



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



# **UD 2 – Modelos paramétricos para la toma de decisiones**



## UD 2.1 – Análisis de la Varianza (*ANalysis Of Variance*)

### ANOVA con un factor controlado



# Contenidos

- Idea Intuitiva del ANOVA
- ANOVA con un sólo factor controlado
  - Un ejemplo
  - Descomposición de la Suma de Cuadrados.  
Test F
  - Intervalos LSD
  - Análisis de residuos
  - Estudio de efectos sobre varianzas
- Factores cuantitativos. Ejemplos



# Idea intuitiva del ANOVA

- ⊠ Técnica básica para el estudio de observaciones que dependen de varios factores, siendo la herramienta fundamental en el análisis de los Modelos de Regresión Lineal y de Diseño de Experimentos
- Técnica estadística muy poderosa para el estudio del efecto de uno o más factores **sobre la media** de una variable



# Idea intuitiva del ANOVA

## Algunos ejemplos:

- Se está analizando la resistencia a la tensión de cemento Portland, se ensayan cuatro técnicas de mezclado que pueden aplicarse económicamente en su obtención. ¿La técnica de mezclado utilizada afecta a la resistencia del cemento?
- Se han registrado datos procedentes de un experimento para estudiar los efectos de cinco marcas diferentes de gasolina sobre el funcionamiento de motores de automóviles.
- Se analizan datos procedentes de un laboratorio con el fin de estudiar si la presencia de diferentes soluciones azucaradas (glucosa, sacarosa, fructosa y una mezcla de las tres) afecta al crecimiento de bacterias.
- Se dispone de datos correspondientes a la densidad de cierto tipo de ladrillo registrados a diferentes temperaturas de horneado de los mismos. ¿Afecta la temperatura de horneado a la densidad del ladrillo?



# Idea intuitiva del ANOVA

---

**Idea básica:** descomponer la **variabilidad total** observada en unos datos en las partes asociadas a cada factor estudiado más una parte residual, con la que después se compararán las primeras



# Idea intuitiva del ANOVA

---

## Ejemplo intuitivo

- Se pretende estudiar el efecto del tipo de catalizador y del nivel de la presión ejercida en la cámara de una máquina, sobre el rendimiento (gramos) de un proceso

A continuación se muestran ciertos resultados hipotéticos en algunos casos extremos:



# Ejemplo intuitivo

**Factor 1**

		PRESIÓN					
		1	2	3	4	5	6
CATALIZ	1	20	20	20	20	20	20
	2	20	20	20	20	20	20

**Factor 2**

**2 variantes: 2 catalizadores diferentes**

**3 niveles: 3 niveles de PRESIÓN ejercida**

**Valor observado:**  
**RENDIMIENTO** (gramos) del **producto** obtenido utilizando el **catalizador 2** y ejerciendo un nivel **2** de **presión**





# Ejemplo intuitivo

## Caso A

		PRESIÓN					
		1		2		3	
CATALIZ	1	20	20	20	20	20	20
	2	20	20	20	20	20	20

Rendimiento medio = 20

Nada influye

$SC_{Total} = 0$

La suma de los cuadrados de las desviaciones de cada valor observado del RENDIMIENTO con respecto a su media:

$$\sum_{ikj} (x_{ikj} - \bar{x})^2 = (20 - 20)^2 + (20 - 20)^2 + \dots + (20 - 20)^2 = 0$$

**Suma de Cuadrados Total (SCT)**



# Ejemplo intuitivo

## Caso B

		PRESIÓN					
		1	2	3	4	5	6
CATALIZ	1	20	20	20	20	20	20
	2	30	30	30	30	30	30

$$\sum_{ikj} (x_{ikj} - \bar{x})^2 = (20 - 25)^2 + (20 - 25)^2 + \dots + (30 - 25)^2 = 300$$

Rendimiento medio = 25

SCT=300 → Hay variabilidad.

Al “analizar la varianza” se observa que la variabilidad se debe sólo al **efecto del catalizador utilizado**

**El factor catalizador influye sobre la media del rendimiento del producto**

$$SC_{\text{Total}} = SC_{\text{catalizador}}$$



# Ejemplo intuitivo

## Caso C

		PRESIÓN			
		1	2	3	
CATALIZ	1	20	25	30	
	2	30	35	40	

Rendimiento medio = 30

$$SC_{TOTAL} = (20 - 30)^2 + (25 - 30)^2 + \dots + (40 - 30)^2 = 500$$

SCT=500 → Hay variabilidad

Al "analizar la varianza" se observa que la variabilidad se debe tanto al **efecto** del **catalizador** como al **efecto** de la **presión** ejercida

**El factor catalizador y el factor nivel de presión ejercida influyen sobre el promedio del rendimiento del producto obtenido**

No hay interacción entre ambos factores. El efecto de la presión es lineal

$$SC_{Total} = SC_{catalizador} + SC_{presión}$$

# Ejemplo intuitivo

## Caso D

		PRESIÓN					
		1		2		3	
CATALIZ	1	20	20	25	25	30	30
	2	30	30	35	35	50	50

Rendimiento medio = 31'67

$$SC_{TOTAL} = (20 - 31'67)^2 + (25 - 31'67)^2 + \dots + (50 - 31'67)^2 = 1066'67$$

$SCT = 1066'67 \rightarrow$  Hay variabilidad

Al “analizar la varianza” se observa que la variabilidad se debe tanto al **efecto** del catalizador como al **efecto** del nivel de presión ejercida y a su **interacción**

El **factor catalizador**, el **factor presión** y su **interacción** **influyen** sobre el promedio del rendimiento. El efecto de la presión ejercida sobre el rendimiento promedio del producto es mayor utilizando el catalizador 2 que el 1

$$SC_{Total} = SC_{catalizador} + SC_{presión} + SC_{Interacción}$$

# Ejemplo intuitivo

## Caso E

Único  
realista

		PRESIÓN					
		1		2		3	
CATALIZ	1	19	21	27	24	28	32
	2	30	31	36	33	47	51

Rendimiento medio = 31'6

$$SC_{TOTAL} = (19 - 31'6)^2 + (21 - 31'6)^2 + \dots + (51 - 31'6)^2 = 1001$$

SCT=1001 → Hay variabilidad

Se observa que la variabilidad se debe tanto al **efecto** del **catalizador** como al **efecto** del nivel de **presión** y a su **interacción**, así como al de los **factores no controlados**

El **factor** catalizador, el **factor** presión y su interacción, así como otros factores no controlados o no tenidos en cuenta influyen sobre el promedio del rendimiento del producto

$$SC_{Total} = SC_{catalizador} + SC_{presión} + SC_{Interacción} + SC_{Residual}$$



# Grados de libertad (gl)

En paralelo a esta descomposición de la  $SC_{\text{Total}}$  se realiza una descomposición de los “**grados de libertad**” totales en los grados de libertad asociados a cada término

- **SCT**  $\rightarrow gl_T = n^0 \text{ de datos} - 1$
- **SCF**  $\rightarrow gl_F = n^0 \text{ de variantes} - 1$
- **SC<sub>Interacción</sub>**  $\rightarrow$  **producto** de los gl de los factores que interaccionan
- **SCR**  $\rightarrow gl_R = gl_T - gl_F - gl_{\text{inter}}$

En el ejemplo:

- **SCT**  $\rightarrow 12 - 1 = 11 \text{ gl}$
- **SC<sub>Catalizador</sub>**  $\rightarrow 2 - 1 = 1 \text{ gl}$
- **SC<sub>Presión</sub>**  $\rightarrow 3 - 1 = 2 \text{ gl}$
- **SC<sub>CatalizadorXPresión</sub>**  $\rightarrow 1 \times 2 = 2 \text{ gl}$
- **SCR**  $\rightarrow 11 - 5 = 6 \text{ gl}$



# Significación de un efecto

- La comparación de la “varianza” asociada a cada efecto con la varianza residual permite estudiar si dicho **efecto** es o no **significativo**
- Estas varianzas se estiman dividiendo cada suma de cuadrados por sus grados de libertad, obteniéndose unos estadísticos a los que se denomina **cuadrados medios**:

$$CM = \frac{SC}{g.l}$$



# Test F

- El  $CM_{Total}$  es la varianza de los datos observados (no se suele calcular)
- El  $CM_{Residual}$  es una estimación de la  $\sigma^2$  existente en las poblaciones muestreadas, asumiendo la misma  $\sigma^2$  para todas las poblaciones (o una estimación del promedio de dichas varianzas, en el caso de que difieran de unas poblaciones a otras)
- El  $CM$  asociado a cada efecto:
  - es otra estimación de la  $\sigma^2$  independiente de la del  $CM_{Residual}$ , si el efecto no existe en la población
  - tiende a ser mayor que  $\sigma^2$ , si existe un efecto real poblacional





# Test F

- Si **no** existe un efecto real del factor a nivel poblacional  $\Rightarrow$  el  $CM_{\text{factor}}$  será muy parecido al  $CM_{\text{residual}}$

$$F - \text{ratio} = \frac{CMF}{CMR} \approx F_{glF, glR}$$

La **f-ratio** será muy parecida a **1** con una distribución **F de Fisher** con los grados de libertad correspondientes



El factor **no influye** sobre la media de la v. respuesta

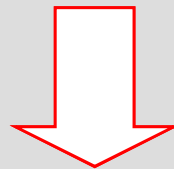


# Test F

- Si existe un efecto real del factor a nivel poblacional  $\Rightarrow$  el  $CM_{\text{factor}} \gg \gg CM_{\text{residual}}$

La **f-ratio** será **demasiado elevada** para ser una **F de Fisher** con los grados de libertad correspondientes

$$\frac{CMF}{CMR} \gg F_{glF, glR}$$



El factor **influye** sobre la media de la v. respuesta



# Test F

- Los programas estadísticos no muestran los valores críticos de la distribución F manejada. En su lugar, utilizan el **p-value** asociado (en la distribución manejada, *porcentaje de valores mayores que el correspondiente estadístico calculado*)  **$\text{Prob}(F_{glf, glr} > F_{ratio}) = p\text{-value}$**
- Cuanto menor sea este p-value más fuerte será la evidencia respecto a la existencia poblacional del efecto correspondiente



# Contenidos

- Idea Intuitiva del ANOVA
- ANOVA con un sólo factor controlado
  - Un ejemplo
  - Descomposición de la Suma de Cuadrados.  
Test F
  - Intervalos LSD
  - Análisis de residuos
  - Estudio de efectos sobre varianzas
- Factores cuantitativos

# Ejemplo

Una factoría de motores tiene 2 proveedores de los cigüeñales que mecaniza. Un tercer proveedor ofrece sus cigüeñales algo más caros argumentando sus mejores propiedades dinámicas, concretamente que su equilibrado dinámico (número de gramos de material que hay que eliminar hasta conseguir que el centro de gravedad de la pieza coincida con el eje de giro) es menor.

La factoría decide hacer una prueba comparando 10 cigüeñales del nuevo proveedor (código=1) con 10 de cada uno de sus 2 proveedores tradicionales (códigos 2 y 3). Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:



# Proveedores cigüeñales

Factor estudiado	<b>PROVEEDOR</b>		
Variantes del factor	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
Resultados obtenidos <b><i>Equilibrado dinámico</i></b> <i>(grs)</i>	23	35	50
	28	36	43
	21	29	36
	27	40	34
	95	43	45
	41	49	52
	37	51	52
	30	28	43
	32	50	44
	36	52	34



# Proveedores cigüeñales

---

## CUESTIÓN CLAVE

¿Hay evidencia suficiente respecto a la superioridad de los cigüeñales del nuevo proveedor para cambiar a éste, pese al precio ligeramente más elevado?

- El ejemplo que consideramos es un caso particular de **Diseño de Experimentos**: se estudia el **efecto** de un único **factor** (el proveedor) con 3 **variantes** (los 3 proveedores a comparar) sobre la media de la **variable respuesta** (el equilibrado dinámico, que debe ser el menor posible)

(Más adelante consideraremos el efecto de varios factores en el análisis)



# Proveedores cigüeñales. Autoevaluación

- *Dado que conocemos una técnica estadística para comparar dos tratamientos ¿no sería posible analizar los datos anteriores comparando dos a dos las tres parejas posibles de proveedores?*
- *Si en vez de tratarse de 3 hubiera **5** proveedores*
  - *¿Cuántas parejas de tratamientos habría que comparar?*
  - *Suponiendo que los 5 proveedores fueran idénticos y si en cada comparación se operase con un riesgo de 1ª especie del 5%, **¿la probabilidad de obtener una conclusión errónea** (deducir que al menos dos de los proveedores son distintos) **sería del 5%**?*





# Ejemplo Proveedores cigüeñas

## ■ Experimento:

- **Factores:** PROVEEDOR
- **Variantes:** Prov. 1, 2, 3
- **Variable respuesta:** Equilibrado Dinámico (EQUIDINA)

## ■ **Objetivo:** ¿existen diferencias entre los equilibrados dinámicos medios en los cigüeñas de los 3 proveedores?



$$H_0 : m_1 = m_2 = m_3$$

$$H_1 : \exists i, j ; i \neq j / m_i \neq m_j ; i, j : 1, 2, 3$$



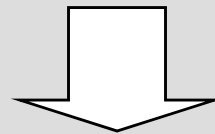
**ANOVA**



# Descomposición de la Suma de Cuadrados. Test F

- Descomposición de la variabilidad total:

$$\begin{array}{l} \text{Variabilidad} \\ \text{Total en los} \\ \text{datos} \end{array} = \begin{array}{l} \text{Variabilidad debida a} \\ \text{diferencias entre} \\ \text{proveedores} \\ \text{(efecto del factor} \\ \text{proveedor)} \end{array} + \begin{array}{l} \text{Variabilidad residual} \\ \text{(diferencias dentro de} \\ \text{cada proveedor)} \end{array}$$



**¿Cómo se obtiene...?**

**¿Qué cuantifica?**



# Ejemplo Proveedores cigüeñas

PROVEEDORES			
1	2	3	
23	35	50	
28	36	43	
21	29	36	
27	40	34	
95	43	45	
41	49	52	
37	51	52	
30	28	43	
32	50	44	
36	52	34	
37	41.3	43.3	40.53

