Graduate Homework In Mathematics

Probability 4

白永乐

25110180002

ylbai@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 5 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 分布函数是否是不降的？举出反例或者给出证明。

SOLUTION. 1 维情形由定义显然是不降的，高维情形未必，下面给出一个例子。令 $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-x-y$，则有 $\Delta_{a,b}F=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)=\mathrm{e}^{b_1+b_2}-\mathrm{e}^{a_1+b_2}-\mathrm{e}^{b_1+a_2}+\mathrm{e}^{a_1+a_2}-b_1-b_2+a_1+b_2+b_1+a_2-a_1-a_2=(\mathrm{e}^{b_1}-\mathrm{e}^{a_1})(\mathrm{e}^{b_2}-\mathrm{e}^{a_2})\geq 0$，但 $F(-1,-1)\geq 2>0=F(0,0)$。 □

PROBLEM II 证明若 $F(x)=\mathbb{P}(\xi<x)$ 是连续的，则 $\eta=F(\xi)$ 具有 $(0,1)$ 上的均匀分布。

SOLUTION. 只需证明 $\mathbb{P}(F(\xi)<x)=x, x\in(0,1)$。令 $G(x):=\inf\{y\in\mathbb{R}:F(y)\geq x\}, x\in[0,1]$。考查事件 $\xi<G(x)$，由 $G(x)$ 的定义知其等价于 $F(\xi)<x$，故 $\mathbb{P}(F(\xi)<x)=\mathbb{P}(\xi\leq G(x))$。又由 F 是连续的，得 $\mathbb{P}(\xi\leq G(x))=\mathbb{P}(\xi<G(x))=F(G(x))$。若 $G(x)=\pm\infty$，易于验证 $F(G(x))=x$。下设 $G(x)\in\mathbb{R}$。

由 $G(x)$ 的定义知 $\exists y_n\searrow G(x), F(y_n)\geq x$，结合 F 的连续性可知 $F(G(x))\geq x$。同样由 $G(x)$ 的定义可知 $\forall y<G(x), F(y)<x$，令 $y\nearrow G(x)$，由 F 的连续性可知 $F(G(x))\leq x$。故 $F(G(x))=x$，从而 $\mathbb{P}(\xi\leq G(x))=x$，即 $F(\xi)$ 是 $(0,1)$ 上的均匀分布。 □

PROBLEM III 设 ξ_n $n\in\mathbb{N}_+$ 为 i.i.d. 随机变量，分布为 μ。给定 $A\in\mathcal{B}$，$\mu(A)>0$，定义 $\tau=\inf\{k:\xi_k\in A\}$。证明 ξ_τ 的分布为 $\frac{\mu(\cdot\cap A)}{\mu(A)}$。

SOLUTION. $\mathbb{P}(\xi_\tau\in B)=\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(\tau=n,\xi_\tau\in B)=\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(\tau=n,\xi_n\in B)$。注意到 $\{\tau=n\}=\{\forall k<n,\xi_k\notin A\}\cap\{\xi_n\in A\}$，且 ξ_n 相互独立，故有 $\mathbb{P}(\tau=n,\xi_n\in B)=\mathbb{P}(\tau=n)\mathbb{P}(\xi_n\in B\mid\xi_n\in A)=\mathbb{P}(\tau=n)\frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}$。从而 $\mathbb{P}(\xi_\tau\in B)=\sum_{n=1}^\infty\mathbb{P}(\tau=n)\frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}=\frac{\mu(B\cap A)}{\mu(A)}$。 □

PROBLEM IV 若 $\mathcal{C}_1,\cdots,\mathcal{C}_n$ 为独立的包含 Ω 的 π-系，那么 $\sigma(\mathcal{C}_1),\cdots,\sigma(\mathcal{C}_n)$ 独立。

SOLUTION. 先证 $\sigma(\mathcal{C}_1),\mathcal{C}_2,\cdots,\mathcal{C}_n$ 独立。令 $\mathcal{A}:=\{A\in\sigma(\mathcal{C}_1):\forall C_k\in\mathcal{C}_k,k=2,\cdots,n,\mathbb{P}(A\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)=\mathbb{P}(A)\prod_{k=2}^n\mathbb{P}(C_k)\}$，只需证 $\mathcal{A}=\sigma(\mathcal{C}_1)$。显然 $\mathcal{C}_1\subset\mathcal{A}$，只需证 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数。由 $\mathcal{C}_1$ 是 π-系，只需证 $\mathcal{A}$ 是 λ-系。

