Probability 3

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 5 日

PROBLEM I 分布函数是否是不降的？举出反例或者给出证明。

SOLUTION. 以下是反例。

令 $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-x-y$，则有 $\Delta_{a,b}F=F(b_1,b_2)-F(a_1,b_2)-F(b_1,a_2)+F(a_1,a_2)=\mathrm{e}^{b_1+b_2}-\mathrm{e}^{a_1+b_2}-\mathrm{e}^{b_1+a_2}+\mathrm{e}^{a_1+a_2}-b_1-b_2+a_1+b_2+b_1+a_2-a_1-a_2=(\mathrm{e}^{b_1}-\mathrm{e}^{a_1})(\mathrm{e}^{b_2}-\mathrm{e}^{a_2})\geq 0$，但 $F(-1,-1)\geq 2>0=F(0,0)$。 $\square$

PROBLEM II 证明若 $F(x)=\mathbb{P}(\xi<x)$ 是连续的，则 $\eta=F(\xi)$ 具有 $(0,1)$ 上的均匀分布。

SOLUTION. 令 $\eta=F(\xi)$，只需证明 $\forall x\in(0,1)$，$\mathbb{P}(\eta<x)=x$。由于 $\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$，那么 $\forall x\in(0,1)$，$\exists N>0$，满足 $\forall z>N$，$F(z)>1-\frac{1-x}{2}>x$。故 $\{y:F(y)\geq x\}\neq\varnothing$。令 $G(x)=\inf\{y:F(y)\geq x\}$。

下证 $\eta<x\iff\xi<G(x)$。"$\Longleftarrow$": 由于 $\xi<G(x)$，那么 $F(\xi)\leq x$。若 $F(\xi)=x$，那么 $G(x)>\xi\in\{y:F(y)\geq x\}$，与 $G(x)$ 为 $\{y:F(y)\geq x\}$ 下确界矛盾。故 $F(\xi)<x$。

"$\Longrightarrow$": 由于 $\eta=F(\xi)<x$，若 $\xi>G(x)$，那么 $\exists y:G(x)<y<\xi$ 使得 $F(y)\geq x$，那么 $F(\xi)\geq F(y)\geq x$。与 $F(\xi)<x$ 矛盾。若 $\xi=G(x)$，那么由于 $G(x)$ 为下确界，$\exists y_n\in\{y:F(y)\geq x\}$ 满足，$y_n\to G(x)$，那么由于 F 连续可知，$x\leq\lim_n F(y_n)=F(G(x))=F(\xi)$。与 $F(\xi)<x$ 矛盾。

事实上，$F(G(x))=x$。若 $F(G(x))>x$，那么由于 F 连续不降，可知 $\exists y<G(x)$，使得 $F(y)>F(G(x))-\frac{F(G(x))-x}{2}>x$。与 $G(x)$ 为下确界矛盾。从而 $\mathbb{P}(\eta<x)=\mathbb{P}(\xi<G(x))=F(G(x))=x$。 $\square$

PROBLEM III 设 ξ_n $n\in\mathbb{N}_+$ 为 i.i.d. 随机变量，分布为 μ。给定 $A\in\mathcal{B}$，$\mu(A)>0$，定义 $\tau=\inf\{k:\xi_k\in A\}$。证明 ξ_τ 的分布为 $\frac{\mu(\cdot\cap A)}{\mu(A)}$。

SOLUTION. $\forall B\in\mathcal{C}$，$\mathbb{P}(\xi_\tau\in B)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(\xi_\tau\in B|\tau=n)\mathbb{P}(\tau=n)$。考虑到 $\{\tau=n\}=\{\xi_n\in A,\xi_k\notin A,1\leq k\leq n-1\}$，故 $\{\xi_\tau\in B|\tau=n\}=\{\xi_n\in B|\xi_n\in A,\xi_k\notin A,1\leq k\leq n-1\}$。又由于 $\xi_k,1\leq k\leq n-1$ 与 ξ_n 独立，从而 $\{\xi_\tau\in B|\tau=n\}=\{\xi_n\in B|\xi_n\in A\}=\{\xi_n\in A\cap B|\xi_n\in A\}$。

