$\mathscr{L}(X) \triangleq \mathscr{L}(X, X)$.

$X^* \triangleq \mathscr{L}(X, \mathbb{K})$. X上有界线性泛函全体.

定理 2.1.13. X, Y 在同一数域$\mathbb{K}$上的B^*空间

$\mathscr{L}(X, Y)$ = 从X到Y的有界线性算子的全体.

规定线性运算:

$\forall\, T_1, T_2 \in \mathscr{L}(X, Y)$, 规定 $T_1 + T_2$, αT 如下:

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1 x + T_2 x. \qquad \forall x \in X$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha (Tx) \qquad \alpha \in \mathbb{K}.$$

那么 $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ 是 B^* 空间。

若 Y 是 B 空间，则 $(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|)$ 是 B 空间。

$$
\begin{aligned}
\|(T_1+T_2)(x)\|_Y &= \|T_1x + T_2x\|_Y \\
&\le \|T_1x\|_Y + \|T_2x\|_Y \\
&\le \|T_1\|\,\|x\|_X + \|T_2\|\,\|x\|_X \\
&\le (\|T_1\| + \|T_2\|)\,\|x\|_X.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\ \|T_1+T_2\| \le \|T_1\| + \|T_2\|$$

$$
\begin{aligned}
\|\alpha T\| &= \sup_{\|x\|_X=1} \|(\alpha T)(x)\|_Y = \sup_{\|x\|_X=1} \|\alpha Tx\|_Y \\
&= |\alpha| \sup_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y = |\alpha|\,\|T\|.
\end{aligned}
$$

容易看出 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, Y)$ 是线性空间.

再由上面的讨论可见 $\|\cdot\|$ 满足范数的条件. 故 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, Y)$ 是 B^* 空间.

下证 当 Y 为 B 空间时, $\mathcal{L}(\mathscr{X}, Y)$ 为 B 空间.

任取 $\mathcal{L}(\mathscr{X}, Y)$ 中的一个基本列 $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon)$, 当 $n > N$ $p \in \mathbb{N}$ 时.

$$\|T_n - T_{n+p}\| < \varepsilon.$$

由此可得 $\forall x \in X$,

$$\|T_n x - T_{n+p} x\|_Y \le \|T_n - T_{n+p}\| \|x\|_X$$

$$< \varepsilon \|x\|_X .$$

即知 $\{T_n x\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Y 中的基本列.

由 Y 完备, 故存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = y$.

定义映射 $T: x \longmapsto y = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$.

即 $Tx = \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$. $\quad \forall x \in X$.

T是X到Y的线性算子易证.

$$T(\alpha x+\beta x') = \alpha Tx + \beta Tx'$$

$$\lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x+\beta x') = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n x + \beta \lim_{n\to\infty} T_n x'$$

下证T有界. 取 $\varepsilon=1$ $\exists n_0$

$\forall x\in S$, $\|x\|=1$

$$\|Tx\|_Y = \|\lim_{n\to\infty} T_n x\|_Y \le \|T_{n_0} x\|_Y + 1 \le \|T_{n_0}\| + 1$$

$$\Rightarrow \|T\| \le \|T_{n_0}\| + 1 < \infty.$$

$\Rightarrow T\in \mathcal{L}(X,Y).$

$T=\lim_{n\to\infty} T_n$. 依范收敛.

$\{T_n\}$ 是 $\mathcal{L}(X, Y)$ 中的基本列，

故 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N = N(\varepsilon)$，$n > N$ 时 $p \in \mathbb{N}$，

$$\|T_n - T_{n+p}\| < \varepsilon.$$

$\forall x \in S := \{\|x\| = 1\}$.

$$\|T_n x - T_{n+p} x\|_Y \leq \|T_n - T_{n+p}\| < \varepsilon.$$

令 $p \to \infty$ 得 $\|T_n x - T x\|_Y \leq \varepsilon.$

$$\Rightarrow \|T_n - T\| \leq \varepsilon \Rightarrow \lim_{n \to \infty} T_n = T.$$

算子序列的n种收敛性概念：$\mathcal{L}(X,Y)$

$\{T_n\}$.

1、依范收敛（一致收敛）

$T_n \xrightarrow{\|\cdot\|} T$.　　$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n - T\| = 0$.

命题：$\|T_n - T\| \to 0 \Longleftrightarrow T_n$ 在 X 的任一有界集 A 上一致收敛于 T.

$\left[\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ n > N$ 时 $\forall x \in A$.

