Probability 6

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 12 月 2 日

PROBLEM I 设 C 为 Cantor 集，对每个 $x \in (0,1)$，定义 x_n 为 x 的三进制表示，即 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$。定义 $f(x) := \inf_{x_n=1} n$。定义：

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ 1 & x \ge 1 \\ \sum_{n=0}^{f(x)} \frac{\mathbb{1}_{x_n>0}}{2^n} & x \in (0,1) \end{cases} \tag{1}$$

此 F 称为 Cantor 集上的均匀分布。证明：

1. F 是连续的；
2. F 是 Lebesgue 奇异的。

SOLUTION. 先证 F 是良定义的，即对不同的三进制表示取值相同。设 $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$ 是 x 的两种三进制表示，设 $\exists N, \forall n > N, x_n = 0, y_n = 2$。令 $m = \inf\{N : \forall n > N, y_n = 2\}$，则 $x_m = y_m + 1, \forall n > m, x_n = 0, y_n = 2; \forall n < m, x_n = y_n$。若 $\exists n < m, x_n = 1$，则用 x_n 和 y_n 得到的 $F(x)$ 显然由定义是相等的。现在假设 $\forall n < m, x_n \ne 1$。

若 $y_m = 0, x_m = 1$，则两种表示得到的值分别为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{y_n>0}}{2^n}$ 和 $\sum_{n=0}^{m} \frac{\mathbb{1}_{x_n>0}}{2^n}$，差为 $\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^m} = 0$。

若 $y_m = 1, x_m = 2$，则两种表示得到的值分别为 $\sum_{n=0}^{m} \frac{\mathbb{1}_{y_n>0}}{2^n}$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbb{1}_{x_n>0}}{2^n}$，由 $\forall n > m, x_n = 0$ 立得它们相等。

综上，F 是良定义的。

1. 先证 F 单调不减。设 $0 < x < y < 1$，取 x, y 的三进制表示 x_n, y_n，则 $\exists m, \forall n < m, x_n = y_n, x_m < y_m$，于是 $y_m > 0$。若 $\exists n < m, x_n = y_n = 1$，则

$$F(x) = F(y)$$

。现设 $\forall n < m, x_n \ne 1$。若 $x_m = 0$，则 $F(y) - F(x) \ge \frac{1}{2^m} - \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 0$。若 $x_m > 0$，则 $x_m = 1, y_m = 2$，于是 $f(x) = m$，故 $F(y) \ge F(x)$ 明显成立。于是 F 在 $(0,1)$ 上单调不减。又由 F 的定义明显看出 F 在 $\mathbb{R}$ 上是单调的。

再证 F 的值域是 $[0,1]$。显然 $F(\mathbb{R})\subset[0,1]$，故只需 $\forall y\in[0,1],\exists x\in\mathbb{R},F(x)=y$。对 $y=0$ 和 $y=1$ 显然成立，下设 $y\in(0,1)$。取 y 的二进制表示 $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y_n}{2^n}$。令 $x:=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2y_n}{3^n}$，则显然有 $F(x)=y$。

故 F 是单调的值域连通的函数，从而连续。

2. 由 Lebesgue 分解定理知 $F=F_c+F_d+F_s$。由 F 连续知 F_d 差分为 0，不妨设 $F_d=0$。在 Cantor 关于 $[0,1]$ 的补集中的每个开区间 (a,b) 上，一定有 $a=\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{3^k},b=\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{3^k},\forall n<m,a_n=b_n,a_m=1,b_m=2$。于是 $F(a)=F(b)$，也就是 $\Delta F(a,b)=0$。于是 F 所对应的测度只集中在 Cantor 集上。又由 Cantor 集是零测的，得 $F_c=0$。于是 $F=F_d$，故 F 是奇异的。

$\square$

PROBLEM II 设 μ_1,μ_2 是有限符号测度，令 $\mu_1\vee\mu_2=\mu_1+(\mu_2-\mu_1)^+,\mu_1\wedge\mu_2=\mu_1-(\mu_1-\mu_2)^+$，则

1. $\mu_1\vee\mu_2$ 是满足 $\nu\geq\mu_i,i=1,2$ 的最小符号测度；
2. $\mu_1\wedge\mu_2$ 是满足 $\nu\leq\mu_i,i=1,2$ 的最大符号测度。

SOLUTION. 对 $\mu_1-\mu_2$ 进行 Hahn 分解得到 D,D^c，使 $(\mu_1-\mu_2)^+(A)=\mu_1(A\cap D)-\mu_2(A\cap D)\geq 0$。则 $(\mu_2-\mu_1)^+(A)=(\mu_1-\mu_2)^-(A)=\mu_2(A\backslash D)-\mu_1(A\backslash D)$。那么显然 $(\mu_1-\mu_2)^+\geq\mu_1-\mu_2,(\mu_2-\mu_1)^+\geq\mu_2-\mu_1$。

