Probability 4

王胤雅

25114020018

yinyawang25@m.fudan.edu.cn

2025 年 11 月 18 日

PROBLEM I 设 f 的积分存在。证明：$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。

SOLUTION. 对一般的测度 μ 不成立，反例如下：

取 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，$f(x):=-\frac{1}{x^2}$，则易知 $f(x)$ 是可积的，故积分存在。但对任何 n，有 $\mu(\{\frac{-1}{2^n}\le f<\frac{0}{2^n}\})=\infty$，于是 $\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)=-\infty$，故题设不成立。

对有限测度 μ 是成立的，下面给出证明：

记 $A_{n,i}:=\{x:\frac{i}{2^n}\le f(x)<\frac{i+1}{2^n}\}$。令 $g_n(x):=\frac{\lfloor f(x)2^n\rfloor}{2^n}$，则有 $g_n(x)=\frac{i}{2^n}\iff i\le f(x)2^n<i+1\iff x\in A_{n,i}$，故 $g_n(x)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{A_{n,i}}(x)\frac{i}{2^n}$。由 $A_{n,i}$ 的定义可知 $g_n(x)\le f(x)<g_n(x)+\frac{1}{2^n}$，故 $|g_n|\le|f|+\frac{1}{2^n}$。由 f 可积，μ 有限，知 $|f|+\frac{1}{2^n}$ 可积，于是由控制收敛定理知 $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\lim_n\int_\Omega g_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{i}{2^n}\mu\left(\{\frac{i}{2^n}\le f<\frac{i+1}{2^n}\}\right)$。 □

PROBLEM II 设 f 为非负可测函数，令：$\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu:=\inf\left\{\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu:g\ge f,g\text{为简单函数}\right\}$。举例说明 $\overline{\int}$ 与 $\int$ 未必相同，并解释为何不将积分定义为 $\overline{\int}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=[1,\infty),\mu$ 为勒贝格测度，令 $f(x)=\frac{1}{x^2}$，则易知 $\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu<\infty$。考查 $g\ge f$ 为简单函数，令 $\varepsilon=\inf_{x\in\Omega}g(x)$，由于 $g(x)$ 值域有限，故 $\exists x\in\Omega,g(x)=\varepsilon\ge f(x)>0$。于是 $\int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\varepsilon\,\mathrm{d}\mu=\varepsilon\mu\{\Omega\}=\infty$。故 $\overline{\int}_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\infty\ne\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$。

使用 $\int$ 而不是 $\overline{\int}$ 的原因应该是为了保证所有广义黎曼可积的非负函数都可积。 □

PROBLEM III 设 $\{f_{nm}\}_{n,m\ge1}$ 为一族非负实数。证明 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}\ge\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。

SOLUTION. 令 $\Omega=\mathbb{N}_+,\mu$ 为计数测度。记 $g_m(n):=f_{nm}$。则 $\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\mu\{n\}g_m(n)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}$。由 Fatou 定理知 $\liminf_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}f_{nm}=\liminf_{m\to\infty}\int_\Omega g_m\,\mathrm{d}\mu\ge\int_\Omega\liminf_{m\to\infty}g_m\,\mathrm{d}\mu=\sum_{n=1}^{\infty}\liminf_{m\to\infty}f_{nm}$。 □

PROBLEM IV 若 ξ_n 依分布收敛于 ξ，则 $\mathbb{E}|\xi|\le\liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}|\xi_n|$。

Lemma 1. 若 $\xi_n\xrightarrow{d}\xi$，则对任何有界连续函数 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，有 $\mathbb{E}g(\xi_n)\to\mathbb{E}g(\xi)$。