$\|T_n x - Tx\|_Y < \varepsilon\ \right]$

证：$\Rightarrow$ $\|T_n x - Tx\|_Y \le \|T_n - T\| \, \|x\|_X$

$\le C\|T_n - T\| \to 0$

A有界 $\|x\|_X \le C$.

$\Leftarrow$ S 单位球面.

由 T_n 在 S 上一致收敛到 T.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0$ 当 $n > n_0$ 时

$$\|T_n x - Tx\|_Y < \varepsilon \quad \forall x \in S.$$

从而 $\|T_n - T\| = \sup\limits_{x \in S} \|T_n x - Tx\| \le \varepsilon$.

$\Rightarrow$ T_n 依范收敛于 T. #.

2. 逐点收敛（强收敛）

$\forall x \in X$, $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx \Leftrightarrow \|T_n x - Tx\|_X \to 0$.

则称 T_n 逐点收敛于 T.

3. 弱收敛.

$\forall f \in Y^*$, $\forall x \in X$,

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx).$$

则称 T_n 弱收敛于 T.

$Y^* = \mathcal{L}(Y, \mathbb{K})$. Y上有界线性泛函的全体.

Y的共轭空间.

例：逐点收敛但不依范收敛的例子.

$X = Y = \ell^p \quad 1 \le p < \infty$

$\forall x = (\xi_1, \xi_2, \cdots,) \in \ell^p$

记 $x_n = (\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots \cdots)$

令 $T_n x = x_n \qquad n = 1, 2, \cdots \cdots,$

T_n 是 l^p 到 l^p 的线性算子. 有界.

$$\|T_n x\| = \|x_n\| \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \|T_n\| \leq 1.$$

$$\{T_n\} \in \mathcal{L}(l^p).$$

$$\forall x \in l^p \quad \|T_n x\| = \|x_n\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

即 $T_n x$ 逐点收敛到 θ (零算子).

但 T_n 不依范收敛. $\|T_n\| \not\to 0$.

$\|T_n\| = 1$.

$$\begin{cases} \|T_n\| \le 1 & \checkmark \\ T_n e_n = e_1 & \|T_n\| \ge \|T_n e_n\| = 1. \end{cases}$$

$e_n = (0, \cdots 0, \underset{n}{1}, 0, \cdots)$

例 3.2-1. 有限维线性赋范空间上的线性算子.

给定 $(X, \|\cdot\|_X)$. $x_1, \cdots, x_n$ 是一组基.

$(Y, \|\cdot\|_Y)$ $T: X \longrightarrow Y$ 线性算子.

设 $\mathscr{D}(T) = X$.

令 $y_i = Tx_i$, $i = 1, \cdots, n$.

则 $\mathscr{R}(T)$ 是由 $\{y_1, \cdots, y_n\}$ 生成的线性子集.

$\forall x \in X$, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (Tx_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

(1) T是有界算子.

$$\forall x \in X, \quad x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i.$$

$$Tx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i$$

$$\|Tx\|_Y \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, \|y_i\|_Y$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|y_i\|^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}}_{} \; |\alpha|.$$

$$= M|\alpha| \sim \|x\|_X$$

设 $\|x\|_X = \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = 1.$ $\boxed{\text{有限维赋范线性空间一节}}$

由前面讨论 $|\alpha| \leq \gamma^{-1}$. ($\gamma$ 只依赖于 $x_1, \cdots, x_n$).

从而 $\sup\limits_{\|x\|_X=1} \|Tx\|_Y \leq M\gamma^{-1}$.

即 T 是有界算子.

下面主要考察 $X=Y=\mathbb{R}^n$. T 的范数.

$l_p\,(1\leq p\leq\infty)$ 范数

$$\|x\|_{l^p} = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} & 1\leq p<\infty \\ \max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i|. & p=\infty \end{cases}$$

T 是 (X, l_p) 到 (Y, l_q) 的线性算子.

$p=q=2$ 时,

$$T \longleftrightarrow A=(a_{ij})_{1\leq j,k\leq n}.$$

$$Tx = Ax.$$

(a) 当 A 是对称矩阵时,

考虑 $\det(A-\lambda E)=0$

那么此方程有 n 个实根. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

$$\Lambda = \max_{1\leq i\leq n} |\lambda_i| = |\lambda_{i_0}|.$$

$\forall\ x=(x_1,\cdots,x_n)\quad y=(y_1,\cdots,y_n)$.

令 $\langle x,y\rangle = x_1y_1+\cdots+x_ny_n$

那么 $|x|^2=\langle x,x\rangle$

下记 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}|Ax| = \Lambda$.

