

Probability 2

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 14 日

PROBLEM I 举例说明半集代数 \mathcal{T} 生成的 σ -代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T} \right\}.$$

但如果 Ω 至多可数时, 如上表述是正确的.

SOLUTION. 下证如上表述在 Ω 可数时, 不正确. 考虑 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A, |A^c| < \infty \text{ 或 } 0 \notin A, |A| < \infty\}$. 令 $\mathcal{A} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$, 先证 \mathcal{T} 为半集代数.

- 由于 $0 \notin \emptyset$, 且 $|\emptyset| = 0$, 那么 $\emptyset \in \mathcal{T}$. 又由于 $0 \in \mathbb{N}$, 且 $|\mathbb{N}^c| = |\emptyset| = 0$, 那么 $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$.
- $\forall A, B \in \mathcal{T}$, 若 $0 \in A, 0 \in B$, 那么 $0 \in A \cap B$. 由于 $|A^c|, |B^c| < \infty$, 那么 $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c| < \infty$. 故 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 若 $0 \in A, 0 \notin B$, 那么 $0 \notin A \cap B$. 由于 $|A^c|, |B| < \infty$, 那么 $|A \cap B| \leq |B| < \infty$. 从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 若 $0 \notin A, 0 \notin B$, 那么 $0 \notin A \cap B$. 又由于 $|A|, |B| < \infty$, 那么 $|A \cap B| \leq |A| < \infty$. 从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 综上, $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- $\forall A \in \mathcal{T}$, 若 $0 \in A$, 那么 $|A^c| < \infty$. 又由于 $0 \notin A^c$, 那么 $A^c \in \mathcal{T}$. 若 $0 \notin A$, 那么 $|A| < \infty$. 又由于 $0 \in A^c$, 那么 $|(A^c)^c| < \infty$. 故 $A^c \in \mathcal{T}$. 综上, $A^c \in \mathcal{T}$.

下证 $\sigma(\mathcal{T}) \neq \mathcal{A}$. 事实上, $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}$. 若 $\{0\} \in \mathcal{A}$, 那么 $\exists A_n \in \mathcal{T}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 使得 $\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 由于 $|\{0\}| = 1 < \infty$, 那么 $|A_n| < \infty, \forall n \geq 1$. 故 $0 \notin A_n, \forall n \geq 1$. 从而 $0 \notin \cup_{n \geq 1} A_n$. 故 $\{0\} \notin \mathcal{A}$. 而 $\{0\} = (\cup_{k \geq 1} \{k\})^c, \{k\} \in \mathcal{T}, k \geq 1$. 故 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T})$. \square

PROBLEM II 设 μ^* 为 μ 生成的外测度, 则测度空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是完全的 $\iff \mathcal{A} \supset \{A \subset \Omega : \mu^*(A) = 0\}$.

SOLUTION. 由于 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间, 那么 μ 的外测度 μ^* 可定义为

$$\mu^*(A) := \left\{ \sum_n \mu(A_n) : A \subset \cup_n A_n, A_n \in \mathcal{A} \right\}, A \subset \Omega$$

“ \implies ”: 由于 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为完全的, 那么 $\forall N$ 满足 $\exists B \in \mathcal{A}, N \subset B, \mu(B) = 0$, 都有 $N \in \mathcal{A}$. 若 $\mu^*(A) = 0$, 那么 $\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists A_{n,k} \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, 满足 $\cup_n A_{n,k} \supset A, \mu(\cup_n A_{n,k}) \leq \sum_n \mu(A_{n,k}) <$

$\mu^*(A) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$ 。那么 $\mathcal{A} \ni B := \cap_k \cup_n A_{n,k} \supset A$ 。而由于 $\mu(\cap_k^m \cup_n A_{n,k}) < \frac{1}{m} < \infty, m \in \mathbb{N}$ ，由 μ 的连续性可知， $0 \leq \mu(B) = \mu(\cap_k \cup_n A_{n,k}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\cap_k^m \cup_n A_{n,k}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$ 。故 $\mu(B) = 0$ 。从而 A 为 μ 零测集。故 $A \in \mathcal{A}$ 。

“ \Leftarrow ”： $\forall N$ 满足 $\exists B \in \mathcal{A}, N \subset B, \mu(B) = 0$ ，都有 $\mu^*(N) \leq \mu(B) = 0$ 。那么 $\mu^*(N) = 0$ 。从而 $N \in \mathcal{A}$ 。故 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为完全测度空间。□

