17 华东师范大学 2024 年数学分析试题真题及解答

（考试时间：2023 年 12 月 24 日上午 8:30-11:30）

考试形式：闭卷 考试时间：180 分钟 满分：150 分

习题解答

第 1 题 (10 分)

题目： 计算曲面 $z = e^{x^2-y^2} + x^2$ 与曲面 $z = e^{x^2-y^2} - y^2 + 1$ 所围成的封闭区域的体积。

解题思路： 首先确定两曲面的交线，然后利用二重积分计算体积。

详细解答:

设两曲面分别为:
- $z_1 = e^{x^2-y^2} + x^2$
- $z_2 = e^{x^2-y^2} - y^2 + 1$

要确定封闭区域，需要找到两曲面的交线。令 $z_1 = z_2$：

$$e^{x^2-y^2} + x^2 = e^{x^2-y^2} - y^2 + 1 \tag{1}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2}$$

这是一个单位圆。在这个圆内部，我们需要判断哪个曲面在上方。

比较 $z_1 - z_2 = x^2 + y^2 - 1$：
- 当 $x^2 + y^2 < 1$ 时，$z_1 < z_2$，即 z_2 在上方
- 当 $x^2 + y^2 > 1$ 时，$z_1 > z_2$，即 z_1 在上方

因此封闭区域的体积为:

$$V = \int\int_{x^2+y^2\le 1} (z_2 - z_1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\int_{x^2+y^2\le 1} (1 - x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3}$$

转换为极坐标：$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1 - r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{4}$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \tag{6}$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

答案： $V = \frac{\pi}{2}$

—

第 2 题 (10 分)

题目： 设 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}$ 上以 2π 为周期的连续函数，以 a_n, b_n 为其傅里叶级数的系数，求 $F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t$ 的傅里叶级数（用 a_n, b_n 表示）。

解题思路： 利用傅里叶级数的卷积性质和帕塞瓦尔等式。

详细解答:

设 $f(x)$ 的傅里叶级数为:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)) \tag{8}$$

其中:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

对于 $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t$，我们利用变量替换 $u=x+t$:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(x+t-x)f(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}f(t)f(u)\,\mathrm{d}u \tag{10}$$

由于 f 是周期函数，积分区间可以改为任意长度为 2π 的区间:

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t \tag{11}$$

现在计算 $F(x)$ 的傅里叶系数。

对于常数项:

$$A_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

利用富比尼定理和周期性:

$$A_0=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t \tag{13}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\,\mathrm{d}u=\pi a_0\cdot\pi a_0=\pi a_0^2 \tag{14}$$

对于 $\cos(nx)$ 系数:

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \tag{15}$$

通过类似计算可得:

$$A_n=\pi(a_n^2+b_n^2),\quad B_n=0 \tag{16}$$

答案: $F(x)=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\cos(nx)$

—

第 3 题 (15 分)

题目: 设 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a(-\infty<a<+\infty)$。

(1) 判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 是否存在?

(2) 若 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$ 或 $\{a_n\}$ 单调递增，判断 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 是否存在?

详细解答:

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n$ 不一定存在。

反例：设 $a_n = (-1)^n$

则 $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \begin{cases} -1 \text{ if } n \text{ 为奇数} \\ 0 \text{ if } n \text{ 为偶数} \end{cases}$

所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$，条件满足。

但 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在，因为 a_n 在 -1 和 1 之间振荡。

(2) 在附加条件下，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

情况 1：$\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$

设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，则 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a$。

由 Stolz-Cesàro 定理：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{S_n - S_{n-1}}{n - (n-1)} = \lim_{n\to\infty} a_n \tag{17}$$

设 $\varepsilon > 0$，由于 $\lim_{n\to\infty}(a_n - a_{n-1}) = 0$，存在 N_1 使得当 $n > N_1$ 时：

$$|a_n - a_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{18}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a$，存在 N_2 使得当 $n > N_2$ 时：

$$|\frac{S_n}{n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{19}$$

对于充分大的 n，利用平均值的性质可以证明 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

情况 2：$\{a_n\}$ 单调递增

设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$，$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a$。

由于 $\{a_n\}$ 单调递增，$a_n \leq a_m$ 当 $n \leq m$。

假设 $\limsup a_n = L > a$，则存在子列 $a_{n_k} \to L$。对于充分大的 k，在区间 $[n_k, 2n_k]$ 中，由单调性：

$$S_{2n_k} - S_{n_k} \geq n_k a_{n_k} \tag{20}$$

这与 $\frac{S_n}{n} \to a$ 矛盾。类似可证 $\liminf a_n \geq a$。

因此 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

答案：(1) 不一定存在，反例：$a_n = (-1)^n$ (2) 存在，且等于 a

—

第 4 题 (15 分)

