Probability 5

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 18 日

PROBLEM I 设 f 的积分存在，μ 有限。证明：$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。

SOLUTION. 令 $A_{n,i}=\{\frac{i}{2^n}\le f(x)<\frac{i+1}{2^n}\}$，$g_n(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)$。

先证 $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n d\mu=\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$。显然有 $g_n(x)\le f(x)<g_n+\frac{1}{2^n}$。故 $0\le f(x)-g_n(x)<\frac{1}{2^n}$。从而 $f-g_n\to 0, n\to\infty, \forall x\in\Omega$，且 $\int_\Omega f-g_n\,\mathrm{d}\mu\le\int_\Omega\frac{1}{2^n}\,\mathrm{d}\mu=\frac{1}{2^n}\mu(\Omega)<\infty$，故由 LCDT 知 $\int_\Omega\lim_{n\to\infty}f(x)-g_n(x)\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f(x)-g_n(x)\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega 0\,\mathrm{d}\mu=0\mu(\Omega)=0.$ 而 $\forall n$，$g_n=g_n-f+f$，$|g_n|\le|g_n-f|+|f|=|f|+\frac{1}{2^n}\le|f|+1$，故 $|g_n|$ 积分存在，从而 g_n 积分存在。由于 f, g_n-f 积分存在，那么 $\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g_n-f\,\mathrm{d}\mu+\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\to 0+\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu, n\to\infty$。

下证 $\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu(A_{n,i})$。令 $h_{m,n}=\sum_{i=-m}^{m}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)$，那么 $h_{m,n}\to g_n, m\to\infty$，故 $\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\lim_{m\to\infty}h_{m,n}\,\mathrm{d}\mu$。由于 $A_{n,i}\cap A_{n,j}=\varnothing,\forall ij<0$，那么 $-h^-_{m,n}=\sum_{i=-m}^{0}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x), h^+_{m,n}=\sum_{i=0}^{m}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x), g_n^-=-\sum_{i=-\infty}^{0}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x), g_n^+=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)$。又由于 $h^+_{m+1,n}=\sum_{i=0}^{m+1}\frac{i}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)=\sum_{i=0}^{m}(\frac{i}{2^n}+\frac{i+1}{2^n})\mathbb{1}_{A_{n,i}\cap A_{n,m+1}}(x)+\frac{m+1}{2^n}\mathbb{1}_{A_{n,m+1}\setminus\bigcup_{i=0}^m A_{n,i}}(x)\ge h^+_{m,n}$. 故 $h^+_{m,n}\nearrow_m g_n^+$。同理可知 $h^-_{m,n}\nearrow_m g_n^-$。从而 $|h_{m,n}|\le|g_n|$ 由于 g_n 积分存在，那么 $\int_\Omega g_n^-\,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega g_n^+\,\mathrm{d}\mu$ 存在，且至少之一有限。从而由非负单调收敛定理知，$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega h^+_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\lim_{m\to\infty}h^+_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g_n^+\,\mathrm{d}\mu$，$\lim_{m\to\infty}\int_\Omega h^-_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\lim_{m\to\infty}h^-_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g_n^-\,\mathrm{d}\mu$。又由于 $\int_\Omega h^+_{m,n}\,\mathrm{d}\mu-\int_\Omega h^-_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega h_{m,n}\,\mathrm{d}\mu$，故 $\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega g_n^+\,\mathrm{d}\mu-\int_\Omega g_n^-\,\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega h^+_{m,n}\,\mathrm{d}\mu-\lim_{m\to\infty}\int_\Omega h^-_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}(\int_\Omega h^+_{m,n}\,\mathrm{d}\mu-\int_\Omega h^-_{m,n}\,\mathrm{d}\mu)=\lim_{m\to\infty}\int_\Omega h_{m,n}\,\mathrm{d}\mu=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=-m}^{m}\frac{i}{2^n}\mu(A_{n,i})=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu(A_{n,i})$

从而，$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu(A_{n,i})=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu(\{\frac{i}{2^n}\le f(x)<\frac{i+1}{2^n}\})$。

对一般的测度 μ 不成立，反例如下：

取 $\Omega=[1,\infty), \mu$ 为勒贝格测度，$f(x):=-\frac{1}{x^2}$，则易知 $f(x)$ 是可积的，故积分存在。但对任何 n，有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n}\le f<\frac{0}{2^n}\})=\infty$，于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)=-\infty$，故题设不成立。

