Chapitre 4

Proportion, Pourcentage et Ratio (Fractions)

Introduction : Morceaux de gâteaux

* Cette leçon est aussi sous forme vidéo au site de l'Université Espoir. *

NOTE : Dans la vie pratique, en plus des opérations de base, les fractions sont ce que vous allez avoir besoin le plus. Faites donc tous vos efforts pour comprendre la logique qui régit les lois opératoires des fractions.

Vous savez peut-être déjà que les fractions représentent des *parts (morceaux)* de quelque chose. On a tendance à utiliser comme exemple un gâteau (miam !) que l'on découpe en plusieurs parts :

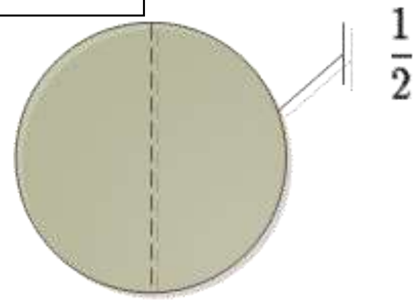
Dans la première photo nous voyons un gâteau partagé en 8 tranches ou morceaux. Chacun reçoit 1 morceau sur les 8 et nous pouvons écrire ce que chacun reçoit algébriquement comme $\mathbf{\frac{1}{8}}$

Donc si nous additionnons les 8 morceaux (les $\mathbf{\frac{1}{8}}$) nous aurons 1 gâteau entier.

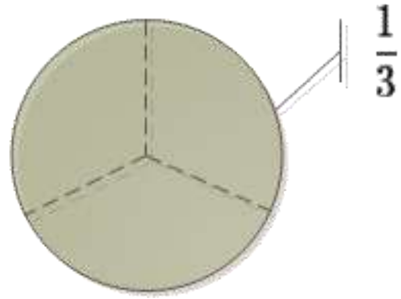
$$\mathbf{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=1}$$

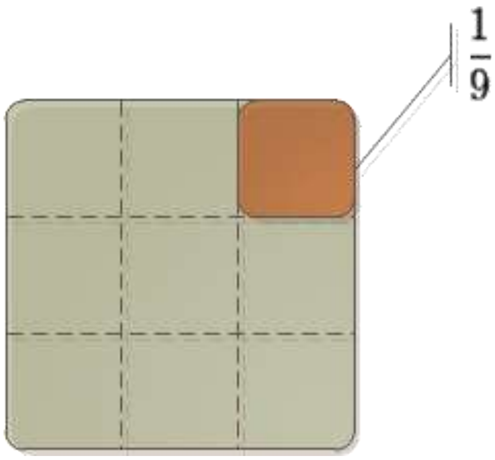
La totalité du gâteau correspond au nombre 1. On a donc 1 gâteau sous les yeux.
Quel que soit l'objet donc que nous découpons en morceau égaux, chaque morceau s'écrit 1 sur le nombre total de morceaux.
IMPORTANT : Les morceaux doivent être de même taille pour que ce raisonnement reste vrai.

Si on découpe le gâteau en 2 parties égales :

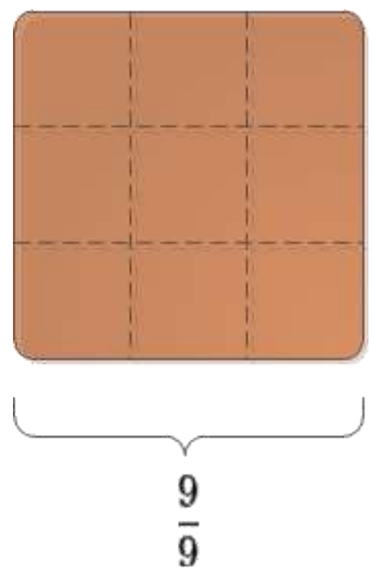


Si on découpe le gâteau en 3 parties égales :



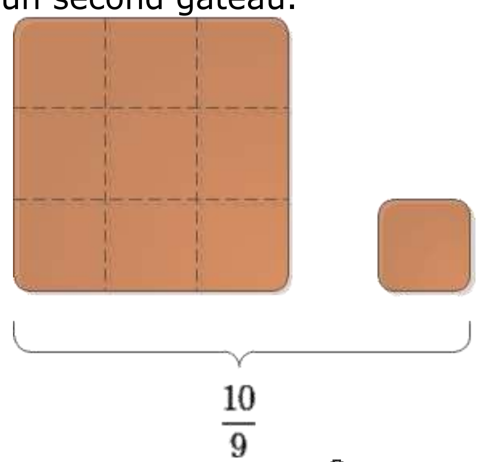


Le gâteau représente seulement une forme d’objet pas tous, les objets peuvent être de n’importe quelle forme. Cet exemple d’un objet carré divisé en 9 parties.



