

Probability 1

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 8 日

PROBLEM I 证明 σ -代数是集代数。

SOLUTION. 假定 \mathcal{A} 是 σ -代数, 那么 $\Omega \in \mathcal{A}$, \mathcal{A} 对补运算封闭。只需证明 \mathcal{A} 对有限并封闭。 $A, B \in \mathcal{A}$, 令 $A_n = \emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}, n \geq 3$, 那么 $A \cup B \cup \bigcup_{n \geq 3} A_n = A \cup B \in \mathcal{A}$. \square

PROBLEM II 设 \mathcal{C} 是集类, 则 $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$ 。

SOLUTION. 令 $\mathcal{A} := \{A \in \sigma(\mathcal{C}) : \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)\}$. 下证 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$, 即证 \mathcal{A} 为包含 \mathcal{C} 的 σ -代数。

- 由于 $\forall A \in \mathcal{C}, \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$, 那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 。
- 由 $\Omega \in \sigma(\emptyset) = \{\emptyset, \Omega\}$, 那么 $\Omega \in \mathcal{A}$ 。
- 设 $A \in \mathcal{A}$, 那么 $\exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 由于 $\sigma(\mathcal{C}_1)$ 是 σ -代数, 那么 $A^c \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. 所以 $A^c \in \mathcal{A}$ 。
- 设 $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$, 那么 $\exists \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \forall n \in \mathbb{N}$. 令 $\mathcal{T} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$, 由 $|\mathcal{C}_n| \leq \aleph_0, \mathcal{C}_n \subset \mathcal{C}$, 可知 $|\mathcal{T}| \leq \aleph_0, \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$, 那么 $A_n \in \sigma(\mathcal{C}_n) \subset \sigma(\mathcal{T}), \forall n \in \mathbb{N}$. 所以 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sigma(\mathcal{T})$. 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ 。

综上, \mathcal{A} 为包含 \mathcal{C} 的 σ -代数。故 $\mathcal{A} \supset \sigma(\mathcal{C})$ 。又由于 $\mathcal{A} \subset \sigma(\mathcal{C})$, 故 $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ 。从而, $\forall A \in \sigma(\mathcal{C}), \exists \mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}, |\mathcal{C}_1| \leq \aleph_0, A \in \sigma(\mathcal{C}_1)$. \square

PROBLEM III σ -代数 \mathcal{A} 称为可数生成的, 如果存在可数的子集类 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ 使 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$ 。证明 \mathcal{B}^d 是可数生成的。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{B(p, r) : p \in \mathbb{Q}^d, r \in \mathbb{Q}_+\}$, 其中 $B(p, r) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - p\| < r\}$ 。显然 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$ 。下证 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{A})$ 。令 $\mathcal{O} := \{\mathcal{B}^d \text{ 中的开集}\}$, 由于 $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{O})$, 那么 $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}$, 从而 $\sigma(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{O})$ 。只需证明 $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A})$ 。

$\forall A \in \mathcal{O}, \forall x \in A, \exists U = B(x, s), x \in U \subset A$ 。由于 \mathbb{Q}^d 在 \mathbb{R}^d 中稠密, 故 $\exists p_x \in B(x, \frac{s}{2}) \cap \mathbb{Q}^d$ 。取 $r_x \in \mathbb{Q}_+$ 使 $\|x - p_x\| < r_x < \frac{s}{2}$, 由 $\forall y \in B(p_x, r_x)$, 有 $\|y - x\| \leq \|y - p_x\| + \|p_x - x\| < r_x + \frac{s}{2} < s$ 得 $B(p_x, r_x) \subset B(x, s) \subset A$, 则有 $\bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x) \subset A$ 。显然 $x \in B(p_x, r_x)$, 那么 $A \subset \bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x)$,