证明. 不妨设 g 非负，否则用 $g-\min g$ 代替 g。

首先证明 $\forall x\in\mathbb{R}, \liminf_n \mathbb{P}(\xi_n<x)\ge\mathbb{P}(\xi<x), \limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\mathbb{P}(\xi\le x)$。记 ξ_n,ξ 的分布函数分别为 F_n,F。由 F 不连续点至多可数，可取 $\varepsilon_n\searrow 0$，使 F 在 $x\pm\varepsilon_n$ 处连续。于是 $\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n<x)\ge\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n<x-\varepsilon_m)=\mathbb{P}(\xi<x-\varepsilon_m), \limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\le\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n<x+\varepsilon_m)=\mathbb{P}(\xi\le x+\varepsilon_m)$。令 $m\to\infty$ 即得。

故有 $\forall x<y$，有 $\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\in(x,y))\ge\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n<y)-\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\le x)\ge\mathbb{P}(\xi<y)-\mathbb{P}(\xi\le x)=\mathbb{P}(\xi\in(x,y))$。对于 $\mathbb{R}$ 中的开集 O，熟知 A 可表示为可数个开区间的并，于是 $\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\in O)\ge\mathbb{P}(\xi\in O)$。注意到闭集的补集是开集，于是对于 $\mathbb{R}$ 中的闭集 C，有 $\limsup_n\mathbb{P}(\xi_n\in C)\le\mathbb{P}(\xi\in C)$。

接下来证明

$$\mathbb{E}X=\int_{x\ge 0}\mathbb{P}(X>x)\,\mathrm{d}x=\int_{x\ge 0}\mathbb{P}(X\ge x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

对任何非负的随机变量 X 成立。由 $\mathbb{1}_{x<X(\omega)}\ge 0,\forall x\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X&=\int_\Omega X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\&=\int_\Omega\int_0^\infty \mathbb{1}_{x<X(\omega)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}\mathbb{P}\\&=\int_0^\infty\int_\Omega \mathbb{1}_{x<X(\omega)}\,\mathrm{d}\mathbb{P}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^\infty\mathbb{P}(X>x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2}$$

。在(4)中将 $x<X$ 换为 $x\le X$ 也成立。故(5)成立。

于是

$$\begin{aligned}\liminf_n\mathbb{E}g(\xi_n)&=\liminf_n\int_0^\infty\mathbb{P}(g(\xi_n)>x)\,\mathrm{d}x\\&=\liminf_n\int_0^\infty\mathbb{P}(\xi_n\in\{y:g(y)>x\})\,\mathrm{d}x\\&\overset{Fatou}{=}\int_0^\infty\liminf_n\mathbb{P}(\xi_n\in\{y:g(y)>x\})\,\mathrm{d}x\\&\overset{\{y:g(y)>x\}\text{是开集}}{\ge}\int_0^\infty\mathbb{P}(\xi\in\{y:g(y)>x\})\,\mathrm{d}x\\&=\mathbb{E}g(\xi)\end{aligned}\tag{3}$$

。同理可得 $\limsup_n\mathbb{E}g(\xi_n)\le\mathbb{E}g(\xi)$，于是 $\lim_n\mathbb{E}g(\xi_n)=\mathbb{E}g(\xi)$。 □

SOLUTION. 令 $g_m(x)=\min(|x|,m)$ 是有界连续函数，于是由引理 1知 $\lim_n\mathbb{E}g_m(\xi_n)=\mathbb{E}g_m(\xi)$。对任何的 m,n 有 $g_m(\xi_n)\le|\xi_n|$，于是 $\mathbb{E}g_m(\xi)\le\liminf_n\mathbb{E}|\xi_n|$。注意到 $g_m(\xi)\nearrow|\xi|$，由单调收敛定理知 $\mathbb{E}|\xi|=\lim_m\mathbb{E}g_m(\xi)\le\liminf_n\mathbb{E}|\xi_n|$。 □

PROBLEM V 设 $\xi\ge 0$ 使 $\mathbb{E}\xi^2<\infty$。证明 $\mathbb{P}(\xi>0)\ge\frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$。

