Iterative 7

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 20 日

PROBLEM I Assume that A is the matrix arising from the 5-point finite difference discretization of an elliptic operator on a given mesh. We reorder the original linear system using the red-black ordering and obtain the reordered linear system

$$\begin{pmatrix} D_1 & E \\ F & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

1. Show how to obtain a system (called the *reduced system*) which involves the variable x_2 only.
2. Show that this reduced system is also a sparse matrix.
3. Show the stencil associated with the reduced system matrix on the original finite difference mesh and give a graph−theory interpretation of the reduction process.
4. What is the maximum number of nonzero elements in each row of the reduced system?

SOLUTION. 1.

$$\begin{pmatrix} D_1 & E \\ F & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

其中 D_1、D_2 分别对应红点、黑点未知量之间的连接, 即均为对角占优稀疏矩阵，E 与 F 为红黑之间的邻接耦合项。

从第一行可解出 x_1：

$$D_1 x_1 + E x_2 = b_1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = D_1^{-1}(b_1 - E x_2).$$

将其代入第二行：

$$F x_1 + D_2 x_2 = b_2,$$

得到仅关于 x_2 的方程：

$$F D_1^{-1}(b_1 - E x_2) + D_2 x_2 = b_2.$$

整理可得:

$$\left(D_2 - F D_1^{-1} E\right) x_2 = b_2 - F D_1^{-1} b_1.$$

为 Schur complement 系统，其中

$$S = D_2 - F D_1^{-1} E$$

即为 Schur 补。

2. 由于原系统来自五点差分离散，每个网格点最多连接四个邻居，故红黑网格具有如下性质:

   - 红点只与黑点相邻，
   - 黑点也只与红点相邻，

   Reduced matrix 为

   $$S = D_2 - F D_1^{-1} E.$$

   其中 D_1^{-1} 为对角矩阵，因此 $F D_1^{-1} E$ 仅在存在"黑 $\to$ 红 $\to$ 黑"路径时产生非零元。即黑点之间原本没有直接连接，但通过一个公共红点，会产生 fill-in。

   在标准二维网格上，黑点通过中间红点可与最多 8 个黑点连接，因此 reduced system 对应九点差分格式 (9-point stencil):

   $$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array}$$

   其中中心为黑点，其余八个为通过红点产生的间接连接。因此,Reduced System 每行最多含 9 个非零元素。

3. 由于最多与 8 个黑点连接，再加上自身 1 个对角元，故 Reduced system 每行最多 9 个非零项。这证明了 Schur 补在此情形下仍保持稀疏结构。

□

PROBLEM II It was stated in Section 10.3.2 that for some specific matrices the ILU(0) factorization of A can be put in the form

$$M = (D - E) D^{-1} (D - F),$$

in which $-E$ and $-F$ are the strict lower and upper parts of A, respectively.

1. Characterize these matrices carefully and give an interpretation with respect to their adjacency graphs.

2. Verify that this is true for standard 5-point matrices associated with any domain Ω.

3. Is it true for 9-point matrices?

4. Is it true for the higher level ILU factorizations?

SOLUTION. 1.

Lemma 1. 令 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 且按索引 $1, 2, \ldots, n$ 消去。记 $A = D_A - E_A - F_A$（其中 D_A 为原始对角，$-E_A$ 与 $-F_A$ 分别为原矩阵的严格下、上三角）。下面三条陈述等价：

(a) ILU(0) 分解可以写成 $M = (D - E)D^{-1}(D - F)$，其中 E, E 的非零位置与 E_A, F_A 的非零位置一致（即不产生新的 off-diagonal fill）；

(b) 对所有 k 及所有 $i > k, j > k$，若 $a_{ik} \neq 0$ 且 $a_{kj} \neq 0$ 则 $a_{ij} \neq 0$;

(c) 把 A 看作无向带权图 $G(A)$，则对每个顶点 k，其在后序索引集合 $\{k + 1, \ldots, n\}$ 中的邻居集合是一个 clique（完全子图）。