从而 $\forall A \in \mathcal{O}, \bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x) = A$ 。由于 $|\mathcal{A}| = \aleph_0$, 那么 $\bigcup_{x \in A} B(p_x, r_x), \forall A \in \mathcal{O}$ 一定为可数的并。从而 $\forall A \in \mathcal{O}, A \in \sigma(\mathcal{A})$ 。 \square

PROBLEM IV 设 \mathcal{C} 是 Ω 中任一集代数, 则存在 Ω 中的单调类 \mathcal{M}_0 满足:

1. $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$,
2. 对于包含 \mathcal{C} 的单调类 \mathcal{M} , 有 $\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}$ 。

称这样的单调类为 \mathcal{C} 生成的单调类, 记作 $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ 。

SOLUTION. 考虑 $\mathcal{A} := \{\mathcal{M} : \mathcal{M} \text{ 为单调类且 } \mathcal{C} \subset \mathcal{M}\}$ 。由于 Ω 的全体子集 $P(\Omega)$ 显然为包含 \mathcal{C} 的单调类。那么 $P(\Omega) \in \mathcal{A}$, 故 $\mathcal{A} \neq \emptyset$ 。令 $\mathcal{M}_0 = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$, 那么 $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}_0$ 。下证 \mathcal{M}_0 为单调类。

- $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \subset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$ 。 $\forall A \in \mathcal{A}, A_n \in A$, 由于 A 为单调类, 那么 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in A$ 。故 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 。
- 同理可证, $A_n \in \mathcal{M}_0, n \in \mathbb{N}$, 满足 $A_n \supset A_{n+1}, n \in \mathbb{N}$, 则 $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$ 。

设 \mathcal{M} 为包含 \mathcal{C} 的单调类, 那么 $\mathcal{M} \in \mathcal{A}$, 那么 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}_0$ 。 \square

PROBLEM V 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个集合, \mathcal{A}_i 是 Ω_i 上的 σ -代数。证明 $\mathcal{C} = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

SOLUTION.

Lemma 1. $\Omega_i, i = 1, 2$ 为两个集合, $A_i, B_i \subset \Omega_i, i = 1, 2$, 那么以下命题正确。

1. $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$;
2. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, 那么 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$, 其中 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交。
3. 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, 那么 $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ 。

证明. 1. $\forall (a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$, 那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$ 且 $(a, b) \in B_1 \times B_2$ 。从而 $a \in A_1, b \in A_2, a \in B_1, b \in B_2$ 。故 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \cap B_2$ 。那么 $(a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ 。另一方面, $\forall (a, b) \in (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$, 那么 $a \in A_1 \cap B_1, b \in A_2 \cap B_2$, 故 $(a, b) \in A_1 \times A_2, (a, b) \in B_1 \times B_2$ 。故 $(a, b) \in (A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2)$ 。

2. 先证 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交: 由1知, $(A_1 \times A_2) \cap ((B_1/A_1) \times B_2) = \emptyset \times B_2 = \emptyset$ 。 $(A_1 \times A_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = A_1 \times \emptyset = \emptyset$ 。 $((B_1/A_1) \times B_2) \cap (A_1 \times (B_2/A_2)) = \emptyset \times B_2$ 。下证 $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$ 。由于 $A_1, B_1/A_1 \subset B_1, A_2, B_2/A_2 \subset B_2$, 那么 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$, 从而 $(A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2)) \subset B_1 \times B_2$ 。又 $B_1 \times B_2 = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times B_2) = ((B_1/A_1) \times B_2) \cup ((A_1 \times (B_2/A_2)) \cup (A_1 \times A_2))$, 从而结论正确。

3. 若 $A_1/B_1 \neq \emptyset$, 设 $a \in A_1/B_1$, 取 $b \in A_2$, 那么 $(a, b) \in A_1 \times A_2$, 但 $(a, b) \notin B_1 \times B_2$, 与 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$ 矛盾。

