

Probability 1

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 3 日

PROBLEM I 证明 σ -代数是集代数。

SOLUTION. 假定 \mathcal{A} 是 σ -代数，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} 对补运算封闭。只需证明 \mathcal{A} 对有限并封闭。 $A, B \in \mathcal{A}$, 令 $A_n = \emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}, n \geq 3$, 那么 $A \cup B \cup \bigcup_{n \geq 3} A_n = A \cup B \in \mathcal{A}$. \square

PROBLEM II 设 \mathcal{C} 是集类，则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 。

SOLUTION. 令 $\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$. 下证 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$, 即证 \mathcal{A} 为包含 \mathcal{C} 的 σ -代数。

- 由于 $\forall A \in \mathcal{C}, \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, 那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 。
- 由 $\Omega \in \sigma(\emptyset) = \{\emptyset, \Omega\}$, 那么 $\Omega \in \mathcal{A}$ 。
- 设 $A \in \mathcal{A}$, 那么 $\exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 由于 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 是 σ -代数, 那么 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 所以 $A^c \in \mathcal{A}$ 。
- 设 $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, 那么 $\exists \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, 由 $|\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$, 可知 $|\mathcal{T}| \leq \aleph_0, \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$, 那么 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$. 所以 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{T})$. 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

综上, \mathcal{A} 为包含 \mathcal{C} 的 σ -代数。故 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$ 。又由于 $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 故 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ 。从而, $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. \square

PROBLEM III σ -代数 \mathcal{A} 称为可数生成的, 如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ 。证明 \mathcal{B}^d 是可数生成的。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{B(p, r) : p \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}_+\}$, 其中 $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| < r\}$ 。显然 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$ 。下证 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{A})$ 。令 $\mathcal{O} := \{\mathcal{B}^d$ 中的开集}, 由于 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O})$, 那么 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, 从而 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{O})$ 。只需证明 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$ 。

$\forall A \in \mathcal{O}, \forall x \in A, \exists U = B(x, s), x \in U \subset A$ 。由于 \mathbb{Q}^d 在 \mathbb{R}^d 中稠密, 故 $\exists p_x \in B(x, \frac{s}{2}) \cap \mathbb{Q}^d$ 。取 $r_x \in \mathbb{Q}_+$ 使 $\|x - p_x\| < r_x < \frac{s}{2}$, 由 $\forall y \in B(p_x, r_x)$, 有 $\|y - x\| \leq \|y - p_x\| + \|p_x - x\| < r_x + \frac{s}{2} < s$ 得 $B(p_x, r_x) \subset B(x, s) \subset A$, 则有 $\bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x) \subset A$ 。显然 $x \in B(p_x, r_x)$, 那么 $A \subset \bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x)$,

从而 $\forall A \in \mathcal{O}, \bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x) = A$ 。由于 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$, 那么 $\bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x), \forall A \in \mathcal{O}$ 一定为可数的并。从而 $\forall A \in \mathcal{O}, A \in \sigma(\mathcal{A})$ 。 \square

PROBLEM IV 设 \mathcal{C} 是 Ω 中任一集代数, 则存在 Ω 中的单调类 \mathcal{M}_0 满足:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$,
2. 对于包含 \mathcal{C} 的单调类 \mathcal{M} , 有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ 。

称这样的单调类为 \mathcal{C} 生成的单调类, 记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ 为单调类且 } \mathcal{C} \subset \mathcal{M}\}$ 。由于 Ω 的全体子集 $P(\Omega)$ 显然为包含 \mathcal{C} 的单调类。那么 $P(\Omega) \in \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ 。令 $\mathcal{M}_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, 那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$ 。下证 \mathcal{M}_0 为单调类。

- $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ 。 $\forall A \in \mathcal{A}, A_n \in A$, 由于 A 为单调类, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in A$ 。故 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 。
- 同理可证, $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 。

设 \mathcal{M} 为包含 \mathcal{C} 的单调类, 那么 $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$, 那么 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0$ 。 \square

PROBLEM V 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个集合, \mathcal{A}_i 是 Ω_i 上的 σ -代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION.