题目： 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的导数，$f(0) = 0$ 或 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0$，判断不等式 $\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$ 是否成立。

解题思路： 这是 Poincaré 不等式的特殊情况，可用分部积分证明。

详细解答：

情况 1：$f(0) = 0$

由于 $f(0) = 0$，对任意 $x \in [0,1]$：

$$f(x)=\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{21}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$f^2(x)=\left(\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \le \left(\int_0^x 1^2\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\right)=x\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{22}$$

因此:

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 x\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \tag{23}$$

交换积分次序:

$$\int_0^1 x\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (f'(t))^2\int_t^1 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t \tag{24}$$

$$=\int_0^1 (f'(t))^2\left[\frac{x^2}{2}\right]_t^1\mathrm{d}t=\int_0^1 (f'(t))^2\frac{1-t^2}{2}\,\mathrm{d}t \tag{25}$$

$$\le \frac{1}{2}\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t<\int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t \tag{26}$$

情况 2: $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$

设 $g(x)=f(x)-f(0)$，则 $g(0)=0$ 且:

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-f(0)=-f(0) \tag{27}$$

但由条件 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，所以 $f(0)=0$，即 $g(x)=f(x)$。

这归结为情况 1。

严格证明:

使用分部积分。设 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F(0)=0$，$F'(x)=f(x)$。

由于 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$，所以 $F(1)=0$。

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)F'(x)\,\mathrm{d}x \tag{28}$$

分部积分:

$$=[f(x)F(x)]_0^1-\int_0^1 f'(x)F(x)\,\mathrm{d}x=0-\int_0^1 f'(x)F(x)\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式:

$$|\int_0^1 f'(x)F(x)\,\mathrm{d}x|\le\left(\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{30}$$

再由 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 和 $F(0)=F(1)=0$，利用 Poincaré 不等式可得：

$$\int_0^1 F^2(x)\,\mathrm{d}x \le \int_0^1 \left(F'(x)\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \tag{31}$$

结合上述估计可得所求不等式。

答案： 不等式成立

—

第 5 题 (15 分)

题目： 讨论 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}r}(r>0)$ 的敛散性。

解题思路： 分奇偶项讨论，利用交错级数判别法和比值判别法。

详细解答：

将级数按奇偶项分组：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+(-1)^{n-1}r} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1+r} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2k-r} \tag{32}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1+r} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-r} \tag{33}$$

当 $r \neq 2k$ 对所有正整数 k 时：

分析各项的渐近行为：
- 奇数项：$a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1+r} \sim \frac{1}{2k}$ 当 $k \to \infty$
- 偶数项：$a_{2k} = -\frac{1}{2k-r} \sim -\frac{1}{2k}$ 当 $k \to \infty$

考虑部分和：

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{2k-1+r} - \frac{1}{2k-r}\right] \tag{34}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{[(2k-r)-(2k-1+r)]}{[(2k-1+r)(2k-r)]} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-1-2r}{[(2k-1+r)(2k-r)]} \tag{35}$$

当 $r>0$ 且 $r \neq 2k$ 时，分母 $(2k-1+r)(2k-r)>0$ 对充分大的 k 成立。

情况分析：

1. 当 $0<r<2$ 时： 对所有 $k \ge 1$，$(2k-1+r)>0$ 且 $(2k-r)>0$（当 $k \ge 1$）

   级数表现为：

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2k-1+r} - \frac{1}{2k-r}\right] \tag{36}$$

   由于 $\frac{1}{2k-1+r} < \frac{1}{2k-r}$，每一项都是负数。 利用积分判别法或比较判别法，可证明级数收敛。

2. 当 $r \ge 2$ 时： 需要特别注意 $2k-r$ 可能为零或负数的项。

   - 若 $r=2m$（偶数），则当 $k=m$ 时，$2k-r=0$，级数有奇点
   - 若 r 不是偶整数，则对充分大的 k，分母恒为正

结论:

通过 Dirichlet 判别法分析，设:
- $b_n = \frac{1}{n+(-1)^{n-1}r}$
- $a_n = (-1)^{n-1}$

$\sum a_n$ 的部分和有界，且当 $r > 0$ 且 r 不是偶整数时，b_n 单调趋于零。

答案:
- 当 $r > 0$ 且 r 不是偶整数时，级数条件收敛
- 当 r 是偶整数时，级数发散（存在零分母项）

—

第 6 题 (20 分)

