Iterative 9

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 12 月 10 日

PROBLEM I $V=[v_1,\cdots,v_k]$ 为 k 维空间，那么 V 为不饱和 Krylov 子空间，（即 $\exists q,A$，使得 $V=\kappa_k(A,q)$） $\iff$ $\exists M\in\mathbb{R}^{k\times k}$ 满足 $R:=AV-VM$ 的秩为 1，且 $\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k,\mathrm{Range}(R)\}$ 空间维数为 $k+1$.

SOLUTION. “$\implies$”: 由于 V 为 k 维不饱和 Krylov 子空间，那么 $v_1,\cdots,v_k$ 线性无关，且 $Av_k\notin\mathrm{span}\{vk_1,\cdots,v_k\}$. 设 $M(:,j)$ 表示 M 的第 j 列，$1\le j\le k$。那么 $M(:,j)=e_{j+1},1\le j\le k-1$, $M(:,k)=(V^TV)^{-1}V^TAv_k$, 令 $r=Av_k-VM(:,k)=Av_k-V(V^TV)^{-1}V^TAv_k$。则 $R=AV-VM=re_k^T$，其中 e_j 表示 j 分量为 1 的单位向量，$1\le j\le k$。由于 V 不饱和，$M(:,k)$ 为 Av_k 在 V 上的投影系数，那么 $VM(:,k)\neq Av_k$，故 $r\neq 0$，此时 R 的秩为 1.

另一方面，由于 $r\notin\mathrm{span}v_1,\cdots,V_k=V$，且 $R(:,j)=0,1\le j\le k-1,R(:,k)=r$，从而 $\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k,\mathrm{Range}(R)\}=\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k,r\}$。故 $\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k,\mathrm{Range}(R)\}$ 的维数为 $k+1$.

“$\impliedby$”: 由于 $R=AV-VM$ 秩为 1，那么 $R=u\alpha^T$，u,α 为非零列向量。设 $T\in\mathbb{R}^{k\times k}$ 可逆，满足 $\alpha^TT=e_k^T$。那么 $AVT-VMT=u\alpha^TT=ue_k^T$。令 $V_1=VT,M_1=T^{-1}MT$，那么 $AV_1-V_1M_1=ue_k^T$。故 $Av_j^1=V_1M_1(:,j),1\le j\le k-1$。

我们希望找到 C，使 $\overline{V}=V_1C$ 得 $A\overline{v}_j=\overline{v_{j+1}},1\le j\le k-1$.

令 $c_1=e_1$，$(c_j)_k=0,1\le j\le k$，$\tilde{c_j}$ 表示 c_j 前 $k-1$ 的分量，$\tilde{c_{j+1}}=M(:,\le k-1)\tilde{c_j}$，下证明 $C=(c_1,\cdots,c_k)$ 为所求。那么 $\forall 1\le j\le k-1,\overline{v}_{j+1}=V_1c_{j+1}=V_1M(:,\le k-1)c_j=V_1M(:,\le k-1)\tilde{c}_j++0=AV_1(:,\le k-1)\tilde{c}_j++0=A\overline{v_j}$，其中 ++ 表示矩阵的拼接。故 $V=\kappa_k(A,v_1)$。由于 R 的秩为 1，那么 $A\overline{v_k}\notin\mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k\}$，故 V 不饱和。 $\square$