Probability 1

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 11 日

PROBLEM I 证明 σ-代数是集代数。

SOLUTION. 假定 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ 对补运算封闭。只需证明 $\mathcal{A}$ 对有限并封闭。$A, B \in \mathcal{A}$，令 $A_n = \varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A}, n \geq 3$，那么 $A \cup B \cup \bigcup_{n\geq 3} A_n = A \cup B \in \mathcal{A}$。 □

PROBLEM II 设 $\mathcal{C}$ 是集类，则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。

SOLUTION. 令 $\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$. 下证 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$，即证 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数。

- 由于 $\forall A \in \mathcal{C}, \sigma(\{A\}) = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$，那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$。
- 由 $\Omega \in \sigma(\varnothing) = \{\varnothing, \Omega\}$，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$。
- 设 $A \in \mathcal{A}$，那么 $\exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0$，$A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 由于 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 是 σ-代数，那么 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 所以 $A^c \in \mathcal{A}$。
- 设 $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$，那么 $\exists \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \forall n \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$，由 $|\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$，可知 $|\mathcal{T}| \leq \aleph_0, \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$，那么 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$。所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{T})$。那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$。

综上，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数。故 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$。又由于 $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$，故 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$。从而，$\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。 □

PROBLEM III σ-代数 $\mathcal{A}$ 称为可数生成的，如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$。证明 $\mathcal{B}^d$ 是可数生成的。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{B(p,r) : p \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}_+\}$，其中 $B(p,r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| < r\}$。显然 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$。下证 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{A})$。令 $\mathcal{O} := \{\mathcal{B}^d\text{中的开集}\}$，由于 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O})$，那么 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$，从而 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{O})$。只需证明 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$。
$\forall A \in \mathcal{O}$, $\forall x \in A$,$\exists U = B(x,s)$,$x \in U \subset A$。由于 $\mathbb{Q}^d$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中稠密，故 $\exists p_x \in B(x, \frac{s}{2}) \cap \mathbb{Q}^d$。取 $r_x \in \mathbb{Q}_+$ 使 $\|x - p_x\| < r_x < \frac{s}{2}$，由 $\forall y \in B(p_x, r_x)$，有 $\|y - x\| \leq \|y - p_x\| + \|p_x - x\| < r_x + \frac{s}{2} < s$ 得 $B(p_x, r_x) \subset B(x,s) \subset A$，则有 $\bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x) \subset A$。显然 $x \in B(p_x, r_x)$，那么 $A \subset \bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x)$，

从而 $\forall A \in \mathcal{O}, \bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x) = A$。由于 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$，那么 $\bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x), \forall A \in \mathcal{O}$ 一定为可数的并。从而 $\forall A \in \mathcal{O}, A \in \sigma(\mathcal{A})$。 $\square$

PROBLEM IV 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 中任一集代数，则存在 Ω 中的单调类 $\mathcal{M}_0$ 满足:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$，
2. 对于包含 $\mathcal{C}$ 的单调类 $\mathcal{M}$，有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$。

称这样的单调类为 $\mathcal{C}$ 生成的单调类，记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{\mathcal{M} : \mathcal{M}\text{为单调类且}\mathcal{C} \subset \mathcal{M}\}$。由于 Ω 的全体子集 $P(\Omega)$ 显然为包含 $\mathcal{C}$ 的单调类。那么 $P(\Omega) \in \mathcal{A}$，故 $\mathcal{A} \neq \varnothing$。令 $\mathcal{M}_0 = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$，那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$。下证 $\mathcal{M}_0$ 为单调类。

- $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$。$\forall A \in \mathcal{A}$，$A_n \in A$，由于 A 为单调类，那么 $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in A$。故 $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$。
- 同理可证，$A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，则 $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \cap_{A\in\mathcal{A}} A$。

设 $\mathcal{M}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的单调类，那么 $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$，那么 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0$。 $\square$

PROBLEM V 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION.

