Probability 2

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 10 月 14 日

PROBLEM I 举例说明半集代数 $\mathcal{T}$ 生成的 σ-代数不能一般性地表述为

$$\sigma(\mathcal{T}) = \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}.$$

但如果 Ω 至多可数时，如上表述是正确的.

SOLUTION. 下证如上表述在 Ω 可数时，不正确。考虑 $\mathcal{T} := \{A \subset \mathbb{N} : 0 \in A, |A^c| < \infty \text{或} 0 \notin A, |A| < \infty\}$。令 $\mathcal{A} := \{\sum_{n=1}^{\infty} A_n : \forall n \geq 1, A_n \in \mathcal{T}\}$，先证 $\mathcal{T}$ 为半集代数。

- 由于 $0 \notin \varnothing$，且 $|\varnothing| = 0$，那么 $\varnothing \in \mathcal{T}$。又由于 $0 \in \mathbb{N}$，且 $|\mathbb{N}^c| = |\varnothing| = 0$，那么 $\mathbb{N} \in \mathcal{T}$。
- $\forall A, B \in \mathcal{T}$，若 $0 \in A, 0 \in B$，那么 $0 \in A \cap B$。由于 $|A^c|, |B^c| < \infty$，那么 $|(A \cap B)^c| = |A^c \cup B^c| \leq |A^c| + |B^c| < \infty$。故 $A \cap B \in \mathcal{T}$。若 $0 \in A, 0 \notin B$，那么 $0 \notin A \cap B$。由于 $|A^c|, |B| < \infty$，那么 $|A \cap B| \leq |B| < \infty$。从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$。若 $0 \notin A, 0 \notin B$，那么 $0 \notin A \cap B$。又由于 $|A|, |B| < \infty$，那么 $|A \cap B| \leq |A| < \infty$。从而 $A \cap B \in \mathcal{T}$。综上，$A \cap B \in \mathcal{T}$。
- $\forall A \in \mathcal{T}$，若 $0 \in A$，那么 $|A^c| < \infty$。又由于 $0 \notin A^c$，那么 $A^c \in \mathcal{T}$。若 $0 \notin A$，那么 $|A| < \infty$。又由于 $0 \in A^c$，那么 $|(A^c)^c| < \infty$。故 $A^c \in \mathcal{T}$。综上，$A^c \in \mathcal{T}$。

下证 $\sigma(\mathcal{T}) \neq \mathcal{A}$。事实上，$\{0\} \in \sigma(\mathcal{T}) \setminus \mathcal{A}$。若 $\{0\} \in \mathcal{A}$，那么 $\exists A_n \in \mathcal{T}, n \geq 1, A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j$，使得 $\{0\} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$。由于 $|\{0\}| = 1 < \infty$，那么 $|A_n| < \infty, \forall n \geq 1$。故 $0 \notin A_n, \forall n \geq 1$。从而 $0 \notin \cup_{n \geq 1} A_n$。故 $\{0\} \notin \mathcal{A}$。而 $\{0\} = (\cup_{k \geq 1}\{k\})^c$，$\{k\} \in \mathcal{T}, k \geq 1$。故 $\{0\} \in \sigma(\mathcal{T})$。 □

PROBLEM II 设 μ^* 为 μ 生成的外测度，则测度空间 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 是完全的 $\iff$ $\mathcal{A} \supset \{A \subset \Omega : \mu^*(A) = 0\}$.

SOLUTION. 由于 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为测度空间，那么 μ 的外侧度 μ^* 可定义为

$$\mu^*(A) := \{\sum_n \mu(A_n) : A \subset \cup_n A_n, A_n \in \mathcal{A}\}, A \subset \Omega$$

“ $\Longrightarrow$ ”: 由于 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ 为完全的，那么 $\forall N$ 满足 $\exists B \in \mathcal{A}$，$N \subset B$，$\mu(B) = 0$，都有 $N \in \mathcal{A}$。若 $\mu^*(A) = 0$，那么 $\forall k \in \mathbb{N}_+$，$\exists A_{n,k} \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}$，满足 $\cup_n A_{n,k} \supset A$，$\mu(\cup_n A_{n,k}) \leq \sum_n \mu(A_{n,k}) <$

$\mu^*(A)+\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$。那么 $\mathcal{A}\ni B:=\cap_k\cup_n A_{n,k}\supset A$。而由于 $\mu(\cap_k^m\cup_n A_{n,k})<\frac{1}{m}<\infty, m\in\mathbb{N}$，由 μ 的连续性可知，$0\le\mu(B)=\mu(\cap_k\cup_n A_{n,k})=\lim_{m\to\infty}\mu(\cap_k^m\cup_n A_{n,k})\le\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0$。故 $\mu(B)=0$. 从而 A 为 μ 零测集。故 $A\in\mathcal{A}$。

