2023.10.25.

定义 1.6.29. (同构内积空间).

给定内积空间 $(X_1, (\cdot,\cdot)_1)$ $(X_2, (\cdot,\cdot)_2)$.

如果存在 $X \longrightarrow X$ 的一个线性同构 T，满足

$$(Tx, Ty)_2 = (x, y)_1$$

则称内积空间 X_1 与 X_2 同构.

定理1.6.30.

Hilbert空间 $\mathscr{X}$ 可分当且仅当它有至多可数的正交规范基 S. 又若 S 的元素个数 $N<\infty$, 则 $\mathscr{X}$ 同构于 $\mathbb{K}^N$；若 $N=\infty$, 则 $\mathscr{X}$ 同构于 ℓ^2.

证明：必要性

X可分，则必在X中的可数稠密子集$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$。

那么必存在一个线性无关的子集$\{y_n\}_{n=1}^{N}$ ($N<\infty, N=\infty$)

使得

$$\operatorname{span}\{y_n\}_{n=1}^{N} = \operatorname{span}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}.$$

再对$\{y_n\}_{n=1}^{N}$应用Gram-Schmit正交化过程，

便得到一个规范正交集$\{e_n\}_{n=1}^{N}$.

且 $\overline{\mathrm{span}\{e_n\}_{n=1}^N} = \overline{\mathrm{span}\{y_n\}_{n=1}^N} = \overline{\mathrm{span}\{x_n\}_{n=1}^\infty}$

$= X$.

所以 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 X 的规范正交基.

充分性：设 $\{e_n\}_{n=1}^N$ 是 X 的正交规范基.

那么集合

$$\left\{ x = \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \,\middle|\, \mathrm{Re}\, a_n \text{ 与 } \mathrm{Im}\, a_n \text{ 为有理数} \right\}.$$

是 X 中的可数稠密子集. 从而 X 可分.

对于 $\mathcal{X}$ 中的规范正交基 $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ ($N=\infty$ 或 $N<\infty$).

作映射

$$T: x \longrightarrow \{(x, e_n)\}_{n=1}^{N} \quad (\forall x \in \mathcal{X}).$$

$$\left(x = \sum_{n=1}^{N} (x, e_n) e_n \right).$$

由 Parseval 等式有

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{N} |(x, e_n)|^2 \quad (\forall x \in \mathcal{X}).$$

那么 T 是 $\mathfrak{X} \to \mathbb{K}^N$ $(N<\infty)$ 或 $\mathfrak{X} \to \ell^2$ $(N=\infty)$ 的一对一在上线性同构。

此外

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} (x, e_i) e_i, \sum_{j=1}^{N} (y, e_j) e_j \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (x, e_i) \overline{(y, e_i)} \quad (\forall x, y \in \mathfrak{X}).$$

因此 T 保持内积，从而 $\mathfrak{X} \cong \underset{(N<\infty)}{\mathbb{K}^N}$ 或 $\underset{(N=\infty)}{\ell^2}$ #.

正交分解问题.

B空间$\mathscr{X}$, $M\subset\mathscr{X}$.

$x\in\mathscr{X}$, $x\notin M$.

M 有限维闭子空间时. ✓ $d(x,M)=\|x-y\|$ $\exists y\in M$.

M 无限维时 未必成立.

定理1.6.31. 如果 C 是 Hilbert 空间 $\mathscr{X}$ 中的一个闭凸子集，那么在 C 上存在唯一元素 x_0 取得最小范数：

$$\|x_0\| = \min\{\|x\| : x \in C\}.$$

证明：存在性：若 $\theta \in C$，则 $x_0 = \theta$ 即可.

若 $\theta \notin C$，则 $d = \inf\limits_{z \in C} \|z\| > 0$.

由下确界定义，$\forall n \in \mathbb{N}$，$\exists x_n \in C$ 使得

$$d \le \|x_n\| \le d + \frac{1}{n}.$$

下面来证 $\{x_n\}$ 是一个基本列.

这里要用到平行四边形等式：

$$\|x_n - x_m\|^2 = 2(\|x_n\|^2 + \|x_m\|^2) - 4\left\|\frac{x_n + x_m}{2}\right\|^2$$

$$\leqslant 2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{m}\right)^2\right] - 4d^2 \to 0$$

由 C 凸，故 $\frac{x_n + x_m}{2} \in C$. 从而 $\left\|\frac{x_n+x_m}{2}\right\| \geq d$.

故 $\{x_n\}$ 为基本列，故存在 $x_0 \in X$. $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

又 C 为闭故，$x_0 \in C$. $\|x_0\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = d$ #.

唯一性. 如果 $x_0, \hat{x}_0 \in C$ 使得

$\|x_0\| = \|\hat{x}_0\| = d$, 那么

$$\|x_0 - \hat{x}_0\| = 2\left(\|x_0\|^2 + \|\hat{x}_0\|^2\right) - 4\left\|\frac{x_0 + \hat{x}_0}{2}\right\|^2$$

$$\leq 2 \cdot 2d^2 - 4d^2 = 0.$$

从而 $x_0 = \hat{x}_0$. #

推论 1.6.32. 若 C 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{X}$ 的一个闭凸子集，则对 $\forall y \in \mathfrak{X}$，$\exists!\, x_0 \in C$ 使得

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in C} \|x - y\|.$$

证：考虑 $C - \{y\} = \{x - y \mid x \in C\}$ 即可。

推论 1.6.33. 若 M 是 Hilbert 空间 $\mathcal{X}$ 上的一个闭线性子空间，则 $\forall y \in \mathcal{X}$，$\exists!\, x_0 \in M$，使得

$$\|y - x_0\| = \inf_{x \in M} \|x - y\|.$$

最佳逼近元的刻画.

