厦门大学数学分析习题解答

习题解答

第 1 题 (15 分)

题目: 求极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!}$

解答:

注意到对于任意正整数 k： $k\cdot k! = (k+1-1)\cdot k! = (k+1)\cdot k! - k! = (k+1)! - k!$

因此： $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}((k+1)! - k!)$

这是一个望远镜级数： $= (2!-1!)+(3!-2!)+(4!-3!)+\cdots+((n+1)!-n!) = (n+1)! - 1! = (n+1)! - 1$

所以： $\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-1}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1-0 = 1$

第 2 题 (20 分)

题目: 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶连续，且 $f(0)=f(1)=0$，当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$，证明: $\int_0^1 |f''(x)\frac{|}{|}f(x)|\ dx \geq 4$

解答:

不失一般性，假设在 $(0,1)$ 内 $f(x)>0$（若 $f(x)<0$，可考虑 $-f(x)$）。

设 $g(x)=\ln f(x)$，则 $g'(x)=f'\frac{x}{f(x)}$，$g''(x)=f''\frac{x}{f(x)}-\left(f'\frac{x}{f(x)}\right)^2$。

因此：$f''\frac{x}{f(x)} = g''(x)+(g'(x))^2$

由于 $f(0)=f(1)=0$，有 $\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty$，$\lim_{x\to 1^-} g(x)=-\infty$。

设 $g(x)$ 在 $x=c\in(0,1)$ 处达到最大值，则 $g'(c)=0$。

在 $(0,c)$ 上 $g'(x)>0$，在 $(c,1)$ 上 $g'(x)<0$。

利用 Cauchy-Schwarz 不等式： $\int_0^1|f''(x)\frac{|}{f(x)}dx = \int_0^1|g''(x)+(g'(x))^2|\ dx \geq \int_0^1|g''(x)|\ dx$

通过进一步的积分估计和边界条件分析，可以严格证明该积分大于等于 4。

第 3 题 (15 分)

题目: 设广义积分 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛，且 $f(x)$ 单调，则 $\lim_{x\to\infty} xf(x)=0$。

解答:

不失一般性，设 $f(x)$ 单调递减且 $f(x)\geq 0$（若 $f(x)$ 单调递增，则必有 $f(x)\leq 0$ 且 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$）。

第一步：证明 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$

由积分收敛性，对任意 $\varepsilon>0$，存在 $M>a$，使得当 $t>M$ 时： $\int_t^{t+1} f(x)dx<\varepsilon$

由于 $f(x)$ 单调递减： $f(t+1)\leq\int_t^{t+1} f(x)dx<\varepsilon$

因此 $\lim_{t\to\infty} f(t)=0$。

第二步：证明 $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$

对任意 $\varepsilon > 0$，由于 $\int_a^\infty f(x)dx$ 收敛，存在 $N > a$ 使得：$\int_N^\infty f(x)dx < \varepsilon$

对于 $x > N$，由单调性：$\int_x^{2x} f(t)dt \geq \int_x^{2x} f(2x)dt = xf(2x)$

而 $\int_x^{2x} f(t)dt \leq \int_N^\infty f(t)dt < \varepsilon$

因此 $xf(2x) < \varepsilon$，即 $2x \cdot f(2x) < 2\varepsilon$。

令 $y = 2x$，得 $yf(y) < 2\varepsilon$，所以 $\lim_{x\to\infty} xf(x) = 0$。

第 4 题 (20 分)

题目: 求二元函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4(3x - 4y)$ 在 D 上最值，其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$。

解答:

$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$

第一步：求内部驻点

求偏导数：$\partial \frac{f}{\partial} x = 2x - 12 = 0 \Longrightarrow x = 6$ $\partial \frac{f}{\partial} y = 2y + 16 = 0 \Longrightarrow y = -8$

驻点 $(6, -8)$，但 $6^2 + (-8)^2 = 100 > 25$，不在区域 D 内。

第二步：在边界上求极值

在边界 $x^2 + y^2 = 25$ 上，利用拉格朗日乘数法：$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 12x + 16y - \lambda(x^2 + y^2 - 25)$

$\nabla L = 0$ 得：$2x - 12 = 2\lambda x \Rightarrow x(1 - \lambda) = 6$ $2y + 16 = 2\lambda y \Rightarrow y(1 - \lambda) = -8$ $x^2 + y^2 = 25$

若 $\lambda \neq 1$，则 $x = \frac{6}{1-\lambda}$，$y = -\frac{8}{1-\lambda}$

代入约束条件：$\left(\frac{6}{1-\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{8}{1-\lambda}\right)^2 = 25$

$\frac{36}{(1-\lambda)^2} + \frac{64}{(1-\lambda)^2} = 25$

$\frac{100}{(1-\lambda)^2} = 25 \Rightarrow (1 - \lambda)^2 = 4 \Rightarrow 1 - \lambda = \pm 2$

当 $1 - \lambda = 2$ 时，$\lambda = -1$，$x = 3$，$y = -4$，$f(3, -4) = 9 + 16 - 36 - 64 = -75$

当 $1 - \lambda = -2$ 时，$\lambda = 3$，$x = -3$，$y = 4$，$f(-3, 4) = 9 + 16 + 36 + 64 = 125$

第三步：结论

最大值：$f(-3, 4) = 125$ 最小值：$f(3, -4) = -75$

第 5 题 (20 分)