Lemma 1. $\Omega_i, i = 1, 2$ 为两个集合, $A_i, B_i \subset \Omega_i, i = 1, 2$, 那么以下命题正确。

1. $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$;
2. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, 那么 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$, 其中 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交。
3. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, 那么 $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ 。

证明. 1. $\forall (a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$, 那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$ 且 $(a, b) \in B_1 \times B_2$ 。从而 $a \in A_1, b \in A_2, a \in B_1, b \in B_2$ 。故 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \cap B_2$ 。那么 $(a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ 。另一方面, $\forall (a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, 那么 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \cap B_2$, 故 $(a, b) \in A_1 \times A_2, (a, b) \in B_1 \times B_2$ 。故 $(a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$ 。

2. 先证 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交: 由1知, $(A_1 \times A_2) \cap ((B_1/A_1) \times B_2) = \emptyset \times B_2 = \emptyset$ 。 $(A_1 \times A_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = A_1 \times \emptyset = \emptyset$ 。 $((B_1/A_1) \times B_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = \emptyset \times B_2 = \emptyset$ 。下证 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$ 。由于 $A_1, B_1/A_1 \subset B_1, A_2, B_2/A_2 \subset B_2$, 那么 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$, 从而 $(A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$ 。又 $B_1 \times B_2 = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup ((A_1 \times (B_2/A_2)) \cup (A_1 \times A_2))$, 从而结论正确。
3. 若 $A_1/B_1 \neq \emptyset$, 设 $a \in A_1/B_1$, 取 $b \in A_2$, 那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$, 但 $(a, b) \notin B_1 \times B_2$, 与 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ 矛盾。

\square

由于 $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$ 是 Ω_i 上的 σ -代数，从而 $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$ 为 Ω_i 上的半集代数。我们可以用数学归纳法证明以下命题：设 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个集合， \mathcal{A}_i 是 Ω_i 上的半集代数，那么 $\mathcal{C}_n = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

- 当 $n = 1$ 时， $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1$ ，显然为半集代数。
- 当 $n = 2$ 时， $\mathcal{C}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2\}$ 。下证 \mathcal{C}_2 为半集代数。
 - 由于 A_1, A_2 为半集代数，那么 $\Omega_i, \emptyset \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 。从而 $\{\emptyset \times \emptyset, \Omega_1 \times \Omega_2\} \subset \mathcal{C}_2$ 。
 - 设 $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2 \in \mathcal{C}_2$ ，那么由引理1中的1可知 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ 。又由 $\mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 均为半集代数，那么 $A_i \cap B_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 。那么 $(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{C}_2$ 。故 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in \mathcal{C}_2$ 。
 - 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ ，那么由引理1中的3知 $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ 。由于 $A_i, B_i \in \mathcal{A}_i$ ，那么 $\exists C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, N_i \in \mathbb{N}_+$ 两两不交，与 A_i 也不交，且 $B_i = A_i \cup (\bigcup_{1 \leq k \leq N_i} C_k^i), i = 1, 2$ 。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, i = 1, 2$ ，那么 $C_k^1 \times B_2 \in \mathcal{C}_2, 1 \leq k \leq N_1, A_1 \times C_k^2 \in \mathcal{C}_2, 1 \leq k \leq N_2$ 。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, i = 1, 2$ 两两不交，那么 $C_k^1 \times B_2, 1 \leq k \leq N_1$ 两两不交， $A_1 \times C_k^2, 1 \leq k \leq N_2$ 两两不交。又由于1中的2知， $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1 / A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2 / A_2))$ 。那么

$$\begin{aligned} B_1 \times B_2 &= (A_1 \times A_2) \cup ((\bigcup_{1 \leq k \leq N_1} C_k^1) \times B_2) \cup (A_1 \times (\bigcup_{1 \leq k \leq N_2} C_k^2)) \\ &= (A_1 \times A_2) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq N_1} (C_k^1 \times B_2) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq N_2} (A_1 \times C_k^2) \end{aligned}$$

又由 $(A_1 \times A_2), ((B_1 / A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2 / A_2))$ 两两不交，从而 $(A_1 \times A_2), (\bigcup_{1 \leq k \leq N_1} (C_k^1 \times B_2)), (\bigcup_{1 \leq k \leq N_2} (A_1 \times C_k^2))$ ，故 $(A_1 \times A_2), (C_k^1 \times B_2), (A_1 \times C_j^2), 1 \leq k \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2$ 两两不交。从而 $B_1 \times B_2$ 能表示成 $A_1 \times A_2$ 与 \mathcal{C}_2 中元素的不交并。

- 设 $n = k, 1 \leq k \leq n - 1$ 时， $\mathcal{C}_k := \{A_1 \times \dots \times A_k : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k\}$ 为半集代数。那么

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k+1} &:= \{A_1 \times \dots \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k+1\} \\ &= \{(A_1 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k+1\} \\ &= \{C \times A : C \in \mathcal{C}_k, A \in \mathcal{A}_{k+1}\}. \end{aligned}$$