从而，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\xi_\tau \in B) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(\xi_n \in A \cap B | \xi_n \in A)\mathbb{P}(\tau = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}(\xi_n \in A \cap B)}{\mathbb{P}(\xi_n \in A)}\mathbb{P}(\tau = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(A \cap B)}{\mu(A)}\mathbb{P}(\tau = n) \\ &= \frac{\mu(B \cap A)}{\mu(A)}\end{aligned}$$

□

PROBLEM IV 若 $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_n$ 为独立的 π 系，那么 $\sigma(\mathcal{C}_1), \cdots, \sigma(\mathcal{C}_n)$ 独立。

SOLUTION. 该题的证明需要 $\Omega \in \mathcal{C}_i$ $1 \le i \le n$。

先证明若 $\forall 1 \le l \le n, 1 \le k \le n, \mathcal{C}_k$ 为独立的 π 系且 $\Omega \in \mathcal{C}_k$，那么 $\mathcal{C}_k, 1 \le k \le n, k \ne l, \sigma(\mathcal{C}_l)$ 独立。$\forall J \in 2^{\{1,\cdots,n\}} \setminus \{\varnothing\}$，令 $A_i \in \mathcal{C}_i, i \in J \setminus \{l\}$，若 $l \in J$，令 $A_l \in \sigma(\mathcal{C}_l)$，即证明 $\mathbb{P}(\prod_{i\in J} A_i) = \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i)$。故只需证明 $l \in J$ 的情形正确即可。考虑

$$\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}_l) : \forall J \in 2^{\{1,\cdots,n\}\setminus\{l\}} \setminus \{\varnothing\}, \mathbb{P}(A \cap \bigcap_{i\in J} A_i) = \mathbb{P}(A) \prod_{i \in J} \mathbb{P}(A_i), A_i \in \mathcal{C}_i, i \in J\}$$

。下证 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}_l)$。即证明 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}_l$ 的 σ-代数。

1. $\forall A \in \mathcal{C}_l$，由于 $\mathcal{C}_i, 1 \le i \le n$ 独立，故 $A \in \mathcal{A}$。
2. 由于 $\Omega \in \mathcal{C}_l$，那么 $\Omega \in \mathcal{A}$。
3. $A, B \in \mathcal{A}$，$B \supsetneq A$，那么 $\forall J \in 2^{\{1,\cdots,n\}\setminus\{l\}}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((B \setminus A) \cap \bigcap_{i\in J} A_i) =&\mathbb{P}(B \cap \bigcap_{i\in J} A_i) - \mathbb{P}(A \cap \bigcap_{i\in J} A_i) \\ =&\mathbb{P}(B) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) - \mathbb{P}(A) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) \\ =&(\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) \\ =&\mathbb{P}(B \setminus A) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

   故 $B \setminus A \in \mathcal{A}$。

4. $\forall B_j \in \mathcal{A}, j \in \mathbb{N}_+, B_j \subset B_{j+1}, B = \bigcup B_j$，那么 $\forall J \in 2^{\{1,\cdots,n\}\setminus\{l\}}$，

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B \cap \bigcap_{i\in J} A_i) =& \lim_j \mathbb{P}(B_j \cap \bigcap_{i\in J} A_i) \\ =& \lim_j \mathbb{P}(B_j) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i) \\ =&\mathbb{P}(B) \prod_{i\in J} \mathbb{P}(A_i)\end{aligned}$$

故 $B \in \mathcal{A}$。

从而 $\mathcal{A}$ 为包含 $\mathcal{C}_l$ 的 λ-系，由于 $\mathcal{C}_l$ 为 π-系，从而 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C}_l)$。又由于 $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C}_l)$ 显然，那么 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C}_l)$。从而 $\sigma(\mathcal{C}_l), \mathcal{C}_k, 1 \le k \le n, k \ne l$ 独立。

下用 MI 证明 $\forall 1 \le k \le n, \mathcal{C}_k$ 为独立的 π 系且 $\Omega \in \mathcal{C}_k$，那么 $1 \le k \le n, \sigma(\mathcal{C}_k)$ 独立。