1. 对于任何的 A，有 $\mu_1\vee\mu_2(A)=\mu_1(A)+(\mu_2-\mu_1)^+(A)\geq\mu_1(A)+\max\{0,\mu_2(A)-\mu_1(A)\}=\max\{\mu_1(A),\mu_2(A)\}$；下证设 ν 满足 $\nu\geq\mu_i$，$\nu\geq\mu_1\vee\mu_2$。反设不成立，则存在 A 使 $\nu(A)<\mu_1\vee\mu_2(A)$，则 $\nu(A\cap D)<\mu_1\vee\mu_2(A\cap D)$ 或 $\nu(A\setminus D)<\mu_1\vee\mu_2(A\setminus D)$。而 $\mu_1\vee\mu_2(A\cap D)=\mu_1(A\cap D)+(\mu_2-\mu_1)^+(A\cap D)=\mu_1(A\cap D),\mu_1\vee\mu_2(A\setminus D)=\mu_1(A\setminus D)+(\mu_2-\mu_1)^+(A\setminus D)=\mu_1(A\backslash D)+\mu_2(A\backslash D)-\mu_1(A\backslash D)=\mu_2(A\backslash D)$. 故 $\nu(A\cap D)<\mu_1(A\cap D)$ 或 $\nu(A\backslash D)<\mu_2(A\backslash D)$. 均与 $\nu\geq\mu_1,\mu_2$ 矛盾！故 $\nu\geq\mu_1\vee\mu_2$。
2. 同理 $\mu_1\wedge\mu_2(A)=\mu_1(A)-(\mu_1-\mu_2)^-(A)\leq\mu_1(A)-\max\{0,\mu_1(A)-\mu_2(A)\}=\min\{\mu_1(A),\mu_2(A)\}$。下证设 ν 满足 $\nu\leq\mu_i$，$\nu\leq\mu_1\vee\mu_2$。反设不成立，则存在 A 使 $\nu(A)>\mu_1\wedge\mu_2(A)$，则 $\nu(A\cap D)<\mu_1\wedge\mu_2(A\cap D)$ 或 $\nu(A\setminus D)<\mu_1\wedge\mu_2(A\setminus D)$。而 $\mu_1\wedge\mu_2(A\cap D)=\mu_1(A\cap D)-(\mu_1-\mu_2)^+(A\cap D)=\mu_1(A\cap D)-\mu_1(A\cap D)+\mu_2(A\cap D)=\mu_2(A\cap D),\mu_1\wedge\mu_2(A\backslash D)=\mu_1(A\setminus D)-(\mu_1-\mu_2)^+(A\setminus D)=\mu_1(A\setminus D)=\mu_1(A\setminus D)$. 均与 $\nu\leq\mu_1,\mu_2$ 矛盾！故 $\nu\leq\mu_1\wedge\mu_2$。

$\square$

PROBLEM III 设 μ 为 $(\Omega,\mathcal{A})$ 上的 σ 有限测度，$\mathcal{A}$ 包含单点集。则集合 $\{x\in\Omega:\mu(\{x\})>0\}$ 至多可数。

SOLUTION. 令 $A_n:=\{x\in\Omega:\mu(\{x\})\geq\frac{1}{n}\}$。若 $\exists n,A_n$ 为无限集，则可取其可数子集 B_n，有 $\mu(B_n)=\sum_{x\in B_n}\mu(\{x\})\geq\sum_{x\in B_n}\frac{1}{n}=\frac{q}{n}\cdot\infty=\infty$。与 $\mu(B_n)\leq\mu(\Omega)<\infty$ 矛盾。故 $\forall n,A_n$ 为有限集。

又由于 $\{x\in\Omega:\mu(\{x\})>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，而每个 A_n 有限，故 $\{x\in\Omega:\mu(\{x\})>0\}$ 至多可数。 $\square$

PROBLEM IV 设 $(\Omega_i,\mathcal{A}_i), i=1,2,3$ 为三个可测空间，λ 为 $\Omega_2\times\mathcal{A}_3$ 上的 σ 有限测转移测度，f 是 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_3$ 可测函数。若 $\forall(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2$，积分 $g(\omega_1,\omega_2):=\int_{\Omega_3}f(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)$ 存在。证明 g 是 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ 可测的。

SOLUTION. 令 $L:=\{f\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_3:\int_{\Omega_3}f(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)\text{可测}\}$。先证 L 是 $\mathcal{L}$-系。

1. $\int_{\Omega_3}1\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=\lambda(\omega_2,\Omega_3)$，由转移测度的定义知其可测。故 $1\in L$。
2. 设 $f_1,f_2\in L, a,b\in\mathbb{R}, af_1+bf_2$ 有意义。则 $\int_{\Omega_3}(af_1+bf_2)(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=a\int_{\Omega_3}f_1(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)+b\int_{\Omega_3}f_2(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)$。故 $af_1+bf_2\in L$。
3. 设 $0\le f_n\nearrow f, f_n\in L$。则 $\int_{\Omega_3}f(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=\lim_n\int_{\Omega_3}f_n(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2\,\mathrm{d}\omega_3)$ 可测，于是 $f\in L$。