SOLUTION. 记 $\eta=\mathbb{1}_{\xi>0}$，则由 Cauchy 不等式知：$\mathbb{E}\xi^2\mathbb{P}(\xi>0)=\mathbb{E}\xi^2\eta^2\mathbb{E}(\eta^2)\ge\mathbb{E}(\xi\eta^2)^2=(\mathbb{E}\xi)^2$。于是 $\mathbb{P}(\xi>0)\ge\frac{(\mathbb{E}\xi)^2}{\mathbb{E}\xi^2}$。 □

PROBLEM VI 利用 Jensen 不等式证明几何平均值小于代数平均值：$a_1,\cdots,a_n\geq 0$ 及 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\geq 0$ 使 $\sum_{k=1}^n\alpha_k=1$，有 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k}\leq\sum_{k=1}^n\alpha_k a_k$。

SOLUTION. 记 $\ln 0=-\infty$，则 $\ln x$ 在 $[0,\infty)$ 上上凸。于是 $\sum_{k=1}^n\alpha_k\ln a_k\leq\ln\sum_{k=1}^n\alpha_k a_k$，两边取 exp 即得 $\prod_{k=1}^n a_k^{\alpha_k}\leq\sum_{k=1}^n\alpha_k a_k$。 $\square$

PROBLEM VII

1. 如 $\{f_t\}_{t\in T}$ 一致可积，则必积分一致连续；
2. 当 μ 有限时，一致可积当且仅当积分一致有界且积分一致连续。

SOLUTION.

1. 对于任何 $\varepsilon>0$，由 f_t 一致可积知 $\exists M>0$ 使 $\sup_{t\in T}\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|>M})<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2M}$，对于任何 $A\subset\Omega$ 满足 $\mu(A)<\delta$，有 $\mu(|f_t|\mathbb{1}_A)\leq\mu(|f_t|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{|f_t|\leq M})+\mu(|f_t|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{|f_t|>M})\leq\mu(M\mathbb{1}_A)+\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|>M})\leq M\cdot\delta+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$。于是 $\{f_t\}$ 积分一致连续。
2. 由1可知一致可积 " $\Longrightarrow$ " 积分一致连续。由一致可积，$\exists M>0$ 使 $\sup_{t\in T}\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|>M})<1$。于是 $\sup_{t\in T}\mu(|f_t|)\leq\sup_{t\in T}\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|\leq M})+\sup_{t\in T}\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|>M})\leq M\mu(\Omega)+1$。于是一致可积 $\Longrightarrow$ 积分一致有界。

   下面证明积分一致有界且积分一致连续 $\Longrightarrow$ 一致可积。由积分一致有界，$\sup_{t\in T}\mu(|f_t|)\leq N\in\mathbb{R}$。任取 $\varepsilon>0$，由积分一致连续知 $\exists\delta>0,\forall A\subset\Omega:\mu(A)\leq\delta,\forall t\in T,\mu(|f_t|\mathbb{1}_A)\leq\frac{\varepsilon}{3}$。由 $\mu(\{|f_t|\geq\frac{N}{\delta}\})\leq\mu(\frac{|f_t|}{\frac{N}{\delta}})=\delta$，得 $\mu(|f_t|\mathbb{1}_{|f_t|\geq\frac{N}{\delta}})\leq\frac{\varepsilon}{3}$ 对任何 $t\in T$ 都成立。故 $\{f_t\}$ 一致可积。

$\square$

PROBLEM VIII 对可测函数 f，定义本征上确界为：$\|f\|_\infty:=\inf\{M:\mu(\{\omega:|f(\omega)|>M\})=0\}$。

1. 证明 $\|\cdot\|_\infty$ 满足三角不等式。
2. 若 $\mu(\Omega)<\infty$，则 $\|f\|_\infty=\lim_{r\to\infty}\|f\|_r$。

SOLUTION.