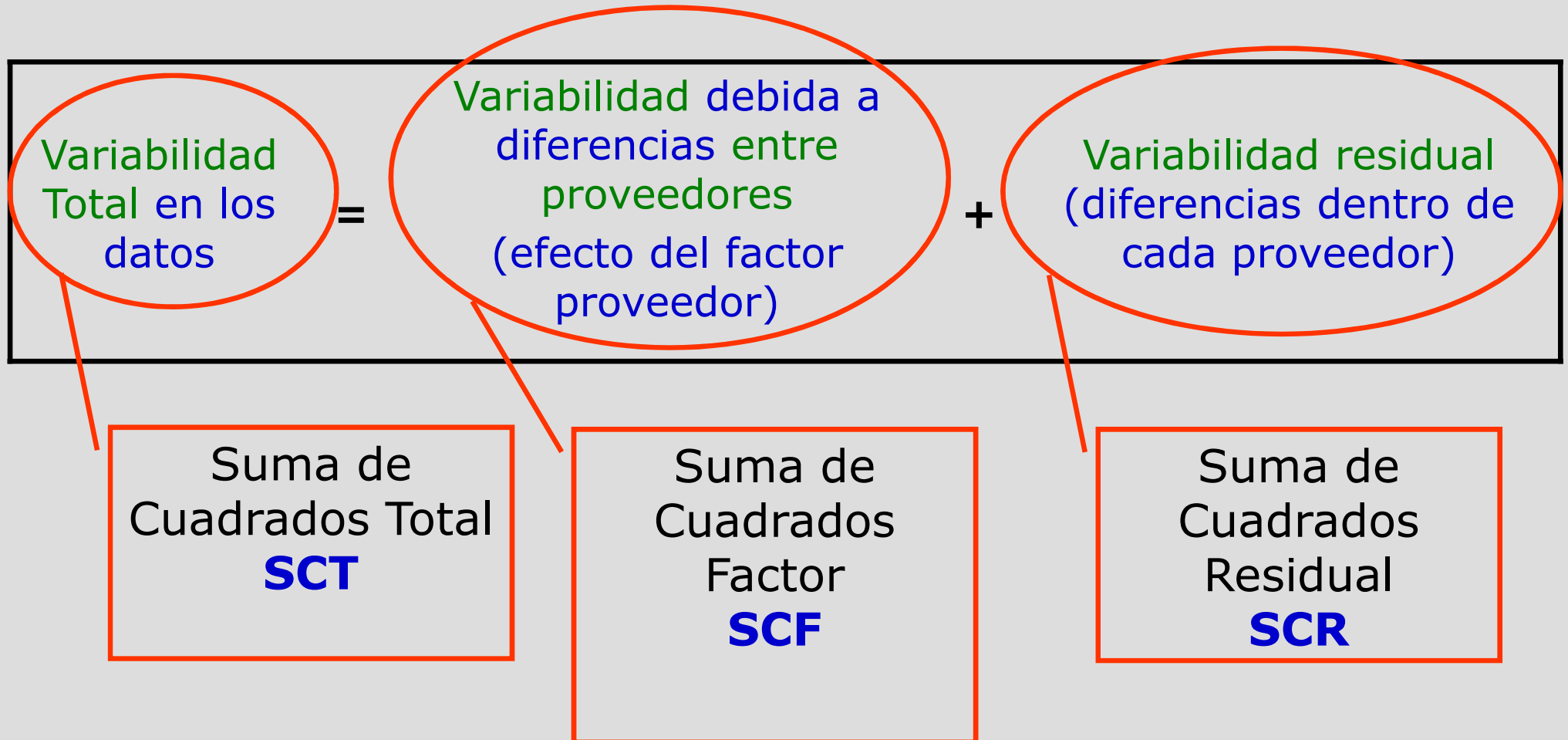
medias

Media de todos los datos



# Ejemplo Proveedores cigüeñales

Cuantificación de la variabilidad:



# Ejemplo Proveedores cigüeñas

PROVEEDORES		
1	2	3
23	35	50
28	36	43
21	29	36
27	40	34
95	43	45
41	49	52
37	51	52
30	28	43
32	50	44
36	52	34
37	41.3	43.3

Suma de Cuadrados Total (**SCT**):

$$\begin{aligned} & (23 - 40.53)^2 + (28 - 40.53)^2 + \dots + \\ & (36 - 40.53)^2 + (35 - 40.53)^2 + \dots + \\ & (44 - 40.53)^2 + (34 - 40.53)^2 = 5465 \end{aligned}$$

Suma de los cuadrados de las desviaciones de cada dato con respecto a la media general



# Ejemplo Proveedores cigüeñas

PROVEEDORES		
1	2	3
23	35	50
28	36	43
21	29	36
27	40	34
95	43	45
41	49	52
37	51	52
30	28	43
32	50	44
36	52	34
37	41.3	43.3
		40.53

Suma de Cuadrados Factor  
(SCF):

$$\begin{aligned} & 10 \times (37 - 40.53)^2 \\ & + 10 \times (41.3 - 40.53)^2 + \\ & + 10 \times (43.3 - 40.53)^2 = 207 \end{aligned}$$

Suma de los cuadrados de las desviaciones de la media de cada proveedor con respecto a la media general



# Ejemplo Proveedores cigüeñas

PROVEEDORES		
1	2	3
23	35	50
28	36	43
21	29	36
27	40	34
95	43	45
41	49	52
37	51	52
30	28	43
32	50	44
36	52	34
37	41.3	43.3

Suma de Cuadrados Residual  
(SCR):

$$\begin{aligned}
 & (23 - 37)^2 + \dots + (36 - 37)^2 + \\
 & (35 - 41.3)^2 + \dots + (52 - 41.3)^2 + \\
 & (50 - 43.3)^2 + \dots + (34 - 43.3)^2 = 5258
 \end{aligned}$$

Suma de los cuadrados de las desviaciones de cada dato con respecto a la media del proveedor correspondiente

40.53



# Grados de libertad (gl)

---

- **SCT** →  $gl_T = n^o \text{ de datos} - 1$
- **SCF** →  $gl_F = n^o \text{ de variantes} - 1$
- **SCR** →  $gl_R = gl_T - gl_F$

En el ejemplo:

- **SCT** →  $30 - 1 = 29 \text{ gl}$
- **SCF** →  $3 - 1 = 2 \text{ gl}$
- **SCR** →  $29 - 2 = 27 \text{ gl}$





# Significación de un efecto

- La comparación de la SC asociada a cada efecto con la SC<sub>residual</sub> permite estudiar si dicho **efecto** es o no **significativo**
- Para llevar a cabo dicha comparación, cada suma de cuadrados se divide por sus **grados de libertad**, obteniéndose unos estadísticos a los que se denomina **cuadrados medios**:

$$CM = \frac{SC}{g.l}$$

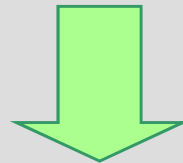


# Test F

- Si el  $CM_{\text{factor}}$  es muy parecido al  $CM_{\text{residual}}$

$$F - \text{ratio} = \frac{CMF}{CMR} \approx F_{glF, glR}$$

La **f-ratio** será muy parecida a **1**, con una distribución **F de Fisher** con los grados de libertad correspondientes.



Aceptamos  $H_0 : m_1 = m_2 = m_3$

(El factor **no** tiene un **efecto real** a nivel poblacional)

**No** hay diferencias significativas entre los proveedores



# Test F

- **Si** el  $CM_{\text{factor}} \gg \gg CM_{\text{residual}}$

La **f-ratio** será **demasiado elevada** para ser una **F de Fisher** con los grados de libertad correspondientes



Rechazamos  $H_0 : m_1 = m_2 = m_3$

(Existe un **efecto real** del factor a nivel poblacional)

**Sí** hay diferencias significativas entre los proveedores, con respecto al valor medio del equilibrado dinámico de los cigüeñales

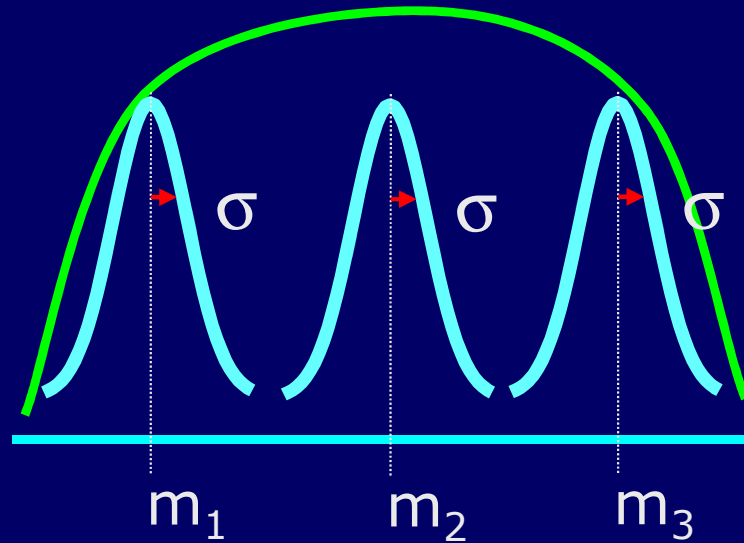
**Al menos uno** de los tres proveedores tiene una media diferente a la de los otros dos



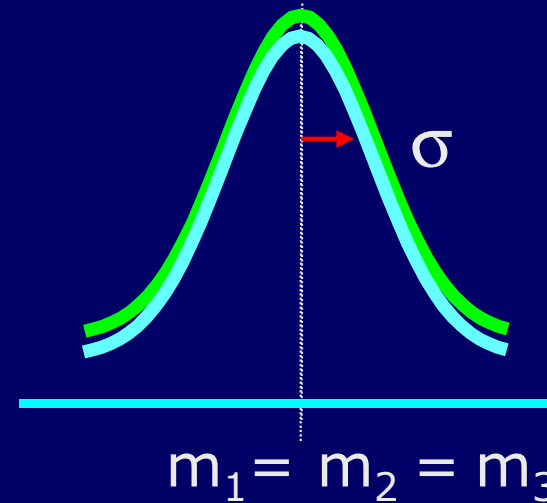
# ¿Cómo estudiar si el efecto de un factor es o no significativo?

VARIABILIDAD RESIDUAL (CMR) —

VARIABILIDAD FACTOR (CMF) —



$$CMF \gg CMR \Rightarrow \frac{CMF}{CMR} \gg 1$$



$$CMF \approx CMR \Rightarrow \frac{CMF}{CMR} \approx 1$$



# Test F

**Si no es cierta  $H_0$**  (al menos uno de los tres proveedores tiene una media diferente a la de los otros dos) la  $F_{\text{ratio}}$  (o la  $F_{\text{calculada}}$ ) tiende a ser **mayor** que una  $F_{2, 27}$

La  $H_0$  se contrasta, por tanto, viendo si el valor obtenido para la F-ratio es “**demasiado grande**” para ser una F de Fisher, lo que viene cuantificado por el ***p-value*** correspondiente que no es más que la  $\text{Prob}(F_{2,27} > F_{\text{ratio}})$ . Si dicho ***p-value*** es inferior al riesgo de 1ª especie  $\alpha$  con el que se trabaja (generalmente se opera con  $\alpha = 0.05$ ), o sea si la  $F_{\text{ratio}}$  excede al valor crítico de una  $F_{2, 27}$  para dicha probabilidad  $\alpha$ , se considera que **el efecto del factor será significativo**



# Ejemplo Proveedores cigüeñas

## ■ Tabla resumen del ANOVA

Origen Variación	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado Medio	F ratio
Total	5465	29	-	-
Proveedor	207	2	103'5	0'532
Residual	5258	27	194'7	-

Riesgo de 1ª especie:  $\alpha = 0'05$

Tabla:  $F_{2,27}(5\%) = 3'35 >> 0'532$

Aceptamos  $H_0$

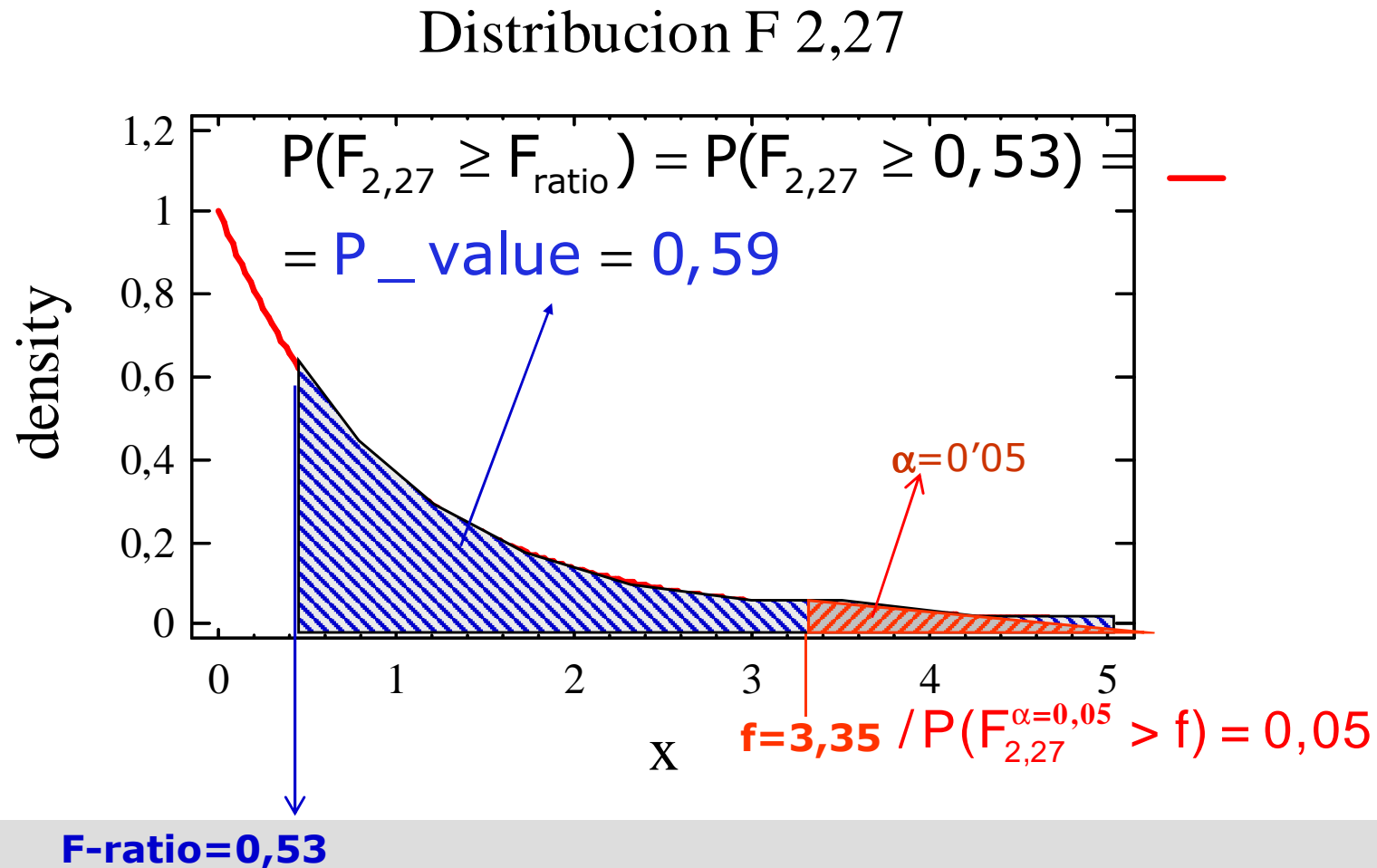


**¡NO HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS  
ENTRE PROVEEDORES!**



# Test F (p-value)

## TEST F Comparando la P\_value con $\alpha$ Gráficamente



$(P\_value=0,59) > (\alpha=0,05) \rightarrow \text{Aceptamos } H_0$



# Construcción Tabla resumen del ANOVA

Origen Variación	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado Medio	F ratio
Total	SCT	$gl_T$	-	-
Factor	SCF	$gl_F$	$CMF = SCF / gl_F$	$CMF / CMR$
Residual	SCR	$gl_R$	$CMR = SCR / gl_R$	-