定理 1.6.34. 设 C 是内积空间 X 的一个闭凸子集. $\forall y \in X$, 为了 x_0 是 y 在 X 上的最佳逼近元, 必须且仅须它适合

$$\operatorname{Re}(y-x_0, x_0-x) \geq 0 \quad (\forall x \in C). \tag{1.6.22}$$

证明：$\forall x \in C$. 考察函数

$$\varphi_x(t) = \| y - tx - (1-t)x_0 \|^2 \quad t \in [0,1].$$

x_0 是 y 在 C 上的最佳逼近元，必须且仅须

$$\varphi_x(t) \geq \varphi_x(0). \quad (\forall x \in C, \forall t \in [0,1]).$$

(1.6.23).

只需证 (1.6.23) $\Longleftrightarrow$ (1.6.22).

因为

$$\varphi_x(t) = \|(y-x_0)+t(x_0-x)\|^2.$$

$$= \langle (y-x_0)+t(x_0-x), (y-x_0)+t(x_0-x)\rangle$$

$$= \|y-x_0\|^2 + \langle y-x_0, t(x_0-x)\rangle + \langle t(x_0-x), y-x_0\rangle + t^2\|x_0-x\|^2.$$

$$= \underbrace{\|y-x_0\|^2}_{\varphi_x(0)} + 2t\underbrace{\mathrm{Re}\langle y-x_0, x_0-x\rangle}_{\varphi_x'(0)} + t^2\|x_0-x\|^2.$$

注意到

$$\varphi_x'(0) = 2\operatorname{Re}(y-x_0, x_0-x),$$

上式可改写为

$$\varphi_x(t)-\varphi_x(0) = \varphi_x'(0)\,t + \underbrace{\|x_0-x\|^2 t^2}_{\geq 0}.$$

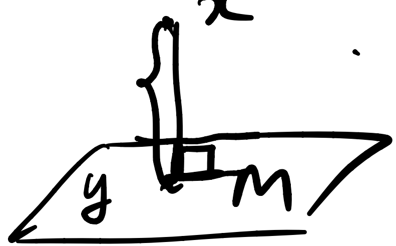
$$\underbrace{\varphi_x(t)-\varphi_x(0)\geq 0}_{(1.6.23)} \iff \underbrace{\varphi_x'(0)\geq 0}_{(1.6.22)}.$$

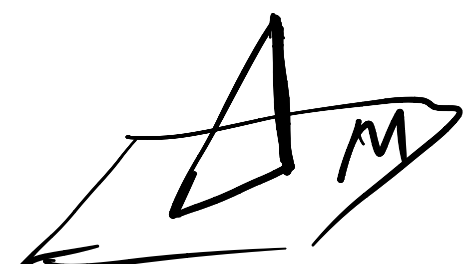
√ #.

推论 1.6.35：设 M 是 Hilbert 空间 $\mathfrak{X}$ 的一个闭线性子流形，$\forall x \in \mathfrak{X}$，

y 是 x 在 M 上的最佳逼近元，

当且仅当 $x-y \perp M-\{y\} \triangleq \{w=z-y \mid \forall z \in M\}$.





证：由上一定论

y 是 x 在 M 上的最佳逼近元，当且仅当

$$\mathrm{Re}(x-y,\ y-z) \geq 0 \quad \forall z \in M.$$

M 是线性子流形，故 $\forall z \in M$.

$$z = y + w \quad (w \in M - \{y\}).$$

$M-\{y\}$ 是闭线性子空间，从而是凸集.

从而 $\operatorname{Re}(x-y, \omega) \leq 0 \quad (\forall \omega \in M-\{y\})$.

且 $\operatorname{Re}(x-y, -\omega) \leq 0$

从而 $\operatorname{Re}(x-y, \omega) = 0 \quad \forall \omega \in M-\{y\}$.

进而 $\operatorname{Re}(x-y, i\omega) = 0. \Rightarrow \operatorname{Im}(x-y, \omega) = 0$.

从而 $(x-y, \omega) = 0. \quad \forall \omega \in M-\{y\}$.

#

推论1.6.36. 当M是闭线性子空间时，

$\forall x\in \mathcal{X}$，y是x在M上的最佳逼近元，必须且只须

$$x-y\perp M.$$

证明：y是x在M上的最佳逼近元$\Longleftrightarrow$

$$\forall \lambda\in\mathbb{K},\ \|x-y-\lambda z\|\geq\|x-y\|.\quad \forall z\in M.$$

$$\left(\|x-y-\lambda z\|^2 = |\lambda|^2 \|z\|^2 - \bar{\lambda}(x-y,z) - \lambda(z,x-y) + \|x-y\|^2. \right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad |\lambda|^2 \|z\|^2 - \bar{\lambda}(x-y,z) - \lambda(z,x-y) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

取 $\lambda = \frac{1}{\|z\|}(x-y,z)$ 代入得.

$$|(x-y,z)|^2 \|z\|^2 \leq 0.$$