证明. (1) ⇒ (2): 若 (2) 不成立，则存在 $k, i > k, j > k$ 使 $a_{ik} \neq 0, a_{kj} \neq 0$ 但 $a_{ij} = 0$。消去第 k 步会在位置 (i, j) 引入新的非零 (即 fill-in)，这与 ILU(0) 要求保持 A 的原始稀疏模式矛盾，因此 (1) 不可能成立。

(2) ⇒ (1): 若对所有此类三元组都满足蕴含，则消去任一 k 时在后续指标内不会引入新的 off-diagonal 非零。于是 ILU(0) 在整个消去过程中不会产生 off-diagonal fill，所有的消去对角修正可以吸收到对角 D 中。此时可以取 $L = D - E$、$U = D - F$，并插入 D^{-1} 得到所述形式。

(2) ⇔ (3): 直接把非零关系转成图的邻接关系即可：条件 (2) 恰是要求任一被消去顶点的后继邻居两两相连，正是 clique 的定义。 □

2. 考虑二维二维网格上的标准 5-point Laplacian 离散，每个内点与上、下、左、右 4 个邻点相连。其邻接图是规则的二维格点网格，每个内部顶点度为 4（边界处度较少）。采用行主序编号，按行从上到下、行内从左到右编号。考虑一个内点 k 及其四邻：上（U）、下（D）、左（L）、右（R）。在常见的 5-point 模板中，U 与 L 之间并不直接相连（它们之间是一个对角关系），因此在消去 k 的时候，U 和 L 之间将产生一个新的非零（fill）。因此在自然编号下，5-point 矩阵会产生 off-diagonal fill，ILU(0) 不等于精确 LU，于是不能写成上式。

   尽管自然编号下会产生 fill，但在某些特殊的重排序下（若存在完美消去序列，使得每次消去的后继邻居为 clique），理论上可以避免产生 fill。这需要把二维格点图重排成 chordal 图——对常规矩形网格而言，这通常不可行或代价较高。因此对于“标准 5-point 矩阵”，一般结论为：

   - 在 1D（tridiagonal）情况下，消去不会产生 fill，ILU(0) 精确等于 LU，形式成立；
   - 在常见 2D 自然编号下，5-point 会产生 fill，形式不成立。

3. 9-point stencil 在每个内点还连接四个对角邻点，使得邻接更为密集。在某些情形下，这些额外的边使得消去时原本可能产生的 fill 已经存在于矩阵中，从而 减少额外产生的 fill。但这并不能保证对所有编号、所有区域都成立。

   - 若对每个被消去点，其后继邻居之间的所有必要边都已包含在 9-point 模板中，则可避免新产生的 off-diagonal fill，此时上式成立；
   - 若仍有某些后继邻居对在原矩阵中不存在边，消去会产生新的 off-diagonal fill，上式不成立。

因此结论：9-point 有时可以满足该形式（比 5-point 更有机会），但并不能保证在一般情况下成立；需具体检查稀疏模式与消去序列。

4. ILU(k) 允许按 level-of-fill 引入额外非零项以提高近似质量。对于 ILU(k)：

   - 若仍要求 E, F 仅为原始 A 的严格下/上三角（即不扩展模式），则 ILU(k) 通常不能写成 $(D-E)D^{-1}(D-F)$，因为 ILU(k) 中的 L, U 会在原模式之外出现非零；
   - 若允许把 E, F 扩展为 ILU(k) 使用的下/上三角模式（即把 E, F 重定义为包含新增非零的位置），则理论上可以把 ILU(k) 写成类似形式 $M = (D' - E')D'^{-1}(D' - F')$，但此时并没有“只增加一条对角”这一存储优势；
   - 当 k 足够大以致 ILU(k) 等价于完全 LU 时，显然存在 LU 的 L 与 U，但需要保存完整的 fill-in。

综上：原题所强调的“只需额外一条对角线存储”的优点仅在 ILU(0) 且不产生 off-diagonal fill 的特殊情形下存在。

□

PROBLEM III Let A be a pentadiagonal matrix having diagonals in offset positions $-m, -1, 0, 1, m$. The coefficients in these diagonals are all constants: a for the main diagonal and -1 for all others. It is assumed that $a \geq \sqrt{8}$. Consider the ILU(0) factorization of A as given in the form (10.20). The elements d_i of the diagonal D are determined by a recurrence of the form (10.19).