于是 L 是 $\mathcal{L}$-系。对于 $A_1\times A_3\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_3$，有 $\int_{\Omega_3}\mathbb{1}_{A_1\times A_3}(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=\mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)\int_{A_3}1\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=\mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)\lambda(\omega_2,A_3)$。由转移测度的定义知 $\int_{A_3}1\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)=\lambda(\omega_2,A_3)$ 关于 $\mathcal{A}_2$ 可测，又显然 $\mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)$ 关于 $\mathcal{A}_1$ 可测，故 $\int_{\Omega_3}\mathbb{1}_{A_1\times A_3}(\omega_1,\omega_3)\lambda(\omega_2,\mathrm{d}\omega_3)$ 关于 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ 可测。于是 $\mathbb{1}_{A_1\times A_3}\in L$。而 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_3$ 为 π-系，故由函数类的单调类定理可知所有 $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_3$ 可测函数均在 L 中。 □

PROBLEM V 若矩阵 $P=(p_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ 满足 $p_{ij}\ge 0,\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1,\forall i\ge 1$，则称 P 为转移概率矩阵。令 $\lambda(i,A)=\sum_{j\in A}p_{ij}$，证明 λ 是转移概率。

SOLUTION.

1. 先证对固定的 i，$\lambda(i,\cdot)$ 是概率。由于 $\mu_{ij}(A)=\mathbb{1}_{j\in A}p_{ij}\ge 0$ 且显然 σ 可加，故为测度。从而 $\lambda(i,A)=\sum_j\mu_{ij}(A)$ 为测度。又 $\lambda(i,\Omega)=\sum_j p_{ij}=1$，故为概率。
2. 再证对固定的 A，$\lambda(\cdot,A)$ 可测。在可数离散空间上显然所有函数都可测。
   综上，λ 是转移概率。 □

PROBLEM VI 设 μ_k,ν_k 分别为 $(\Omega_k,\mathcal{A}_k)$ 上 σ 有限测度，$\nu_k\ll\mu_k, k=1,2$。证明 $\nu_1\times\nu_2\ll\mu_1\times\mu_2$ 且 $\frac{\mathrm{d}(\nu_1\times\nu_2)}{\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2)}(\omega_1,\omega_2)=\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2),\mu_1\times\mu_2-\text{a.e.}$

SOLUTION. 只需证明 $\nu_1\times\nu_2(A)=\int_A\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2)\,\mathrm{d}(\mu_1\times\mu_2),\forall A\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$. 由测度扩张的唯一性，只需验证对于 $A_1\times A_2\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$，有 $\nu_1\times\nu_2(A_1\times A_2)=\int_{A_1\times A_2}\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1\times\mu_2$ 即可。显然有 $\nu_1\times\nu_2(A_1\times A_2)=\nu_1(A_1)\nu_2(A_2)=\int_{\Omega_1}\mathbb{1}_{A_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\,\mathrm{d}\mu_1\cdot\int_{\Omega_2}\mathbb{1}_{A_2}(\omega_2)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_2=\int_{\Omega_1\times\Omega_2}\mathbb{1}_{A_1\times A_2}(\omega_1,\omega_2)\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1\times\mu_2=\int_{A_1\times A_2}\frac{\mathrm{d}\nu_1}{\mathrm{d}\mu_1}(\omega_1)\frac{\mathrm{d}\nu_2}{\mathrm{d}\mu_2}(\omega_2)\,\mathrm{d}\mu_1\times\mu_2$。 □

PROBLEM VII 设 $(\Omega_t,\mathcal{A}_t)_{t\in T}$ 为一族可测空间，$\mathcal{C}_t\subset\mathcal{A}_t,\sigma(\mathcal{C}_t)=\mathcal{A}_t,t\in T$。证明 $\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$，其中 $J_t:\prod_{i\in T}\Omega_i\ni\omega\mapsto\omega_t\in\Omega_t$。

SOLUTION. 显然有 $\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t\supset\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$。

1. 先证 T 为可数集，$\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$。
   只需证 $\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$ 包含所有有限维柱集。$T_0\subset T$ 为有限集。对于有限维柱集有 $\prod_{t\in T_0}A_t\times\prod_{t\in T\setminus T_0}\Omega_t=\bigcap_{t\in T_0}J_t^{-1}(A_t)$，故只需证明 $J_t^{-1}(A_t)\in\sigma(J_t^{-1}(\mathcal{C}_t))$。由 $\sigma(\mathcal{C}_t)=\mathcal{A}_t$ 及 $A_t\in\mathcal{A}_t$，故 $J_t^{-1}(A_t)\in J_t^{-1}(\sigma(\mathcal{C}_t))=\sigma(J_t^{-1}(\mathcal{C}_t))$。故 $\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$ 包含所有有限维柱集，从而 $\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$。

2. 再证 T 为不可数集，$\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$。
只需证 $\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$ 包含所有可数维柱集。$T_0\subset T$ 为可数集。由于上述证明可知，$\prod_{t\in T_0}A_t\times\prod_{t\in T\setminus T_0}\Omega_t\subset\sigma(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t))$。从而 $\prod_{t\in T}\mathcal{A}_t=\sigma\left(\bigcup_{t\in T}J_t^{-1}(\mathcal{C}_t)\right)$。

□