

7. Considere la siguiente proposición que relaciona una expresión algebraica con su simplificación al máximo.

$$\frac{a^3}{a^3+1}+\frac{a-3}{a^2-a+1}-\frac{a-1}{a+1}=\frac{3a^2+2a+4}{(a-1)\,(a^2-a+1)}$$

Indique si es Falso o Verdadero. $\boxed{\textbf{R/: } \text{Falso}}$