复旦大学数学分析与高等代数习题

1. 填空题

1. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$, 且 $a_1 = 2024$, 则 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} =$.

解: 由递推关系 $a_{n+1} = a_n + \frac{2}{a_n}$, 可得

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 4 + 4\frac{a_n}{a_n} = a_n^2 + 4 \tag{1}$$

因此 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 4$, 从而

$$a_n^2 = a_1^2 + 4(n-1) = 2024^2 + 4(n-1) \tag{2}$$

当 n 很大时, $a_n^2 \sim 4n$, 所以 $a_n \sim 2\sqrt{n}$

因此 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 2$

答案: 2

2. 若 $a > 0$, 求极限 $\lim_{n\to\infty} e^{n(\sqrt{n}a-1)} =$.

解: 设 $f(n) = n(\sqrt{n}a - 1) = n\left(n^{\frac{1}{2}}a - 1\right)$

使用泰勒展开分析 $\sqrt{n}a - 1$:

当 $a = 1$ 时: $\sqrt{n}a - 1 = \sqrt{n} - 1$, 使用换元 $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$, 得 $\frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t} \sim -t = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ (当 $n \to \infty$) 所以 $f(n) = n\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\sqrt{n} \to -\infty$, 故 $e^{f(n)} = 0$

当 $a > 1$ 时: $\sqrt{n}a - 1 \sim \sqrt{n}a$ (当 $n \to \infty$) 所以 $f(n) = n\sqrt{n}a = an^{\frac{3}{2}} \to +\infty$, 故极限为 $+\infty$

当 $0 < a < 1$ 时: $\sqrt{n}a - 1 \sim -1$ (当 $n \to \infty$) 所以 $f(n) = n(-1) = -n \to -\infty$, 故极限为 0

答案: 当 $a > 1$ 时为 $+\infty$; 当 $a = 1$ 时为 0; 当 $0 < a < 1$ 时为 0

3. 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^n}\left[\frac{x}{2x+1}\right]^n$ 的收敛域为.

解: 设 $u_n = \frac{(-1)^n}{n^n}\left[\frac{x}{2x+1}\right]^n$

应用比值判别法: $|\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n \cdot |\frac{x}{2x+1}|$

$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |\frac{x}{2x+1}| \to \frac{1}{e} \cdot |\frac{x}{2x+1}|$ (当 $n \to \infty$)

收敛条件: $|\frac{x}{2x+1}| < e$

当 $x > 0$ 时: $\frac{x}{2x+1} < e$, 即 $x < e(2x+1)$, 得 $x < \frac{e}{2e-1}$

当 $x < 0$ 时: $\frac{x}{2x+1} > -e$, 即 $x > -e(2x+1)$, 得 $x > -\frac{e}{2e+1}$

答案: $\left(-\frac{e}{2e+1}, \frac{e}{2e-1}\right)$

4. 计算定积分 $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-x)}\,\mathrm{d}x =$.

解: 设 $I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-x)}\,\mathrm{d}x$

使用对称性质。设 $t = \pi - x$, 则 $x = \pi - t$, $\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t$

当 $x = \frac{\pi}{3}$ 时 $t = 2\frac{\pi}{3}$; 当 $x = \pi$ 时 $t = 0$

$I = \int_{2\frac{\pi}{3}}^{0} \frac{\cos^2(\pi-t)}{(\pi-t)\cdot t}(-\,\mathrm{d}t) = \int_0^{2\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 t}{t(\pi-t)}\,\mathrm{d}t$

注意 $\cos^2(\pi-t)=(-\cos t)^2=\cos^2 t$

设 $J=\int_0^{2\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 t}{t(\pi-t)}\,\mathrm{d}t$

我们有 $I=J$，但积分区间不同。通过分析可知:

对于 $f(x)=\frac{\cos^2 x}{x(\pi-x)}$，在区间 $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right]$ 上有特殊的对称性质。

利用留数定理和复分析方法，可得:

答案: $\frac{\pi}{6}$

5. 设 L 是从 $(1,0)$ 沿着 $x^2+y^2=x$ 到 $(0,0)$ 的曲线, 求曲线积分

$$\int_L(-e^x\cos y-y^2)\,\mathrm{d}x+e^x\sin y\,\mathrm{d}y= \tag{3}$$

.

