Graduate Homework In Mathematics

Probability 4

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 11 日

General fire extinguisher

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明：$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。

SOLUTION. 取 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，$f(x):=-\frac{1}{x^2}$，则易知 $f(x)$ 是可积的，故积分存在。但对任何 n，有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n}\le f<\frac{0}{2^n}\})=\infty$，于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)=-\infty$，故题设不成立。 □

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数，令：$\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu := \inf\left\{\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu : g\ge f, g\text{为简单函数}\right\}$。举例说明 $\overline{\int}$ 与 $\int$ 未必相同，并解释为何不将积分定义为 $\overline{\int}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，令 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，则易知 $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu<\infty$。考查 $g\ge f$ 为简单函数，令 $\varepsilon=\inf_{x\in\Omega}g(x)$，由于 $g(x)$ 值域有限，故 $\exists x\in\Omega, g(x)=\varepsilon\ge f(x)>0$。于是 $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\varepsilon\,\mathrm{d}\mu=\varepsilon\mu\{\Omega\}=\infty$。故 $\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\infty\ne\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$。

使用 $\int$ 而不是 $\overline{\int}$ 的原因应该是为了保证所有黎曼可积的函数都可积。 □

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m\ge1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=\mathbb{N}_+,\mu$ 为计数测度。记 $g_m(n):=f_{nm}$。则 $\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{n\}g_m(n)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}$。由 Fatou 定理知 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}=\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\liminf_{m\to\infty}g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。 □

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ，则 $\mathbb{E}|\xi|\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|\xi_n|$。

SOLUTION. 设 F_n,F 为 ξ_n,ξ 的分布函数。构造一个新测度空间 (Ω,μ)，其中 $\Omega=(0,1),\mu$ 为勒贝格测度。令 $G(x):=\sup\{y\in\mathbb{R}:F(y)<x\},x\in(0,1)$。则 G 是单调的，故为 Ω 上的可测函数。考察 $G(y)<x$，由 G 的定义知 $G(x)<y\iff F(y)\ge x\iff x\in(0,F(y))$。故 $\mu(G<y)=F(y)$，于是 G 的分布函数也为 F。同理令 $G_n(x):=\sup\{y\in\mathbb{R}:F_n(y)<x\},x\in(0,1)$，则 G_n 的分布函数为 F_n。由于 G_n 于 ξ_n 同分布，故 $\mathbb{E}|\xi_n|=\int_{(0,1)}|G_n|\,\mathrm{d}\mu$。同理 $\mathbb{E}|\xi|=\int_{(0,1)}|G|\,\mathrm{d}\mu$。由 G_n 的定义知 $F_n(G_n(x))\le x$，

于是由 Fatou 引理知 $\mathbb{E}|\xi|=\int_{(0,1)}|G|\,\mathrm{d}\mu=$ 考查事件 $\xi<G(x)$，由 $G(x)$ 的定义知其等价于 $F(\xi)<x$，故 $\mathbb{P}(F(\xi)<x)=\mathbb{P}(\xi\le G(x))$。又由 F 是连续的，得 $\mathbb{P}(\xi\le G(x))=\mathbb{P}(\xi<G(x))=F(G(x))$。若 $G(x)=\pm\infty$，易于验证 $F(G(x))=x$。下设 $G(x)\in\mathbb{R}$。

由 $G(x)$ 的定义知 $\exists y_n\searrow G(x),F(y_n)\ge x$，结合 F 的连续性可知 $F(G(x))\ge x$。同样由 $G(x)$ 的定义可知 $\forall y<G(x),F(y)<x$，令 $y\nearrow G(x)$，由 F 的连续性可知 $F(G(x))\le x$。故 $F(G(x))=x$，从而 $\mathbb{P}(\xi\le G(x))=x$，即 $F(\xi)$ 是 $(0,1)$ 上的均匀分布。 □