注意到 $\forall\ \lambda_i$, $\exists\ \xi^{(i)}\in\mathbb{R}^n$, $\|\xi^{(i)}\|=1$. 使得

$$A\xi^{(i)}=\lambda_i\xi^{(i)},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

且 $\langle\xi^{(i)},\xi^{(j)}\rangle=0\quad(i\neq j)$.

从而 $\|T\| \geq \left(\langle A\xi^{(i_0)}, A\xi^{(i_0)} \rangle \right)^{1/2}$.

$$= \left(\langle \lambda_{i_0} \xi^{(i_0)}, \lambda_{i_0} \xi^{(i_0)} \rangle \right)^{1/2}.$$

$$= |\lambda_{i_0}| \, |\xi^{(i_0)}| = |\lambda_{i_0}| = \Lambda.$$

另一方面，$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|x| = 1$ 可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle \xi^{(i)}.$$

那么 $\sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle^2 = |x|^2 = 1$.

所以 $Ax = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle A \xi^{(i)}$.

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle \lambda_i \xi^{(i)}.$$

$$\underset{\displaystyle |Ax|^2}{\overset{\|}{\langle Ax, Ax \rangle}} = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle \lambda_i \xi^{(i)}, \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle \lambda_i \xi^{(i)} \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle^2 \lambda_i^2$$

$|\lambda_i| \leq \Lambda$

$$\leq \Lambda^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle x, \xi^{(i)} \rangle^2}_{|x|=1} = \Lambda^2.$$

$$\|T\| = \sup_{|x|=1} |Ax| \le \Lambda.$$

综合可得 $\|T\| = \Lambda.$

(b) 一般情形下. 假设 $T \to A = (a_{jk})_{n\times n}.$

记 A 的转置记为 A^T. 那么 A^TA 是 $n\times n$ 对称矩阵.

若 λ_1 是 $\det(A^TA - \lambda E) = 0$ 的最大特征根.

那么 $$\|T\| = \sup_{|x|=1} \langle Ax, Ax\rangle^{1/2} = \sqrt{\lambda_1}.$$

记 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是 A^TA 的特征根,

η_i $1\le i\le n$ 是对应于 λ_i 的特征向量(单位化).

即 $|\eta_i|=1$, $\langle \eta_i, \eta_j\rangle = 0$. $i\neq j$.

$$\|T\| \geq \langle A\eta_1, A\eta_1\rangle^{1/2}$$

$$= \langle A^TA\eta_1, \eta_1\rangle^{1/2}$$

$$= \langle \lambda_1\eta_1, \eta_1\rangle^{1/2} = \lambda_1^{1/2}$$

另一方面, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|x|=1$.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \eta_i$$

且 $|x|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle^2 = 1.$

那么 $|Ax|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^T A x, x \rangle$

$$= \left\langle A^T A \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \eta_i, \ \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \eta_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle A^T A \eta_i, \ \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \eta_i \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \lambda_i \eta_i, \ \sum_{i=1}^{n} \langle x, \eta_i \rangle \eta_i \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |\eta_i|^2 \leq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} |\eta_i|^2 = \lambda_1.$$

$$\therefore \quad \|T\| \le \sup_{|x|=1} |Ax| \le \sqrt{\lambda_1}.$$

$$\therefore \quad \|T\| = \sqrt{\lambda_1}.$$

$(\mathbb{R}^n, l^1) \to (\mathbb{R}^n, l^\infty)$ 的恒等算子 I 的算子范数.

例. $\forall f \in L[a,b]$, 定义

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\,dt. \quad x \in [a,b].$$

那么 T 是从 $L[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的线性算子.

$\|T\| = 1.$

证：

$$T(f_1+f_2)(x) = \int_a^x (f_1(t)+f_2(t))\,dt$$

$$= \int_a^x f_1(t)\,dt + \int_a^x f_2(t)\,dt$$

$$= Tf_1(x) + Tf_2(x)$$

$$T(\lambda f)(x) = \int_a^x \lambda f(t)\,dt$$

$$= \lambda \int_a^x f(t)\,dt = \lambda(Tf)(x).$$

$\forall f \in L[a,b]$, $\|f\|_L = \int_a^b |f(t)|\,dt = 1.$

$$\|Tf\| = \max_{a\le x\le b} |(Tf)(x)|.$$

$$= \max_{a\le x\le b} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right|.$$

$\|T\| = \sup_{\|f\|=1} \|Tf\|$

$$\le \max_{a\le x\le b} \int_a^x |f(t)|\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt = 1.$$

故 $\|T\| \le 1$.

另一方面，取 $f_0(t) = \frac{1}{b-a}$ $\forall\ t \in [a,b]$.