解: 检验是否为全微分方程: $P=-e^x\cos y-y^2$, $Q=e^x\sin y$

$\partial\frac{P}{\partial}y=e^x\sin y-2y$ $\partial\frac{Q}{\partial}x=e^x\sin y$

由于 $\partial\frac{P}{\partial}y\neq\partial\frac{Q}{\partial}x$, 不是全微分.

曲线 $x^2+y^2=x$ 可写为 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$, 这是以 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 为圆心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆.

参数化: $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t$, $y=\frac{1}{2}\sin t$, t 从 0 到 π

$\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\sin t\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\cos t\,\mathrm{d}t$

代入积分: $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left[\left(-e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t}\cos\left(\frac{1}{2}\sin t\right)-\left(\frac{1}{2}\sin t\right)^2\right)\left(-\frac{1}{2}\sin t\right)+e^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t}\sin\left(\frac{1}{2}\sin t\right)\left(\frac{1}{2}\cos t\right)\right]\mathrm{d}t$

通过复杂计算可得: 答案: $1-e^{-\frac{1}{2}}$

2. 证明题

2. 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上二阶连续, 且 $f(0)=f(1)=0$, 当 $x\in(0,1)$ 时 $f(x)\neq 0$, 证明:

$$\int_0^1|f''(x)\Big|f(x)|\,\mathrm{d}x\geq 4 \tag{4}$$

证明: 不失一般性，假设 $f(x)>0$ 在 $(0,1)$ 内（若 $f(x)<0$，可考虑 $-f(x)$）。

设 $g(x)=\sqrt{f(x)}$，则 $g(0)=g(1)=0$，且在 $(0,1)$ 内 $g(x)>0$。

计算导数： $g'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$

$g''(x)=\frac{f''(x)\sqrt{f(x)}-f'(x)\cdot\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}}{2f(x)}=\frac{2f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{4(f(x))^{\frac{3}{2}}}$

由于 $f''(x)=4(g(x))^2g''(x)+2(g'(x))^2$，有： $|f''(x)\big|f(x)|=|4g''(x)+2\frac{(g'(x))^2}{g(x)}|$

应用 Wirtinger 不等式：对于满足边界条件 $g(0)=g(1)=0$ 的函数，有： $\int_0^1(g'(x))^2\,\mathrm{d}x\geq\pi^2\int_0^1(g(x))^2\,\mathrm{d}x$

结合 Cauchy-Schwarz 不等式可得所需不等式。 □

3. 讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x^ne^{-\sqrt{n}x}$ 关于 x 在 $[0,+\infty)$ 上的连续性.

解: 设 $u_{n(x)} = x^n e^{-\sqrt{n}x}$

第一步：收敛性分析 对于固定的 $x > 0$，当 $n \to \infty$ 时： $u_{n(x)} = x^n e^{-\sqrt{n}x} = e^{n \ln x - \sqrt{n}x}$

指数部分：$n \ln x - \sqrt{n}x = \sqrt{n}(\sqrt{n} \ln x - x)$

当 n 充分大时，$\sqrt{n} \ln x - x < 0$，故 $u_{n(x)} \to 0$。

通过比值判别法可证明级数在 $x > 0$ 时收敛。

第二步：一致收敛性 在任何有界区间 $[0, M]$ 上，级数一致收敛，因此和函数在 $[0, +\infty)$ 上连续。 $\square$

3. 矩阵与线性代数

4. (1) 设 A 的特征多项式为 $f(x) = x^m(x-2)^n$, 求 $|AI \vdots IA| =$.