□

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数，令：$\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu:=\inf\left\{\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu: g\ge f, g\text{为简单函数}\right\}$。举例说明 $\overline{\int}$ 与 $\int$ 未必相同，并解释为何不将积分定义为 $\overline{\int}$。

SOLUTION. $\Omega=[1,.\infty), \mu$ 为勒贝格测度，$f=\frac{1}{x^2}$ 为非负可测函数。若 g 为简单函数且 $g\ge f$，由于 g 的值域有限，那么 $\exists m\ge 0, x\in\Omega$，$m=\min_{x\in\Omega}g(x)=g(x_0)$。从而 $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega m\,\mathrm{d}\mu=$

$m\mu(\Omega) = \infty$。从而 $\overline{\int}_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \infty$。而 $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 1$，故 $\overline{\int} f \,\mathrm{d}\mu \neq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$。

使用 $\int$ 而不是 $\overline{\int}$ 应该是为了保证所有广义黎曼可积的非负函数都可积。 □

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m\geq 1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^\infty f_{nm} \geq \sum_{n=1}^\infty \liminf_{m\to\infty} f_{nm}$。

SOLUTION. 令 $\Omega = \mathbb{N}_+, \mu$ 为计数测度。记 $g_m(n) := f_{nm}$。则 $\int_\Omega g_m \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \mu\{n\} g_m(n) = \sum_{n=1}^\infty f_{nm}$。由 Fatou 引理知 $\liminf_{m\to\infty} \sum_{n=1}^\infty f_{nm} = \liminf_{m\to\infty} \int_\Omega g_m \,\mathrm{d}\mu \geq \int_\Omega \liminf_{m\to\infty} g_m \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \liminf_{m\to\infty} f_{nm}$。 □

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ，则 $\mathbb{E}|\xi| \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}|\xi_n|$。

Lemma 1. ξ, ξ_n 为随机变量，其对应的概率测度分别为 $\mu, \mu_n, n \in \mathbb{N}_+$ 在 $(E, \mathcal{B})$ 上。若 $\xi_n \xrightarrow{d} \xi, n \to \infty$，那么：

1. $\liminf_n \mu_n((-\infty, x)) \geq \mu((-\infty, x)), \limsup_n \mu_n((-\infty, x]) \leq \mu((-\infty, x])$；
2. $F \in \mathcal{B}$ 为闭集，则 $\limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F)$; $O \in \mathcal{B}$ 为开集，则 $\liminf_n \mu_n(O) \geq \mu(O)$。
3. $A \in \mathcal{B}, \mu(\partial A) = 0$, 那么 $\lim_n \mu_n(A) = \mu(A)$。

证明. 1. 由于 $\mu((-\infty, x))$ 关于 x 不降，那么 $\mu((-\infty, x))$ 的不连续点至多可数, 记连续点为 C。从而，$\forall x \in \mathbb{R}$，$\exists x_m \in C, y_m \in C, m \in \mathbb{N}_+$ 使得 $x_m \searrow_m x, y_m \nearrow_m, x$。那么 $\mu_n((-\infty, x)) \geq \mu_n((-\infty, y_m))$，从而 $\liminf_n \mu_n((-\infty, x)) \geq \liminf_n \mu_n((-\infty, y_m)) = \mu((-\infty, y_m))$。故

$$\liminf_n \mu((-\infty, x)) \geq \lim_m \mu((-\infty, y_m)) = \mu((-\infty, x))$$

。

又由于 $\mu_n((-\infty, x]) \leq \mu_n((-\infty, x_m))$, 从而 $\limsup_n \mu_n((-\infty, x]) \leq \limsup_n \mu_n((-\infty, x_m)) = \mu((-\infty, x_m))$。故

$$\limsup_n \mu_n((-\infty, x]) \leq \lim_m \mu((-\infty, x_m)) = \mu((-\infty, x])$$

。

2. 由于 $\forall F$ 为闭集，那么 F^c 为开集，故 $\limsup_n \mu_n(F) = 1 - \liminf_n \mu_n(F^c)$，故只需证明对开集有这个性质即可。$O \in \mathcal{B}$ 为开集，那么 O 可以表示为可数开区间的不交并。设 $O = \bigcup_{n=1}^\infty (a_n, b_n)$，其中 $a_n < b_n, n \in \mathbb{N}_+, (a_n, b_n) \cap (a_m, b_m) = \varnothing, n \neq m$。

