Probability 1

王胤雅

25114020018

yinyawang@m.fudan.edu.cn

2025 年 9 月 26 日

PROBLEM I 证明 σ-代数是集代数。

SOLUTION. 假定 $\mathcal{A}$ 是 σ-代数，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$，$\mathcal{A}$ 对补运算封闭。只需证明 $\mathcal{A}$ 对有限并封闭。$A, B \in \mathcal{A}$，令 $A_n = \varnothing = \Omega^c \in \mathcal{A}, n \geq 3$，那么 $A \cup B \cup \bigcup_{n\geq 3} A_n = A \cup B \in \mathcal{A}$。 $\square$

PROBLEM II 设 $\mathcal{C}$ 是集类，则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。

SOLUTION. 令 $\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$. 下证 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$，即证 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数。

- 由于 $\forall A \in \mathcal{C}, \sigma(\{A\}) = \{\varnothing, \Omega, A, A^c\}$，那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$。
- 由 $\Omega \in \sigma(\varnothing) = \{\varnothing, \Omega\}$，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$。
- 设 $A \in \mathcal{A}$，那么 $\exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0$，$A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 由于 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 是 σ-代数，那么 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 所以 $A^c \in \mathcal{A}$。
- 设 $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$，那么 $\exists \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \forall n \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{T} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_n$，由 $|\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$，可知 $|\mathcal{T}| \leq \aleph_0, \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$，那么 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$。所以 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{T})$。那么 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$。

综上，$\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的 σ-代数。故 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$。又由于 $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$，故 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$。从而，$\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$。 $\square$

PROBLEM III σ-代数 $\mathcal{A}$ 称为可数生成的，如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$。证明 $\mathcal{B}^d$ 是可数生成的。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{B(p, r) : p \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}_+\}$，其中 $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| < r\}$。显然 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$。下证 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{A})$。令 $\mathcal{O} := \{\mathcal{B}^d\text{中的开集}\}$，由于 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O})$，那么 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$，从而 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{O})$。只需证明 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$。
$\forall A \in \mathcal{O}$, $\forall x \in A$,$\exists U = B(x, s)$,$x \in U \subset A$。由于 $\mathbb{Q}^d$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中稠密，故 $\exists p_x \in B(x, \frac{s}{2}) \cap \mathbb{Q}^d$。取 $r_x \in \mathbb{Q}_+$ 使 $\|x - p_x\| < r_x < \frac{s}{2}$，由 $\forall y \in B(p_x, r_x)$，有 $\|y - x\| \leq \|y - p_x\| + \|p_x - x\| < r_x + \frac{s}{2} < s$ 得 $B(p_x, r_x) \subset B(x, s) \subset A$，则有 $\bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x) \subset A$。显然 $x \in B(p_x, r_x)$，那么 $A \subset \bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x)$，

从而 $\forall A \in \mathcal{O}, \bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x) = A$。由于 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$，那么 $\bigcup_{x\in A} B(p_x, r_x), \forall A \in \mathcal{O}$ 一定为可数的并。从而 $\forall A \in \mathcal{O}, A \in \sigma(\mathcal{A})$。 □

PROBLEM IV 设 $\mathcal{C}$ 是 Ω 中任一集代数，则存在 Ω 中的单调类 $\mathcal{M}_0$ 满足：

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$，
2. 对于包含 $\mathcal{C}$ 的单调类 $\mathcal{M}$，有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$。

称这样的单调类为 $\mathcal{C}$ 生成的单调类，记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{\mathcal{M} : \mathcal{M}\text{为单调类且}\mathcal{C} \subset \mathcal{M}\}$。由于 Ω 的全体子集 $P(\Omega)$ 显然为包含 $\mathcal{C}$ 的单调类。那么 $P(\Omega) \in \mathcal{A}$，故 $\mathcal{A} \neq \varnothing$。令 $\mathcal{M}_0 = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$，那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$。下证 $\mathcal{M}_0$ 为单调类。

- $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$。$\forall A \in \mathcal{A}$，$A_n \in A$，由于 A 为单调类，那么 $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in A$。故 $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$。
- 同理可证，$A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$，满足 $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$，则 $\cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \cap_{A\in\mathcal{A}} A$。

设 $\mathcal{M}$ 为包含 $\mathcal{C}$ 的单调类，那么 $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$，那么 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0$。 □

PROBLEM V 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的 σ-代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION.