1. 由上述证明的结论可知，$\sigma(\mathcal{C}_1), \mathcal{C}_k, 2 \le k \le n$ 独立。且 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 为 π-系。
2. 若 $1 \le l < n$，满足 $\sigma(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_j, 1 \le i \le l, l+1 \le j \le n$ 独立。下证 $\sigma(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_j, 1 \le i \le l+1, l+1 \le j \le n$ 独立。由于 $\sigma(\mathcal{C}_i), 1 \le i \le l$ 为包含 Ω 的 π-系，由上述证明的结论可知，$\sigma(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_j, 1 \le i \le l+1, l+2 \le j \le n$ 独立。

故 $\forall 1 \le k \le n, \mathcal{C}_k$ 为独立的 π 系且 $\Omega \in \mathcal{C}_k$，那么 $1 \le k \le n, \sigma(\mathcal{C}_k)$ 独立。 □

PROBLEM V

1. 设 $\{A_n\}_{n\ge1}$ 为独立事件序列，令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{A_n, A_{n+1}, \cdots\}$. 证明 $\forall A \in \mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.
2. 设 $\{\xi_n\}_{n\ge1}$ 为独立随机变量，令 $\mathcal{J} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \sigma\{\xi_n, \xi_{n+1}, \cdots\}$。证明 $\forall A \in \mathcal{J}$，有 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 1.

SOLUTION. 1. 只需将题目V中的2中的 ξ_n 定义为 $\mathbb{1}(A_n), n \in \mathbb{N}_+$。故只需证明2.

2. 由于 $\forall n \in \mathbb{N}_+$，$\sigma\{\xi_k, 1 \le k \le n-1\}, \sigma\{\xi_n, \cdots\}$ 独立，$\mathcal{J} \subset \sigma\{\xi_n, \cdots\}$，故 $\mathcal{J}$ 与 $\sigma\{\xi_k, 1 \le k \le n-1\}$ 独立。又由于 $\sigma\{\xi_n, n \in \mathbb{N}_+\} = \sigma\{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \sigma\{\xi_k, 1 \le k \le n\}\}$。由于 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \sigma\{\xi_k, 1 \le k \le n\}$ 为 π-系，那么由题目V知，$\mathcal{J}$ 与 $\sigma\{\xi_k, k \in \mathbb{N}_+\}$ 独立。而 $\mathcal{J} \subset \sigma\{\xi_k, k \in \mathbb{N}_+\}$，那么 $\mathcal{J}$ 与 $\mathcal{J}$ 独立。故 $\forall A \in \mathcal{J}$，$\mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$，故 $\mathbb{P}(A) = 0$ 或 $\mathbb{P}(A) = 1$.

□

PROBLEM VI 设 $\{\xi_1, \cdots\}$ 是 i.i.d. 的取值于 $\{1, \cdots, r\}$ 的随机变量，且 $\mathbb{P}(\xi_i = k) = p(k) > 0, \forall 1 \le k \le r$。令 $\pi_n(\omega) = \prod_{k=1}^{n} p(\xi_k(\omega))$，证明 $-n^{-1}\log \pi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} H \triangleq -\sum_{k=1}^{r} p(k)\log p(k)$。这里 H 称为 Shannon 信息熵。

Lemma 1. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为概率空间，$B_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}_+$，若 $\sum_n \mathbb{P}(B_n) < \infty$，那么 $\mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=m}^{\infty} B_n) = 0$.

Lemma 2. 若 $X_n, n \in \mathbb{N}_+$ 为独立随机变量，满足 $\sum_n \frac{\mathrm{Var}(X_n)}{n^2} < \infty$，那么

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k)}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$$

证明. $\forall \varepsilon > 0$，令 $S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k - \mathbb{E}(X_k)$，$A_n := \{|S_n| \ge n\varepsilon\}$. 那么 $A_n \subset \{\max_{1\le m\le n} |S_m| \ge n\varepsilon\}$。由于 $\mathrm{Var}|S_m| = \mathbb{E}|\sum_{k=1}^{m} X_k - \mathbb{E}X_k|^2 = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}X_k^2 - 2\sum_{1\le i<j\le m} \mathbb{E}X_i Xj$，$X_i, i \in \mathbb{N}_+$ 独立，那么 $\mathrm{Var}|S_m| = \sum_{k=1}^{m} \mathbb{E}X_k^2$. 故 $\max_{1\le m\le n} \mathrm{Var}|S_m| = \mathrm{Var}|S_n| = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k$。从而 $\mathbb{P}(\{\max_{1\le m\le n} |S_m| \ge n\varepsilon\}) \le \frac{\mathrm{Var}(\max_{1\le m\le n} |S_m|)}{n^2\varepsilon^2} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k}{n^2\varepsilon^2}$.