1. Show that
$$a^2 < d_i \leq a, \qquad i = 1, \ldots, n.$$
2. Show that d_i is a decreasing sequence. *(Hint: Use induction.)*
3. Prove that the formal (infinite) sequence defined by the recurrence converges. What is its limit?

SOLUTION. 设 A 为一个五对角矩阵，非零对角线位于偏移 $-m, -1, 0, 1, m$。主对角元素为常数 a，其余四条对角线的元素均为 -1。对 A 作 ILU(0) 分解，设分解中对角阵为 D，其对角元素记为 d_i，它们满足递推关系如下：

$$\begin{aligned}
&d_1 = a, \\
&\text{当} 2 \leq i \leq m: \quad d_i = a - \frac{1}{d_{i-1}}, \\
&\text{当} i > m: \quad d_i = a - \frac{1}{d_{i-1}} - \frac{1}{d_{i-m}}.
\end{aligned}$$

1. 由递推式可见每步都是从 a 减去正数，因此
$$d_i \leq a.$$
   设 r_1 和 r_2 为方程 $L^2 - aL + 2 = 0$ 的两个正根，即
$$r_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2}, \qquad r_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2},$$

注意 $0 < r_1 < r_2$，且 $r_1 r_2 = 2$。我们要证明对任意 i 都有 $d_i > r_1$。先验证基底：$d_1 = a > r_2 > r_1$，故成立。归纳步：假设对所有 $j < i$ 有 $d_j > r_1$，用此证明 $d_i > r_1$。

- 若 $2 \le i \le m$，则
$$d_i = a - \frac{1}{d_{i-1}}.$$
由归纳假设 $d_{i-1} > r_1$，于是 $\frac{1}{d_{i-1}} < \frac{1}{r_1}$，因此
$$d_i > a - \frac{1}{r_1}.$$
利用 r_1 满足 $r_1 = a - \frac{2}{r_1}$，我们有
$$a - \frac{1}{r_1} = \left(a - \frac{2}{r_1}\right) + \frac{1}{r_1} = r_1 + \frac{1}{r_1} > r_1,$$
因而 $d_i > r_1$。
- 若 $i > m$，则
$$d_i = a - \frac{1}{d_{i-1}} - \frac{1}{d_{i-m}}.$$
由归纳假设 $d_{i-1} > r_1$ 且 $d_{i-m} > r_1$，所以
$$\frac{1}{d_{i-1}} + \frac{1}{d_{i-m}} < \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{r_1}.$$
因此
$$d_i > a - \frac{2}{r_1}.$$
由 $r_1 = a - \frac{2}{r_1}$ 可直接得出 $a - \frac{2}{r_1} = r_1$，于是 $d_i > r_1$。

由此通过归纳可得对任意 i 有 $d_i > r_1$。综上得到严格的不等式
$$\frac{a - \sqrt{a^2 - 8}}{2} < d_i \le a\ .$$

2. 基底：$d_1 = a, d_2 = a - \frac{1}{d_1} < a.$
归纳步：假设 d_j 单调递减，则对 $i+1$ 有
$$d_{i+1} = a - \frac{1}{d_i} - \frac{1}{d_{i+1-m}} \le a - \frac{1}{d_{i-1}} - \frac{1}{d_{i-m}} = d_i.$$
因此 d_i 是单调递减序列。

3. 序列有下界且单调递减，故收敛。设极限为 $L > 0$，则
$$L = a - \frac{2}{L} \quad \Rightarrow \quad L^2 - aL + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L = \frac{a + \sqrt{a^2 - 8}}{2}.$$

□