由 $n = 2$ 的情形可知 \mathcal{C}_{k+1} 为半集代数。

□

PROBLEM VI 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 考虑 $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{T} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}$ ， $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \{0, 1\}$ ，其中 $\Phi(\{\emptyset\}) = 0, \Phi(A) = 1, A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ 。那么 Φ 为 \mathcal{T} 上的可加测度。考虑 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 两两不交且 $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \in \mathcal{T}$ ，则 $\Phi(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \Phi(\{1, 2, 3\}) = 1, \sum_{k=1}^3 \Phi(\{k\}) = \sum_{k=1}^3 1 = 3$ 。故 $\sum_{k=1}^3 \Phi(\{k\}) \neq \Phi(\{1, 2, 3\})$ 。故 Φ 不是有限可加测度。□

PROBLEM VII 设 \mathcal{C}_n 为单调上升的子集类：

1. 若 \mathcal{C}_n 为集代数, 则 $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 为集代数。
2. 若 \mathcal{C}_n 为 σ 代数, 举例 $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 不为 σ 代数。

SOLUTION. 由于 \mathcal{C}_n 单调上升, 那么 $\mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}_{n+1}, n \geq 1$.

1. 令 $\mathcal{A} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 。下证 \mathcal{A} 为集代数。
 - 由于 $\mathcal{C}_n, n \geq 1$ 为集代数, 那么 $\Omega \in \mathcal{C}_n, n \geq 1$ 。故 $\Omega \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 。
 - $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 那么 $\exists n_1, n_2 \geq 1$, 满足 $A \in \mathcal{C}_{n_1}, B \in \mathcal{C}_{n_2}$ 。不妨 $n = \max\{n_1, n_2\}$, 那么 $A \in \mathcal{C}_{n_1} \subset \mathcal{C}_n, B \in \mathcal{C}_{n_2} \subset \mathcal{C}_n$ 。由于 \mathcal{C}_n 为集代数, 那么 $A \setminus B \in \mathcal{C}_n$ 。故 $A \setminus B \in \mathcal{A}$ 。
2. 考虑 $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{C}_n = \sigma(\{\{k\} : 1 \leq k \leq n\})$ 。令 $\mathcal{A} := \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n$ 。 $\forall n \geq 1$, 令 $T_n := \{k : k > n\}$, 那么 $\mathcal{T}_n := \{\{k\} : 1 \leq k \leq n\} \cup \{T_n\}$ 为 \mathcal{C}_n 的一个划分。下证 $\mathcal{C}_n = \{A \subset \mathbb{N} : A \cap T_n = \emptyset \text{ 或 } A \cap T_n = T_n\} =: \mathcal{A}_n$ 。显然 $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{A}_n$, 故只需证明, \mathcal{A}_n 为 σ -代数。
 - (a) $\mathbb{N} \in \mathcal{A}_n$ 显然。
 - (b) $\forall A, B \in \mathcal{A}_n$, 若 $A \cap T_n = B \cap T_n = \emptyset$, 那么 $(A \cap B) \cap T_n = \emptyset$, 那么 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$ 。
若 $A \cap T_n = \emptyset, B \cap T_n = T_n$, 那么 $(A \cap T_n) \cap (B \cap T_n) = (A \cap B) \cap T_n = \emptyset$, 那么 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$ 。若 $A \cap T_n = B \cap T_n = T_n$, 那么 $(A \cap B) \cap T_n = T_n$, 从而 $A \cap B \in \mathcal{A}_n$ 。
 - (c) $\forall A_t \in \mathcal{A}_n, t \geq 1, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 那么至多一个 A_t 满足 $A_t \cap T_n = T_n$ 。若 $\forall t \geq 1, A_t \cap T_n = \emptyset$, 那么 $\cup_{t \geq 1} A_t \cap T_n = \emptyset$, 从而 $\cup_{t \geq 1} A_t \in \mathcal{A}_n$ 。若 $\exists t \geq 1, A_t \cap T_n = T_n$, 不妨设 $A_1 \cap T_n = T_n$, 那么 $\cup_{t \geq 1} A_t \cap T_n = T_n$, 从而 $\cup_{t \geq 1} A_t \in \mathcal{A}_n$ 。

那么 $\forall C \in \mathcal{C}_n, |C| < \infty$ 或 $|C^c| \leq |T_n^c| < \infty$ 。由于 $\forall n \geq 1, \{2n\} \in \mathcal{C}_{2n} \subset \mathcal{A}$, 而 $\cup_{n \geq 1} \{2n\} = 2\mathbb{N}, |2\mathbb{N}|, |\mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}| = \infty$ 。故 $2\mathbb{N} \notin \mathcal{C}_n, \forall n \geq 1$ 。从而 $2\mathbb{N} \notin \mathcal{A}$ 。