\square

由于 $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$ 是 Ω_i 上的 σ -代数, 从而 $\mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq n$ 为 Ω_i 上的半集代数。我们可以用数学归纳法证明以下命题: 设 $\Omega_i, i = 1, 2, \dots, n$ 是 n 个集合, \mathcal{A}_i 是 Ω_i 上的半集代数, 那么 $\mathcal{C}_n = \{A_1 \times \dots \times A_n : A_i \in \mathcal{A}_i\}$ 为半集代数。

- 当 $n = 1$ 时, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{A}_1$, 显然为半集代数。
- 当 $n = 2$ 时, $\mathcal{C}_2 = \{A_1 \times A_2 : A_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2\}$ 。下证 \mathcal{C}_2 为半集代数。
 - 由于 A_1, A_2 为半集代数, 那么 $\Omega_i, \emptyset \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 。从而 $\{\emptyset \times \emptyset, \Omega_1 \times \Omega_2\} \subset \mathcal{C}_1$ 。
 - 设 $A_1 \times A_2, B_1 \times B_2 \in \mathcal{C}$, 那么由引理1中的1可知 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$ 。又由 $\mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 均为半集代数, 那么 $A_i \cap B_i \in \mathcal{A}_i, i = 1, 2$ 。那么 $(A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2) \in \mathcal{C}_2$ 。故 $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) \in \mathcal{C}_2$ 。
 - 若 $A_1 \times A_2 \subset B_1 \times B_2$, 那么由引理1中的3知 $A_1 \subset B_1, A_2 \subset B_2$ 。由于 $A_i, B_i \in \mathcal{A}_i$, 那么 $\exists C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, N_i \in \mathbb{N}_+$ 两两不交, 与 A_i 也不交, 且 $B_i = A_i \cup (\bigcup_{1 \leq k \leq N_i} C_k^i), i = 1, 2$ 。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, i = 1, 2$, 那么 $C_k^1 \times B_2 \in \mathcal{C}_2, 1 \leq k \leq N_1, A_1 \times C_k^2 \in \mathcal{C}_2, 1 \leq k \leq N_2$ 。由于 $C_k^i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq k \leq N_i, i = 1, 2$ 两两不交, 那么 $C_k^1 \times B_2, 1 \leq k \leq N_1$ 两两不交, $A_1 \times C_k^2, 1 \leq k \leq N_2$ 两两不交。又由于1中的2知, $B_1 \times B_2 = (A_1 \times A_2) \cup ((B_1/A_1) \times B_2) \cup (A_1 \times (B_2/A_2))$ 。那么

$$\begin{aligned} B_1 \times B_2 &= (A_1 \times A_2) \cup ((\bigcup_{1 \leq k \leq N_1} C_k^1) \times B_2) \cup (A_1 \times (\bigcup_{1 \leq k \leq N_2} C_k^2)) \\ &= (A_1 \times A_2) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq N_1} (C_k^1 \times B_2) \cup \bigcup_{1 \leq k \leq N_2} (A_1 \times C_k^2) \end{aligned}$$

又由 $(A_1 \times A_2), ((B_1/A_1) \times B_2), (A_1 \times (B_2/A_2))$ 两两不交, 从而 $(A_1 \times A_2), (\bigcup_{1 \leq k \leq N_1} (C_k^1 \times B_2)), (\bigcup_{1 \leq k \leq N_2} (A_1 \times C_k^2))$, 故 $(A_1 \times A_2), (C_k^1 \times B_2), (A_1 \times C_j^2), 1 \leq k \leq N_1, 1 \leq j \leq N_2$ 两两不交。从而 $B_1 \times B_2$ 能表示成 $A_1 \times A_2$ 与 \mathcal{C}_2 中元素的不交并。

- 设 $n = k, 1 \leq k \leq n - 1$ 时, $\mathcal{C}_k := \{A_1 \times \dots \times A_k : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k\}$ 为半集代数。那么