- 由定义知 $\Omega\in\mathcal{C}_1\subset\mathcal{A}$。
- 设 $A,B\in\mathcal{A},B\subset A$，则有 $\mathbb{P}((A\setminus B)\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)=\mathbb{P}(A\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)-\mathbb{P}(B\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)=(\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B))\prod_{k=2}^n\mathbb{P}(C_k)=(\mathbb{P}(A\setminus B))\prod_{k=2}^n\mathbb{P}(C_k)$。
- 设 $A_k\in\mathcal{A},A_k\nearrow A$，则有 $\mathbb{P}(A\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)=\lim_i\mathbb{P}(A_i\cap\bigcap_{k=2}^n C_k)=\lim_i\mathbb{P}(A_i)\prod_{k=2}^n\mathbb{P}(C_k)=\mathbb{P}(A)\prod_{k=2}^n\mathbb{P}(C_k)$。

故 $\mathcal{A}$ 是 λ-系，从而 $\sigma(\mathcal{C}_1),\cdots,\mathcal{C}_n$ 独立。

显然 $\sigma(\mathcal{C}_k)$ 也是包含 Ω 的 π-系，故可以重复上述过程，最后得到 $\sigma(\mathcal{C}_1),\cdots,\sigma(\mathcal{C}_n)$ 独立。 □

PROBLEM V

1. 设 $\{A_n\}_{n\geq1}$ 为独立事件序列，令 $\mathcal{J}=\bigcap_{n=1}^\infty\sigma\{A_n,A_{n+1},\cdots\}$. 证明 $\forall A\in\mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 1.
2. 设 $\{\xi_n\}_{n\geq1}$ 为独立随机变量，令 $\mathcal{J}=\bigcap_{n=1}^\infty\sigma\{\xi_n,\xi_{n+1},\cdots\}$。证明 $\forall A\in\mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A)=0$ 或 1.

Solution. 1. 可取 $\xi_n = \mathbb{1}_{A_n}$，故只证2。

2. 由 $A \in \mathcal{J}$ 知 $A \in \sigma(\xi_n, \cdots)$，故 A 与 $\xi_1, \cdots, \xi_{n-1}$ 独立。故 A 与包含 Ω 的 π-系 $\mathcal{C}_n := \{\bigcap_{k=1}^{n-1}\{\xi_k \in B_k\} : B_k \in \mathcal{B}\}$ 是独立的。从而 A 与 $\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{C}_n$ 独立。故由IV 知 A 与 $\sigma(\xi_1, \cdots) = \sigma(\bigcup_{n\geq 1}\mathcal{C}_n)$ 独立。但 $A \in \sigma(\xi_1, \cdots)$，故 A 与 A 独立，从而 $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A)$，故 $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$。

□

Problem VI 设 $\{\xi_1, \cdots\}$ 是 i.i.d. 的取值于 $\{1, \cdots, r\}$ 的随机变量，且 $\mathbb{P}(\xi_i = k) = p(k) > 0, \forall 1 \leq k \leq r$。令 $\pi_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} p(\xi_k(\omega))$，证明 $-n^{-1}\log \pi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} H \triangleq -\sum_{k=1}^{r} p(k)\log p(k)$。这里 H 称为 Shannon 信息熵。

Problem VII 设 ξ_n 关于 n 单调上升，且 $\xi_n \to \xi$，求证 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$。

Problem VIII

1. 设 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$，则 $S_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$。

2. 若 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$，则 $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ 是否成立?

Problem IX 若 Ω 存在划分 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 使 $\mathcal{A} = \sigma(\{A_n : 1 \leq n < \infty\})$，则称 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为纯原子概率空间，每个非空的 A_n 称为一个原子。证明在纯原子概率空间上，随机变量序列依概率收敛等价于几乎处处收敛。

Problem X 设随机变量 ξ_n, ξ 的分布函数分别为 F_n, F。若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$，则对 F 的任意连续点 x 有 $\mathbb{P}(\xi_n \leq x) \to \mathbb{P}(\xi \leq x), \mathbb{P}(\xi_n > x) \to \mathbb{P}(\xi > x)$。