

Probability 3

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 22 日

PROBLEM I 分布函数是否是不降的? 举出反例或者给出证明。

PROBLEM II 证明若 $F(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ 是连续的, 则 $\eta = F(\xi)$ 具有 $(0, 1)$ 上的均匀分布。

PROBLEM III 设 $\xi_n, n \in \mathbb{N}_+$ 为 i.i.d. 随机变量, 分布为 μ 。给定 $A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) > 0$, 定义 $\tau = \inf\{k : \xi_k \in A\}$ 。证明 ξ_τ 的分布为 $\frac{\mu(\cdot \cap A)}{\mu(A)}$ 。 PROBLEM IV 若 $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ 为独立的 π 系, 那么 $\sigma(\mathcal{C}_1), \dots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ 独立。 PROBLEM V

1. 设 $\{A_n\}_{n \geq 1}$ 为独立事件序列, 令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{A_n, A_{n+1}, \dots\}$. 证明 $\forall A \in \mathcal{J}$, 有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.
2. 设 $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ 为独立随机变量, 令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\xi_n, \xi_{n+1}, \dots\}$. 证明 $\forall A \in \mathcal{J}$, 有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.