## Resolución del Test o contraste

- 1) Establecer **Riesgo de 1ª especie**:  $\alpha$
- 2) Buscar valor **f** en **Tabla**:  $f / P(F_{gl_F, gl_R}^\alpha > f) = \alpha$
- 3) Comparar **f** con el **F ratio**
- 4) **Aceptar o Rechazar  $H_0$**   $\rightarrow$  NO hay/SI hay diferencias significativas entre los tratamientos

**¡OJO!**  
 $\alpha$  NO se divide por 2





# Ejemplo Proveedores cigüeñas

Los resultados se sintetizan en la **Tabla Resumen del Anova**, proporcionada por Statgraphics

**ANOVA Table for EQUIDINA by PROVEEDOR**

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>	<i>P-Value</i>
Between groups	207,267	2	103,633	0,53	0,5934
Within groups	5258,2	27	194,748		
Total (Corr.)	5465,47	29			

**Analysis of Variance for EQUIDINA - Type III Sums of Squares**

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>	<i>P-Value</i>
MAIN EFFECTS					
A:PROVEEDOR	207,267	2	103,633	0,53	0,5934
RESIDUAL	5258,2	27	194,748		
TOTAL (CORRECTED)	5465,47	29			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

El *p-value* es superior a 0.05 → el efecto del proveedor sobre la media del equilibrado dinámico **NO** es significativo!, es decir es admisible la





# Contenidos

- Idea Intuitiva del ANOVA
- ANOVA con un sólo factor controlado
  - Un ejemplo
  - Descomposición de la Suma de Cuadrados.  
Test F
  - Intervalos LSD
  - Análisis de residuos
  - Estudio de efectos sobre varianzas
- Factores cuantitativos



# Análisis de residuos

- Tiene una gran importancia práctica **completar** cualquier análisis de datos reales con un estudio de los residuos de los datos. En estos residuos, se refleja el efecto de todos los factores no controlados que pueden haber afectado a los resultados obtenidos
- El *Statgraphics* calcula los residuos automáticamente y permite guardarlos en una variable que por defecto denomina **RESIDUALS**
- También proporciona representaciones gráficas de los mismos
- Permite detectar datos anómalos o pautas de variabilidad sospechosas



# Análisis de residuos

- **Residuos:** diferencia entre cada dato y la media del tratamiento que se ha aplicado para obtener dicho dato
- **Objetivo:** Validar análisis previos
- **Ejemplo:**

Primer valor observado del equilibrado dinámico del **prov. 1**

$$23 - 37 = -14$$

Media del equilibrado dinámico de la muestra del prov. 1

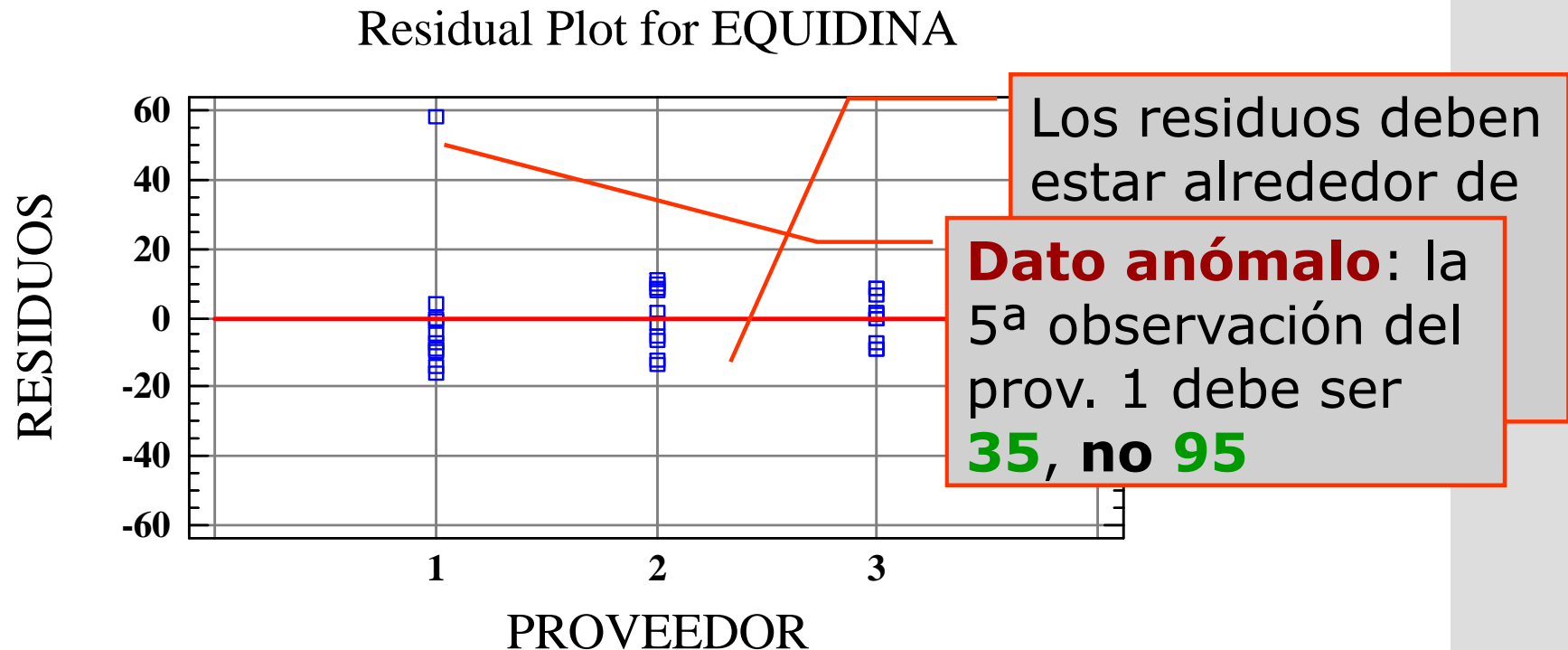
**Residuo 1**

$$51 - 41'3 = 9'7$$

El residuo de una observación recoge el efecto que sobre dicha observación han tenido todos los factores no incluidos en el experimento



# Análisis de residuos



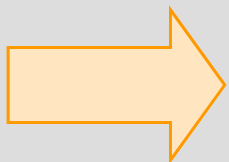
**¡Una observación anómala puede invalidar por completo todas las conclusiones de un análisis!**



# Análisis de residuos

- Estudiando los datos introducidos, con los que ha operado el programa, se observa que el 5º dato del proveedor 1 se ha introducido como 95, en vez de 35 que era su valor correcto

Factor estudiado	PROVEEDOR		
Variantes del factor	1	2	3
Resultados obtenidos <i>Equilibrado dinámico</i> (grs)	23	35	50
	28	36	43
	21	29	36
	27	40	34
	35	43	45
	41	49	52
	37	51	52
	30	28	43
	32	50	44
	36	52	34



Si se vuelve a realizar el ANOVA ...



# Ejemplo Proveedores (sin dato anómalo)

## ■ Tabla resumen del ANOVA

Origen Variación	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado Medio	F ratio
Total	2409'46	29	-	-
Proveedor	871'26	2	435'6	7'64
Residual	1538'2	27	56'97	-

Riesgo de 1ª especie:  $\alpha = 0'05$

Tabla:  $F_{2,27}(5\%) = 3'35 << 7'64$

Rechazamos  $H_0$



**¡SI HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE PROVEEDORES!**

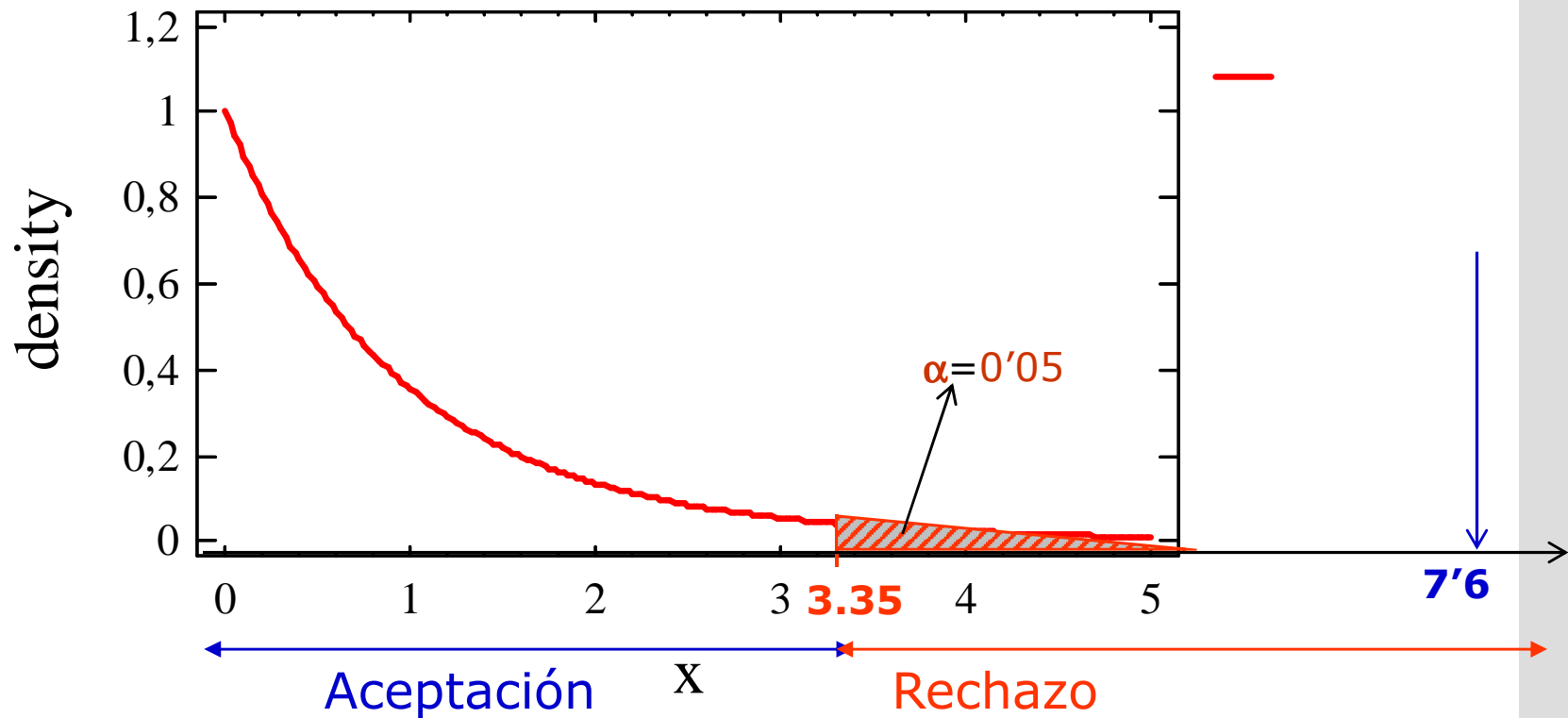


# Ejemplo Proveedores cigüeñales

## TEST F

(Gráficamente)

Distribucion F 2,27



Rechazamos  $H_0$





# Ejemplo Proveedores cigüeños

Se recoge a continuación el cuadro resumen del ANOVA, obtenido una vez corregido el dato erróneo

Analysis of Variance for EQUIDINA - Type III Sums of Squares					
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:PROVEEDO	871,267	2	435,633	7,65	0,0023
RESIDUAL	1538,2	27	56,9704		
TOTAL (CORRECTED)					
	2409,47	29			
All F-ratios are based on the residual mean square error.					

Las conclusiones son ahora distintas, detectándose un **efecto significativo** estadísticamente ( $p\text{-value} = 0.0023$ ) del factor Proveedor. (Obsérvese que **un único dato anómalo**, de un total de 30, había conducido en una  $F_{\text{Ratio}}$  catorce veces menor que la correcta)



# Comparación de medias

- Si el **test  $F$**  resulta significativo:
  - ¿Es mejor el Proveedor 1 que el 2 y el 3?
  - ¿Son mejores el 1 y el 2 que el 3, no habiendo diferencias entre los primeros?
  - ...



- Hay que estudiar **entre qué proveedores existen diferencias significativas**
- Un valor significativo de la  $F_{\text{ratio}}$  sólo indicaría que **al menos una de las tres medias difiere de las restantes**, pero no precisa cuáles son las que difieren entre sí



**Comparación de medias**



# Comparación de medias

---

- Una vez constatado mediante el ANOVA que existen diferencias significativas entre las medias, considerando las diferentes variantes de un factor, estaremos interesados en conocer qué variantes proporcionan un efecto “superior” a las otras.....
- Existen numerosos tests conocidos como **“Tests de comparación de medias”**
  - *Test de la diferencia mínima significativa (LSD)*
  - *Test de NEWMAN-KEULS*
  - *Test de TUKEY (HSD)*
  - *Test de Bonferroni*
  - *Test de recorrido múltiple de DUNCAN*
  - .....



# Comparación de medias

---

- El procedimiento que se sigue en los tests, en general, consiste en fijado un riesgo de primera especie  $\alpha$ , obtener un valor o diferencia mínima (Diferencia Mínima) de manera que si esta es superada por la diferencia entre las medias a comparar se concluya en la existencia de diferencias significativas entre dichas medias
- Según sea el test concreto a utilizar esta diferencia se denomina *Diferencia Mínima Significativa* (LSD), *Diferencia Honestamente Significativa* (HSD).....