先证 $\forall m \in \mathbb{N}_+, \forall n : 2^{m-1} < n \leq 2^m$，$|S_n - S_{2^{m-1}}| < 2^m\varepsilon$ 几乎处处成立。令 $B_m = \{\max_{2^{m-1}<n\leq 2^m} |S_n - S_{2^{m-1}}| \geq 2^m\varepsilon\}$，同理可知 $\mathbb{P}(B_m) \leq \frac{\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \mathrm{Var}X_k}{2^{2m}\varepsilon^2}$. 故

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_m) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=2^{m-1}+1}^{2^m} \mathrm{Var}X_k}{2^{2m}\varepsilon^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_k}{2^{2m(k)}\varepsilon^2}\end{aligned}$$

其中，$m(k) = \lceil \log_2 k \rceil$，故 $2^{m(k)} \geq k$，从而 $2^{2m(k)} \geq k^2$. 从而，

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_m) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_k}{k^2\varepsilon^2} < \infty$$

因此，由引理 1 可知，$\mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} B_n) = 0$. 即 $\forall n : 2^{m-1} < n \leq 2^m$，$|S_n - S_{2^{m-1}}| < 2^m\varepsilon$ 几乎处处成立。

下证 $\forall m \in \mathbb{N}_+, |S_{2^m}| \geq 2^m\varepsilon$ 几乎处处成立。考虑到 $\mathbb{P}(|S_{2^m}| \geq 2^m\varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}|S_{2^m}|}{2^{2m}\varepsilon^2} = \frac{\sum_{k=1}^{2^m} X_k}{2^{2m}\varepsilon^2}$. 从而，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_{2^m}) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sum_{k=1}^{2^m} \mathrm{Var}X_k}{2^{2m}\varepsilon^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=m(k)}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}X_k}{2^m\varepsilon^2} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4/3 \frac{\mathrm{Var}X_k}{2^{m(k)}\varepsilon^2} \\ &= \frac{4}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_m) < \infty\end{aligned}$$

其中，$m(k) = \lceil \log_2 k \rceil$. 由引理 1可知，$\mathbb{P}(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_{2^m}) = 0$. 即 $|S_{2^m}| < 2^m\varepsilon, \forall m \in \mathbb{N}_+$ 几乎处处成立。

那么 $\forall n \in \mathbb{N}_+, m(n) = \lceil \log_2 n \rceil$, 那么 $2^{2^{m(n)-1}} < n \leq 2^{m(n)}$，从而

$$|S_n| \leq |S_n - S_{2^{m(n)-1}}| + |S_{2^{m(n)-1}}| < 2^{m(n)}\varepsilon + 2^{2^{m(n)}-1}\varepsilon = 3 \times 2^{2^{m(n)-1}}\varepsilon < 3n\varepsilon$$

几乎处处成立。从而 $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. □

SOLUTION. 令 $Y_k = -\log(p(\xi_k))$，那么 $-\log \pi_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$。由于 $\xi_k, k \in \mathbb{N}_+$ 独立同分布，那么 $Y_k, k \in \mathbb{N}_+$ 独立同分布。故 $\mathbb{E}Y_k = \sum_{n=1}^{r} -\log(p(n))\mathbb{P}(\xi_k = n) = -\sum_{n=1}^{r} \log(p(n))p(n)$，$\mathrm{Var}Y_k = \mathbb{E}Y_k^2 - (\mathbb{E}Y_k)^2 = \sum_{n=1}^{r}(\log(p(n)))^2 p(n) - (\mathbb{E}Y_k)^2 < \infty$。从而，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Var}Y_n}{n^2} = \mathrm{Var}Y_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$。那么由引理 2 知，$Y_k, k \in \mathbb{N}_+$ 满足强大数定律。故 $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k - \mathbb{E}Y_1}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} 0$。从而 $\frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k}{n} \xrightarrow{\text{a.s.}} \mathbb{E}Y_1 = -\sum_{n=1}^{r} \log(p(n))p(n)$。 □