   先证 $\forall s, v \in \mathbb{R}, s < v$，那么 $\liminf_n \mu_n((s, v)) \geq \mu((s, v))$。由于 $\mu_n((s, v)) = \mu_n((-\infty, v)) - \mu_n((-\infty, s])$，故

$$\begin{aligned}\liminf_n \mu_n((s, v)) &= \liminf_n \mu_n((-\infty, v)) + \liminf_n (-\mu_n((-\infty, s])) \\ &= \liminf_n \mu_n((-\infty, v)) - \limsup_n \mu_n((-\infty, s]) \\ &\geq \mu((-\infty, v)) - \mu((-\infty, s]) = \mu((s, v))\end{aligned}$$

由于 $\mu_n(O)=\mu_n(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+}(a_m,b_m))=\sum_{m\in\mathbb{N}_+}\mu_n((a_m,b_m))$，故

$$\begin{aligned}\liminf_n \mu_n(O) &= \liminf_n \mu_n(\bigcup_{m\in\mathbb{N}_+}(a_m,b_m))\\ &= \liminf_n \sum_m \mu_n((a_m,b_m))\\ &\overset{III}{\geq} \sum_m \liminf_n \mu_n((a_m,b_m))\\ &\geq \sum_m \mu((a_m,b_m)) = \mu(\bigcup_m (a_m,b_m)) = \mu(O)\end{aligned}$$

3. 由于 $A^o\subset A\subset \overline{A}$，那么 $\mu(A^o)\leq\mu(A)\leq\mu(\overline{A})$。而 $\partial A=\overline{A}\setminus A^o$，从而 $\mu(\overline{A})=\mu(A^o)+\mu(\overline{A}\setminus A^o)=\mu(A^o)+\mu(\partial A)=\mu(A^o)$。故 $\mu(A)=\mu(A^o)=\mu(\overline{A})$。又由于 $\mu(A^o)\leq\liminf_n\mu_n(A^o)\leq\liminf_n\mu_n(A)\leq\limsup_n\mu_n(A)\leq\limsup_n\mu_n(\overline{A})\leq\mu(\overline{A})=\mu(A^o)$，从而 $\liminf_n\mu(A)=\limsup_n\mu(A)=\mu(A^o)=\mu(A)$，即 $\lim_n\mu_n(A)=\mu(A)$。

□

Lemma 2. 若 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$，则对任何有界连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，有 $\mathbb{E}g(\xi_n)\to\mathbb{E}g(\xi)$。

证明. 设 ξ_n 的概率分布为 μ_n，ξ 的概率分布为 μ。$\forall g$ 为有界连续函数，那么 $\exists a,b\in\mathbb{R}$，满足 $a<g(x)<b,\forall x\in\mathbb{R}$。由于 μ 为概率分布，那么 $\mu(\mathbb{R})=\mathbb{P}(\Omega)=1$. 故 $\forall k\in\mathbb{N}_+$，集合 $\{c\in\mathbb{R}:\mu(\{x:g(x)=c\})>\frac{1}{k}\}$ 为有限集，从而 $\bigcup_{k\in\mathbb{N}_+}\{c\in\mathbb{R}:\mu(\{x:g(x)=c\})>\frac{1}{k}\}=\{c\in\mathbb{R}:\mu(\{x:g(x)=c\})>0\}:=T$ 至多可数。从而 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N}_+,\exists a_j\in T^c,0\leq j\leq N$ 满足：

- $a=a_0<\cdots<a_N=b$;
- $a_j-a_{j-1}<\varepsilon,1\leq j\leq N$;
- $\mu(\{x:g(x)=a_j\})=0,0\leq j\leq N$,

令 $A_j:=\{x:a_{j-1}\leq g(x)<a_j\},j=1,\cdots,N$。显然 $A_i\cap A_j=\varnothing,i\neq j,0\leq i,j\leq N,\bigcup_{i=0}^N A_i=\mathbb{R}$。由于 g 连续，那么 $\partial A_j=\overline{A_j}\setminus A_j^o\subset\{x:a_{j-1}\leq g(x)\leq a_j\}\setminus\{x:a_{j-1}<g(x)<g_j\}=\{x:g(x)=a_{j-1}\}\cup\{x:g(x)=a_j\}$。故 $\mu(\partial A_j)=0,0\leq j\leq N$。故由引理 1知，$\lim_n\mu_n(A_j)=\mu(A_j),1\leq j\leq N$。令 $f:=\sum_{j=1}^N a_{j-1}\mathbb{1}_{A_j}$，那么 $|f(x)-g(x)|\leq\max_{1\leq j\leq N}|a_j-a_{j-1}|<\varepsilon,\forall x\in\mathbb{R}$。因此，