PROBLEM III \mathcal{T} 为半集代数， μ 为 \mathcal{T} 上的有限测度。记 $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ 为 μ 扩张至 $\sigma(\mathcal{T})$ 的完全化，令

$$\mu_*(A) := \sup \left\{ \sum_n \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{T} \text{ 两两不交}, \sum_n A_n \subset A \right\},$$

$$\mathcal{A}_* := \{A \subset \Omega : \mu^*(A) = \mu_*(A)\}.$$

证明： $\mathcal{A}^* \supset \mathcal{A}_*$ 。

SOLUTION. $\forall A \in \mathcal{A}_*$ ，那么 $\mu_*(A) = \mu^*(A)$ 。由 μ_* 的定义及 μ 有限知， $\forall k \in \mathbb{N}_+$ ， $\exists A_{n,k} \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$ ，两两不交，且 $\cup_n A_{n,k} \subset A$ ，满足 $\sum_n \mu(A_{n,k}) > \mu_*(A) - \frac{1}{k}$ 。由于 $A_{n,k}$ 两两不交，那么 $\mu(\cup_n A_{n,k}) = \sum_n \mu(A_{n,k})$ 。由于书本定理 1.51 知， μ^* 即为 μ 的外测度， \mathcal{A}^* 上的测度。故 $\mu^*(\cup_n A_{n,k}) = \mu(\cup_n A_{n,k}) = \sum_n \mu(A_{n,k})$ 。令 $B := \cup_k \cup_n A_{n,k} \in \sigma(\mathcal{T}) \subset \mathcal{A}^*$ ，那么 $B = \cup_{m=1}^{\infty} \cup_{k=1}^m \cup_{n=0}^{\infty} A_{n,k} \subset A \subset \Omega$ ， $\mu^*(B) \leq \mu^*(A) \leq \mu^*(\Omega) < \infty$ 。且 $A_{n,k}$ 两两不交 $\forall n, k$ 。由于 $\mu^*(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^*(\cup_{k=1}^m \cup_{n=0}^{\infty} A_{n,k}) \geq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu^*(\cup_n A_{n,m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\cup_n A_{n,m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu_*(A) - \frac{1}{m} = \mu_*(A)$ ，从而 $\mu^*(B) \geq \mu_*(A) = \mu^*(A)$ 。故 $\mu^*(B) = \mu^*(A)$ 。令 $C = A \setminus B$ ，由于 $B \in \mathcal{A}^*$ ，那么 $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c) = \mu^*(B) + \mu^*(C)$ 。从而 $\mu^*(C) = 0$ 。那么 C 为 μ^* -零测集。故 $A = B \cup C$ 。由 $(\Omega, \mathcal{A}^*, \mu^*)$ 完全及书本定理 1.51 知， $\mathcal{A}^* = \{B \cup N : B \in \mathcal{A}^*, N \text{ 为 } \mu^* \text{ 零测集}\}$ 。从而， $A \in \mathcal{A}^*$ 。□

PROBLEM IV 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间， μ^* 为由 μ 生成的外测度。证明 $N \subset \Omega$ 为 μ 零测集当且仅当 $\mu^*(N) = 0$ 。

SOLUTION. “ \Rightarrow ”：若 N 为 μ 零测集，那么 $\exists B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B$ 。那么 $\mu^*(N) \leq \mu(B) = 0$ 。故 $\mu^*(N) = 0$ 。

“ \Leftarrow ”：若 $\mu^*(N) = 0$ ，那么 $\mu^*(N) = \inf \{ \sum_n \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}, \cup_n A_n \supset N \} = 0$ 。故 $\forall k \geq 1, \exists A_{n,k} \in \mathcal{A}, n \geq 1$ ，满足 $\cup_n A_{n,k} \supset N, \sum_n \mu(A_{n,k}) < \mu^*(N) + \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$ 。令 $B := \cap_k \cup_n A_{n,k}$ ，则 $B \supset N, B \in \mathcal{A}$ 。那么 $\mu(B) = \mu(\cap_m \cap_{1 \leq k \leq m} \cup_n A_{n,k}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\cap_{1 \leq k \leq m} \cup_n A_{n,k}) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \mu(\cup_n A_{n,m}) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$ 。那么 N 为 μ 零测集。□