# Comparación de medias

## ■ Test LSD ( $t$ de Student)

La diferencia se calcula a partir del estadístico  $t$  de Student procedente de la comparación de dos medias de poblaciones normales, tal como ya se ha expuesto

$$H_0 : m_i = m_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

$$DMS = t_{gl\,resid}^{\alpha} \sqrt{2 \frac{CMR}{J}}$$

$$S_{\bar{x}_i - \bar{x}_j} = \sqrt{\frac{CMR}{J} + \frac{CMR}{J}}$$

$$\text{Si } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| > DMS \Rightarrow \exists \text{ dif. signific. entre las medias de las variantes } i \text{ y } j$$



# Comparación de medias

## ■ Test de Tukey

La diferencia se calcula a partir del estadístico  $Q$  del rango studentizado. En este caso la diferencia mínima se le conoce por Diferencia Honestamente Significativa (*HSD*, en inglés). Se trata de un test muy conservador.

$$H_0 : m_i = m_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

$$DHS = Q_{I, gl\,resid}^{\alpha} \sqrt{\frac{CMR}{J}}$$

$$J = \frac{N^2 - \sum_{i=1}^I n_i^2}{N(I-1)}$$

$$\text{Si } |\bar{x}_i - \bar{x}_j| > DHS \Rightarrow \exists \text{ dif. signific. entre las medias de las variantes } i \text{ y } j$$



# Comparación de medias

---

## ■ Test de Newman-Keuls

Es un test más conservador que el t de Student pero menos que el test de Tukey.

Este test, al igual que el test de recorrido múltiple de Duncan, sigue un procedimiento secuencial.

El proceso es el siguiente. En primer lugar se ordenan las medias de mayor a menor. Se compara la mayor media con la mas pequeña y si existen diferencias significativas se vuelve a comparar con la menor de las restantes y así sucesivamente hasta que no existan diferencias significativas o se hayan agotado todas las medias.



# Comparación de medias

A continuación se toma la segunda media más grande y se repite el proceso con todas las demás (excepto con las que ya se haya comparado). Así sucesivamente.

En cada comparación se utiliza la distribución  $Q$  del rango studentizado que depende de dos parámetros:  $p$ , n° de medias entre las dos medias concretas que se estén comparando y  $gl_r$ , grados de libertad residuales.

$$H_0 : m_i = m_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_i - \bar{x}_j$$

$$DMS = Q_{p, gl_{resid}}^{\alpha} \sqrt{\frac{CMR}{J}}$$

$$Si \quad |\bar{x}_i - \bar{x}_j| > DMS \Rightarrow \exists \text{ dif. signific. entre las medias de las variantes } i \text{ y } j$$





# Comparación de medias. Ejemplo

- Se comparan los pesos medios de paquetes de cierto condimento culinario según su procedencia (zona: A, B, C, D y E) mediante un diseño al azar con 4 réplicas de cada una de las 5 procedencias del condimento. Los datos están en *CONDIMENTO.sgd* y el cuadro resumen del Anova es:

Analysis of Variance for PESO - Type III Sums of Squares

Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
MAIN EFFECTS					
A:ZONA	1313,8	4	328,45	7,63	0,0015
RESIDUAL	646,0	15	43,0667		
TOTAL (CORRECTED)	1959,8	19			

All F-ratios are based on the residual mean square error.

- Como  $p\text{-val} = 0.0015 < 0.05$  se **rechaza la  $H_0$** :  $m_A = m_B = \dots = m_E$  y se deduce, en consecuencia, que **al menos dos medias son diferentes**
- Con el fin de precisar **entre qué parejas de medias la diferencia es "estadísticamente significativa"** pueden utilizarse diferentes procedimientos más o menos conservadores respecto al riesgo de que "al menos una de las diferencias detectada como significativa no lo sea en realidad"
- Seguidamente se recogen las conclusiones obtenidas, utilizando *Statgraphics*, según el procedimiento utilizado



# Comparación de medias. Ejemplo

## Conclusiones del ejemplo

- **Test LSD**: Este test es el menos conservador (mayor probabilidad de cometer algún error de 1ª especie) pero, como contrapartida, es el más potente (mayor probabilidad de detectar como significativas las diferencias que realmente existen)

### Multiple Range Tests for PESO by ZONA

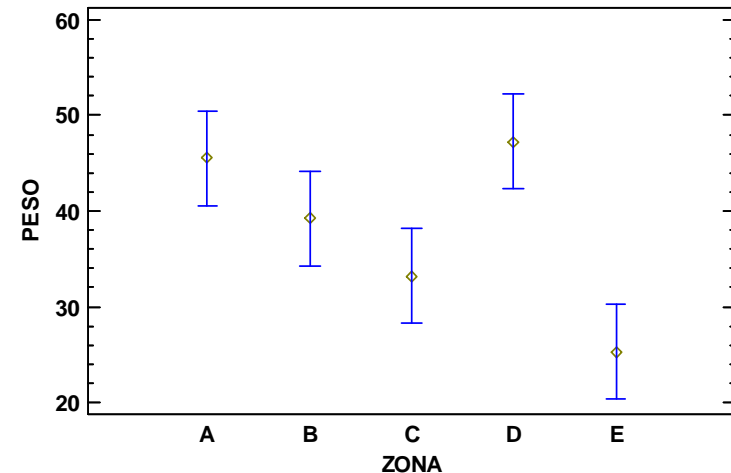
Method: 95,0 percent LSD

ZONA	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
E	4	25,25	3,28126	X
C	4	33,25	3,28126	XX
B	4	39,25	3,28126	XX
A	4	45,5	3,28126	X
D	4	47,25	3,28126	X

Contrast	Sig.	Difference	+/- Limits
A - B		6,25	9,8908
A - C	*	12,25	9,8908
A - D		-1,75	9,8908
A - E	*	20,25	9,8908
B - C		6,0	9,8908
B - D		-8,0	9,8908
B - E	*	14,0	9,8908
C - D	*	-14,0	9,8908
C - E		8,0	9,8908
D - E	*	22,0	9,8908

\* denotes a statistically significant difference.

Means and 95,0 Percent LSD Intervals



# Comparación de medias. Ejemplo

## Conclusiones del ejemplo

- **Test HSD de Tukey:** Este test es más conservador que el LSD (menor probabilidad de cometer algún error de 1ª especie) pero, como contrapartida, es menos potente (menor probabilidad de detectar como significativas las diferencias que realmente existen)

### Multiple Range Tests for PESO by ZONA

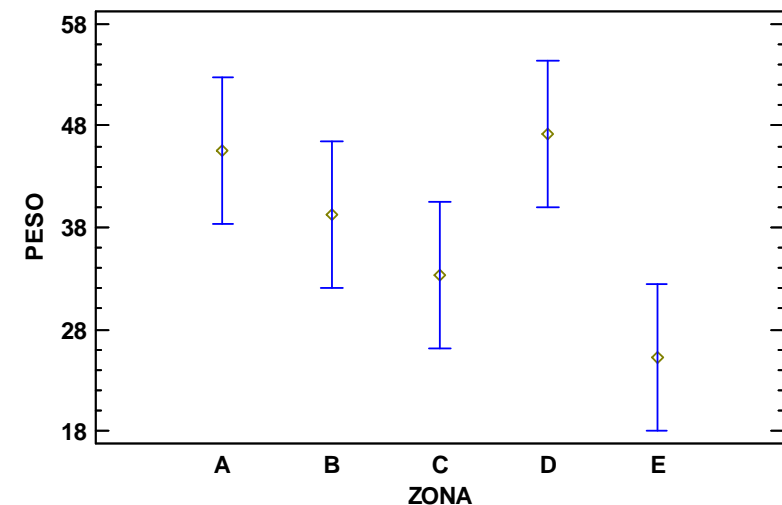
Method: 95,0 percent Tukey HSD

ZONA	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
E	4	25,25	3,28126	X
C	4	33,25	3,28126	XX
B	4	39,25	3,28126	XX
A	4	45,5	3,28126	X
D	4	47,25	3,28126	X

Contrast	Sig.	Difference	+/- Limits
A - B		6,25	14,3801
A - C		12,25	14,3801
A - D		-1,75	14,3801
A - E	*	20,25	14,3801
B - C		6,0	14,3801
B - D		-8,0	14,3801
B - E		14,0	14,3801
C - D		-14,0	14,3801
C - E		8,0	14,3801
D - E	*	22,0	14,3801

\* denotes a statistically significant difference.

Means and 95,0 Percent Tukey HSD Intervals



# Comparación de medias. Ejemplo

## Conclusiones del ejemplo

- **Test de Bonferroni:** Este procedimiento es el más conservador de todos. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test de Tukey

### Multiple Range Tests for PESO by ZONA

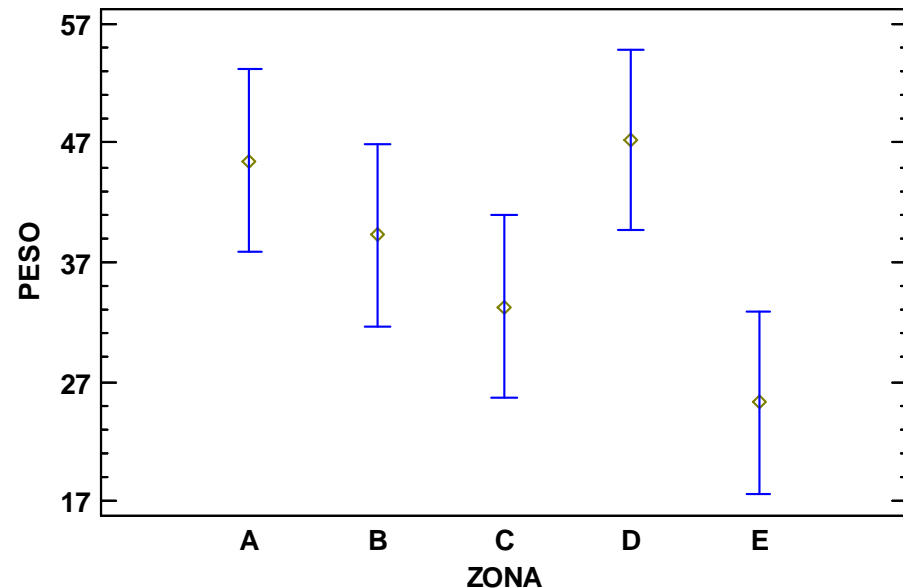
Method: 95,0 percent Bonferroni

ZONA	Count	Mean	Homogeneous Groups
E	4	25,25	X
C	4	33,25	XX
B	4	39,25	XX
A	4	45,5	X
D	4	47,25	X

Contrast	Sig.	Difference	+/- Limits
A - B		6,25	15,2486
A - C		12,25	15,2486
A - D		-1,75	15,2486
A - E	*	20,25	15,2486
B - C		6,0	15,2486
B - D		-8,0	15,2486
B - E		14,0	15,2486
C - D		-14,0	15,2486
C - E		8,0	15,2486
D - E	*	22,0	15,2486

\* denotes a statistically significant difference.

Means and 95,0 Percent Bonferroni Intervals



# Comparación de medias. Ejemplo

## Conclusiones del ejemplo

- **Test de Newman-Keuls:** es intermedio entre el test LSD y el de Tukey. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test LSD

Method: 95,0 percent Student-Newman-Keuls

ZONA	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
E	4	25,25	3,28126	x
C	4	33,25	3,28126	xx
B	4	39,25	3,28126	xx
A	4	45,5	3,28126	x
D	4	47,25	3,28126	x

Contrast	Sig.	Difference
A - B		6,25
A - C	*	12,25
A - D		-1,75
A - E	*	20,25
B - C		6,0
B - D		-8,0
B - E	*	14,0
C - D	*	-14,0
C - E		8,0
D - E	*	22,0

\* denotes a statistically significant difference.

- **Test de Duncan:** es intermedio entre el test LSD y el de Tukey. En este caso sus conclusiones coinciden con las del test LSD

Method: 95,0 percent Duncan

ZONA	Count	LS Mean	LS Sigma	Homogeneous Groups
E	4	25,25	3,28126	x
C	4	33,25	3,28126	xx
B	4	39,25	3,28126	xx
A	4	45,5	3,28126	x
D	4	47,25	3,28126	x

Contrast	Sig.	Difference
A - B		6,25
A - C	*	12,25
A - D		-1,75
A - E	*	20,25
B - C		6,0
B - D		-8,0
B - E	*	14,0
C - D	*	-14,0
C - E		8,0
D - E	*	22,0

\* denotes a statistically significant difference.



# Intervalos LSD para la comparación de medias

- Intervalos **LSD** (**L**east **S**ignficative **D**ifference) son intervalos contruidos para la media de cada variante del factor
- El intervalo obtenido **no es** un intervalo de confianza para las medias correspondientes. Su utilización es sólo la comparación de medias:

The diagram illustrates the components of the LSD interval formula. A large white box contains the formula  $\bar{x}_i \pm 0.707 \cdot t_{gl resid}^{(\alpha)\%} \cdot S_{\bar{x}_i}$ . A red arrow points down to this box from above. Two red circles highlight the constants '0.707' and 'S <sub>$\bar{x}_i$</sub> '. An arrow from the '0.707' circle points to a box containing the fraction  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Another arrow from the 'S <sub>$\bar{x}_i$</sub> ' circle points to a box containing the formula  $\sqrt{\frac{CM_{residual}}{N}}$ .

$$\bar{x}_i \pm 0.707 \cdot t_{gl resid}^{(\alpha)\%} \cdot S_{\bar{x}_i}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sqrt{\frac{CM_{residual}}{N}}$$



# Intervalos LSD para la comparación de medias

## Ejemplo:

$$Tablas \Rightarrow t_{gl\text{ resid}}^{(\alpha=0.05)} = t_{27}^{(\alpha=0.05)} = 2'052$$

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{CM_{residual}}{N}} = \sqrt{\frac{56'97}{10}} = 2'3868$$

Estimación de la varianza poblacional

Intervalo LSD Prov 1:

$$31 \pm \frac{\sqrt{2}}{2} t_{27}^{0,05} \sqrt{\frac{56,97}{10}} = [27'53, 34'47]$$

Media del tratamiento 1

¿Cuáles serían los otros intervalos LSD?