则 $\|f_0\|_L = \int_a^b |f_0(t)|\,dt = 1$.

$$\|T\| \geq \|Tf_0\| = \max_{a\leq x\leq b} \left| \int_a^x \frac{1}{b-a}\, dt \right|$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dt = 1.$$

综上可得 $\|T\| = 1$.

例. $T: C[a,b] \longrightarrow C[a,b]$. $\quad \|T\| = ?$

$$f \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt.$$

解: $\forall f \in C[a,b]$. $\quad \|f\| = \max_{a\leq t\leq b} |f(t)| = 1$.

$$\|Tf\| = \max_{a\le x\le b} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right|.$$

$$\le \max_{a\le x\le b} \int_a^x |f(t)|\,dt$$

$$= \int_a^b |f(t)|\,dt \overset{\|f\|=1}{\le} \int_a^b dt = b-a.$$

反之 取 $f_0(t) \equiv 1 \quad t\in[a,b]$.

$$\|T\| \ge \|Tf_0\| = \max_{a\le x\le b} \left| \int_a^x f_0(t)\,dt \right| = \int_a^b dt = b-a.$$

因此 $\|T\| = b-a$.

例. 设 $K \in C_{[a,b]\times[a,b]}$. $K(s,t)$ 是 $[a,b]\times[a,b]$ 连续.

$$T: C[a,b] \longrightarrow C[a,b].$$

$$x(t) \longmapsto y(s)=\int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt. \quad s\in[a,b].$$

$$(Tx)(s) = \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt. \quad \forall x \in C[a,b].$$

T 是线性算子.

下面计算 T 的范数.

任取 $x \in C[a,b]$. $\|x\| = \sup\limits_{a \le t \le b} |x(t)| = 1$.

则由.

$$\|Tx\| = \sup_{a \le s \le b} \left| \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt \right|.$$

$$\le \sup_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\,|x(t)|\, dt.$$

$$\le \sup_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s,t)|\, dt \triangleq M.$$

由于 K 在 $C[a,b]$ 上连续, 由闭区间上连续函数的性质.

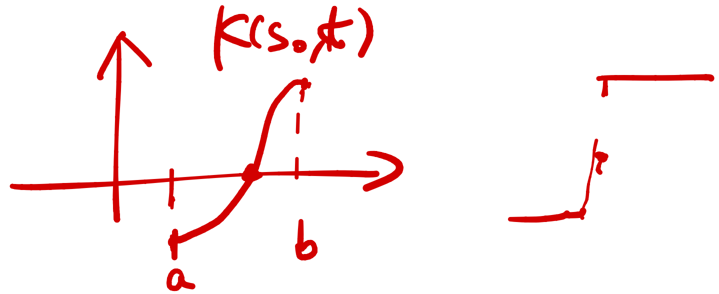
得存在 $s_0 \in [a,b]$. $\int_a^b |K(s_0,t)|\, dt = M$.

记 $\operatorname{sgn} K(s_0,t) = x_0(t)$. $x_0(t) \notin C[a,b]$

令 $y_0(s) = \int_a^b K(s,t)\, x_0(t)\, dt.$

则 $y_0(s_0) = \int_a^b |K(s_0,t)|\, dt = M.$

显然 $y_0 \in C[a,b].$



由 Luzin 定理.

$\forall \varepsilon > 0$, 存在连续函数 $\tilde{x}_0(t) \in C[a,b]$. 满足

(a) $|\tilde{x}_0(t)| \le 1$ (b) $m\{t \in [a,b] : \tilde{x}_0(t) \neq x_0(t)\} < \varepsilon.$

记 $\tilde{y}_0(s) = \int_a^b K(s,t)\, \tilde{x}_0(t)\, dt.$

则有

$$\left|\tilde{y}_0(s_0) - y_0(s_0)\right| = \left|\int_a^b K(s_0,t)\,[\tilde{x}_0(t) - x_0(t)]\, dt\right|$$

$$\leq \int_a^b |K(s_0,t)|\,\underbrace{|\tilde{x}_0(t) - x_0(t)|}_{\leq \begin{cases} 2. & \tilde{x}_0(t) \neq x_0(t) \\ 0 & \tilde{x}_0(t) = x_0(t). \end{cases}}\, dt.$$

令 $C = \max\limits_{(s,t)} K(s,t)$

$$\leq \underbrace{C \cdot 2\, m\{t \in [a,b] : \tilde{x}_0(t) \neq x_0(t)\}}_{2C\varepsilon}.$$

由于 ε 任取，故可得 $(T\tilde{x}_0)(s)$ 范数可任意接近于 M. 从而 $\|T\| \geq M-\varepsilon'$.