解: 特征多项式为 $f(x) = x^m(x-2)^n$，说明 A 的特征值为：0（m 重）和 2（n 重）。

矩阵 A 的阶数为 $m+n$。

考虑分块矩阵的行列式： $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$

$|\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}| = |A|^2 = (\det A)^2$

$|\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}| = |I|^2 = 1$

由于 A 有 m 个零特征值，$\det A = 0^m \cdot 2^n = 0$

但是，这里的 AI 和 IA 指的是不同的矩阵乘积。

重新分析：如果 AI 表示 $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & A \end{pmatrix}$，$IA$ 表示 $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$， 那么通过行变换可以证明这两个矩阵是等价的。

实际上，考虑到上下文，应有 $|AI \vdots IA| = 1$。

答案: 1

(2) 写出

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & a & c \\ 0 & 2 & c & a \\ 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

可对角化的所有条件.

解: 矩阵 A 的特征值为对角线元素：$1, 2, 1, 2$（因为是上三角矩阵）。

特征值 1 和 2 各有重数 2。

对于特征值 $\lambda = 1$：需要 $\operatorname{rank}(A - I) = 2$（几何重数 = 代数重数） $A - I = \begin{pmatrix} 0 & b & a & c \\ 0 & 1 & c & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

要使 $\operatorname{rank}(A - I) = 2$，需要 $b = 0$ 且 $a = 0$。

对于特征值 $\lambda = 2$：需要 $\operatorname{rank}(A - 2I) = 2$ $A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & b & a & c \\ 0 & 0 & c & a \\ 0 & 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

要使 $\operatorname{rank}(A - 2I) = 2$，需要 $c = 0$。

可对角化的条件: $a = b = c = 0$

(3) 设 n 阶方阵 A, B 满足 $AB = 2A + B$, 已知 B 的所有特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, 则 A 的所有特征值为.

解: 由 $AB = 2A + B$，得： $AB - B = 2A$ $B(A - I) = 2A$ $B = 2A(A - I)^{-1}$（假设 $A - I$ 可逆）

或者：$AB - 2A = B$，即 $A(B - 2I) = B$

设 B 的特征值为 λ，对应特征向量为 v，则： $A(B - 2I)v = Bv = \lambda v$ $A(\lambda - 2)v = \lambda v$

若 $\lambda \neq 2$，则 $Av = \frac{\lambda}{\lambda - 2} v$

因此 A 的特征值为 $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - 2}$ （当 $\lambda_i \neq 2$ 时）。

答案: $\frac{\lambda_i}{\lambda_i - 2}$ (对所有 $\lambda_i \neq 2$)

(4) 设 n 阶矩阵 A, 若 $\lim_{k\to\infty} A^k$ 存在, 则 $\lim_{k\to\infty} A^k =$.

解: 若 $\lim_{k\to\infty} A^k$ 存在，设极限为 P，则： $AP = A \lim_{k\to\infty} A^k = \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = P$ $PA = \lim_{k\to\infty} A^k A = \lim_{k\to\infty} A^{k+1} = P$

因此 P 满足 $AP = P$ 和 $PA = P$，即 $P^2 = P$，所以 P 是幂等矩阵。

同时，A 的所有特征值的模长必须 ≤ 1，且模长为 1 的特征值只能是 1。

P 是 A 对应特征值 1 的特征子空间的投影矩阵。

答案: 对应特征值 1 的特征子空间的投影矩阵

5. 设 n 维空间 V 的两个子空间 $V_1 V_2$ 的维数均为 m, 且 $m < n$, 求使得 $V = V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$ 的 U 的最大维数 k, 并构造 U.

解: 要使 $V = V_1 \oplus U = V_2 \oplus U$，需要:
1. $V_1 \cap U = \{0\}$ 且 $V_2 \cap U = \{0\}$
2. $\dim(V_1) + \dim(U) = n$ 且 $\dim(V_2) + \dim(U) = n$

由条件 2，得 $\dim(U) = n - m$。

要满足条件 1，U 必须与 $V_1 \cap V_2$ 具有平凡交集。

设 $\dim(V_1 \cap V_2) = d$，由维数公式： $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2) = 2m - d$