Desv. Típica con que se estima cada media



# Comparación de medias. Intervalos LSD

- Intervalos LSD (**L**east **S**ignficative **D**ifference) son intervalos para la media de cada tratamiento.
- Intuitivamente, se calculan como la mitad del intervalo de confianza para la diferencia de medias, pero **no corresponde a** un intervalo de confianza para las medias.
- Interpretación práctica:

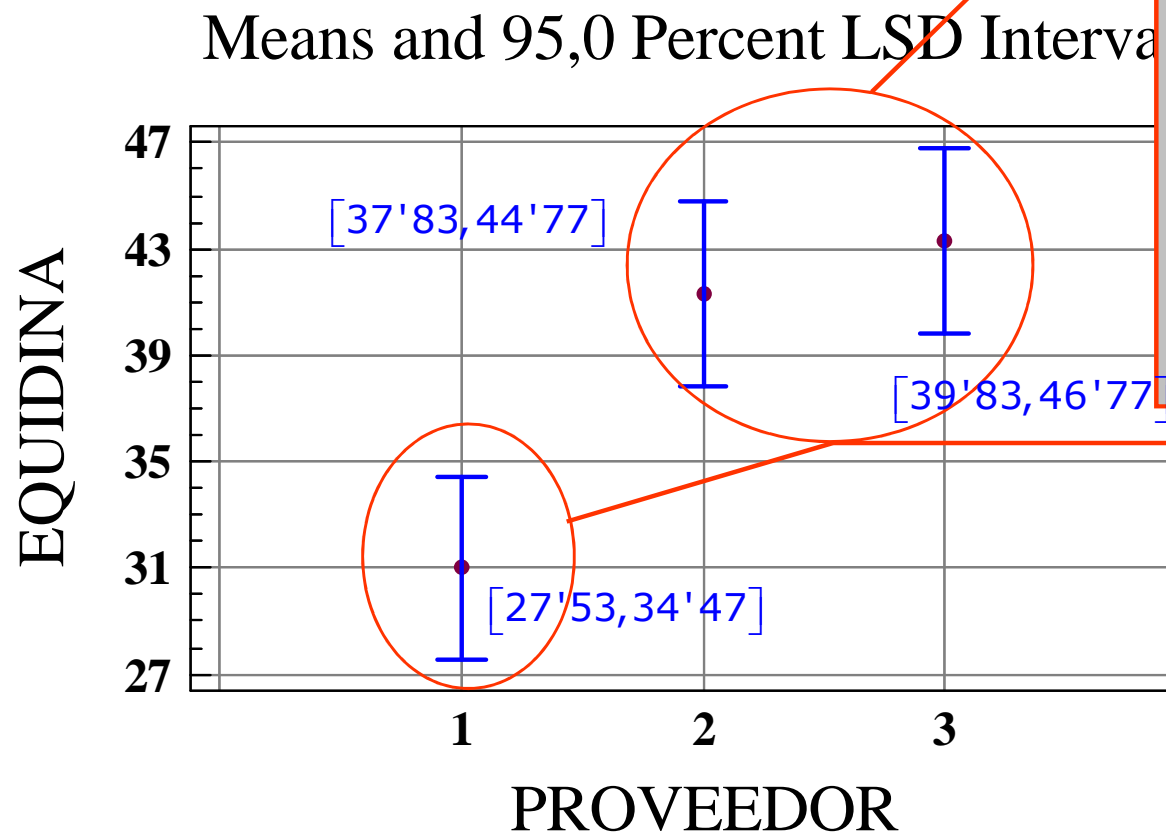
La diferencia entre la media de dos tratamientos **no** será **significativa** si los respectivos **intervalos LSD se solapan.**





# Intervalos LSD

¿Entre qué proveedores **existen diferencias significativas** con respecto al equilibrado dinámico?

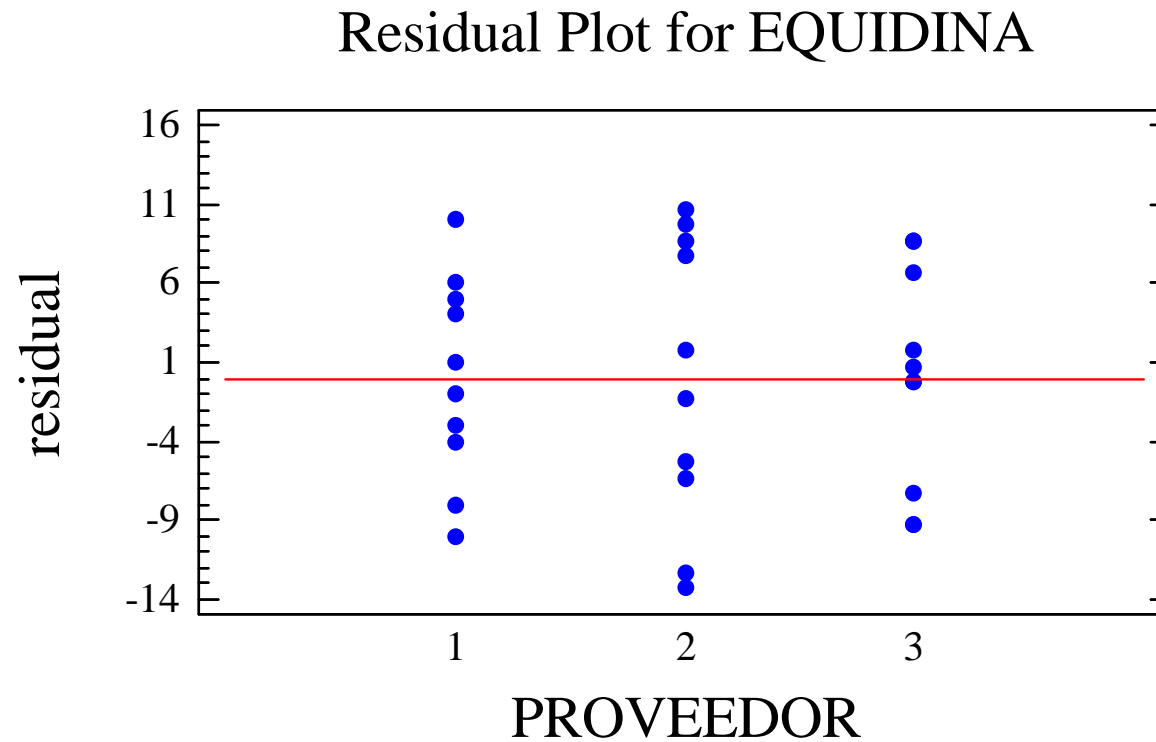


Los intervalos se solapan: entre los prov 2 y 3 no hay diferencias significativas del eq. dinámico

Pero entre el prov. 1 y el 2 ó el 3 si hay diferencias significativas

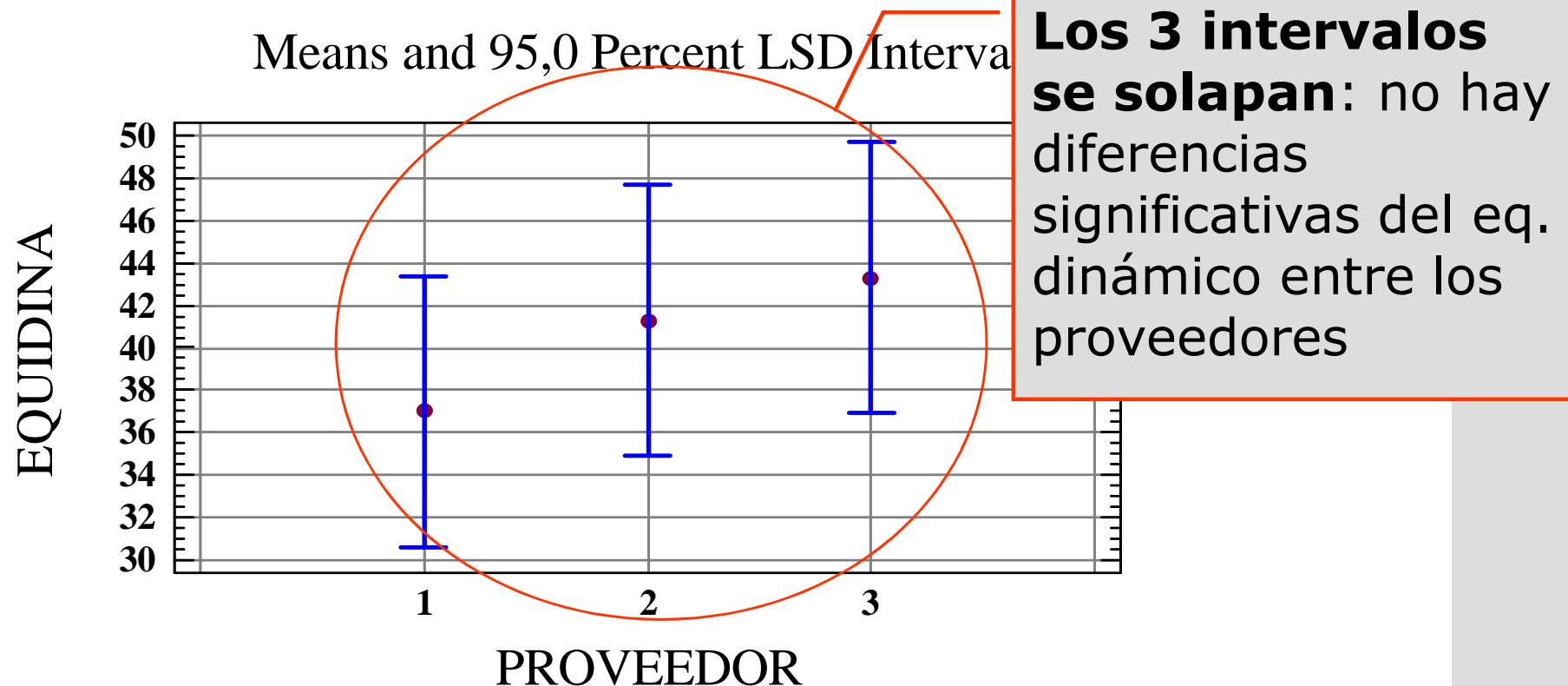


# Análisis de residuos



# Ejemplo Proveedores (**con** dato anómalo)

¿Entre que tratamientos existen diferencias significativas con respecto al equilibrado dinámico?





# Contenidos

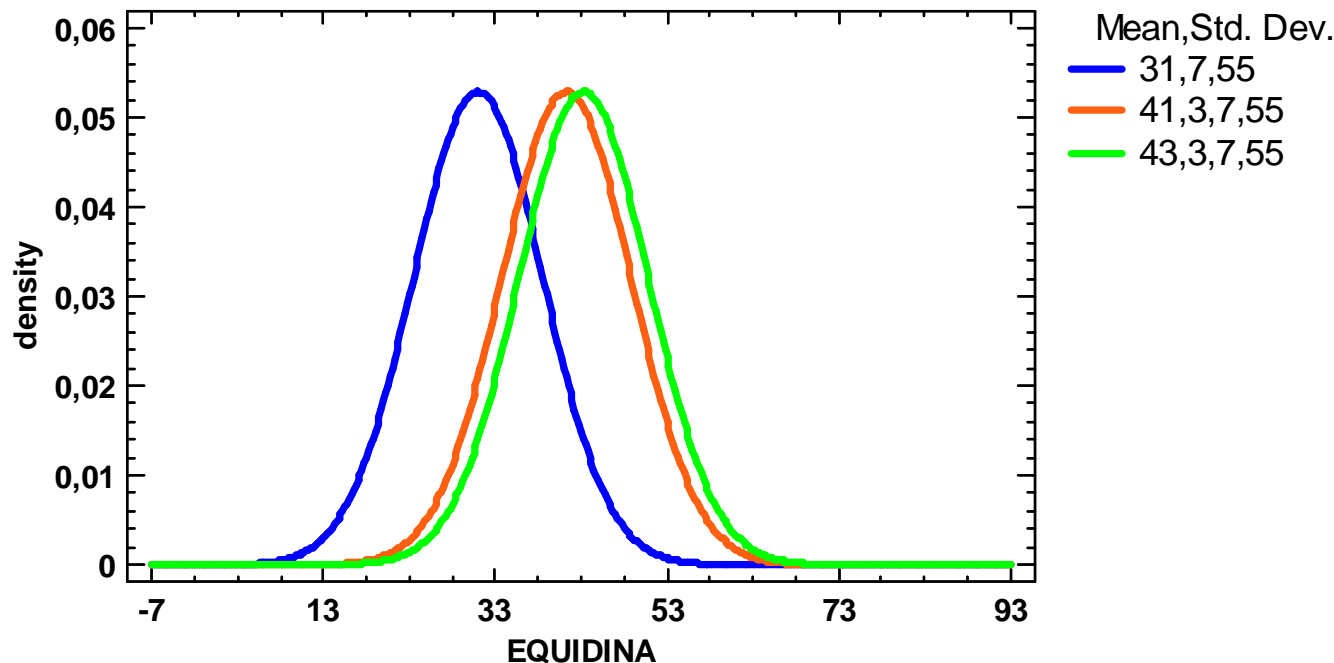
- Idea Intuitiva del ANOVA
- ANOVA con un sólo factor controlado
  - Un ejemplo
  - Descomposición de la Suma de Cuadrados.  
Test F
  - Intervalos LSD
  - Análisis de residuos
  - Estudio de efectos sobre varianzas
- Factores cuantitativos



# Estudio de efectos sobre varianzas

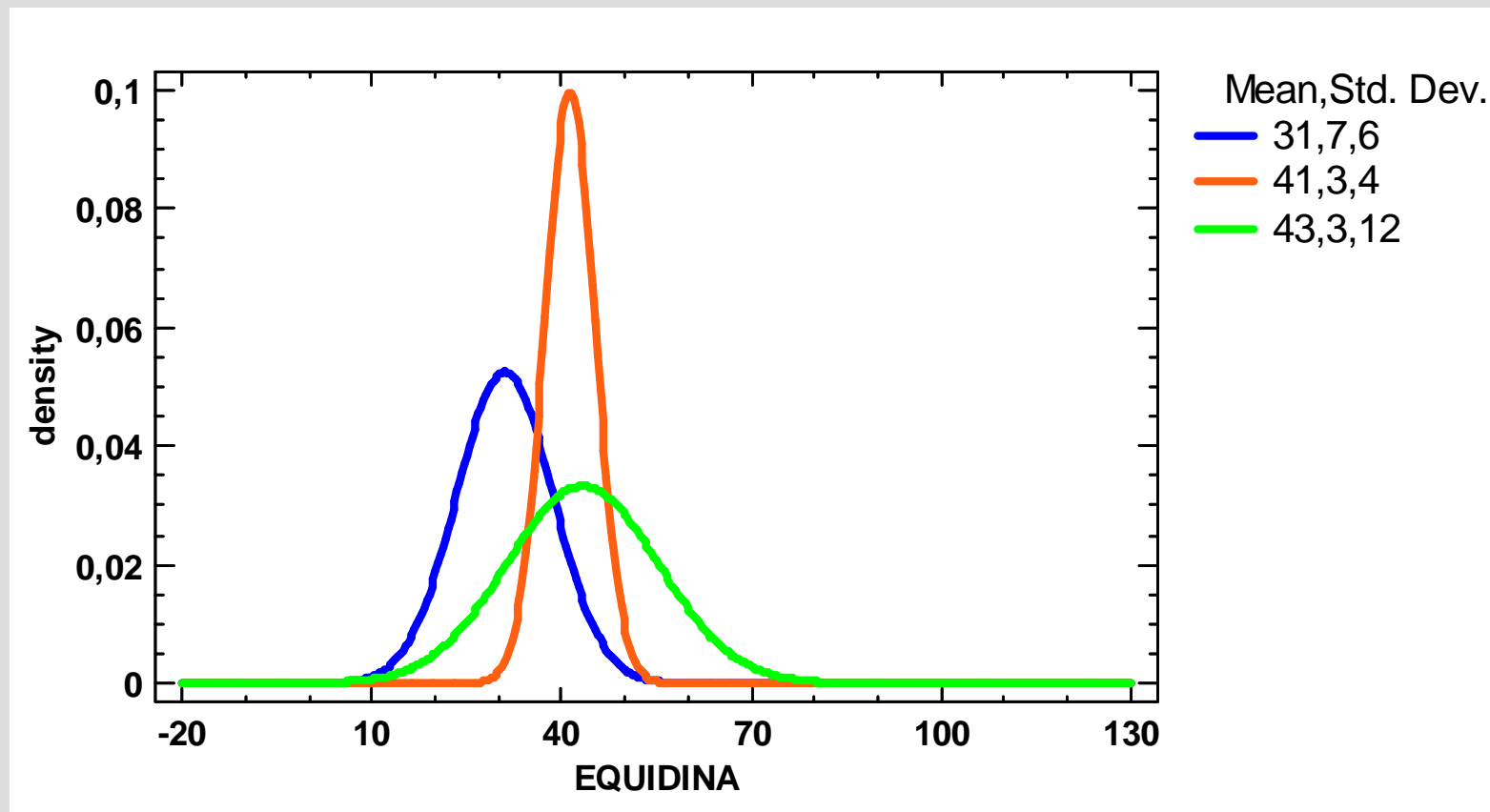
¿Existen **diferencias** entre los proveedores de cigüeñales respecto a la **varianza** de los equilibrados?