故 $\|T\| = M$.

#

变形： 令 $x \in L[a,b]$.

$$(Tx)(s) = y(s) = \int_a^b K(s,t)\,x(t)\,dt. \quad s\in[a,b]$$

则

$$T: L[a,b] \longrightarrow L[a,b].$$

$$\|y\|_{L^1} = \int_a^b \left| \int_a^b K(s,t)\, x(t)\, dt \right| ds$$

$$\le \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|\, |x(t)|\, dt\, ds.$$

$$= \int_a^b |x(t)| \underline{\left(\int_a^b |K(s,t)|\, ds \right)} dt.$$

记 $M' = \max\limits_{a \le t \le b} \int_a^b |K(s,t)|\, ds.$

$$\le M' \underline{\int_a^b |x(t)|\, dt} = M' \|x\|_{L^1}.$$

$$\|Tx\|_{L^1} \le M' \|x\|_{L^1}. \Rightarrow \|T\| \le M'.$$

反之也可以证明 $\|T\| \geq M'$.

存在 $s_0 \in [a,b]$, $M' = \int_a^b |K(s,t_0)|\,ds$.

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta$. $|K(s,t) - K(s',t')| < \varepsilon$.

$|s-s'|<\delta$, $|t-t'|<\delta$,

取 $\Delta = [t_1, t_2] \subset [a,b]$. $t_0 \in [t_1, t_2]$, 且 $t_2 - t_1 < \delta$.

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1} & t \in \Delta \\ 0 & t \notin \Delta. \end{cases}$$

则 $\tilde{x}(t) \in L^1$. 且 $\|\tilde{x}\|_{L^1} = 1$.

$$\|T\| \geq \|T\tilde{x}\|_{L^1} \geq \int_a^b \left| \int_a^b k(s,t)\tilde{x}(t)\, dt \right| ds$$

$$= \frac{1}{t_2-t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} k(s,t)\, dt \right| ds$$

$$\geq \underbrace{\frac{1}{t_2-t_1} \int_a^b \left| \int_{t_1}^{t_2} k(s,t_0)\, dt \right| ds}_{= M'} - \underbrace{\frac{1}{t_2-t_1} \int_a^b \int_{t_1}^{t_2} |k(s,t_0)-k(s,t)|\, dt\, ds}_{\leq \varepsilon(b-a)}.$$

$$\Rightarrow \quad \|T\| \geq \|T\tilde{x}\|_{L^1} \geq M' - \varepsilon(b-a).$$

由 ε 任意可得 $\|T\| \geq M'$.

从而 $\|T\| = M'$. #

例 $X=Y=l^{\infty}$ $a=\{a_n\}\in l^{\infty}$ 中固定元.

若 $x=(x_1,x_2,\cdots)$

$$T_a x=(a_1x_1,a_2x_2,\cdots,a_nx_n,\cdots).$$

则 T_a 是 $X\longrightarrow Y$ 的有界线性算子. 且

$$\|T_a\|=\|a\|_{\infty}.$$

证: T_a 是线性算子是显然的.

$\forall x=(x_1,x_2,\cdots)$. $|a_i|\le\|a\|_{\infty}$

$$\|T_a x\|_\infty = \sup_{i\geq 1} |a_i x_i|$$

$$\leq \|a\|_\infty \sup_{i\geq 1} |x_i| = \|a\|_\infty \|x\|_\infty .$$

故 T_a 是有界线性算子. 且 $\|T\| \leq \|a\|_\infty$

$\|a\|_\infty = \sup_{i\geq 1} |a_i|$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 有

$$|a_N| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon .$$

令 e_N 表示 l^∞ 中第 N 个坐标为 1, 其它项为 0 的数项.

则 $\|e_N\|_\infty = 1$.

即得 $\|Ta\| \geq \|Ta e_N\|_\infty = |a_N| \geq \|a\|_\infty - \varepsilon.$

由 ε 任意性可得

$$\|Ta\| \geq \|a\|_\infty.$$

所以 $\|Ta\| = \|a\|_\infty.$

例. $X = P[0,1]$ $\quad \|x\| = \max\limits_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|.$

$T: X \to X.$

$x \longmapsto (Tx)(t) = x'(t) \quad \forall t \in [0,1].\ x \in X.$

T是线性算子. T是无界的.

令 $x_n(t) = t^n$ $n=1,2,\cdots$, 则 $\|x_n\| = 1$.

而 $Tx_n(t) = nt^{n-1}$

$\|Tx_n\| = n$.

所以 T是无界.