题目: (1) 证明: $\left\{u_{n(x)}\right\} = \left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right\}$ 在 $x \in [0,1]$ 上一致收敛; (2) 证明: $\left\{v_{n(x)}\right\} = \left\{\frac{1}{e^x+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\right\}$ 在 $x \in [0,1]$ 上一致收敛; (3) 计算 $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\frac{x}{e^x+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$。

详细解答:

(1) 证明 $u_{n(x)} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 e^x

对于 $x \in [0,1]$，有:

$$\ln u_{n(x)} = n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \tag{37}$$

使用泰勒展开 $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - ...$:

$$\ln u_{n(x)} = n\left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + O\left(\frac{x^3}{n^3}\right)\right] = x - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{x^3}{n^2}\right) \tag{38}$$

因此:

$$u_{n(x)} = e^{x-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{x^3}{n^2}\right)} = e^x \cdot e^{-\frac{x^2}{2n}+O\left(\frac{x^3}{n^2}\right)} \tag{39}$$

$$= e^x\left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{x^3}{n^2}\right) + O\left(\frac{x^4}{n^2}\right)\right] = e^x\left[1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{40}$$

所以:

$$|u_{n(x)} - e^x| = e^x\ |1 - \frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right) - 1| \leq e^x\left[\frac{x^2}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \tag{41}$$

对于 $x \in [0,1]$:

$$|u_{n(x)} - e^x| \leq e\left[\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{42}$$

因此 $u_{n(x)}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛到 e^x。

(2) 证明 $v_{n(x)} = \frac{1}{e^x+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 一致收敛

由 (1) 知 $u_{n(x)}$ 一致收敛到 e^x，且在 $[0,1]$ 上:
- $e^x \geq 1 > 0$

- $u_{n(x)} = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \geq 1 > 0$
- $u_{n(x)} \to e^x$ 一致

因此 $e^x + u_{n(x)} \geq 2 > 0$，分母远离零。

由于 $u_{n(x)} \to e^x$ 一致，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 N 使得当 $n > N$ 时：

$$|u_{n(x)} - e^x| < \varepsilon \text{ 对所有 } x \in [0,1] \tag{43}$$

这意味着：

$$|v_{n(x)} - \frac{1}{2e^x}| = |\frac{1}{e^x + u_{n(x)}} - \frac{1}{2e^x}| \tag{44}$$

$$= |\left(2e^x - e^x - u_{n(x)}\right)\Big|\Big|\left(e^x + u_{n(x)}\right)(2e^x)| = |e^x - u_{n(x)}\Big|\Big|\left(e^x + u_{n(x)}\right)(2e^x)| \tag{45}$$

由于分母有正的下界，且分子一致趋于零，所以 $v_{n(x)}$ 一致收敛到 $\frac{1}{2e^x}$。

(3) 计算极限

由 (2) 的一致收敛性和积分的连续性：

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\frac{x}{e^x + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \int_0^1 \frac{1}{2e^x}\,\mathrm{d}x \tag{46}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{-x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[-e^{-x}]_0^1 = \frac{1}{2}\left(-e^{-1} + 1\right) = \frac{1 - e^{-1}}{2} \tag{47}$$

答案： (1) 证明完成 (2) 证明完成 (3) $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \mathrm{d}\frac{x}{e^x + \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1-e^{-1}}{2}$

—

第 7 题 (25 分)

题目： 判断关于周期函数的四个命题的正误。

详细解答：

(1) 若 f 是处处不连续的周期函数，则 f 必有最小正周期。

错误。

反例： 构造函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$：

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ if } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \tag{48}$$

这个函数以任意正有理数为周期（因为有理数集在有理数平移下不变），因此是周期函数。

但 f 处处不连续：对任意点 x_0，无论 x_0 是有理数还是无理数，在其任意小邻域内都同时存在有理数和无理数，所以函数值在 0 和 1 之间跳跃。

由于有理数集稠密，f 有无穷多个周期，且这些周期可以任意小（对任意 $\varepsilon > 0$，存在有理数 $0 < r < \varepsilon$ 使得 $f(x + r) = f(x)$），因此没有最小正周期。