Por hipótesis se asume que las poblaciones de las que procede el EQUIDINA en cada proveedor tienen la **misma varianza**

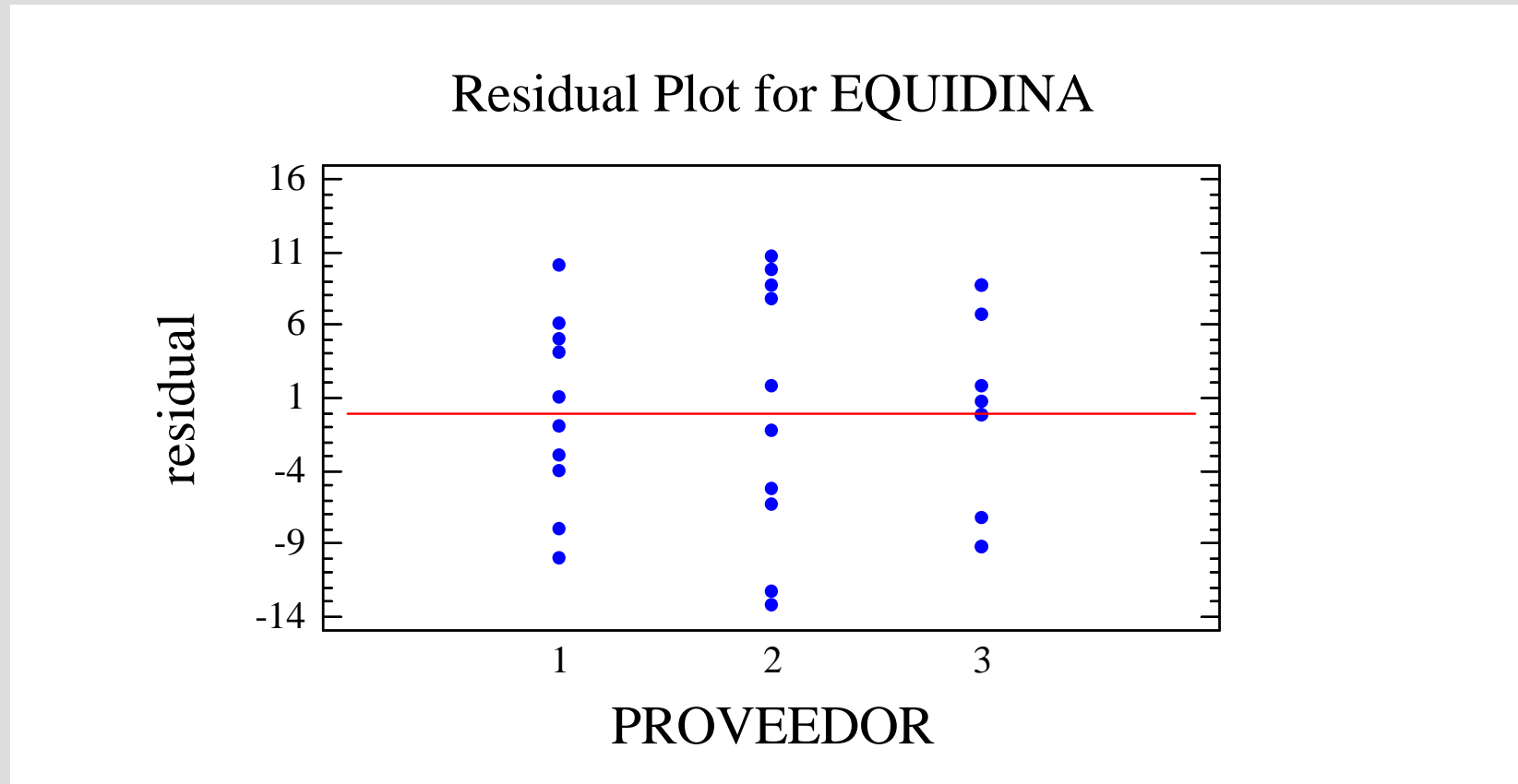


# Estudio de efectos sobre varianzas

Pero.... ¿y si los datos proceden de poblaciones con **diferentes varianzas** según el proveedor?



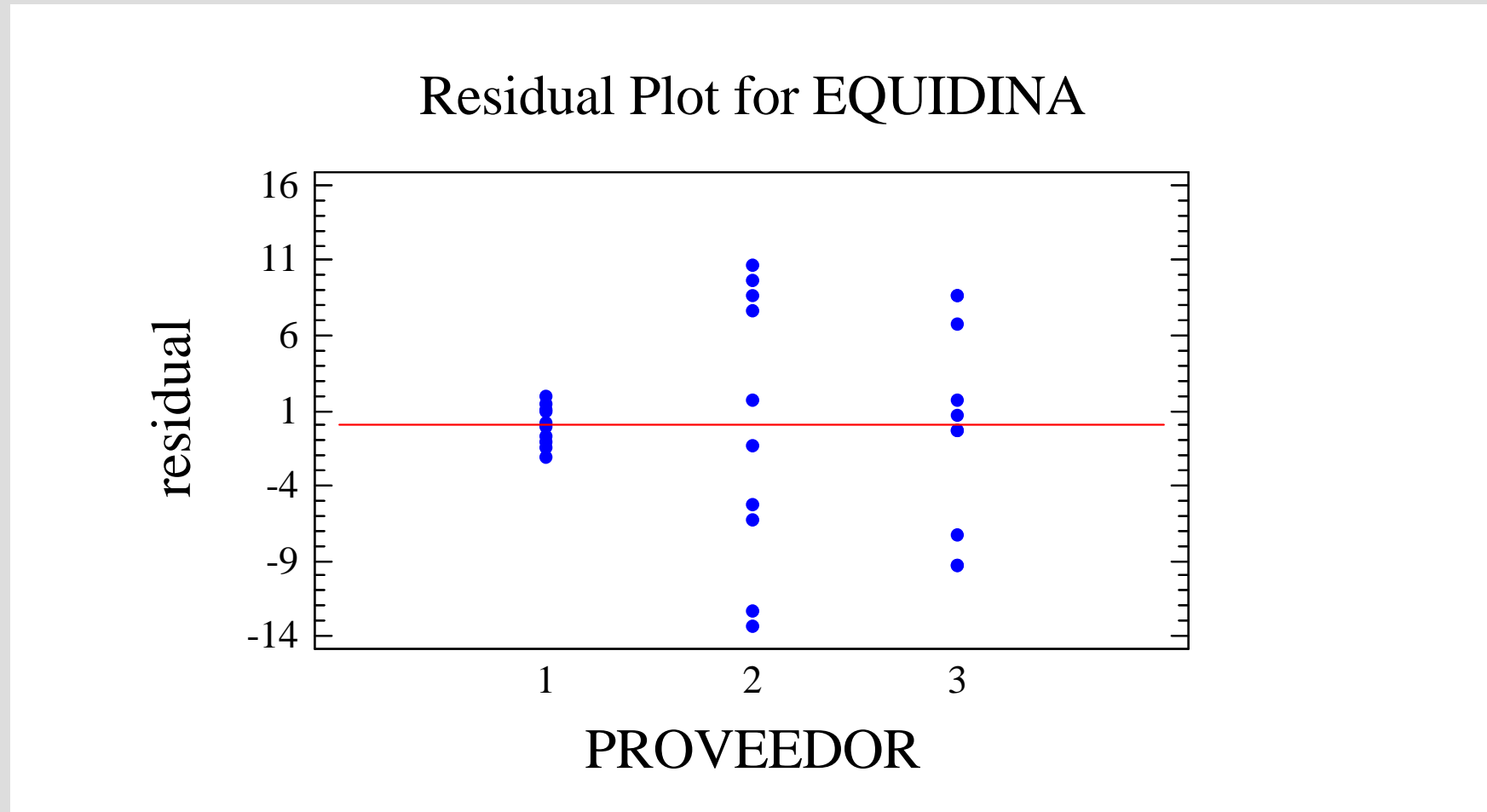
# Estudio de efectos sobre varianzas



¿Qué aspecto tendría el gráfico si los equilibrados del **proveedor 1** tuvieran mucha **menor varianza** que los otros dos?



# Estudio de efectos sobre varianzas





# Estudio de efectos sobre varianzas

- ¿Existe alguna relación entre la media aritmética de los cuadrados de los residuos de un proveedor y la  $S^2$  para dicho proveedor?

$$\text{media}(\text{Residuos})_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{J}$$

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^J (x_{ij} - \bar{x}_i)^2}{J - 1}$$

- La media de los residuos al cuadrado es ligeramente inferior a  $S^2$ , y tienden a ser iguales si  $J$  es grande



# Estudio de efectos sobre varianzas

- Si no hay diferencias entre las **varianzas** de los proveedores → no debe haber diferencias entre las **medias de los residuos al cuadrado** para cada proveedor!
- ¿Conoces una técnica estadística potente para estudiar si **existen o no diferencias entre las medias de una variable aleatoria** (que puede ser definida, por ejemplo, como el cuadrado de los residuos) **en distintas poblaciones**?



## ANOVA

- Variable respuesta:  $(\text{residuos})^2$
- Factor: proveedor
- Variantes: 3



# Estudio de efectos sobre varianzas

ANOVA Table for RESIDUALS^2 by PROV

Analysis of Variance					
Source	Sum of Squares	Df	Mean Square	F-Ratio	P-Value
Between groups	8198,36	2	4099,18	1,89	0,1707
Within groups	58587,0	27	2169,89		
Total (Corr.)	66785,4	29			

P-Value >  
0'05

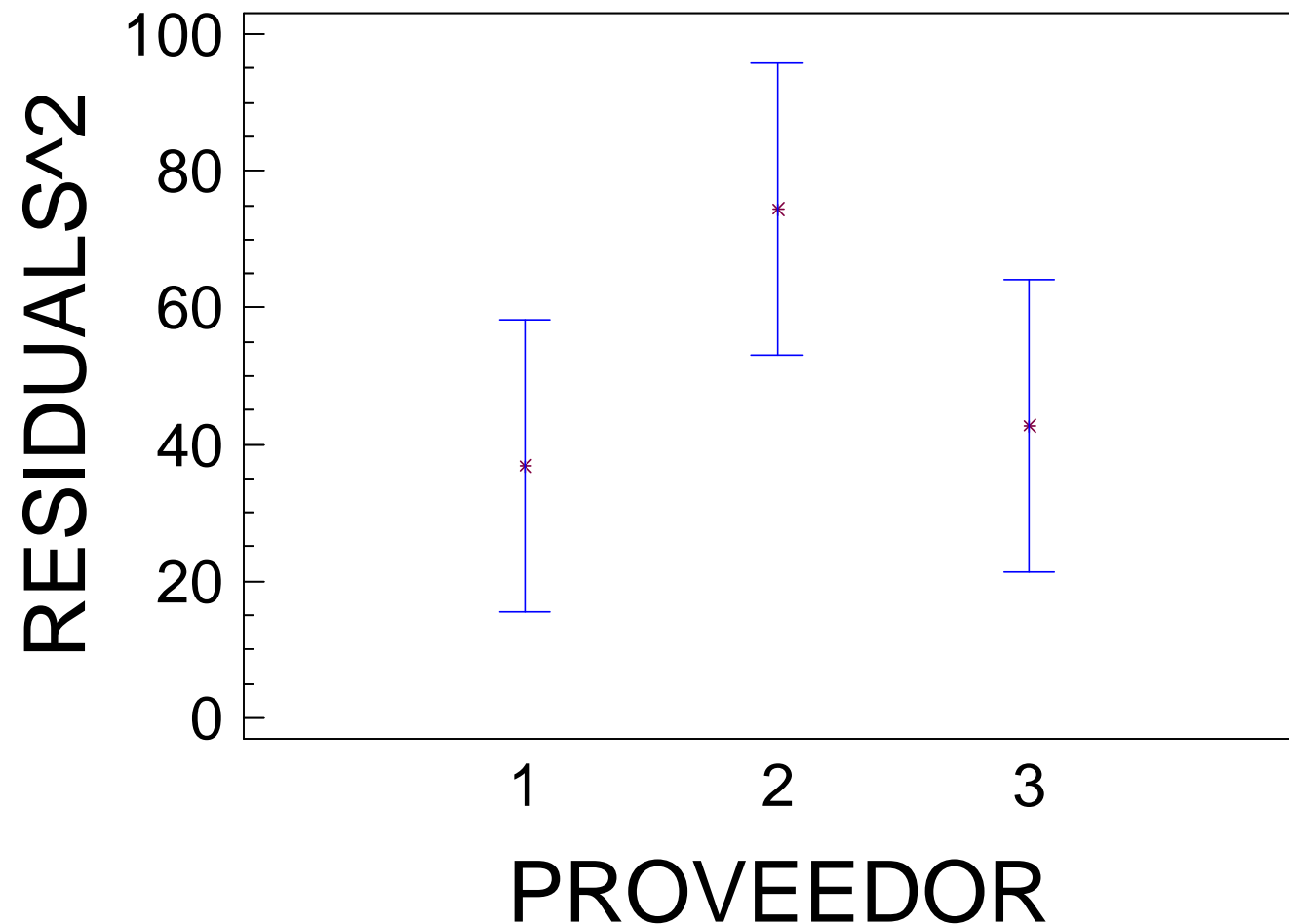
**Aceptamos la  $H_0$**  de igualdad de varianzas → el factor proveedor no tiene un efecto significativo sobre la dispersión del equilibrado dinámico de los cigüeñales.