Lemma 1. $\Omega_i, i = 1, 2$ 为两个集合，$A_i, B_i \subset \Omega_i, i = 1, 2$，那么以下命题正确。

1. $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$;
2. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$，那么 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$，其中 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交。
3. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$，那么 $A_1 \subset B_1$，$A_2 \subset B_2$。

证明. 1. $\forall (a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$，那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$ 且 $(a, b) \in B_1 \times B_2$。从而 $a \in A_1, b \in A_2, a \in B_1, b \in B_2$。故 $a \in A_1 \cap B_1$，$b \in A_2 \cap B_2$。那么 $(a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$。另一方面，$\forall (a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \times B_2)$，那么 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \times B_2$，故 $(a, b) \in A_1 \times A_2$，$(a, b) \in B_1 \times B_2$。故 $(a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$。

2. 先证 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交: 由1知，$(A_1 \times A_2) \cap ((B_1/A_1) \times B_2) = \varnothing \times B_2 = \varnothing$。$(A_1 \times A_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = A_1 \times \varnothing = \varnothing$。$((B_1/A_1) \times B_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = \varnothing \times B_2$。下证 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$。由于 $A_1, B_1/A_1 \subset B_1, A_2, B_2/A_2 \subset B_2$，那么 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$，从而 $(A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$。又 $B_1 \times B_2 = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup ((A_1 \times (B_2/A_2)) \cup (A_1 \times A_2))$，从而结论正确。

3. 若 $A_1/B_1 \neq \varnothing$，设 $a \in A_1/B_1$，取 $b \in A_2$，那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$，但 $(a, b) \notin B_1 \times B_2$，与 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ 矛盾。

$\square$

由于 $\mathcal{A}_i, 1\le i\le n$ 是 Ω_i 上的 σ-代数，从而 $\mathcal{A}_i, 1\le i\le n$ 为 Ω_i 上的半集代数。我们可以用数学归纳法证明以下命题：设 $\Omega_i, i=1,2,\cdots,n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的半集代数，那么 $\mathcal{C}_n=\{A_1\times\cdots\times A_n : A_i\in\mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

- 当 $n=1$ 时，$\mathcal{C}_1=\mathcal{A}_1$，显然为半集代数。
- 当 $n=2$ 时，$\mathcal{C}_2=\{A_1\times A_2 : A_i\in\mathcal{A}_i, i=1,2\}$。下证 $\mathcal{C}_2$ 为半集代数。
  - 由于 A_1, A_2 为半集代数，那么 $\Omega_i,\varnothing\in A_i\ i=1,2$。从而 $\{\varnothing\times\varnothing,\Omega_1\times\Omega_2\}\subset\mathcal{C}_1$。
  - 设 $A_1\times A_2, B_1\times B_2\in\mathcal{C}$，那么由引理1中的1可知 $(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)=(A_1\cap B_1)\times(A_2\cap B_2)$。又由 $\mathcal{A}_i, i=1,2$ 均为半集代数，那么 $A_i\cap B_i\in\mathcal{A}_i, i=1,2$。那么 $(A_1\cap B_1)\times(A_2\times B_2)\in\mathcal{C}_2$。故 $(A_1\times A_2)\cap(B_1\times B_2)\in\mathcal{C}_2$。
  - 若 $A_1\times A_2\subset B_1\times B_2$，那么由引理1中的3知 $A_1\subset B_1$，$A_2\subset B_2$。由于 $A_i, B_i\in\mathcal{A}_i$，那么 $\exists C_k^i\in\mathcal{A}_i, 1\le k\le N_i, N_i\in\mathbb{N}_+$ 两两不交，与 A_i 也不交，且 $B_i=A_i\cup(\bigcup_{1\le k\le N_i}C_k^i), i=1,2$。由于 $C_k^i\in\mathcal{A}_i, 1\le k\le N_i, i=1,2$，那么 $C_k^1\times B_2\in\mathcal{C}_2, 1\le k\le N_1$，$A_1\times C_k^2\in\mathcal{C}_2, 1\le k\le N_2$。由于 $C_k^i\in\mathcal{A}_i, 1\le k\le N_i, i=1,2$ 两两不交，那么 $C_k^1\times B_2, 1\le k\le N_1$ 两两不交，$A_1\times C_k^2, 1\le k\le N_2$ 两两不交。又由于1中的2知，$B_1\times B_2=(A_1\times A_2)\cup((B_1/A_1)\times B_2)\cup(A_1\times(B_2/A_2))$。那么