(2) 若 f 是处处不连续的周期函数，则 f 没有最小正周期。

错误。

反例： 考虑函数：

$$f(x)=\begin{cases}1 \text{ if } x\in\left[0,\frac{1}{2}\right)+2\mathbb{Z}\\ 0 \text{ if } x\in\left[\frac{1}{2},1\right)+2\mathbb{Z}\\ \frac{1}{2} \text{ if } x\in\left[1,\frac{3}{2}\right)+2\mathbb{Z}\\ -1 \text{ if } x\in\left[\frac{3}{2},2\right)+2\mathbb{Z}\end{cases} \tag{49}$$

这个函数以 2 为最小正周期，但在每个整数点和半整数点处都不连续。

实际上可以构造在每个点都不连续但有最小正周期的函数。

(3) 若 f 是周期函数但没有最小正周期，则 f 必有一列趋于 0 的周期。

正确。

证明： 设 P 为 f 的所有正周期构成的集合。由于 f 没有最小正周期，对任意 $p\in P$，存在 $q\in P$ 使得 $0<q<p$。

这意味着 $\inf P=0$。因此存在序列 $\{p_n\}\subset P$ 使得 $p_n\to 0$。

关键观察：如果 p,q 都是周期，则 $|p-q|$ 也是周期（当 $p\neq q$ 时）。

设 $\varepsilon>0$，取 $p\in P$ 使得 $p<\varepsilon$。由于不存在最小正周期，存在 $q\in P,q<p$。继续这个过程，我们得到一个递减的周期序列趋于 0。

(4) 若 f 是连续的周期函数，则 f 必有最小正周期。

错误。

反例： 常函数 $f(x)=c$（常数）。

任意正数都是常函数的周期，因此没有最小正周期。

更一般地，如果 f 是连续周期函数且其周期集在 $(0,+\infty)$ 中稠密，则 f 必为常函数，从而没有最小正周期。

答案： (1) 错误，反例：Dirichlet 函数的变形 (2) 错误，可构造反例 (3) 正确 (4) 错误，反例：常函数

—

第 8 题 (20 分)

题目： 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上有连续的导数，且 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$。

详细解答：

(1) $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 未必存在的例子

例子： $f(x)=A+\frac{\sin(x)}{x}$

显然 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=A$。

但 $f'(x)=\frac{\cos(x)}{x}-\frac{\sin(x)}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 不存在，因为 $\frac{\cos(x)}{x}$ 项使得 $f'(x)$ 振荡，虽然振荡幅度趋于 0，但振荡频率不变。

更具体地，$f'(x)$ 在 $x=2k\pi$ 附近约为 $\frac{1}{2k\pi}$，在 $x=(2k+1)\pi$ 附近约为 $-\frac{1}{(2k+1)\pi}$，所以极限不存在。

(2) 若 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)$ 存在，求其值

设 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=L$。

由于 $f'(x) \to L$，对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $M > a$ 使得当 $x > M$ 时：

$$|f'(x) - L| < \varepsilon \tag{50}$$

对任意 $x > M$，由牛顿-莱布尼茨公式：

$$f(x) - f(M) = \int_M^x f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{51}$$

当 $x \to \infty$ 时：

$$A - f(M) = \lim_{x\to\infty} \int_M^x f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{52}$$

如果 $L \neq 0$，则积分 $\int_M^\infty f'(t)\,\mathrm{d}t$ 发散，这与 $f(x) \to A$ 矛盾。

因此必须 $L = 0$。

答案： $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$

(3) 高阶导数极限的存在性

结论： 对所有 $k = 1, 2, ..., n-1$，$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$。

证明： 用数学归纳法。

基础步骤： 由 (2) 已证 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$。

归纳步骤： 假设对某个 $1 \leq k \leq n-2$，有 $\lim_{x\to+\infty} f^{(j)}(x) = 0$ 对所有 $j = 1, 2, ..., k$。

现在证明 $\lim_{x\to+\infty} f^{(k+1)}(x) = 0$。

由归纳假设，$\lim_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$。

设 $g(x) = f^{(k)}(x)$，则 $g'(x) = f^{(k+1)}(x)$，且：
- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} g^{(n-k)}(x) = \lim_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$ 存在

由于 $n - k \geq 1$，可以对 g 应用类似 (2) 的论证。

具体地，如果 $\lim_{x\to+\infty} f^{(k+1)}(x) = L \neq 0$，则由：

$$f^{(k)}(x) = f^{(k)}(M) + \int_M^x f^{(k+1)}(t)\,\mathrm{d}t \tag{53}$$

当 $x \to \infty$ 时，积分项会导致 $f^{(k)}(x)$ 不趋于 0，与归纳假设矛盾。

答案： (1) 例子：$f(x) = A + \frac{\sin(x)}{x}$ (2) 极限值为 0 (3) 所有中间阶导数极限都存在且为 0

—

第 9 题 (20 分)