(No existen diferencias estadísticamente significativas entre las tres varianzas)



# Estudio de efectos sobre varianzas

Means and 95,0 Percent LSD Intervals



# ANOVA. Algunas consideraciones

- Generalización a  **$I > 2$**  poblaciones del test de comparación de medias (para dos poblaciones):

$$H_0: m_1 = m_2 = \dots = m_I$$

$$H_1: \exists i, j: i \neq j \quad m_i \neq m_j \quad i, j \in I$$

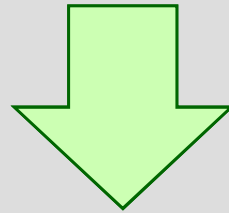
- Hipótesis básicas del ANOVA:
  - Independencia de las poblaciones
  - Homocedasticidad
  - Normalidad





## Tengamos en cuenta.....

Ningunos datos reales seguirán exactamente un modelo matemático!!!!



Hasta qué punto las **conclusiones** que pueden obtenerse de nuestro análisis son sensibles al hecho de que las pautas de variabilidad constatadas en los datos difieran marcadamente de las postuladas por el modelo y qué medidas pueden tomarse en estos casos



# ANOVA. Algunas consideraciones

---

## ✠ Ejemplo Determinación de la resistencia a compresión de cartón corrugado de dos distribuidores

### Objetivo:

Comparar la resistencia a la compresión de los embalajes procedentes de dos distribuidores (a partir de la aplicación de una fuerza paralela a las ondulaciones).

### Procedimiento técnico:

Se toman las planchas de cada distribuidor, de las que se obtienen las 20 muestras para realizar el ensayo, de tamaño 100x25 mm (ISO-FEFCO). A continuación, metemos cada una de las muestras entre las dos platinas que sujetarán la prensa y procedemos a su compresión a velocidad 10 mm/min.



# ANOVA. Algunas consideraciones

- Comparación de dos poblaciones: obtención de Intervalos de confianza y contraste de hipótesis

## Datos

DISTR1	DISTR2
11,15	10,95
10,95	10,85
11,85	11,05
11,7	10,75
11,65	11,35
11,45	11,1
11,4	10,95
11,35	11,25
11,15	11
11,2	11,15

## Resultados del análisis estadístico

### Comparación de Medias

Intervalos de confianza del 95,0% para la media de DISTR1: 11,385 +/- 0,20307 [11,1819; 11,5881]

Intervalos de confianza del 95,0% para la media de DISTR2: 11,04 +/- 0,129293 [10,9107; 11,1693]

Intervalos de confianza del 95,0% intervalo de confianza para la diferencia de medias  
suponiendo varianzas iguales: 0,345 +/- 0,223578 [0,121422; 0,568578]

### Prueba t para comparar medias

Hipótesis nula: media1 = media2

Hipótesis Alt.: media1 <> media2

suponiendo varianzas iguales: t = 3,2419 valor-P = 0,00452541

Se rechaza la hipótesis nula para alfa = 0,05.





# ANOVA. Algunas consideraciones

- Análisis de los datos mediante la técnica del **ANOVA**

Introducción de datos:

**Factor**

DISTRIBUIDOR	TENSION
DISTR1	11,15
DISTR1	10,95
DISTR1	11,85
DISTR1	11,7
DISTR1	11,65
DISTR1	11,45
DISTR1	11,4
DISTR1	11,35
DISTR1	11,15
DISTR1	11,2
DISTR2	10,95
DISTR2	10,85
DISTR2	11,05
DISTR2	10,75
DISTR2	11,35
DISTR2	11,1
DISTR2	10,95
DISTR2	11,25
DISTR2	11
DISTR2	11,15

**Variable  
respuesta**



# ANOVA. Algunas consideraciones

## ■ Análisis de los datos mediante la técnica del **ANOVA**

Análisis de Varianza para **TENSION** : Suma de Cuadrados Tipo III

<i>Fuente</i>	<i>Suma de Cuadrados</i>	<i>Gl</i>	<i>Cuadrado Medio</i>	<i>Razón-F</i>	<i>Valor-P</i>
EFFECTOS PRINCIPALES					
<b>A:DISTRIBUIDOR</b>	0,595125	1	0,595125	10,51	0,0045
RESIDUOS	1,01925	18	0,056625		
TOTAL (CORREGIDO)	1,61438	19			

Todas las razones-F se basan en el cuadrado medio del error residual

¿Por qué el mismo nivel de significación???

¿Qué relación hay entre los dos estadísticos???



# Ejercicio 1

- Una pequeña compañía textil utiliza 4 telares para confeccionar las telas que comercializa. Se desea que los telares sean similares respecto a las características del tejido obtenido, pero tras realizar recientemente una revisión y ajustes de las piezas en ellos, se sospecha que pudiera no ser así.
- Para investigar esta posibilidad, se han seleccionado al azar trozos de idénticas dimensiones de telas manufacturadas por cada uno de los cuatro telares y se ha medido su **resistencia**.

Los datos obtenidos se recogen en la tabla adjunta (fichero *telar.sf3*).

Realizar el análisis estadístico de los datos.

Telares			
Telar A	Telar B	Telar C	Telar D
86,40	75,37	89,12	92,51
78,23	87,99	85,08	90,48
72,36	83,52	80,35	83,07
76,88	79,21	88,81	94,54
69,64	80,34	83,85	87,23
90,92	67,77	81,96	87,07
87,17	70,89	83,71	92,31



# Ejercicio 2

- Estudiar **si existen diferencias significativas entre los tiempos medios** que tardan en venir a clase los alumnos según lo hagan en coche propio, andando o en transporte público.

Utilizar los datos guardados en el fichero *ENCUESTA.SF3* y la opción de *Statgraphics centurion*:

*Comparar => Análisis de la Varianza => Anova Multifactorial*

Eliminar los datos de los casos en los que los alumnos vienen en bicicleta o en coche de un amigo para los que existen muy pocas observaciones. Para ello puede usarse en el campo SELECT de la ventana de introducción de datos la expresión:

*(TRANSPORTE<>"amigo") & (TRANSPORTE<>"moto\_bici")*

Tras realizar el ANOVA **ver el gráfico de los residuos en función del medio de transporte**. ¿Qué se deduce sobre **posibles diferencias entre las varianzas** de los tiempos según el medio utilizado?. Confirmar la deducción anterior haciendo un **ANOVA sobre el cuadrado de los residuos**.





# Contenidos

- Idea Intuitiva del ANOVA
- ANOVA con un sólo factor controlado
  - Un ejemplo
  - Descomposición de la Suma de Cuadrados.  
Test F
  - Intervalos LSD
  - Análisis de residuos
  - Estudio de efectos sobre varianzas
- Factores cuantitativos



# Factores cuantitativos: Introducción

- Factores
  - Cualitativos
  - Cuantitativos
- Factores **cualitativos**:
  - Tipo de procesador en cierto sistema
  - Tipo de procedimiento de análisis utilizado en determinado laboratorio
  - Tipo de proveedor del cableado de red
  - Tipo de material utilizado en la fabricación de cierto producto
  - Topología de la red
  - .....



# Factores cuantitativos: Introducción

## ■ Factores

- Cualitativos

- Cuantitativos

## ■ Factores **cuantitativos**:

- Tamaño de la memoria utilizada en un sistema
- Cantidad de abono utilizado en cierto cultivo
- Velocidad de agitación de una mezcla en un proceso químico
- Cantidad de pegamento utilizado en un proceso de adhesivado
- Temperatura a la que somete cierto compuesto
- Nivel de carga de un sistema informático
- Número de procesadores en un multicomputador
- Nivel de presión ejercida en cierto proceso .....



# Factores cuantitativos : Introducción

---

Factores **cuantitativos**: si su efecto resulta significativo en el ANOVA .....



- No tiene sentido comprobar entre qué niveles del factor existen diferencias significativas
- Sino si se observa algún tipo de pautas en esas diferencias
- Interesa estudiar la naturaleza de la función de respuesta que relaciona el valor medio de la variable estudiada con el nivel del factor ensayado





# Factores cuantitativos

## EJEMPLO: Estudio de PRESTACIONES de un multicomputador

- Analizar la LATENCIA de los mensajes de una red en función del TRÁFICO (tasa de inyección de mensajes) de esa red.
- Se ensayan 4 ó 5 niveles de tráfico diferentes y se mide la latencia media. **ANOVA:** TRÁFICO significativo.

### Cuestión Clave:

¿Existen diferencias significativas en la LATENCIA MEDIA de los mensajes con “poco” y “mucho” TRÁFICO?



# Factores cuantitativos

## EJEMPLO: Estudio de PRESTACIONES de un multicomputador

- Analizar la LATENCIA de los mensajes de una red en función del TRÁFICO (tasa de inyección de mensajes) de esa red.
- Se ensayan 4 ó 5 niveles de tráfico diferentes y se mide la latencia media. **ANOVA:** TRÁFICO significativo.

### Cuestión Clave:

¿Cómo evoluciona la LATENCIA MEDIA de los mensajes a medida que aumenta o disminuye el nivel de TRÁFICO?



# Factores cuantitativos

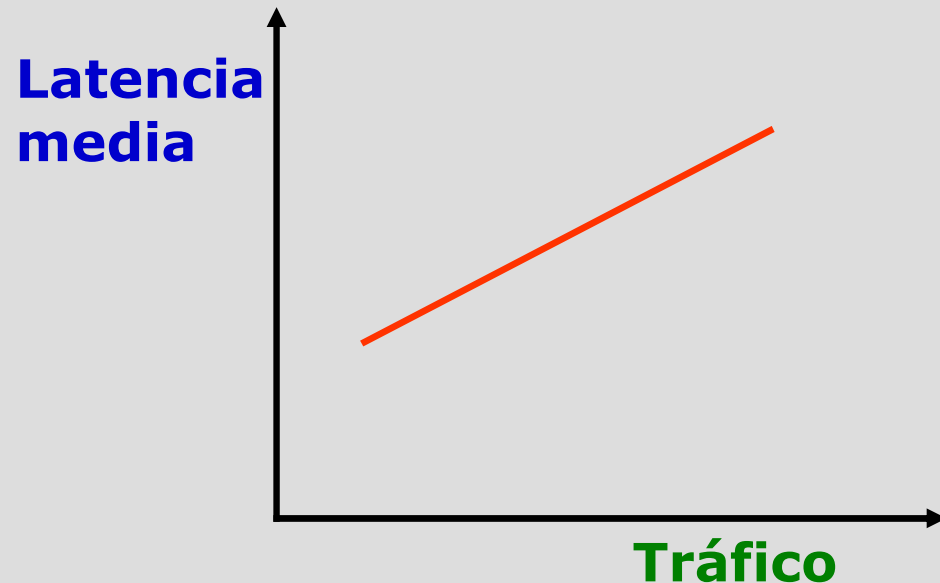
## EJEMPLO: Estudio de PRESTACIONES de un multicomputador

- Es obvio que a medida que aumenta el tráfico también aumenta la latencia media, pero cómo ...

¿En la **misma proporción** a medida que aumenta el nivel de TRÁFICO?



**EFFECTO LINEAL**



# Factores cuantitativos

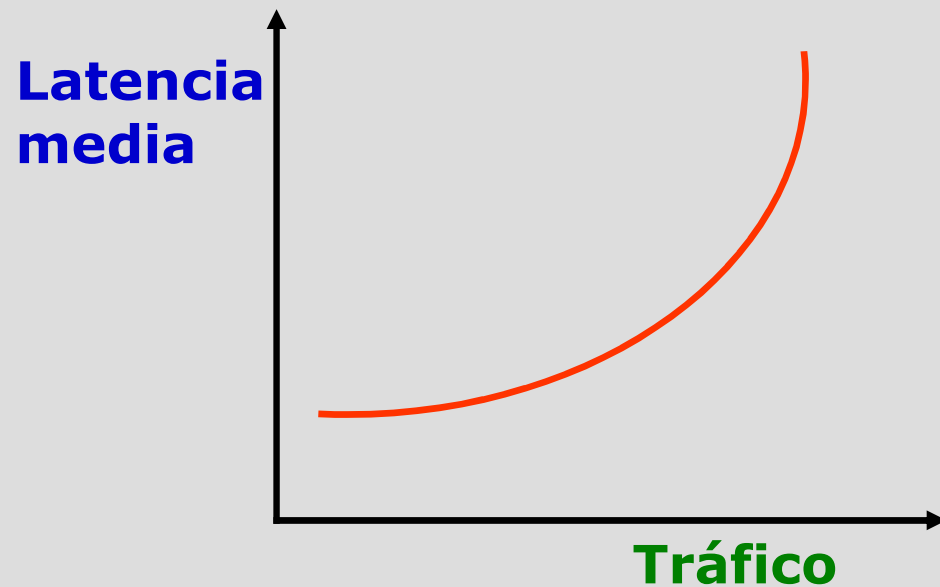
## EJEMPLO: Estudio de PRESTACIONES de un multicomputador

- Es obvio que a medida que aumenta el tráfico también aumenta la latencia media, pero cómo ...

A medida que aumenta el nivel de TRÁFICO, ¿son **mayores** los incrementos de la latencia media?



**EFFECTO CUADRÁTICO**



# Factores cuantitativos

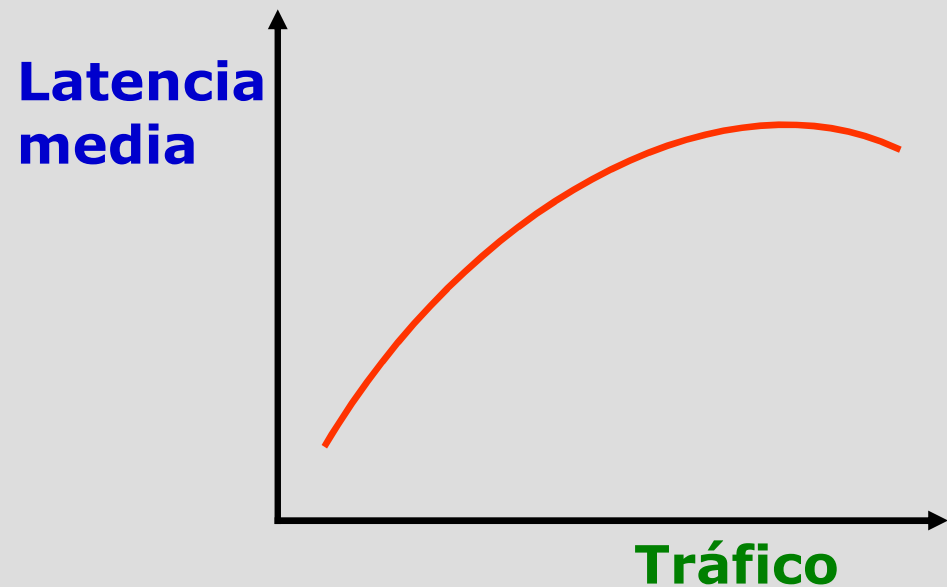
## EJEMPLO: Estudio de PRESTACIONES de un multicomputador

- Es obvio que a medida que aumenta el tráfico también aumenta la latencia media, pero cómo ...