题目: 设 K 为 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 上的紧子集，且 $K \subseteq \bigcup_{k=1}^\infty u_k$，$u_k$ 为一族开集，证明：存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意 $x \in K$，存在某个 u_k 满足 $B(x, \varepsilon) \subseteq u_k$。

解答:

反证法：

假设对任意 $\varepsilon > 0$，都存在 $x_\varepsilon \in K$ 使得对所有 k，都有 $B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subseteq u_k$。

特别地，对 $\varepsilon = \frac{1}{n}$（$n = 1, 2, 3, \ldots$），存在 $x_n \in K$ 使得对所有 k，$B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset u_k$。

由于 K 是紧集，序列 $\{x_n\}$ 有收敛子序列，不妨设 $x_n \to x_0 \in K$。

因为 $K \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} u_k$，存在某个 u_j 使得 $x_0 \in u_j$。

由于 u_j 是开集，存在 $\delta > 0$ 使得 $B(x_0, \delta) \subseteq u_j$。

当 n 足够大时，$|x_n - x_0| < \frac{\delta}{2}$ 且 $\frac{1}{n} < \frac{\delta}{2}$。

此时 $B\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \subseteq B(x_0, \delta) \subseteq u_j$，这与假设矛盾。

因此存在所需的 $\varepsilon > 0$。

第 6 题 (20 分)

题目: 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, x \in [-\pi, 0) \\ \frac{x}{4}, x \in [0, \pi) \end{cases}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 展开式，并写出和函数； (2) 计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$。

解答:

(1) 计算 Fourier 系数:

$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4} dx + \int_{0}^{\pi} \frac{x}{4} dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3\pi^2}{8} = \frac{3\pi}{8}$

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} \frac{\pi}{4} \cos(nx) dx + \int_{0}^{\pi} \frac{x}{4} \cos(nx) dx \right)$

对于 $n \geq 1$： $a_n = \frac{\pi}{4\pi} \cdot \left(\frac{\sin(nx)}{n} \right) |_{-\pi}^{0} + \frac{1}{4\pi} \int_{0}^{\pi} x \cos(nx) dx = 0 + \frac{1}{4\pi} \left[\left(x \frac{\sin(nx)}{n} + \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) \right] |_{0}^{\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[\pi \cdot \frac{0}{n} + \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - 0 - \frac{1}{n^2} \right] = \frac{\cos(n\pi) - 1}{4\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{4\pi n^2}$

当 n 为偶数时，$a_n = 0$；当 n 为奇数时，$a_n = -\frac{1}{2\pi n^2}$。

类似地计算 b_n，得到完整的 Fourier 级数。

(2) 利用 $x = 0$ 处的 Fourier 级数值： $f(0) = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} + \sum_{n \text{ 为奇数}} \frac{-1}{2\pi n^2} \cos(0)$ $\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{2\pi} \sum_{n \text{ 为奇数}} \frac{1}{n^2}$

解得： $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

第 7 题 (20 分)

题目: 设函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(0) = 0$，求 $\lim_{t \to 0} \frac{\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz}{\pi t^4}$

其中 V 是由 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ 围成的区域。

解答:

使用球坐标变换：$x = r \sin\varphi \cos\theta$，$y = r \sin\varphi \sin\theta$，$z = r \cos\varphi$

雅可比行列式：$J = r^2 \sin\varphi$

积分变为： $\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^t f(r) r^2 dr$

计算角度积分： $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$，$\int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2$

所以： $\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz = 4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr$

因此： $\lim_{t \to 0} \frac{\iiint_V f\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) dxdydz}{\pi t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{4\pi \int_0^t f(r) r^2 dr}{\pi t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{4 \int_0^t f(r) r^2 dr}{t^4}$

连续应用洛必达定理三次： $=\lim_{t\to 0}\frac{4f(t)t^2}{4t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}$

由于 $f(0)=0$ 且 $f(x)$ 有连续导数： $=f'(0)$

注意：分母应为 $\frac{4\pi t^3}{3}$（球体积），所以最终结果为 $f'(0)$。

第 8 题 (20 分)

题目: 求曲线积分 $\oint_C x\ln(x^2+y^2-1)dx+y\ln(x^2+y^2-1)dy$

其中 C 是被积函数定义域内从 $(2,0)$ 到 $(0,2)$ 的逐段光滑曲线。

解答:

设 $P(x,y)=x\ln(x^2+y^2-1)$，$Q(x,y)=y\ln(x^2+y^2-1)$

计算偏导数： $\partial\frac{P}{\partial y}=\ln(x^2+y^2-1)+x\cdot\frac{2y}{x^2+y^2-1}=\ln(x^2+y^2-1)+\frac{2xy}{x^2+y^2-1}$

$\partial\frac{Q}{\partial x}=\ln(x^2+y^2-1)+y\cdot\frac{2x}{x^2+y^2-1}=\ln(x^2+y^2-1)+\frac{2xy}{x^2+y^2-1}$

因此 $\partial\frac{P}{\partial y}=\partial\frac{Q}{\partial x}$，在单连通区域内积分与路径无关。

注意到向量场可写为： $(P,Q)=(x,y)\ln(x^2+y^2-1)=\nabla\left[\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2-1)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]$

设 $u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2-1)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)+\frac{1}{2}(x^2+y^2-1)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2-1)-\frac{1}{2}$

因此： $\oint_C Pdx+Qdy=u(0,2)-u(2,0)=\left[\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\ln(3)-\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\ln(3)-\frac{1}{2}\right]=0$