Si vous prenez toutes les parts du gâteau, qu'est-ce que ça donne ? **On peut écrire :** $\frac{9}{9} = 1$

Imaginons qu'il y ait un second gâteau à côté. En plus de manger le premier gâteau en entier, vous prenez une petite part (1/9) d'un second gâteau.



Combien de parts avez-vous mangé ?

Vous avez mangé $\frac{10}{9}$ ("dix neuvièmes") de gâteau ! Vous avez $\frac{9}{9}$ d'un côté et une petite part ($\frac{1}{9}$) de l'autre, ce qui fait en tout $\frac{10}{9}$

Les fractions sont des nombres

Le mot fraction veut dire : portion, partie d'un tout (Référence : www.le-dictionnaire.com).
Pour construire une fraction, on a besoin de deux éléments :

- Le numérateur, que l'on place au-dessus de la barre
- Le dénominateur, que l'on place en-dessous de la barre
- La barre représente une division

Donc, une fraction représente une portion d'un tout. Le tout a été divisé.
Le numérateur nous informe sur le nombre de portions que nous avons et le dénominateur nous indique combien de portions ont été obtenues après avoir divisé le tout.

$$\frac{\text{numerateur}}{\text{denominateur}}$$

Exemple :

$\frac{1}{2}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 2 et nous avons 1 partie

$\frac{1}{3}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 3 et nous avons 1 partie

$\frac{1}{4}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 4 et nous avons 1 partie

$\frac{1}{5}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 5 et nous avons 1 partie

$\frac{2}{5}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 5 et nous avons 2 parties

$\frac{4}{7}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 7 et nous avons 4 parties

$\frac{9}{20}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 20 et nous avons 9 parties

$\frac{2}{10}$ L'objet (ou le tout, ou l'entier) a été divisé en 10 et nous avons 2 parties

Comme une fraction est une division, le dénominateur (nombre en bas) ne peut pas être 0 !
En effet, comme vous le savez peut-être, il est impossible de diviser par 0.
On ne peut pas avoir une fraction comme $\frac{2}{0}$!

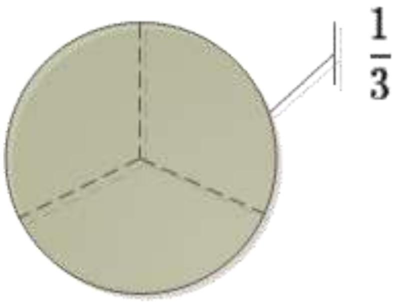
Additionner et soustraction des fractions

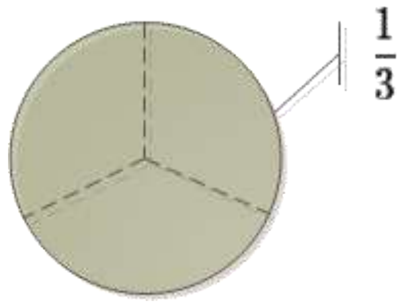
Jusqu'à maintenant nous avons vu des fractions qui ont, en général, un numérateur qui est plus petit que le dénominateur. Et cela fait sens puisque le numérateur représente une ou plusieurs morceaux de l'objet qui a été divisé.

Mais dans la pratique nous verrons très souvent des numérateurs de fraction qui sont plus grands que les dénominateurs. Cela est les résultats d'opérations telles l'addition.

Exemple : nous avons 2 gateaux qui sont divisés en 3 parties. Si l'on nous donne 2 tranches du premier et 2 tranches du deuxieme, nous aurons 4 tranches sur chaque 3.

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$





Nous voyons donc que l'addition des fractions est possible si les dénominateurs sont les mêmes. Dans ce cas, nous additionnons seulement les numérateurs et nous conversons le dénominateur, il reste inchangé.