A medida que aumenta el nivel de TRÁFICO, ¿son **menores** los incrementos de la latencia media?



**EFFECTO CUADRÁTICO**



# Factores cuantitativos: Estudio

---

- ¿Cómo se puede estudiar si el posible efecto lineal y/o cuadrático son significativos en esa relación?
- La forma natural de realizar este tipo de estudios es mediante un modelo de Regresión, no obstante, y ya que el ANOVA es un caso particular de éstos se va a explicar ...
- un **procedimiento sencillo** para estudiar la relevancia de dichos efectos a partir del ANOVA:



# Factores cuantitativos: Estudio

---

- Procedimiento: descomponer la **SCF** en una serie de términos:
  - **Posible efecto lineal** → 1 g.l
  - **Posible efecto cuadrático** → 1 g.l
  - **Posible efecto cúbico (raro)** → 1 g.l
- Descomposición es sencilla en el caso en que los niveles del factor cuantitativo estén equiespaciados
- A cada componente le corresponde un **contraste, Z**
- El software estadístico estándar no efectúa este procedimiento



# Contrastes Ortogonales

**Z** → Combinación Lineal de medias

$$Z = \sum_{i=1}^I \lambda_i \bar{X}_i$$

Media del nivel i del Factor

	3 niveles	4 niveles	5 niveles
<b>Z</b> <sub>Lineal</sub>	-1 0 1	-3 -1 1 3	-2 -1 0 1 2
<b>Z</b> <sub>Cuadrática</sub>	1 -2 1	1 -1 -1 1	2 -1 -2 -1 2
<b>Z</b> <sub>Cúbica</sub>	-----	-1 3 -3 1	-1 2 0 -2 1





# Contrastes Ortogonales

- Posible efecto lineal →  **$SC_Z$  lineal** → 1 g.l
- Posible efecto cuadrático →  **$SC_Z$  Cuadrático** → 1 g.l
- Posible efecto cúbico →  **$SC_Z$  Cúbico** → 1 g.l
- ...

$$SC_Z = \frac{J \cdot \bar{Z}^2}{\sum_{i=1}^I \lambda_i^2}$$

Número de observaciones a partir de las que se calcula la media de cada nivel



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

- Con el fin de estudiar el comportamiento de un sistema informático, y tratar de minimizar el tiempo medio de utilización de CPU, se ha llevado a cabo un experimento para conocer la posible influencia que la **carga** pueda tener sobre dicho tiempo.
- Se han ensayado 3 niveles de carga (50, 100 y 150 Mflops/seg.) y se ha medido el tiempo medio de utilización de CPU en segundos. Cada tratamiento se ha probado 5 veces en diferentes ejecuciones .
- Los resultados del experimento se recogen en la siguiente tabla:



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

- Factor: Carga
- Niveles: 3 (50, 100 y 150 Mflops/seg)
- Variable respuesta: Tiempo medio de Utilización CPU (seg)

CARGA (Mflops/s)			
50	100	150	
38	54	63	
40	47	65	
42	52	57	
37	53	58	
43	49	62	
$T_1 = 200$	$T_2 = 255$	$T_3 = 305$	$TG = 760$
$\bar{X}_1 = 40$	$\bar{X}_2 = 51$	$\bar{X}_3 = 61$	



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

---

**Objetivo:** analizar con detalle el efecto (la naturaleza) del factor **CARGA** sobre la variable respuesta **Tiempo medio de utilización de CPU**



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

$$SG = \frac{TG^2}{N} = \frac{760^2}{15} = 38506,67$$

$$SCT = \sum_{i,j} x_{ij}^2 - SG = 1209,33$$

$$SCF = \sum_{i=1}^I \frac{T_i^2}{N_i} - SG = 1103,33$$

$$SCR = SCT - SCF = 106$$

$$CM = \frac{SC}{gl} \Rightarrow CMF = \frac{SCF}{glF} = \frac{1103,33}{2} = 551,66$$

$$\Rightarrow CMR = \frac{SCR}{glR} = \frac{106}{12} = 8,83$$

$$F\_ratio = \frac{CMF}{CMR} \Rightarrow F\_ratio = \frac{551,66}{8,83} = 62,45$$



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

## ■ Tabla resumen del ANOVA

Origen Variación	Suma de Cuadrados	Grados Libertad	Cuadrado Medio	F ratio
Total	1209'33	14	-	-
CARGA	1103'33	2	551'66	62'45
Residual	106	12	8'83	-

Riesgo de 1ª especie:  $\alpha=0'05$

Tabla:  $F_{2,12}(5\%) = 3'88 << 62'45$

Rechazamos  $H_0$



**¡SÍ HAY DIFERENCIAS SIGNIFICATIVAS ENTRE LOS NIVELES DE CARGA!**



# Factores cuantitativos: descomposición de la SCF

Medias	40	51	61	Z	SC <sub>Z</sub>
Lineal	-1	0	1	21	1102'5
Cuadrático	1	-2	1	-1	0'83

$$Z_{\text{lineal}} = -1 \times 40 + 0 \times 51 + 1 \times 61 = 21$$

$$Z_{\text{Cuadrática}} = 1 \times 40 + (-2) \times 51 + 1 \times 61 = -1$$

$$SC_{Z_{\text{Lineal}}} = \frac{5 \cdot (21)^2}{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = 1102'5$$

$$SC_{Z_{\text{Cuadrática}}} = \frac{5 \cdot (-1)^2}{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = 0'83$$



# Factores cuantitativos: ANOVA

Origen Variación	SC	g.l.	CM	F ratio	F_tabla $\alpha=0'05$
Total	1209'33	14	-	-	
CARGA	1103'33	2	551'66	62'45	3'88 = $F_{2,12}$
Residual	106	12	8'83	-	





# Factores cuantitativos: ANOVA

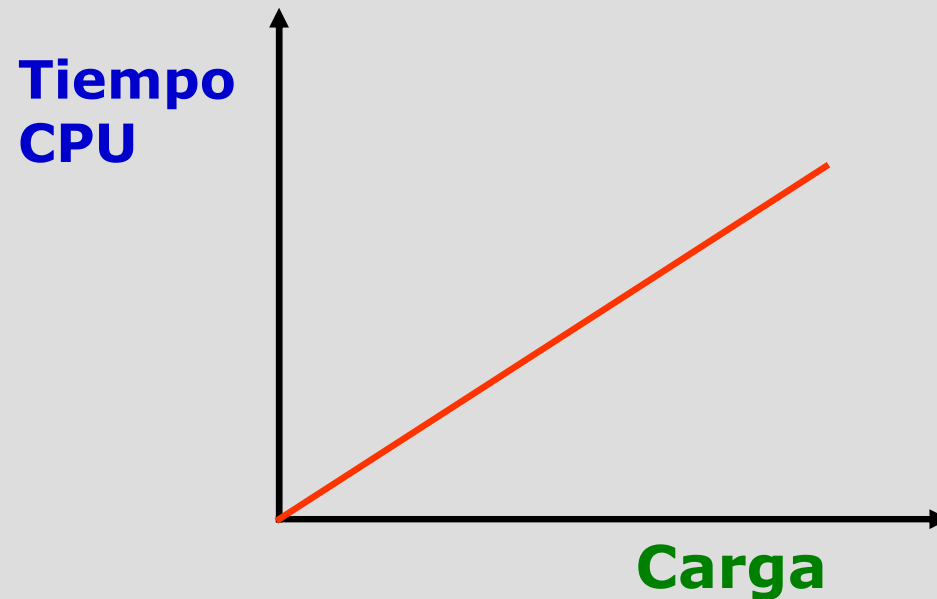
Origen Variación	SC	g.l.	CM	F ratio	F_tabla $\alpha=0'05$
Total	1209'33	14	-	-	
CARGA	1103'33	2	551'66	62'45	3'88 = $F_{2,12}$
Ef. Lineal	1102'5	1	1102'5	124'85 >	4'75 = $F_{1,12}$
Ef. Cuad.	0'83	1	0'83	0'094 <	4'75 = $F_{1,12}$
Residual	106	12	8'83	-	

- El **efecto** de la componente **lineal** de **CARGA** es **significativo**
- El **efecto** de la componente **cuadrática** de **CARGA** **NO** es **significativo**



# Factores cuantitativos: Ejemplo1

---



- A medida que aumenta la CARGA el tiempo medio de utilización de CPU crece linealmente.



# Factores cuantitativos: ANOVA

$$TIEMPO = \beta_0 + \beta_1 CARGA + \beta_2 CARGA^2 + U$$

		<i>Standard</i>	<i>T</i>	
<i>Parameter</i>	<i>Estimate</i>	<i>Error</i>	<i>Statistic</i>	<i>P-Value</i>
CONSTANT	28,0	5,79367	4,83286	0,0004
CARGA	0,25	0,13158	1,89998	0,0817
CARGA^2	-0,0002	0,000651153	-0,307148	0,7640

## Analysis of Variance


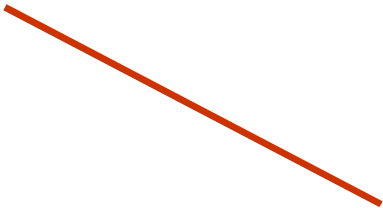

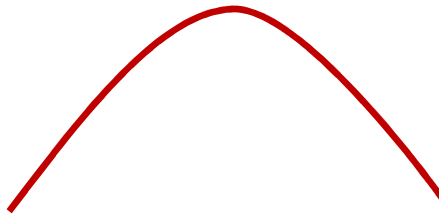

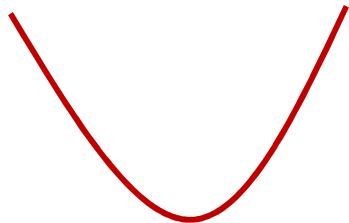

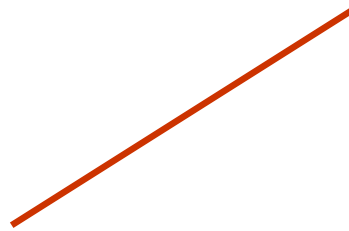

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>	<i>P-Value</i>
Model	1103,33	2	551,667	62,45	0,0000
Residual	106,0	12	8,83333		
Total (Corr.)	1209,33	14			

## Further ANOVA for Variables in the Order Fitted

<i>Source</i>	<i>Sum of Squares</i>	<i>Df</i>	<i>Mean Square</i>	<i>F-Ratio</i>	<i>P-Value</i>
CARGA	1102,5	1	1102,5	124,81	0,0000
CARGA^2	0,833333	1	0,833333	0,09	0,7640
Model	1103,33	2			



# Fact. cuantitativos. Combinación de efectos

		$Z_{\text{Cuadrática}}$		
		$<0$	$0$	$>0$
$Z_{\text{Lineal}}$	$<0$			
	$0$			
	$>0$			



# Ejercicio 3

- Para estudiar la fiabilidad de ciertos módulos electrónicos, destinados a la industria del automóvil, se someten a un envejecimiento acelerado durante 100 horas a determinada temperatura  $T$ , midiéndose posteriormente como característica significativa un determinado parámetro eléctrico (intensidad de corriente, que circula entre dos puntos, obtenida aplicando un determinado voltaje) cuyos valores aumentan con el deterioro.
- Para analizar la influencia de la temperatura  $T$  sobre el resultado de la prueba se ensayaron 20 módulos, cuatro a cada una de las temperaturas:  $20^{\circ}\text{C}$ ,  $40^{\circ}\text{C}$ ,  $60^{\circ}\text{C}$ ,  $80^{\circ}\text{C}$  y  $100^{\circ}\text{C}$ . Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

Temperatura				
20°C	40°C	60°C	80°C	100°C
15	17	23	28	45
18	21	19	32	51
13	11	25	34	57
12	16	22	31	48



# Ejercicio 3

---

✖ Se pide:

- a)** Estudiar detalladamente el efecto de la temperatura sobre el deterioro de los módulos electrónicos.
- b)** Comprobar mediante *Statgraphics* los resultados obtenidos.
- c)** Analizar adicionalmente mediante el STATGRAPHICS si la temperatura de la prueba afecta a la varianza de las intensidades obtenidas.



# Ejercicio 4

- En cierto estudio sobre la efectividad de dos nuevos productos herbicidas de preemergencia contra gramíneas (herbicidas "P" y "Q", por razones de confidencialidad), se sembraron 20 macetas en condiciones homogéneas con un número determinado de semillas seleccionándose al azar grupos de la muestra que fueron tratadas con cada herbicida.
- El herbicida P se ensayó a diferentes dosis: 20, 40 y 60 ppm, mientras que el herbicida Q se mantuvo a una dosis constante de 50 ppm. Adicionalmente y con el fin de comparar la posible efectividad de los herbicidas, en el estudio se consideraron semillas no tratadas con los herbicidas, constituyendo estas el grupo de control.
- Los resultados obtenidos (**peso** de la parte aérea de la gramínea al cabo de tres meses) se recogen en la tabla:

CONTROL	P a 20ppm	P a 40ppm	P a 60ppm	Q
88	39	33	25	67
75	50	25	20	58
76	44	30	22	58
80	46	34	16	65



# Ejercicio 4

---

✖ Se pide:

- a)** Estudiar la significación estadística del tipo de tratamiento sobre el peso promedio de la gramínea (cebada).
- b)** ¿Han sido, en promedio, efectivos los herbicidas sobre la cebada?
- c)** En promedio, para las dosis ensayadas, ¿se puede afirmar que es más efectivo el herbicida P que el herbicida Q en el cultivo considerado?
- d)** ¿Cómo ha influido la dosis de herbicida P considerada en su efectividad sobre la gramínea analizada?

**Nota:** Se pretende que al aplicar los herbicidas, el peso de la cebada (gramínea) sea menor. El tratamiento sería efectivo si el peso de la planta obtenida a partir de las semillas tratadas fuera menor.





---

Esta obra está bajo una licencia Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 2.5 España de Creative Commons. Para ver una copia de esta licencia, visite <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.5/es/>