$$\begin{aligned}&|\mathbb{E}(g(\xi_n))-\mathbb{E}(g(\xi))|\\ =&\left|\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\right|\\ \leq&\left|\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}\mu_n(x)-\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}\mu\right|+\left|\int_{\mathbb{R}}f(x)\,\mathrm{d}\mu-\int_{\mathbb{R}}g(x)\,\mathrm{d}\mu\right|\\ \leq&\int_{\mathbb{R}}|g(x)-f(x)|\,\mathrm{d}\mu_n(x)+\left|\sum_{j=1}^N a_j(\mu_n(A_j)-\mu(A_j))\right|+\int_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}\mu\\ \leq&\varepsilon+\sum_{j=1}^N|a_j|\,|\mu_n(A_j)-\mu(A_j)|+\varepsilon\end{aligned}$$

从而 $\limsup_n |\mathbb{E}(g(\xi_n)) - \mathbb{E}(g(\xi))| \le 2\varepsilon + \limsup_n \sum_{j=1}^N |a_j||\mu_n(A_j) - \mu(A_j)| = 2\varepsilon$。又由于 ε 的任意性，故 $\limsup_n |\mathbb{E}(g(\xi_n)) - \mathbb{E}(g(\xi))| = 0$，从而 $\lim_n \mathbb{E}(g(\xi_n)) = \mathbb{E}(g(\xi))$。 $\square$

SOLUTION. 考虑 $g_m(x) := \min\{m, |x|\}$ 是有界连续函数，那么由引理 2可知，$\lim_n \mathbb{E}(g_m(\xi_n)) = \mathbb{E}(g_m(\xi))$。而 $g_m(\xi) \le |\xi|$，$g_m(\xi) \nearrow_m |\xi|$，故由非负单调收敛定理可知，$\lim_m \mathbb{E}(g_m(\xi)) = \mathbb{E}(|\xi|)$。由于 $g_m(\xi_n) \le |\xi_n|$，故 $\liminf_n \mathbb{E}(g_m(\xi_n)) \le \liminf_n \mathbb{E}(|\xi_n|)$，即 $\mathbb{E}(g_m(\xi)) = \lim_n \mathbb{E}(g_m(\xi_n)) \le \liminf_n \mathbb{E}(|\xi_n|)$。从而 $\mathbb{E}(|\xi|) = \lim_m \mathbb{E}(g_m(\xi)) \le \lim_m \liminf_n \mathbb{E}(|\xi_n|) = \liminf_n \mathbb{E}(|\xi_n|)$。 $\square$

PROBLEM V 设 $\xi \ge 0$ 使 $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$。证明 $\mathbb{P}(\xi > 0) \ge \frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$。

PROBLEM VI 利用 Jensen 不等式证明几何平均值小于代数平均值：$a_1, \cdots, a_n \ge 0$ 及 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \ge 0$ 使 $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$，有 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$。

SOLUTION. 若 $\exists k : 1 \le k \le n$ 使得 $a_k = 0$，那么 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} = 0 \le \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$。故只需考虑 $\forall a_k > 0, 1 \le k \le n$。设 $\Omega = \{1, \cdots, n\}, \lambda(k) = \alpha_k$，故 λ 为 $(\Omega, 2^\Omega)$ 上的测度。X 为 $(\Omega, 2^\Omega)$ 上的随机变量，满足 $X(k) = a_k$。考虑 $\phi = \ln$，由于 ϕ 是上凸，故 $\mathbb{E}(\phi(X)) \le \phi(\mathbb{E}(X))$。从而 $\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_\Omega \ln(X(k))\,\mathrm{d}\lambda(k) = \sum_{k=1}^n \ln(a_k)\alpha_k \le \ln(\int_\Omega X(k)\,\mathrm{d}\lambda(k)) = \ln(\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k)$。故 $\ln(\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k}) \le \ln(\sum_{k=1}^n a_k\alpha_k)$。又由于 ln 单调递增，那么 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k} \le \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$。 $\square$

PROBLEM VII

1. 如 $\{f_t\}_{t\in T}$ 一致可积，则必积分一致连续；
2. 当 μ 有限时，一致可积当且仅当积分一致有界且积分一致连续。

SOLUTION.