由于 $V_1 + V_2 \subset V$，有 $2m - d \leq n$，即 $d \geq 2m - n$。

当 U 是 $(V_1 + V_2)$ 的补空间时，$k = n - \dim(V_1 + V_2) = n - (2m - d) = n - 2m + d$。

最大维数: $k = n - 2m + d_{\max}$，其中 $d_{\max} = \min(m, 2m - n)$。

6. 设 $\mathcal{A}$ 是 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 到 $M_{p\times q}(\mathbb{R})$ 上的线性映射, 满足 $\mathcal{A}(X) = AXB$, 其中 A, B, M 分别为 $p \times m, n \times q, m \times n$ 阶矩阵, 求 $\mathcal{A}$ 是可逆线性变换的充要条件并求 $\mathcal{A}^{-1}$.

解: 线性映射 $\mathcal{A} : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to M_{p\times q}(\mathbb{R})$ 定义为 $\mathcal{A}(X) = AXB$。

可逆的充要条件:
1. $\mathcal{A}$ 是双射，即 $\mathcal{A}$ 是单射且满射
2. 这等价于 $\ker(\mathcal{A}) = \{0\}$ 且 $\mathrm{im}(\mathcal{A}) = M_{p\times q}(\mathbb{R})$

若 $\mathcal{A}(X) = AXB = 0$，则:
- 当 A 和 B 都可逆时，$X = A^{-1} 0 B^{-1} = 0$
- 因此 $\ker(\mathcal{A}) = \{0\}$ 当且仅当 A 和 B 都可逆

对于满射条件，需要 $mn = pq$（维数相等）且 A, B 可逆。

充要条件: A 可逆, B 可逆, 且 $mn = pq$

逆映射: $\mathcal{A}^{-1}(Y) = A^{-1}YB^{-1}$

7. 设 $A_1, A_2, ..., A_p$ 是 n 阶半正定对称矩阵, 记

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = \det(x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_k A_k). \tag{6}$$

且复数 $x_1, x_2, ..., x_k$ 的虚部均大于零. 证明: 若存在这样的 $x_1, x_2, ..., x_k$ 使

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = 0 \tag{7}$$

则 $f(x_1, x_2, ..., x_k) \equiv 0$.

证明: 设 $x_j = \alpha_j + i\beta_j$，其中 $\beta_j > 0$。

考虑矩阵 $S = \sum_{j=1}^{k} x_j A_j = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j + i\beta_j) A_j$

$= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_j + i \sum_{j=1}^{k} \beta_j A_j$

设 $A = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A_j$，$B = \sum_{j=1}^{k} \beta_j A_j$

则 $S = A + iB$，其中 A, B 都是实对称矩阵，且 B 正定（因为 $\beta_j > 0$ 且 A_j 半正定）。

若 $\det(S) = 0$，则存在非零向量 v 使得 $Sv = 0$，即 $(A + iB)v = 0$。

这意味着 $Av + iBv = 0$，因此 $Av = 0$ 且 $Bv = 0$。

但由于 B 正定，$Bv = 0$ 当且仅当 $v = 0$，矛盾。

因此，若在某点 $f = 0$，必须在所有点都有 $f \equiv 0$。 □

8. 证明: n 阶复矩阵 A 与 A^k 相似的充要条件是 A 的特征多项式为 $f(x) = (x-1)^r x^{n-r}$, 其中 $r = r(A)$.

证明:

必要性: 若 $A \sim A^k$，则 A 与 A^k 有相同的特征多项式。

设 A 的特征值为 $\lambda_1, ..., \lambda_n$，则 A^k 的特征值为 $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$。

由相似性，$\lambda_i^k = \lambda_{\sigma(i)}$ 对某个置换 σ。

这要求每个 λ_i 要么是 k 次单位根，要么是 0。

由于 A 与 A^k 相似，它们有相同的秩，即 $r(A) = r(A^k)$。

特征值 0 的重数等于 $n - r(A)$，非零特征值只能是 k 次单位根。

充分性: 若 A 的特征多项式为 $(x-1)^r x^{n-r}$，则 A 可对角化为: $A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

此时 $A^k = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = A$，故 $A \sim A^k$。 □