PROBLEM VII 设 ξ_n 关于 n 单调上升，且 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$，求证 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$。

SOLUTION. 由于 ξ_n 关于 n 单调上升，不妨设 $\xi_n \to \eta$ 由于 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$，那么 $\exists \{\xi_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\xi_n\}_{k=1}^{\infty}$，满足 $\xi_{n_k} \xrightarrow{\text{a.s.}} \xi$。由于 ξ_n 关于 n 单调上升，那么 $\xi = \lim_k \xi_{n_k} = \sup_k \xi_{n_k}, \eta = \lim_n \xi_n = \sup_n \xi_n$。由于 $\forall \omega \in \Omega, \sup_k \xi_{n_k}(\omega) \leq \sup_n \xi_n(\omega)$，那么 $\xi \leq \eta$。

另一方面，$\forall n\ \exists n_k \geq n$，故 $\forall \omega \in \Omega, \xi_n(\omega) \leq \xi_{n_k}(\omega)$。故 $\lim_n \xi_n(\omega) \leq \lim_k \xi_{n_k}(\omega), \forall \omega \in \Omega$。从而 $\eta \leq \xi$。从而，$\lim_n \xi_n \to \xi$ 几乎处处成立。 □

PROBLEM VIII

1. 设 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$，则 $S_n \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$。
2. 若 $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$，则 $S_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ 是否成立?

SOLUTION. 1. 由于 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$，那么 $\exists N$，满足 $\mathbb{P}(N)=0$，$\forall \omega \in N^c$，$\xi_n(\omega) \to \xi(\omega)$。故 $\forall \omega \in N^c$，$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k(\omega) \to \xi(\omega)$。从而 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \xi_k \xrightarrow{\text{a.e.}} \xi$。

2. 不一定，以下是反例。

令 $\xi_k, k \in \mathbb{N}_+$ 相互独立，且 $\mathbb{P}(\xi_k = k) = \frac{1}{k}, \mathbb{P}(\xi_k = 0) = 1 - \frac{1}{k}$。

$\xi_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$: $\forall \varepsilon > 0$，$N = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil, \forall k > N$，那么

$$\mathbb{P}(|\xi_k - 0| > \varepsilon) = \mathbb{P}(\xi_k \neq 0) = \frac{1}{k} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

从而 $\xi_k \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$S_n \overset{\mathbb{P}}{\not\to} 0$: 令 $I_n = \{m_n, \cdots, n\}$，其中 $m_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，那么 $\mathbb{P}(\xi_k \neq k, \forall k \in I_n) = \prod_{k=m_n}^n (1 - \frac{1}{k}) = \frac{m_n - 1}{n} \to \frac{1}{2}$。故 $\mathbb{P}(\exists k \in I_n, \xi_k = k) = 1 - \frac{m_n-1}{n} \to \frac{1}{2}$. 若 $\exists k \in I_n$，满足 $\xi_k = k$，那么 $S_n \geq \frac{k}{n} \geq \frac{m_n}{n} \to \frac{1}{2}$. 那么 $\exists N$，$\forall n > N$，$S_n \geq \frac{1}{4}, \mathbb{P}(\exists k \in I_n, \xi_k = k) > \frac{1}{4}$. 故 $\mathbb{P}(S_n \geq \frac{1}{4}) \geq \mathbb{P}(\exists k \in I_n, \xi_k = k) > \frac{1}{4}$. 从而 $\liminf_n \mathbb{P}(S_n \geq \frac{1}{4}) \geq \frac{1}{4}$. 故 $S_n \overset{\mathbb{P}}{\not\to} 0$.