1. 由于 $\{f_t : t \in T\}$ 一致可积，故 $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|\ge n}) = 0$. 故 $\forall\varepsilon > 0, \exists N > 0$，$\forall n \ge N$ 有 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|\ge n}) < \frac{\varepsilon}{2}$，即 $\forall t \in T, \mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|\ge n}) < \frac{\varepsilon}{2}$。又对于 $\forall A \subset \Omega : \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2N}$ 都有 $\forall t \in T$，$\mu(|f_t|\mathbb{1}_A) = \mu(|f_t|\mathbb{1}_{A\cap\{|f_t|\ge N\}}) + \mu(|f_t|\mathbb{1}_{A\cap\{|f_t|<N\}}) \le \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge N\}}) + \mu(N\mathbb{1}_A) \le \frac{\varepsilon}{2} + N\mu(A) < \varepsilon$。从而 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$。因此，$\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_A) = 0$.
2. "$\implies$": 由于 1可知，只需证明积分一致可积能推导出一致有界。N 满足 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge N\}}) < 1$. 可知 $\forall t \in T, \mu(|f_t|) = \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge N\}}) + \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|<N\}}) < 1 + \mu(N\mathbb{1}_{\{|f_t|<N\}}) < 1 + N\mu(\Omega) < \infty$。从而 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|) < 1 + N\mu(\Omega) < \infty$。

   "$\impliedby$": 由于 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|) < \infty$，设 $M := \sup_{t\in T} \mu(|f_t|)$。由于积分一致连续，即 $\lim_{\mu(A)\to 0} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_A) = 0$. 那么 $\forall\varepsilon > 0$，$\exists\delta > 0$，$\forall A \subset \Omega : \mu(A) < \delta$，都有 $\forall t \in T$，$\mu(|f_t|\mathbb{1}_A) < \varepsilon$。又由于 $\forall n > \frac{M}{\delta}, \forall t \in T, \mu(|f_t| \ge n) \le \frac{\mu(|f_t|)}{n} < \frac{M}{\frac{M}{\delta}} = \delta$，故 $\mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge n\}}) < \varepsilon$。从而 $\sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge n\}}) < \varepsilon$，故 $\lim_{n\to\infty} \sup_{t\in T} \mu(|f_t|\mathbb{1}_{\{|f_t|\ge n\}}) = 0$.

$\square$

PROBLEM VIII 对可测函数 f，定义本征上确界为：$\|f\|_\infty := \inf\{M : \mu(\{\omega : |f(\omega)| > M\}) = 0\}$。

1. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 满足三角不等式。
2. 若 $\mu(\Omega) < \infty$，则 $\|f\|_\infty = \lim_{r\to\infty} \|f\|_r$。

Solution. 1. 先证 $\mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}) = 0, \forall f$ 可测都成立。由于 $\|f\|_\infty$ 的定义可知 $\exists x_n, n \in \mathbb{N}_+$ 满足 $\mu(\{x : |f(x)| > x_n\}) = 0$，且 $x_n \searrow_n \|f\|_\infty$ 那么 $\{x : |f(x)| > x_n\} \nearrow_n \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+}\{x : |f(x)| > x_n\} = \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}$，故 $0 = \lim_{n\to\infty} \mu(\{x : |f(x)| > x_n\}) = \mu(\lim_{n\to\infty}\{x : |f(x)| > x_n\}) = \mu(\{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\})$。

令 $A := \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty\}, B := \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty\}$, 那么 $\forall x \in A^c \cap B^c$, 有 $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$，故 $\{x : |f(x) + g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\} \subset A \cup B$。故 $\mu(\{x : |f(x)+g(x)| > \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\}) \le \mu(A\cup B) \le \mu(A) + \mu(B) = 0 + 0 = 0$。又由 $\|f+g\|_\infty$ 的定义知，$\|f + g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$。

2. 令 A 如上定义, 那么 $\|f\|_r^r = \int_\Omega |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{A^c} |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) + \int_A |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu \le \int_A \|f\|_\infty^r \,\mathrm{d}\mu \le \mu(\Omega)\|f\|_\infty^r$. 从而 $\|f\|_r \le \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}}$。故 $\limsup_r \|f\|_r \le \limsup_r \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_\infty$。

