2023.10.23

赋范线性空间是内积空间

$\Longleftrightarrow$ 范数满足平行四边形法则。

内积空间中，向量 x 与 y 的夹角定义为

$$\theta = \cos^{-1} \frac{|\langle x, y\rangle|}{\|x\|\,\|y\|}.$$

命题 1.6.21

非$\{0\}$内积空间X中必存在完备正交集.

证：因为$X\neq\{0\}$，所以X中的所有正交集依包含关系构成一个半序集.

并且每个全序子集类有一个上界.

$(S_1\subset S_2\subset S_3\cdots\subset\cdots)$

则由Zorn引理，这个半序集有极大元.

我们来证明这个极大元是完备正交集.

如若不然，则 $\exists\, x_0 \in S^{\perp}$，$x_0 \neq \theta$.

令 $\tilde{S} = S \sqcup \{x_0\}$，那么 $\tilde{S}$ 是正交集.

$\tilde{S}$ 是 X 的子集，$S \subset \tilde{S}$. 这与 S 是极大元矛盾.

#

定义1.6.22 内积空间 X 的正交规范集 $S=\{e_\alpha \mid \alpha\in A\}$ 称为一个基（封闭的），如果 $\forall x\in X$，有

$$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha .$$

其中 $\{(x,e_\alpha)\mid\alpha\in A\}$ 称为 x 关于 $\{e_\alpha\}$ 的 Fourier 系数.

定理1.6.23（Bessel不等式）

设$\mathcal{X}$为内积空间，如果$\{e_\alpha \mid \alpha\in A\}$是$\mathcal{X}$中的正交规范集，那么$\forall x\in\mathcal{X}$，有

$$\sum_{\alpha\in A} |(x,e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2.$$

证明：首先对于A的有限子集，不妨记为$i=1,\cdots,n$。证明$\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leq\|x\|^2$.

因为 $0 \le \| x - \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i \|^2$.

$$= \left(x - \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i ,\ x - \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i \right).$$

$$= (x,x) - \left(x, \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i, x\right)$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i ,\ \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)e_i\right)$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \overline{(x,e_i)}\,(x,e_i) - \sum_{i=1}^{n} (x,e_i)(e_i,x)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)\overline{(x,e_i)}$$

$$=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2$$

由此可见，$\forall m\in\mathbb{N}$，适合 $|(x,e_\alpha)|>\frac{1}{m}$ 的 $\alpha\in A$ 至多有有限多个。

所以使 $(x,e_\alpha)\neq 0$ 成立的 e_α $\alpha\in A$ 至多有可数多个。

$$\{\alpha\in A \mid (e_\alpha,x)\neq 0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\{\alpha\in A \mid |(x,e_\alpha)|>\frac{1}{m}\}.$$

所以 $\sum_{\alpha\in A_f}|(x,e_\alpha)|^2\leq\|x\|^2$

A_f 为 A 的任意有限子集.

进而得 $\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2\leq\|x\|^2$.

$\Updownarrow$

$\forall n\in\mathbb{N}$. $\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2\leq\|x\|^2$.

令 $n\to\infty$ 即可.

推论 1.6.24. $\mathscr{X}$ 是 Hilbert 空间，且 $\{e_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 是 $\mathscr{X}$ 中的规范正交集，那么 $\forall x \in \mathscr{X}$，有

$$\sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha \in \mathscr{X},$$

且 $\|x - \sum\limits_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha\|^2 = \|x\|^2 - \sum\limits_{\alpha \in A} |(x, e_\alpha)|^2$.

证明：不妨设使得 $(x,e_\alpha)\neq 0$ 的可数多个 $\alpha\in A$ 是 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 那么

$$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n.$$

由 Bessel 不等式有，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2 \text{ 收敛}.$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=m}^{m+p}(x,e_n)e_n\right\|^2 \\
&=\left(\sum_{n=m}^{m+p}(x,e_n)e_n,\ \sum_{n=m}^{m+p}(x,e_n)e_n\right) \\
&=\sum_{n=m}^{m+p}\Big((x,e_n)e_n,\ (x,e_n)e_n\Big)=\sum_{n=m}^{m+p}|(x,e_n)|^2\to 0 \\
&\qquad (m\to\infty,\ \forall p\in\mathbb{N})
\end{aligned}
$$

于是 $\left\{x_m=\sum_{n=1}^{m}(x,e_n)e_n\right\}$ 是基本列.

从而

$$\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}(x,e_n)e_n=\lim_{m\to\infty}x_m\in X$$

进而 由 $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(x,e_i)|^2.$$

令 $n\to\infty$ 即得:

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{\infty}(x,e_i)e_i\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{i=1}^{\infty}|(x,e_i)|^2$$

#

Bessel不等式何时取等号？

$$x \overset{?}{=} \sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha .$$

定理1.6.25. 设$\mathfrak{X}$是Hilbert空间. $S=\{e_\alpha|\alpha\in A\}$是$\mathfrak{X}$中的规范正交集，则下列几条等价.

(1) S是封闭　$\forall x$　$x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha$

(2) S完备　$S^\perp=\{0\}$

(3) Parseval等式　$\|x\|^2=\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2$　$\forall x\in\mathfrak{X}$.

证：(1) $\Rightarrow$ (2)

若 S 不完备，则 $\exists\, x \in X \setminus \{\theta\}$ 使

$x \perp S$ 即 $(x, e_\alpha) = 0 \quad \alpha \in A$.

但由(1)得 $x = \sum_{\alpha \in A} (x, e_\alpha) e_\alpha = \theta$. 矛盾.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

若 Parseval 等式不成立，对某个 $x \in \mathcal{X}$，

则 $\left\|x-\sum_{\alpha \in A}(x, e_\alpha) e_\alpha\right\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha \in A}|(x, e_\alpha)|^2>0$.

于是 $y=x-\sum_{\alpha \in A}(x, e_\alpha) e_\alpha \neq \theta$.

但 $y \in S^{\perp}$，$(y, e_\alpha)=0$，$\forall \alpha \in A$.

$S^{\perp} \neq\{\theta\}$，矛盾.

(3) $\Rightarrow$ (1).

$$\Big\|x-\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha\Big\|^2=\|x\|^2-\sum_{\alpha\in A}|(x,e_\alpha)|^2=0.$$

$$\Rightarrow \quad x=\sum_{\alpha\in A}(x,e_\alpha)e_\alpha. \qquad \#.$$

例 1.6.26. $L^2[0, 2\pi]$.

$$e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

是一组正交规范基.

$\forall u \in L^2[0, 2\pi]$ 对它的 Fourier 系数是

$$(u, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} u(t) \bar{e}^{int} dt$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

例1.6.27 l^2.

$$e_n=(0,0,\cdots,\underset{n}{1},0,\cdots,0).$$

$\{e_n\}$是l^2的一组正交规范基.

由线性无关元素构造正交规范基的方法,

Gram-Schmit 正交化

线性无关

$$\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\} \longrightarrow \{e_n\}.$$

$$y_1 = x_1 \qquad e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$$

$$y_2 = x_2 - (x_2, e_1) e_1 \qquad e_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|}$$

$$\vdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (x_n, e_i) e_i \qquad e_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}.$$

$$\cdots\cdots$$