    $$\begin{aligned}B_1\times B_2=&(A_1\times A_2)\cup((\bigcup_{1\le k\le N_1}C_k^1)\times B_2)\cup(A_1\times(\bigcup_{1\le k\le N_2}C_k^2))\\=&(A_1\times A_2)\cup\bigcup_{1\le k\le N_1}(C_k^1\times B_2)\cup\bigcup_{1\le k\le N_2}(A_1\times C_k^2)\end{aligned}$$

    又由 $(A_1\times A_2),((B_1/A_1)\times B_2),(A_1\times(B_2/A_2))$ 两两不交，从而 $(A_1\times A_2),(\bigcup_{1\le k\le N_1}(C_k^1\times B_2)),(\bigcup_{1\le k\le N_2}(A_1\times C_k^2))$，故 $(A_1\times A_2),(C_k^1\times B_2),(A_1\times C_j^2), 1\le k\le N_1, 1\le j\le N_2$ 两两不交。从而 $B_1\times B_2$ 能表示成 $A_1\times A_2$ 与 $\mathcal{C}_2$ 中元素的不交并。
- 设 $n=k, 1\le k\le n-1$ 时，$\mathcal{C}_k:=\{A_1\times\cdots\times A_k : A_i\in\mathcal{A}_i, 1\le i\le k\}$ 为半集代数。那么

  $$\begin{aligned}\mathcal{C}_{k+1}:=&\{A_1\times\cdots\times A_{k+1} : A_i\in\mathcal{A}_i, 1\le i\le k+1\}\\=&\{(A_1\times\cdots\times A_k)\times A_{k+1} : A_i\in\mathcal{A}_i, 1\le i\le k+1\}\\=&\{C\times A : C\in\mathcal{C}_k, A\in\mathcal{A}_{k+1}\}.\end{aligned}$$

  由 $n=2$ 的情形可知 $\mathcal{C}_{k+1}$ 为半集代数。

$\square$

PROBLEM VI 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 考虑 $\Omega=\{1,2,3\}, \mathcal{T}=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2,3\},\varnothing\}$，$\Phi:\mathcal{T}\to\{0,1\}$，其中 $\Phi(\{\varnothing\})=0, \Phi(A)=1, A\in\mathcal{T}\setminus\{\varnothing\}$。那么 Φ 为 $\mathcal{T}$ 上的可加测度。考虑 $\{1\},\{2\},\{3\}$ 两两不交且 $\{1,2,3\}=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}\in\mathcal{T}$，则 $\Phi(\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\})=\Phi(\{1,2,3\})=1$，$\sum_{k=1}^3\Phi(\{k\})=\sum_{k=1}^3 1=3$。故 $\sum_{k=1}^3\Phi(\{k\})\neq\Phi(\{1,2,3\})$。故 Φ 不是有限可加测度。 $\square$

PROBLEM VII 举例说明半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ-代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}.$$

但如果 Ω 至多可数时，如上表述是正确的.