Exemple :

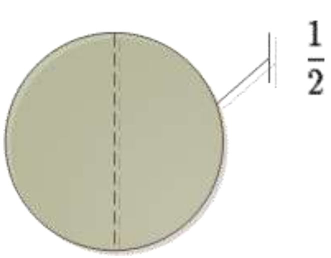
$\frac{2}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}$ $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$

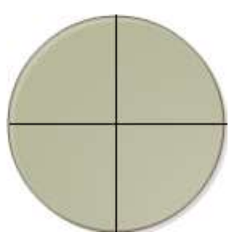
$\frac{2}{10} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}$ $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{0}{3} = 0$ $\frac{2}{7} - \frac{3}{7} = -\frac{1}{7}$

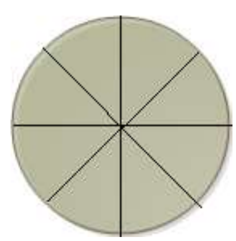
Caractéristique Importante des fractions

Mulitiplier ou Diviser le numérateur et le dénominateur par le même nombre ne change pas la fraction.

Cette caractéristique nous aide dans l'addition ou la soustraction de fractions qui n'ont pas le même dénominateur.







Gateau 1 – Moitié ou 1/2 **Gateau 2 : 2/4** **Gateau 2 : 4/8**

Nous avons donc 2 cas

Si nous avons la moitié du gateau divisé en 2 nous avons 1 sur 2 tranches : $\frac{1}{2}$

Si nous avons la moitié du gateau divisé en 4 nous avons 2 sur 4 tranches : $\frac{2}{4}$

Si nous avons la moitié du gateau divisé en 2 nous avons 4 sur 8 tranches : $\frac{4}{8}$

Donc : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$

Ou encore : $\frac{1x2}{2x2} = \frac{2x2}{4x2} = \frac{4}{8}$

Ou encore : $\frac{4 \div 2}{8 \div 2} = \frac{2}{4}$

Multiplier le numérateur (ou diviser) et le dénominateur par un nombre ne change pas la valeur de la fraction.

Ou encore : $\frac{14}{21} = \frac{14 \div 7}{21 \div 7} = \frac{2}{3}$

Revenons à l'Addition et la Soustraction des fractions ayant des dénominateurs différents.

Technique : Transformer les fractions en fractions équivalentes (même valeur) ayant le même dénominateur.

Exemple :

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{2} = ?$$

Si nous multiplions le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 2 et de la deuxième fraction par 3 nous avons :

$$\frac{2x2}{3x2} + \frac{1x3}{2x3} = \frac{4}{6} + \frac{3}{6} = \frac{7}{6}$$

Réduire ou Simplifier les fractions

On peut réduire une fraction en divisant le numérateur et le dénominateur par le même nombre. Si nous possédons par tatonnement, nous pouvons essayer de les diviser par 2, par 3, par 5, par 10.

AIDE :

Tout nombre pair est divisible par 2

Si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 3, donc le nombre est divisible par 3.

Exemple : 81

La sommes des chiffres est 8 + 1 = 9

Puisque 9 est divisible par 3, donc 81 est aussi divisible par 3

Tout nombre qui se termine par 0 ou par 5 est divisible par 5

Tout nombre pair est divisible par 0 est divisible par 10

Exercices

Réduire les fractions suivantes :

1. $\frac{10}{22} = \frac{10 \div 2}{22 \div 2} = \frac{5}{11}$
2. $\frac{34}{84} = \frac{34 \div 2}{84 \div 2} = \frac{17}{42}$
3. $\frac{10}{70} = \frac{10 \div 10}{70 \div 10} = \frac{1}{7}$
4. $\frac{21}{33} = \frac{21 \div 3}{33 \div 3} = \frac{7}{11}$

Les fractions irréductibles

C'est une fraction qui est sous sa forme la plus réduite, c'est-à-dire dont le numérateur et le dénominateur sont les plus petits possibles parmi toutes les fractions qui lui sont égales. Exemples

1. $\frac{5}{11}$
2. $\frac{17}{42}$
3. $\frac{1}{7}$
4. $\frac{7}{11}$

Comparer les fractions

Toutes les fractions qui sont égales ont leur numérateur et dénominateur multiples de ceux de la fraction irréductible. Ainsi, toutes les fractions égales à 42/30 sont:

$$\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15} = \frac{28}{20} = \frac{35}{25} = \frac{42}{30} = \frac{49}{35} = \frac{56}{40} = \ldots$$

La liste des numérateurs ci-dessus décrit la table de 7 (7, 14, 21, 28,...), et la liste des dénominateurs décrit la table de 5 (5, 10, 15, 20,...).