□

PROBLEM VIII 证明 σ -代数不可能是可数无穷的。

Lemma 2. $\Omega \neq \emptyset, \{A_\alpha \subset \Omega : \alpha \in I\} =: \mathcal{A}$ 为 Ω 的一个划分, 令 $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{A})$, 那么 $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{A}|}$ 。

SOLUTION. 考虑 $\phi : \mathcal{P}(I) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$, $J \mapsto \cup_{i \in J} A_i$ 。显然 ϕ 为单射。下证 $\text{Im}(\phi) = \mathcal{F}$ 。由于 $\forall J \in \mathcal{P}(I), \cup_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}$, 那么 $\text{Im}(\phi) \subset \mathcal{F}$ 。故只需证明 $\mathcal{F} \subset \text{Im}(\phi)$ 。由于 $\forall j \in I, \{j\} \in \phi(I)$, 那么 $\cup_{i \in \{j\}} A_i = A_j \in \text{Im}(\phi)$ 。从而 $\mathcal{A} \subset \text{Im}(\phi)$ 。故只需证明 $\text{Im}(\phi)$ 为 σ 代数。

- 由于 $\phi(I) = \cup_{i \in I} A_i = \Omega$, 那么 $\Omega \in \text{Im}(\phi)$ 。
- $\forall I, J \in \mathcal{P}(I)$, 那么 $I \cap J \in \mathcal{P}(I)$, 故 $\cup_{i \in I \cap J} A_i = (\cup_{i \in I} A_i) \cap (\cup_{i \in J} A_i) \in \text{Im}(\phi)$ 。
- $\forall I_n \in \mathcal{P}(I), n \geq 1$, 那么 $\cup_{n \geq 1} I_n \in \mathcal{P}(I)$, 故 $\cup_{n \geq 1} (\cup_{i \in I_n} A_i) = \cup_{i \in \cup_{n \geq 1} I_n} A_i \in \text{Im}(\phi)$ 。

□

SOLUTION. 设 \mathcal{F} 为 Ω 上 σ -代数。 \mathcal{A} 为 \mathcal{F} 上的所有原子集组成的集合。

- 若 $\cup \mathcal{A} = \Omega$, 且 $|\mathcal{A}| < \infty$, 那么由引理 2 知, $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{A}|}$ 。故 \mathcal{F} 为有限集。
- 若 $\cup \mathcal{A} = \Omega$, 且 $|\mathcal{A}| = \infty$, 那么取 $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$, 以及 $A_0 = \Omega \setminus \cup_{n \geq 1} A_n$ 。那么 $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} =: \mathcal{B}$ 为 Ω 的可数分割。由引理 2 知, $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{B}|} > \aleph_0$ 。

- 若 $\cup\mathcal{A} \subseteq \Omega$, 那么 $\exists F_n, n \geq 1$, 满足 $F_n \supseteq F_{n+1}, n \geq 1, F_0 = \Omega$ 。考虑 $A_n := F_n \setminus F_{n+1}, n \geq 0$, 那么 $\mathcal{B} := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ 为 Ω 的可数分割。由引理 2 知, $|\mathcal{F}| = 2^{|\mathcal{B}|} > \aleph_0$

□

PROBLEM IX 设 $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mu_n), n \geq 1$ 为一列测度空间, Ω_n 两两不交。令

$$\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n, \mathcal{A} = \{A \subset \Omega : \forall n \geq 1, A \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n\}, \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n), A \in \mathcal{A}$$

证明 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间。

- SOLUTION.** 先证 \mathcal{A} 为 σ -代数。
- 由于 $\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, 那么 $\Omega \cap \Omega_n = \Omega_n \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq 1$ 。故 $\Omega \in \mathcal{A}$ 。
 - $\forall A, B \in \mathcal{A}$, 那么 $\forall n \geq 1, A \cap \Omega_n, B \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n$ 。由于 \mathcal{A}_n 为 σ 代数, 那么 $(A \cap \Omega_n) \cap (B \cap \Omega_n) = (A \cap B) \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n$ 。从而 $A \cap B \in \mathcal{A}$ 。
 - $A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1$, 那么 $\forall k \geq 1, A_n \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$ 。由于 \mathcal{A}_k 为 σ 代数, 那么 $\bigcup_{n \geq 1} (A_n \cap \Omega_k) = (\bigcup_{n \geq 1} A_n) \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$, 从而 $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}$ 。