SOLUTION. 下证如上表述在 Ω 可数时，不正确。考虑 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A, |A^c| < \infty 或 0 \notin A, |A| < \infty\}$。令 $\mathcal{A} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$，先证 $\mathcal{T}$ 为半集代数。

- 由于 $0 \notin \varnothing$，且 $|\varnothing| = 0$，那么 $\varnothing \in \mathcal{T}$。又由于 $0 \in \mathbb{N}$，且 $|\mathbb{N}^c| = |\varnothing| = 0$，那么 $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$。
- $\forall A, B \in \mathcal{T}$，若 $0 \in A, 0 \in B$，那么 $0 \in A \cap B$。由于 $|A^c|, |B^c| < \infty$，那么 $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c| < \infty$。故 $A \cap B \in \mathcal{T}$。若 $0 \in A, 0 \notin B$，那么 $0 \notin A \cap B$。由于 $|A^c|, |B| < \infty$，那么 $|A \cap B| \leq |B| < \infty$。从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$。若 $0 \notin A, 0 \notin B$，那么 $0 \notin A \cap B$。又由于 $|A|, |B| < \infty$，那么 $|A \cap B| \leq |A| < \infty$。从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$。综上，$A \cap B \in \mathcal{T}$。
- $\forall A \in \mathcal{T}$，若 $0 \in A$，那么 $|A^c| < \infty$。又由于 $0 \notin A^c$，那么 $A^c \in \mathcal{T}$。若 $0 \notin A$，那么 $|A| < \infty$。又由于 $0 \in A^c$，那么 $|(A^c)^c| < \infty$。故 $A^c \in \mathcal{T}$。综上，$A^c \in \mathcal{T}$。

下证 $\sigma(\mathcal{T}) \neq \mathcal{A}$。事实上，$\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}$。若 $\{0\} \in \mathcal{A}$，那么 $\exists A_n \in \mathcal{T}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$，使得 $\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$。由于 $|\{0\}| = 1 < \infty$，那么 $|A_n| < \infty, \forall n \geq 1$。故 $0 \notin A_n, \forall n \geq 1$。从而 $0 \notin \cup_{n \geq 1} A_n$。故 $\{0\} \notin \mathcal{A}$。而 $\{0\} = (\cup_{k \geq 1}\{k\})^c$，$\{k\} \in \mathcal{T}, k \geq 1$。故 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T})$。 $\square$

PROBLEM VIII 设 $\mathcal{C}_n$ 为单调上升的子集类:

1. 若 $\mathcal{C}_n$ 为集代数，则 $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$ 为集代数。
2. 若 $\mathcal{C}_n$ 为 σ 代数，举例 $\cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$ 不为 σ 代数。

SOLUTION. 由于 $\mathcal{C}_n$ 单调上升，那么 $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}, n \geq 1$.

1. 令 $\mathcal{A} := \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$。下证 $\mathcal{A}$ 为集代数。
   - 由于 $\mathcal{C}_n, n \geq 1$ 为集代数，那么 $\Omega \in \mathcal{C}_n, n \geq 1$。故 $\Omega \in \cup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$。
   - $\forall A, B \in \mathcal{A}$，那么 $\exists n_1, n_2 \geq 1$，满足 $A \in \mathcal{C}_{n_1}, B \in \mathcal{C}_{n_2}$。不妨 $n = \max\{n_1, n_2\}$，那么 $A \in \mathcal{C}_{n_1} \subset \mathcal{C}_n, B \in \mathcal{C}_{n_2} \subset \mathcal{C}_n$. 由于 $\mathcal{C}_n$ 为集代数，那么 $A \setminus B \in \mathcal{C}_n$。故 $A \setminus B \in \mathcal{A}$。
2. 考虑 $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{C}_n = \sigma(\{\{k\} : 1 \leq k \leq n\})$。令 $\mathcal{A} := \cup_{k=1}^{\infty}\mathcal{C}_n$。$\forall n \geq 1$，令 $T_n := \{k : k > n\}$，那么 $\mathcal{T}_n := \{\{k\} : 1 \leq k \leq n\} \cup \{T_n\}$ 为 $\mathcal{C}_n$ 的一个划分。下证 $\mathcal{C}_n = \{A \subset \mathbb{N} : A \cap T_n = \varnothing 或 A \cap T_n = T_n\} =: \mathcal{A}_n$。显然 $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{A}_n$，故只需证明，$\mathcal{A}_n$ 为 σ-代数。
   (a) $\mathbb{N} \in \mathcal{A}_n$ 显然。
   (b) $\forall A, B \in \mathcal{A}_n$，若 $A \cap T_n = B \cap T_n = \varnothing$，那么 $(A \cap B) \cap T_n = \varnothing$，那么 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$。若 $A \cap T_n = \varnothing$，$B \cap T_n = T_n$，那么 $(A \cap T_n) \cap (B \cap T_n) = (A \cap B) \cap T_n = \varnothing$，那么 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$。若 $A \cap T_n = B \cap T_n = T_n$，那么 $(A \cap B) \cap T_n = T_n$，从而 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$。
   (c) $\forall A_t \in \mathcal{A}_n, t \geq 1, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$，那么至多一个 A_t 满足 $A_t \cap T_n = T_n$。若 $\forall t \geq 1, A_t \cap T_n = \varnothing$，那么 $\cup_{t \geq 1} A_t \cap T_n = \varnothing$，从而 $\cup_{t \geq 1} A_t \in \mathcal{A}_n$。若 $\exists t \geq 1, A_t \cap T_n = T_n$，不妨设 $A_1 \cap T_n = T_n$，那么 $\cup_{t \geq 1} A_t \cap T_n = T_n$，从而 $\cup_{t \geq 1} A_t \in \mathcal{A}_n$。

