Probability 3

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 24 日

PROBLEM I 分布函数是否是不降的？举出反例或者给出证明。
PROBLEM II 证明若 $F(x) = \mathbb{P}(\xi < x)$ 是连续的，则 $\eta = F(\xi)$ 具有 $(0,1)$ 上的均匀分布。

SOLUTION.

Lemma 1. $F(x)$ 为随机变量 ξ 的分布函数，若 F 为左连续，右极限存在，那么 $\forall x \in \mathbb{R}, F^{-1}(\{x\})$ 或为 $\varnothing$，或为 $(a, b], a, b \in \mathbb{R}$。

证明. $\forall x \in \mathbb{R}$，若 $F^{-1}\{x\} \neq \varnothing$，需证明 $\exists a, b \in \mathbb{R}$， □

□

PROBLEM III 设 ξ_n $n \in \mathbb{N}_+$ 为 i.i.d. 随机变量，分布为 μ。给定 $A \in \mathcal{B}$，$\mu(A) > 0$，定义 $\tau = \inf\{k : \xi_k \in A\}$。证明 ξ_τ 的分布为 $\frac{\mu(\cdot \cap A)}{\mu(A)}$。

SOLUTION. $\forall B \in \mathcal{C}$，$\mathbb{P}(\xi_\tau \in B) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_\tau \in B | \tau = n)\mathbb{P}(\tau = n)$。考虑到 $\{\tau = n\} = \{\xi_n \in A, \xi_k \notin A, 1 \leq k \leq n-1\}$，$\{\xi_\tau \in B | \tau = n\} = \{\xi_n \in B | \xi_n \in A, \xi_k \notin A, 1 \leq k \leq n-1\}$，及 $\xi_k, 1 \leq k \leq n-1$ 与 ξ_n 独立，从而 $\{\xi_\tau \in B | \tau = n\} = \{\xi_n \in B | \xi_n \in A\} = \{\xi_n \in A \cap B | \xi_n \in A\}$。从而，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\xi_\tau \in B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \in A \cap B | \xi_n \in A)\mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi_n \in A \cap B)}{\mathbb{P}(\xi_n \in A)}\mathbb{P}(\tau = n) \\
&= \frac{\mathbb{P}(\xi_n \in A \cap B)}{\mathbb{P}(\tau \in A)} \\
&= \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}
\end{aligned}
$$

□

PROBLEM IV 若 $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ 为独立的 π 系，那么 $\sigma(\mathcal{C}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ 独立。

SOLUTION. 该题的证明需要 $\Omega \in \mathcal{C}_i$ $1 \le i \le n$。

只需证明若 $\forall 1 \le l \le n, 1 \le k \le n, \mathcal{C}_k$ 为独立的 π 系且 $\Omega \in \mathcal{C}_k$，那么 $\mathcal{C}_k, 1 \le k \le n, k \ne l, \sigma(\mathcal{C}_l)$ 独立。考虑

$$\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}_l) : \forall J \subset 2^{\{1,\cdots,n\}} \backslash \{\varnothing\}, \mathbb{P}(A \cap \bigcap_{i \in J \backslash \{l\}} A_i) = \mathbb{P}(A) \prod_{i \in J \backslash \{l\}} \mathbb{P}(A_i), A_i \in \mathcal{C}_i, i \in \{1, \cdots, n\} \backslash \{l\}\}$$

。

$\square$

PROBLEM V

1. 设 $\{A_n\}_{n \ge 1}$ 为独立事件序列，令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{A_n, A_{n+1}, \cdots\}$. 证明 $\forall A \in \mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.
2. 设 $\{\xi_n\}_{n \ge 1}$ 为独立随机变量，令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots\}$。证明 $\forall A \in \mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.