□

PROBLEM IX 若 Ω 存在划分 $\{A_n\}_{n\geq 1}$ 使 $\mathcal{A} = \sigma(\{A_n : 1 \leq n < \infty\})$，则称 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为纯原子概率空间，每个非空的 A_n 称为一个原子。证明在纯原子概率空间上，随机变量序列依概率收敛等价于几乎处处收敛。

Lemma 3. 设 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为纯原子概率空间，X 为随机变量。设 $\{A_n : n \in \mathbb{N}_+\}$ 为原子集，那么 $\forall k \in \mathbb{N}_+, \exists c \in \mathbb{R}$，$X(\omega) = c, \forall \omega \in A_k$。

证明. 若 $\exists \omega_1, \omega_2 \in A_k$ 满足 $x_1 := X(\omega_1) \neq X(\omega_2) =: x_2$。不妨设 $x_1 < x_2$。那么 $A := \{x_1 \leq X < x_2\} \in \mathcal{A}$，且 $A_k \supsetneq A \cap A_k \supset \{\omega_1\}$. 与 A_k 为原子集矛盾。 □

SOLUTION. 由于 $\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+} A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}_+} \mathbb{P}(A_k) = 1 > 0$，那么 $\exists k$ 使得 $\mathbb{P}(A_k) > 0$. 令 $I := \{k \in \mathbb{N}_+ : \mathbb{P}(A_i) = 0\} \subsetneq \mathbb{N}_+$. 设 $X_n, n \in \mathbb{N}_+$，X 为 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 上的随机变量。只需证明若 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$，那么 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。

由于引理 3知，$\exists c_{n,k}, c_k \in \mathbb{R}$ 满足 $X_n = c_{n,k}, X = c_k, \forall \omega \in A_k$。由于 $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$，那么 $\forall \varepsilon > 0$，$\forall k \notin I$，$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon \mid A_k) = \mathbb{1}_{|c_{n,k} - c_k| \geq \varepsilon} \to 0, n \to \infty$。那么 $\exists N_n$ 满足 $\forall n > N_n$，$\mathbb{1}_{|c_{n,k}-c_k|\geq\varepsilon} = 0$，即 $\forall n \geq N_n$，$|c_{n,k} - c_k| < \varepsilon$。从而 $X_n \to X, \forall \omega \in A_k$。从而 $\forall \omega \in \bigcup_{i \notin I} A_i$，$X_n \to X$。而 $\mathbb{P}(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i) = 0$。从而 $X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X$。 □

PROBLEM X 设随机变量 ξ_n, ξ 的分布函数分别为 F_n, F。若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$，则对 F 的任意连续点 x 有 $\mathbb{P}(\xi_n \leq x) \to \mathbb{P}(\xi \leq x), \mathbb{P}(\xi_n > x) \to \mathbb{P}(\xi > x)$。

SOLUTION. 由于 $F(x)=\mathbb{P}(\xi<x)$, $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$, 那么对于任意 F 的连续点 x, $\mathbb{P}(\xi_n<x)\to\mathbb{P}(\xi<x)$。又由于 F 不降，那么 F 的不连续点至多可数。考虑 F 的连续点 x，令 $A:=\{s:F\text{在}s\text{连续}, s>x\}$。由于 $\mathbb{P}(\xi_n\le x)\ge\mathbb{P}(\xi_n<x),\forall n$，那么 $\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\ge\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n<x)=\mathbb{P}(\xi<x)=F(x)$. 又由于 $\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\mathbb{P}(\xi_n<s), s\in A$，那么 $\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n<s)=\mathbb{P}(\xi<s), s\in A$。那么 $\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\inf_{s\in A}\mathbb{P}(\xi<s)=\mathbb{P}(\xi\le x)=F(x^+)$。从而 $F(x)\le\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le F(x^+)$。而 x 为 F 的连续点，那么 $F(x)=F(x^+)$。故 $\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)=\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)=F(x)=\lim_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)=\mathbb{P}(\xi\le x)$。

又由于 $\mathbb{P}(\xi_n>x)=1-\mathbb{P}(\xi_n\le x),\mathbb{P}(\xi>x)=1-\mathbb{P}(\xi\le x)$。设 x 为 F 的连续点，由上述结论可知，$\mathbb{P}(\xi_n>x)\to 1-F(x)=\mathbb{P}(\xi>x)$

$\square$