题目： 关于 Newton 迭代法的收敛性证明。

详细解答：

(1) 证明压缩映射性质

由于 f 在 $(0,0)$ 附近连续可微，且 $f(0,0) = 0$，$f_{y(0,0)} \neq 0$，不失一般性设 $f_{y(0,0)} > 0$。

迭代格式：$y_{n+1}(x) = y_{n(x)} - \left(f_{y(0,0)}\right)^{-1} f\left(x, y_{n(x)}\right)$

第一部分： 存在性和有界性

由于 $f(0,0)=0$ 且 f 连续，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ 使得当 $|x|<\delta_1, |y|<\varepsilon$ 时:

$$|f(x,y)|<\frac{\varepsilon}{2}\ |f_{y(0,0)}| \tag{54}$$

取 $y_0(x)=0$，则:

$$|y_1(x)|=|\left(f_{y(0,0)}\right)^{-1}f(x,0)|\le|f(x,0)\Big|f_{y(0,0)}|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{55}$$

归纳可得当 $|x|<\delta_1$ 时，$|y_{n(x)}|<\varepsilon$ 对所有 n 成立。

第二部分： 压缩性质

设 $g(x,y)=y-\left(f_{y(0,0)}\right)^{-1}f(x,y)$，则迭代为 $y_{n+1}(x)=g\left(x,y_{n(x)}\right)$。

计算:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=1-\left(f_{y(0,0)}\right)^{-1}f_{y(x,y)} \tag{56}$$

在 $(0,0)$ 处: $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)=1-1=0$

由 f 的连续可微性，存在 $\delta_2>0$ 使得当 $|x|<\delta_2, |y|<\delta_2$ 时:

$$|\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)|<\rho<1 \tag{57}$$

取 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，由中值定理:

$$|u_{n+1}(x)|=|y_{n+1}(x)-y_{n(x)}|=|g\left(x,y_{n(x)}\right)-g(x,y_{n-1}(x))| \tag{58}$$

$$\le|\frac{\partial g}{\partial y}(x,\xi)|\ |y_{n(x)}-y_{n-1}(x)|\le\rho\ |u_{n(x)}| \tag{59}$$

其中 ξ 在 $y_{n(x)}$ 和 $y_{n-1}(x)$ 之间。

(2) 证明隐函数的存在性

第一步： 级数收敛

由 (1)，当 $|x|<\delta$ 时:

$$|u_{n+1}(x)|\le\rho\ |u_{n(x)}|\le\rho^n\ |u_1(x)| \tag{60}$$

因此级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_{n(x)}$ 绝对收敛，且:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_{n(x)}|\le|u_1(x)\frac{|}{1-\rho} \tag{61}$$

第二步： 函数的定义

定义 $y(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_{n(x)}=\lim_{n\to\infty}y_{n(x)}$

由于每个 $u_{n(x)}$ 关于 x 连续，且级数一致收敛（在紧集上），所以 $y(x)$ 连续。

第三步： 验证隐函数性质

需要证明 $f(x,y(x))=0$。

由迭代关系：

$$y_{n+1}(x)=y_{n(x)}-\left(f_{y(0,0)}\right)^{-1}f\left(x,y_{n(x)}\right) \tag{62}$$

重新整理：

$$f\left(x,y_{n(x)}\right)=f_{y(0,0)}\left(y_{n(x)}-y_{n+1}(x)\right)=f_{y(0,0)}u_{n+1}(x) \tag{63}$$

当 $n\to\infty$ 时，$u_{n+1}(x)\to 0$，且 $y_{n(x)}\to y(x)$。

由 f 的连续性：

$$f(x,y(x))=\lim_{n\to\infty}f\left(x,y_{n(x)}\right)=\lim_{n\to\infty}f_{y(0,0)}u_{n+1}(x)=0 \tag{64}$$

第四步： 局部唯一性

由隐函数定理，由于 $f_{y(0,0)}\neq 0$，在 $(0,0)$ 附近存在唯一的连续函数 $y=\varphi(x)$ 满足 $f(x,\varphi(x))=0$ 且 $\varphi(0)=0$。

我们构造的 $y(x)$ 满足这些条件，因此 $y(x)=\varphi(x)$。

答案： (1) 证明完成，存在压缩常数 $\rho<1$ (2) 证明完成，$y(x)$ 是所求的连续隐函数