又由于 $\|f\|_\infty$ 的定义可知, $\forall \varepsilon > 0$, 令 $A_\varepsilon : \{x : |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$, 那么 $A_\varepsilon > 0$. 从而 $\|f\|_r^r = \int_\Omega |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{A_\varepsilon} |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu + \int_{A_\varepsilon^c} |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{A_\varepsilon} |f(x)|^r \,\mathrm{d}\mu \ge \int_{A_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^r \,\mathrm{d}\mu = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^r \mu(A_\varepsilon)$。故 $\|f\|_r \ge (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{r}}$。故 $\liminf_r \|f\|_r \ge \liminf_r (\|f\|_\infty - \varepsilon)\mu(A_\varepsilon)^{\frac{1}{r}} = \|f\|_\infty - \varepsilon$。又由 ε 的任意性可知，$\liminf_r \|f\|_r \ge \|f\|_\infty$。

综上，$\lim_r \|f\|_r = \|f\|_\infty$。

□

Problem IX 设随机变量 ξ 具有数学期望 m 与方差 σ^2。

1. 证明 $\mathbb{P}(\xi - m \ge t) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}, \forall t \ge 0$。
2. 证明 $\mathbb{P}(|\xi - m| \ge t) \le \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。

Lemma 3. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ 为概率空间，ξ 为随机变量，$A \in \mathcal{A}$，$\mathbb{P}(A) > 0$, 那么

$$\mathbb{E}(\xi^2 \mid A) \ge (\mathbb{E}(\xi \mid A))^2$$

证明. 若 $\mathbb{P}(A) > 0$，那么 $\mathbb{E}(\xi^2 \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A \xi^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}$, 同理可知 $\mathbb{E}(\xi \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_A \xi \,\mathrm{d}\mathbb{P}$。由于 Cauchy-Schwarz 不等式得 $(\mathbb{E}(\xi \mid A))^2 = \frac{1}{\mathbb{P}(A)^2}(\int_\Omega \xi \mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mathbb{P})^2 \le \frac{1}{\mathbb{P}(A)^2}(\int_\Omega \xi^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P} \int_\Omega \mathbb{1}_A^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}) = \mathbb{E}(\xi^2 \mid A)$。 □

Solution. 1. 令 $A := \{\xi - m \ge t\}$，$\mu := \mathbb{P}(A)$。若 $\mu = 0$，那么 $0 = \mathbb{P}(\xi - m \ge t) \le \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。若 $\mu > 0$，那么 $x_1 = \mathbb{E}(\xi - m \mid A), x_2 = \mathbb{E}(\xi - m \mid A^c)$. 又由于 $\mathbb{E}(\xi - m) = 0$，那么 $\mathbb{E}(\xi - m) = \mathbb{E}(\xi - m \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(\xi - m \mid A^c)\mathbb{P}(A) = x_1\mu + x_2(1-\mu) = 0$. 又由于 $x_1 = \mathbb{E}(\xi - m \mid A) \ge \mathbb{E}(t \mid A) = t$，故 $x_1 \ge t$。

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = \mathbb{E}(|\xi - m|^2) &= \mathbb{E}(|\xi - m|^2 \mid A)\mathbb{P}(A) + \mathbb{E}(|\xi - m|^2 \mid A^c)\mathbb{P}(A) \\
&\overset{\text{引理3}}{\ge} (\mathbb{E}(\xi - m \mid A))^2\mathbb{P}(A) + (\mathbb{E}(\xi - m \mid A^c))^2\mathbb{P}(A^c) \\
&= x_1^2\mu + x_2^2(1-\mu)
\end{aligned}$$

- 若 $\mu = 1$，那么 $x_1\mu + x_2(1-\mu) = 0$，知 $x_1 = 0$，那么 $t \le 0$. 又由于 $t \ge 0$，那么 $t = 0$，此时 $\mathbb{P}(\xi - m \ge t) = \mu = 1 = \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$.

- 若 $0<\mu<1$，那么 $\sigma^2 \geq \frac{\mu}{1-\mu}x_1^2$。又由于 $x_1=\mathbb{E}(\xi-m \mid A) \geq \mathbb{E}(t \mid A)=t$，故 $\sigma^2 \geq \frac{\mu}{1-\mu}t^2$. 从而 $\mu \leq \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$，即 $\mathbb{P}(\xi-m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$.

2. 令 $\eta=-\xi$，那么 $\mathbb{E}(\eta)=-m, \mathrm{Var}(\eta)=\sigma^2$，那么 $\mathbb{P}(\eta+m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2+\sigma^2}$，故 $\mathbb{P}(-\xi+m \geq t)=\mathbb{P}(\xi-m \leq -t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$. 故 $\mathbb{P}(|\xi-m| \geq t) \leq \mathbb{P}(\xi-m \geq t)+\mathbb{P}(\xi-m \leq -t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$.

$\square$