再证 μ 为测度。

- 由于 $\forall A \in \mathcal{A}, \mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n)$, 而 $A \cap \Omega_n \in \mathcal{A}_n, \forall n \geq 1$, 故 $\mu_n(A \cap \Omega_n) \geq 0$ 。从而, $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A \cap \Omega_n) \geq 0$.
- $\forall A_n \in \mathcal{A}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j, \sum_{n \geq 1} A_n = \sum_{n \geq 1} (A_n \cap \bigcup_{k \geq 1} \Omega_k) = \sum_{n \geq 1} (\sum_{k \geq 1} (A_n \cap \Omega_k)) = \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} (A_n \cap \Omega_k) = \sum_{k \geq 1} (\sum_{n \geq 1} A_n) \cap \Omega_k$ 。由于 $\forall n \geq 1, A_n \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$, 那么 $\sum_{n \geq 1} A_n \cap \Omega_k \in \mathcal{A}_k$ 。故有 $\mu(\sum_{n \geq 1} A_n \cap \Omega_k) = \mu_k(\sum_{n \geq 1} A_n \cap \Omega_k) = \sum_{n \geq 1} \mu_k(A_n \cap \Omega_k)$ 。

$$\begin{aligned} \mu(\sum_{n \geq 1} A_n) &= \mu(\sum_{n \geq 1} (\sum_{k \geq 1} (A_n \cap \Omega_k))) \\ &= \mu(\sum_{k \geq 1} (\sum_{n \geq 1} (A_n \cap \Omega_k))) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mu_k(\sum_{n \geq 1} (A_n \cap \Omega_k)) \\ &= \sum_{k \geq 1} \sum_{n \geq 1} \mu_k(A_n \cap \Omega_k) \\ &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \mu_k(A_n \cap \Omega_k) \\ &= \sum_{n \geq 1} \mu(A_n) \end{aligned}$$

□

PROBLEM X 设 Ω 为一无穷集, 令 \mathcal{F} 为 Ω 中的有限集或者余有限集构成的集合, \mathbb{P} 在两类集合上取值分别为 0 或 1。

- 证明 \mathcal{F} 为集代数, \mathbb{P} 为有限可加。
- 若 Ω 为可数集, 则 \mathbb{P} 不可能为 σ 可加。
- 若 Ω 为不可数集, 则 \mathbb{P} 为可数可加。

SOLUTION. 1. 先证 \mathcal{F} 为集代数:

- 由于 $\Omega^c = \emptyset$, $|\emptyset| = 0$, 故 $\Omega \in \mathcal{F}$ 。
- $\forall A, B \in \mathcal{F}$, 若 $|A| < \infty$, 那么 $|A \setminus B| = |A \cap B^c| \leq |A| < \infty$ 。若 $|A^c|, |B| < \infty$, 那么 $|(A \setminus B)^c| = |A^c \cup B| \leq |A^c| + |B| < \infty$ 。若 $|A^c|, |B^c| < \infty$, 那么 $|A \setminus B| = |A \cap B^c| \leq |B^c| < \infty$ 。综上所述, $A \setminus B \in \mathcal{F}$ 。

再证 \mathbb{P} 有限可加。由于 \mathcal{F} 为集代数, 故只需证明 \mathbb{P} 可加。设 $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \in \mathcal{F}$, 若 $|A|, |B| < \infty$, $\mathbb{P}(A \cup B) = 0 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ 。若 $|A|, |B^c| < \infty$, 那么 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \subset B^c$, 故 $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ 。若 $|A^c|, |B^c| < \infty$, 那么由 $A \cap B = \emptyset$, 知 $B \subset A^c$, 那么 $|B| \leq |A^c| < \infty$, 而 $|\Omega| = \infty$, 故 $|B| = |\Omega \setminus B^c| = \infty$, 矛盾。从而 $|A^c|, |B^c| < \infty$ 不成立。

2. $\mathbb{P}(\sum_{a \in \Omega} \{a\}) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$, 而 $\sum_{a \in \Omega} \mathbb{P}(\{a\}) = 0$, 故 \mathbb{P} 不是 σ 可加。

3. $A_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$, $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, $\sum_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ 。那么至多一个 A_n 是余有限的。否则, 根据上一小问的证明, 两余有限集必有交。若 A_n 中没有余有限集, 那么 $\sum_{n \geq 1} A_n$ 至多可数, 而 Ω 为不可数集, 从而 $\sum_{n \geq 1} A_n$ 不为余有限集。又由 $\sum_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$, 则 $\sum_{n \geq 1} A_n$ 为有限集, 此时 A_n 中只有有限个集合非空, 且为有限集。那么 $\mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} A_n) = 0 = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$ 。若 A_n 中有余有限集, 不妨假设 A_1 余有限, 那么 $\mathbb{P}(\sum_{n \geq 1} A_n) = 1 = \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(A_n)$

□