那么 $\forall C\in\mathcal{C}_n$，$|C|<\infty$ 或 $|C^c|\le|T_n^c|<\infty$。由于 $\forall n\ge1$，$\{2n\}\in\mathcal{C}_{2n}\subset\mathcal{A}$，而 $\cup_{n\ge1}\{2n\}=2\mathbb{N}$，$|2\mathbb{N}|,|\mathbb{N}\setminus2\mathbb{N}|=\infty$。故 $2\mathbb{N}\notin\mathcal{C}_n,\forall n\ge1$。从而 $2\mathbb{N}\notin\mathcal{A}$。

□

PROBLEM IX 证明 σ-代数不可能是可数无穷的。

Lemma 2. $\Omega\neq\varnothing,\{A_\alpha\subset\Omega:\alpha\in I\}=:\mathcal{A}$ 为 Ω 的一个划分，令 $\mathcal{F}:=\sigma(\mathcal{A})$，那么 $|\mathcal{F}|=2^{|\mathcal{A}|}$。

SOLUTION. 考虑 $\phi:\mathcal{P}(I)\to\mathcal{P}(\Omega)$, $J\mapsto\cup_{i\in J}A_i$。显然 ϕ 为单射。下证 $\mathrm{Im}(\phi)=\mathcal{F}$。由于 $\forall J\in\mathcal{P}(I)$，$\cup_{i\in J}A_i\in\mathcal{F}$，那么 $\mathrm{Im}(\phi)\subset\mathcal{F}$。故只需证明 $\mathcal{F}\subset\mathrm{Im}(\phi)$。由于 $\forall j\in I$，$\{j\}\in\phi(I)$，那么 $\cup_{i\in\{j\}}A_i=A_j\in\mathrm{Im}(\phi)$。从而 $\mathcal{A}\subset\mathrm{Im}(\phi)$。故只需证明 $\mathrm{Im}(\phi)$ 为 σ 代数。

- 由于 $\phi(I)=\cup_{i\in I}A_i=\Omega$，那么 $\Omega\in\mathrm{Im}(\phi)$。
- $\forall I,J\in\mathcal{P}(I)$，那么 $I\cap J\in\mathcal{P}(I)$，故 $\cup_{i\in I\cap J}A_i=(\cup_{i\in I}A_i)\cap(\cup_{i\in J}A_i)\in\mathrm{Im}(\phi)$。
- $\forall I_n\in\mathcal{P}(I),n\ge1$，那么 $\cup_{n\ge1}I_n\in\mathcal{P}(I)$，故 $\cup_{n\ge1}(\cup_{i\in I_n}A_i)=\cup_{i\in\cup_{n\ge1}I_n}A_i\in\mathrm{Im}(\phi)$。