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{k+1} &:= \{A_1 \times \dots \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k+1\} \\ &= \{(A_1 \times \dots \times A_k) \times A_{k+1} : A_i \in \mathcal{A}_i, 1 \leq i \leq k+1\} \\ &= \{C \times A : C \in \mathcal{C}_k, A \in \mathcal{A}_{k+1}\}. \end{aligned}$$

由 $n = 2$ 的情形可知 \mathcal{C}_{k+1} 为半集代数。

□

PROBLEM VI 举例说明可加测度未必有限可加。

SOLUTION. 考虑 $\Omega = \{1, 2, 3\}, \mathcal{T} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}, \Phi : \mathcal{T} \rightarrow \{0, 1\}$, 其中 $\Phi(\{\emptyset\}) = 0, \Phi(A) = 1, A \in \mathcal{T} \setminus \{\emptyset\}$ 。那么 Φ 为 \mathcal{T} 上的可加测度。考虑 $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ 两两不交且 $\{1, 2, 3\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\} \in \mathcal{T}$, 则 $\Phi(\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}) = \Phi(\{1, 2, 3\}) = 1, \sum_{k=1}^3 \Phi(\{k\}) = \sum_{k=1}^3 1 = 3$ 。故 $\sum_{k=1}^3 \Phi(\{k\}) \neq \Phi(\{1, 2, 3\})$ 。故 Φ 不是有限可加测度。 □

PROBLEM VII 举例说明半集代数 \mathcal{T} 生成的 σ -代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T} \right\}.$$

但如果 Ω 至多可数时, 如上表述是正确的.

SOLUTION. 下证如上表述在 Ω 可数时, 不正确. 考虑 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A, |A^c| < \infty \text{ 或 } 0 \notin A, |A| < \infty\}$. 令 $\mathcal{A} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$, 先证 \mathcal{T} 为半集代数.

- 由于 $0 \notin \emptyset$, 且 $|\emptyset| = 0$, 那么 $\emptyset \in \mathcal{T}$. 又由于 $0 \in \mathbb{N}$, 且 $|\mathbb{N}^c| = |\emptyset| = 0$, 那么 $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$.
- $\forall A, B \in \mathcal{T}$, 若 $0 \in A, 0 \in B$, 那么 $0 \in A \cap B$. 由于 $|A^c|, |B^c| < \infty$, 那么 $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c| < \infty$. 故 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 若 $0 \in A, 0 \notin B$, 那么 $0 \notin A \cap B$. 由于 $|A^c|, |B| < \infty$, 那么 $|A \cap B| \leq |B| < \infty$. 从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 若 $0 \notin A, 0 \notin B$, 那么 $0 \notin A \cap B$. 又由于 $|A|, |B| < \infty$, 那么 $|A \cap B| \leq |A| < \infty$. 从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$. 综上, $A \cap B \in \mathcal{T}$.
- $\forall A \in \mathcal{T}$, 若 $0 \in A$, 那么 $|A^c| < \infty$. 又由于 $0 \notin A^c$, 那么 $A^c \in \mathcal{T}$. 若 $0 \notin A$, 那么 $|A| < \infty$. 又由于 $0 \in A^c$, 那么 $|(A^c)^c| < \infty$. 故 $A^c \in \mathcal{T}$. 综上, $A^c \in \mathcal{T}$.

下证 $\sigma(\mathcal{T}) \neq \mathcal{A}$. 事实上, $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}$. 若 $\{0\} \in \mathcal{A}$, 那么 $\exists A_n \in \mathcal{T}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$, 使得 $\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$. 由于 $|\{0\}| = 1 < \infty$, 那么 $|A_n| < \infty, \forall n \geq 1$. 故 $0 \notin A_n, \forall n \geq 1$. 从而 $0 \notin \cup_{n \geq 1} A_n$. 故 $\{0\} \notin \mathcal{A}$. 而 $\{0\} = (\cup_{k \geq 1} \{k\})^c, \{k\} \in \mathcal{T}, k \geq 1$. 故 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T})$. \square