1. 须证对任何 f,g 有 $\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\geq\|f+g\|_\infty$。由定义，对任何 $\varepsilon>0$，$\mu(\{\omega:|f(\omega)|>\|f\|_\infty+\varepsilon\})=0$，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，由测度的下连续性知 $\mu\{\omega:|f(\omega)|>\|f\|_\infty\}=0$。同理 $\mu\{\omega:|g(\omega)|>\|g\|_\infty\}=0$。又 $|f+g|\leq|f|+|g|$，故 $\mu(\{\omega:|f(\omega)+g(\omega)|>\|f\|_\infty+\|g\|_\infty\})=0$，由定义知 $\|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$。
2. 对于 $M>\|f\|_\infty$，有：

$$\begin{aligned}\limsup_{r\to\infty}\frac{\|f\|_r}{M}&=\limsup_{r\to\infty}\left(\int_\Omega\frac{|f|^r}{M^r}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}}\\&\leq\limsup_{r\to\infty}\left(\int_\Omega\left(\frac{\|f\|_\infty}{M}\right)^r\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}}\\&=\limsup_{r\to\infty}\frac{\|f\|_\infty}{M}(\mu(\Omega))^{\frac{1}{r}}=\frac{\|f\|_\infty}{M}<1\end{aligned}\tag{4}$$

   。于是 $\limsup_{r\to\infty}\|f\|_r<M$。故 $\limsup_{r\to\infty}\|f\|_r\leq\|f\|_\infty$。

对于 $0 < M < \|f\|_\infty$，取 $M < N < \|f\|_\infty$，有:

$$\begin{aligned}\liminf_{r\to\infty}\frac{\|f\|_r}{M} &= \liminf_{r\to\infty}\left(\int_\Omega \frac{|f|^r}{M^r}\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \liminf_{r\to\infty}\left(\int_{|f|\geq N}\left(\frac{N}{M}\right)^r\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \liminf_{r\to\infty}\frac{N}{M}(\mu(\{|f|\geq N\}))^{\frac{1}{r}} = \frac{N}{M} > 1\end{aligned} \tag{5}$$

。于是 $\liminf_{r\to\infty}\|f\|_r > M$。故 $\liminf_{r\to\infty}\|f\|_r \geq \|f\|_\infty$。

综上所述，$\|f\|_\infty = \lim_{r\to\infty}\|f\|_r$。

□

PROBLEM IX 设随机变量 ξ 具有数学期望 m 与方差 σ^2。

1. 证明 $\mathbb{P}(\xi - m \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}, \forall t \geq 0$。
2. 证明 $\mathbb{P}(|\xi - m| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。

SOLUTION. 不妨设 $m = 0$，否则用 $\xi - m$ 代替 ξ。方便起记 $p = \mathbb{P}(\xi \geq t)$。

1. 注意到 $0 = \mathbb{E}(\xi) \geq t\mathbb{P}(\xi \geq t) - \mathbb{E}(\xi^-)$, 故 $\mathbb{E}\xi^- \geq tp$。于是由 Cauchy 不等式知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2\mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi<0} \geq (\mathbb{E}\xi^-)^2 \geq t^2p^2$。结合 $\mathbb{E}\mathbb{1}_{\xi<0} \leq 1 - \mathbb{P}(\xi \geq t)$ 知 $\mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2\frac{p^2}{1-p}$。又 $\mathbb{E}(\xi^+)^2 \geq \mathbb{E}\xi^2\mathbb{1}_{\xi\geq t} \geq t^2p$，于是 $\sigma^2 = \mathbb{E}(\xi^+)^2 + \mathbb{E}(\xi^-)^2 \geq t^2\frac{p}{1-p}$。于是 $\frac{\sigma^2}{t^2}(1-p) \geq p$，整理得 $p \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$。
2. 对 $-\xi$ 有 $\mathbb{P}(-\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$，与 $\mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2+t^2}$ 相加可得 $\mathbb{P}(|\xi| \geq t) \leq \frac{2\sigma^2}{\sigma^2 t^2}$。

□