Lemma 1. $\Omega_i, i = 1, 2$ 为两个集合，$A_i, B_i \subset \Omega_i, i = 1, 2$，那么以下命题正确。

- $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$；
- 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$，那么 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$，其中 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交。
- 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$，那么 $A_1 \subset B_1$，$A_2 \subset B_2$。

证明.
- $\forall (a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$，那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$ 且 $(a, b) \in B_1 \times B_2$。从而 $a \in A_1, b \in A_2, a \in B_1, b \in B_2$。故 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \cap B_2$。那么 $(a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$。另一方面，$\forall (a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \times B_2)$，那么 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \times B_2$，故 $(a, b) \in A_1 \times A_2$，$(a, b) \in B_1 \times B_2$。故 $(a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$。
- 先证 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交：由1知，$(A_1 \times A_2) \cap ((B_1/A_1) \times B_2) = \varnothing \times B_2 = \varnothing$。$(A_1 \times A_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = A_1 \times \varnothing = \varnothing$。$((B_1/A_1) \times B_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = \varnothing \times B_2$。下证 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$。由于 $A_1, B_1/A_1 \subset B_1, A_2, B_2/A_2 \subset B_2$，那么 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$，从而 $(A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$。又 $B_1 \times B_2 = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup ((A_1 \times (B_2/A_2)) \cup (A_1 \times A_2))$，从而结论正确。
- 若 $A_1/B_1 \neq \varnothing$，设 $a \in A_1/B_1$，取 $b \in A_2$，那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$，但 $(a, b) \notin B_1 \times B_2$，与 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ 矛盾。

□

由于 $\mathcal{A}_i, 1 \le i \le n$ 是 Ω_i 上的 σ-代数，从而 $\mathcal{A}_i, 1 \le i \le n$ 为 Ω_i 上的半集代数。我们可以用数学归纳法证明以下命题：设 $\Omega_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 是 n 个集合，$\mathcal{A}_i$ 是 Ω_i 上的半集代数，那么 $\mathcal{C}_n = \{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

- 当 $n = 1$ 时，$\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1$，显然为半集代数。
- 当 $n = 2$ 时，$\mathcal{C}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2\}$。下证 $\mathcal{C}_2$ 为半集代数。
  - 由于 A_1, A_2 为半集代数，那么 $\Omega_i, \varnothing \in A_i\ i = 1, 2$。从而 $\{\varnothing \times \varnothing, \Omega_1 \times \Omega_2\} \subset \mathcal{C}_1$。
  - 设 $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2 \in \mathcal{C}$,那么由1中的1可知 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$。又由 $\mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 均为半集代数,那么 $A_i \cap B_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$。那么 $(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \times B_2) \in \mathcal{C}_2$。故 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in \mathcal{C}_2$。
  - 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$，那么由1中的1知 $A_1 \subset B_1$，$A_2 \subset B_2$。由于 $A_i, B_i \in \mathcal{A}_i$，那么 $\exists C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \le k \le N_i, N_i \in \mathbb{N}_+$ 两两不交，与 A_i 也不交，且 $B_i = A_i \cup (\bigcup_{1 \le k \le N_i} C_k^i), i = 1, 2$。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \le k \le N_i, i = 1, 2$，那么 $C_k^1 \times B_2 \in \mathcal{C}_2, 1 \le k \le N_1$，$A_1 \times C_k^2 \in \mathcal{C}_2, 1 \le k \le N_2$。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \le k \le N_i, i = 1, 2$ 两两不交，那么 $C_k^1 \times B_2, 1 \le k \le N_1$ 两两不交，$A_1 \times C_k^2, 1 \le k \le N_2$ 两两不交。又由于1中的1知，$B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$。那么

$$
\begin{aligned}
B_1 \times B_2 =&(A_1 \times A_2) \cup ((\bigcup_{1 \le k \le N_1} C_k^1) \times B_2) \cup (A_1 \times (\bigcup_{1 \le k \le N_2} C_k^2)) \\
=&(A_1 \times A_2) \cup \bigcup_{1 \le k \le N_1} (C_k^1 \times B_2) \cup \bigcup_{1 \le k \le N_2} (A_1 \times C_k^2)
\end{aligned}
$$

    又由 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交，从而 $(A_1 \times A_2), (\bigcup_{1 \le k \le N_1} (C_k^1 \times B_2)), (\bigcup_{1 \le k \le N_2} (A_1 \times C_k^2))$，故 $(A_1 \times A_2), (C_k^1 \times B_2), (A_1 \times C_j^2), 1 \le k \le N_1, 1 \le j \le N_2$ 两两不交。从而 $B_1 \times B_2$ 能表示成 $A_1 \times A_2$ 与 $\mathcal{C}_2$ 中元素的不交并。
- 设 $n = k, 1 \le k \le n - 1$ 时，$\mathcal{C}_k := \{A_1 \times \cdots \times A_k : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \le i \le k\}$ 为半集代数。那么

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{k+1} :=&\{A_1 \times \cdots \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \le i \le k+1\} \\
=&\{(A_1 \times \cdots \times A_k) \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \le i \le k+1\} \\
=&\{C \times A : C \in \mathcal{C}_k, A \in \mathcal{A}_{k+1}\}.
\end{aligned}
$$

  由 $n = 2$ 的情形可知 $\mathcal{C}_{k+1}$ 为半集代数。

□

PROBLEM VI 举例说明可加测度未处有限可加。 PROBLEM VII 举例说明半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ 代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \ge 1, A_n \in \mathcal{T}\}.$$

但如果 ω 至多可数时，如上表述是正确的.

SOLUTION .

□