"$\Longleftarrow$":$\forall N$ 满足 $\exists B\in\mathcal{A}$，$N\subset B$，$\mu(B)=0$，都有 $\mu^*(N)\le\mu(B)=0$。那么 $\mu^*(N)=0$. 从而 $N\in\mathcal{A}$。故 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为完全测度空间。 □

PROBLEM III $\mathcal{T}$ 为半集代数，μ 为 $\mathcal{T}$ 上的有限测度。记 $(\Omega,\mathcal{A}^*,\mu^*)$ 为 μ 扩张至 $\sigma(\mathcal{T})$ 的完全化，令

$$\mu_*(A):=\sup\{\sum_n\mu(A_n):A_n\in\mathcal{T}\text{两两不交},\sum_n A_n\subset A\},$$
$$\mathcal{A}_*:=\{A\subset\Omega:\mu^*(A)=\mu_*(A)\}.$$

证明：$\mathcal{A}^*\supset\mathcal{A}_*$。

SOLUTION. $\forall A\in\mathcal{A}_*$，那么 $\mu_*(A)=\mu^*(A)$。由 μ_* 的定义知，$\forall k\in\mathbb{N}_+$，$\exists A_{n,k}\in\mathcal{T}, n\in\mathbb{N}$，两两不交，且 $\cup_n A_{n,k}\subset A$，满足 $\sum_n\mu(A_{n,k})>\mu_*(A)-\frac{1}{k}$。由于 $A_{n,k}$ 两两不交，那么 $\mu(\cup_n A_{n,k})=\sum_n\mu(A_{n,k})$。由于书本定理 1.51 知，$\mu^*$ 即为 μ 的外测度，$\mathcal{A}^*$ 上的测度。故 $\mu^*(\cup_n A_{n,k})=\mu(\cup_n A_{n,k})=\sum_n\mu(A_{n,k})$。令 $B:=\cup_k\cup_n A_{n,k}\in\sigma(\mathcal{T})\subset\mathcal{A}^*$，那么 $B=\cup_{m=1}^\infty\cup_{k=1}^m\cup_{n=0}^\infty A_{n,k}\subset A\subset\Omega$，$\mu^*(B)\le\mu^*(A)\le\mu^*(\Omega)<\infty$。且 $A_{n,k}$ 两两不交 $\forall n,k$。由于 $\mu^*(B)=\lim_{m\to\infty}\mu^*(\cup_{k=1}^m\cup_{n=0}^\infty A_{n,k})\ge\lim_{m\to\infty}\mu^*(\cup_n A_{n,m})=\lim_{m\to\infty}\mu(\cup_n A_{n,m})=\lim_{m\to\infty}\mu_*(A)-\frac{1}{m}=\mu_*(A)$，从而 $\mu^*(B)\ge\mu_*(A)=\mu^*(A)$。故 $\mu^*(B)=\mu^*(A)$。令 $C=A\setminus B$，由于 $B\in\mathcal{A}^*$，那么 $\mu^*(A)=\mu^*(A\cap B)+\mu^*(A\cap B^c)=\mu^*(B)+\mu^*(C)$。从而 $\mu^*(C)=0$。那么 C 为 μ^*-零测集。故 $A=B\cup C$。由 $(\Omega,\mathcal{A}^*,\mu^*)$ 完全及书本定理 1.51 知，$\mathcal{A}^*=\{B\cup N:B\in\mathcal{A}^*,N\text{为}\mu^*\text{零测集}\}$。从而，$A\in\mathcal{A}^*$。

□

PROBLEM IV 设 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为测度空间，μ^* 为由 μ 生成的外测度。证明 $N\subset\Omega$ 为 μ 零测集当且仅当 $\mu^*(N)=0$.

SOLUTION. "$\Longrightarrow$": 若 N 为 μ 零测集，那么 $\exists B\in\mathcal{A}$，$\mu(B)=0$，$N\subset B$。那么 $\mu^*(N)\le\mu(B)=0$。故 $\mu^*(N)=0$。

"$\Longleftarrow$": 若 $\mu^*(N)=0$，那么 $\mu^*(N)=\inf\{\sum_n\mu(A_n):A_n\in\mathcal{A},n\in\mathbb{N},\cup_n A_n\supset N\}=0$。故 $\forall k\ge1,\exists A_{n,k}\in\mathcal{A},n\ge1$，满足 $\cup_n A_{n,k}\supset N,\sum_n\mu(A_{n,k})<\mu^*(N)+\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$。令 $B:=\cap_k\cup_n A_{n,k}$，则 $B\supset N,B\in\mathcal{A}$。那么 $\mu(B)=\mu(\cap_m\cap_{1\le k\le m}\cup_n A_{n,k})=\lim_{m\to\infty}\mu(\cap_{1\le k\le m}\cup_n A_{n,k})\le\lim_{m\to\infty}\mu(\cup_n A_{n,m})=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}=0$。那么 N 为 μ 零测集。 □