□

SOLUTION. 设 $\mathcal{F}$ 为 Ω 上 σ-代数。$\mathcal{A}$ 为 $\mathcal{F}$ 上的所有原子集组成的集合。

- 若 $\cup\mathcal{A}=\Omega$，且 $|\mathcal{A}|<\infty$，那么由引理 2 知，$|\mathcal{F}|=2^{|\mathcal{A}|}$。故 $\mathcal{F}$ 为有限集。
- 若 $\cup\mathcal{A}=\Omega$，且 $|\mathcal{A}|=\infty$，那么取 $A_n\in\mathcal{A},n\ge1$，以及 $A_0=\Omega\setminus\cup_{n\ge1}A_n$。那么 $\{A_n:n\in\mathbb{N}\}=:\mathcal{B}$ 为 Ω 的可数分割。由引理 2知，$|\mathcal{F}|=2^{|\mathcal{B}|}>\aleph_0$.
- 若 $\cup\mathcal{A}\subsetneq\Omega$，那么 $\exists F_n,n\ge1$, 满足 $F_n\supset F_{n+1},n\ge1,F_0=\Omega$。考虑 $A_n:=F_n\setminus F_{n+1},n\ge0$, 那么 $\mathcal{B}:=\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ 为 Ω 的可数分割。由引理 2知，$|\mathcal{F}|=2^{|\mathcal{B}|}>\aleph_0$

□

PROBLEM X 设 $(\Omega_n,\mathcal{A}_n,\mu_n),n\ge1$ 为一列测度空间，Ω_n 两两不交。令

$$\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n,\mathcal{A}=\{A\subset\Omega:\forall n\ge1,A\cap\Omega_n\in\mathcal{A}_n\},\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A\cap\Omega_n),A\in\mathcal{A}$$

证明 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为测度空间。

SOLUTION. 先证 $\mathcal{A}$ 为 σ-代数。

- 由于 $\Omega=\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n$，那么 $\Omega\cap\Omega_n=\Omega_n\in\mathcal{A}_n,\forall n\ge1$。故 $\Omega\in\mathcal{A}$。
- $\forall A,B\in\mathcal{A}$, 那么 $\forall n\ge1,A\cap\Omega_n,B\cap\Omega_n\in\mathcal{A}_n$。由于 $\mathcal{A}_n$ 为 σ 代数, 那么 $(A\cap\Omega_n)\cap(B\cap\Omega_n)=(A\cap B)\cap\Omega_n\in\mathcal{A}_n$。从而 $A\cap B\in\mathcal{A}$。
- $A_n\in\mathcal{A},n\ge1$，那么 $\forall k\ge1,A_n\cap\Omega_k\in\mathcal{A}_k$。由于 $\mathcal{A}_k$ 为 σ 代数，那么 $\bigcup_{n\ge1}(A_n\cap\Omega_k)=(\bigcup_{n\ge1}A_n)\cap\Omega_k\in\mathcal{A}_k$，从而 $\bigcup_{n\ge1}A_n\in\mathcal{A}$。

再证 μ 为测度。

- 由于 $\forall A\in\mathcal{A}$，$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A\cap\Omega_n)$，而 $A\cap\Omega_n\in\mathcal{A}_n,\forall n\ge1$，故 $\mu_n(A\cap\Omega_n)\ge0$. 从而，$\mu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n(A\cap\Omega_n)\ge0$.

- $\forall A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$，$\sum_{n\geq 1} A_n = \sum_{n\geq 1}(A_n \cap \bigcup_{k\geq 1}\Omega_k) = \sum_{n\geq 1}(\sum_{k\geq 1}(A_n \cap \Omega_k)) = \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}(A_n \cap \Omega_k) = \sum_{k\geq 1}(\sum_{n\geq 1} A_n) \cap \Omega_k$。由于 $\forall n \geq 1, A_n \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$，那么 $\sum_{n\geq 1} A_n \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$ 。故有 $\mu(\sum_{n\geq 1} A_k \cap \Omega_k) = \mu_k(\sum_{n\geq 1} A_n \cap \Omega_k) = \sum_{n\geq 1}\mu_k(A_n \cap \Omega_k)$。

$$\begin{aligned}
\mu(\sum_{n\geq 1} A_n) &= \mu(\sum_{n\geq 1}(\sum_{k\geq 1}(A_n \cap \Omega_k))) \\
&= \mu(\sum_{k\geq 1}(\sum_{n\geq 1}(A_n \cap \Omega_k))) \\
&= \sum_{k\geq 1}\mu_k(\sum_{n\geq 1}(A_n \cap \Omega_k)) \\
&= \sum_{k\geq 1}\sum_{n\geq 1}\mu_k(A_n \cap \Omega_k) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1}\mu_k(A_n \cap \Omega_k) \\
&= \sum_{n\geq 1}\mu(A_n)
\end{aligned}$$

□

PROBLEM XI 设 Ω 为一无穷集，令 $\mathcal{F}$ 为 Ω 中的有限集或者余有限集构成的集合，$\mathbb{P}$ 在两类集合上取值分别为 0 或 1。

- 证明 $\mathcal{F}$ 为集代数，$\mathbb{P}$ 为有限可加。
- 若 Ω 为可数集，则 $\mathbb{P}$ 不可能为 σ 可加。
- 若 Ω 为不可数集，则 $\mathbb{P}$ 为可数可加。

SOLUTION. 1. 先证 $\mathcal{F}$ 为集代数：

   - 由于 $\Omega^c = \varnothing$，$|\varnothing| = 0$，故 $\Omega \in \mathcal{F}$。
   - $\forall A, B \in \mathcal{F}$，若 $|A| < \infty$，那么 $|A \setminus B| = |A \cap B^c| \leq |A| < \infty$。若 $|A^c|, |B| < \infty$，那么 $|(A \setminus B)^c| = |A^c \cup B| \leq |A^c| + |B| < \infty$。若 $|A^c|, |B^c| < \infty$，那么 $|A \setminus B| = |A \cap B^c| \leq |B^c| < \infty$。综上所述，$A \setminus B \in \mathcal{F}$。

   再证 $\mathbb{P}$ 有限可加。由于 $\mathcal{F}$ 为集代数，故只需证明 $\mathbb{P}$ 可加。设 $A, B \in \mathcal{F}$，$A \cap B = \varnothing$，$A \cup B \in \mathcal{F}$，若 $|A|, |B| < \infty$，$\mathbb{P}(A \cup B) = 0 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$。若 $|A|, |B^c| < \infty$，那么 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$，故 $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$。若 $|A^c|, |B^c| < \infty$，那么由 $A \cap B = \varnothing$，知 $B \subset A^c$，那么 $|B| \leq |A^c| < \infty$，而 $|\Omega| = \infty$，故 $|B| = |\Omega \setminus B^c| = \infty$，矛盾。从而 $|A^c|, |B^c| < \infty$ 不成立。

2. $\mathbb{P}(\sum_{a\in\Omega}\{a\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$，而 $\sum_{a\in\Omega}\mathbb{P}(\{a\}) = 0$，故 $\mathbb{P}$ 不是 σ 可加。

3. $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$，$A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, \sum_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$。那么至多一个 A_n 是余有限的。否则，根据上一小问的证明，两余有限集必有交。若 A_n 中没有余有限集，那么 $\sum_{n\geq 1} A_n$ 至多可数，而 Ω 为不可数集，从而 $\sum_{n\geq 1} A_n$ 不为余有限集。又由 $\sum_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{F}$，则 $\sum_{n\geq 1} A_n$ 为有限

集，此时 A_n 中只有有限个集合非空，且为有限集。那么 $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 1} A_n) = 0 = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$。若 A_n 中有余有限集，不妨假设 A_1 余有限，那么 $\mathbb{P}(\sum_{n\geq 1} A_n) = 1 = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

$\square$