Si vous n'avez pas compris, oubliez tout ça et concentretez-vous sur les méthodes suivantes.

Comment déterminer si 2 fractions sont égales ?

Méthode 1. On réduit les 2 fractions à leur forme irréductible. Si on trouve la même forme irréductible, c'est que les deux fractions sont égales. Un peu long.

Méthode 2. Puisqu'une fraction est une division du numérateur par le dénominateur ! On peut effectuer les divisions des 2 fractions à comparer pour voir si les résultats sont égaux, dans ce cas les fractions sont égales.

Méthode 3 (**la meilleure méthode des 3**). On écrit la première fraction egale à la seconde et on effectue un produit croisé ou produit en croix (numérateur de l'une multiplié par le dénominateur de l'autre). Si le côté gauche est égal au côté droit, donc les fractions sont égales.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \begin{array}{l} \to bc \\ \to ad \end{array}$$

Symboles de comparaison (valables pour tous les nombres) :

Symboles	**Signification**
<	Inférieur à
<=	Inférieur ou Egales à
>	Supérieur à
>=	Supérieur ou Egales à

Exemple :

$$\frac{2}{3}\ et \frac{3}{6}\ sont - elles\ égales?$$

$$\frac{2}{3} = \frac{3}{6}\ et\ nous\ multiplions\ 2\ par\ 6\ et\ 3\ par\ 3\ (produit\ croisé)$$

$$2 * 6 = 6 * 3$$

$12 < 18$ *puisque* 12 *est inférieur à* 18 *les fractions ne sont pas égales*

Additionner et Soustraire des fractions

Premier cas : Les dénominateurs ne sont pas les mêmes ?

C’est le cas le plus simple où nous conservons le dénominateur inchangé et additionnons les numérateurs :

$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \mathbf{\frac{5}{6}}$$

Le dénominateur 6 reste inchangé et nous additionnons 2 + 3 = **5**

Premier cas : Les dénominateurs ne sont pas les mêmes ?

Dans le cas où les dénominateurs ne sont pas égaux, on s'arrange pour qu'ils le deviennent en trouvant des fractions équivalentes.

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = ?$$

Le **premier exemple** est facile parce que toute fraction où le numérateur est la moitié (demie) du dénominateur est équivalente à $\mathbf{\frac{1}{2}}$ **:**

$$\frac{1}{2} + \frac{3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = \mathbf{1}$$

Le **deuxième exemple** nous donne l’occasion d’établir une règle générale.
RAPPEL : Ce manuel n’inventorie pas toutes les méthodes ou toutes les façons d’opérer sur les concepts étudiés mais plutôt essaie de rendre la vie de ceux qui n’aiment pas vraiment le math plus facile.

Méthode. Pour réécrire les fractions en les remplaçant par leurs équivalente afin qu’elles aient le même dénominateur :

1. Le nouveau dénominateur est le produit (multiplier) des 2 dénominateurs (4 * 7 = 28)
2. Chaque numérateur est remplacé en le multipliant par le dénominateur de l’autre. C’est comme le produit croisé en un sens.
    a. Premier numérateur : 1 * 7 = 7
    b. Second numérateur : 5 * 4 = 20
    c. Résultat :

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{7}{28} + \frac{20}{28} = \frac{27}{28}$$

On sait que quand on multiplie par un même nombre le dénominateur et le numérateur d'une fraction ça ne change pas sa valeur. Donc, ce qu’on a vraiment fait est :

a. Multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par 7
b. Multiplier le numérateur et le dénominateur de la deuxième fraction par 4

Autre exemple :

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} - \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Multiplier les Fractions

La mulitiplication des fractions est vraiment simple :

a. on mulitiplie les numérateurs entre eux pour trouver le numérateur du résultat
b. on mulitiplie les dénominateurs entre eux pour trouver le dénominateur du résultat

$$\frac{1}{2} * \frac{3}{6} = \frac{1 * 3}{2 * 6} = \frac{3}{12}$$

Et nous pouvons réduire le résultat puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 3 :

$$\frac{3}{12} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Diviser les Fractions

La Division de 2 fractions est réduite à un cas de mulitiplication de fractions en multipliant le premiere par la deuxième fraction renversée :

$$\frac{1}{2} \div \frac{3}{6} = \frac{1}{2} * \frac{6}{3} = \frac{6}{6} = \mathbf{1}$$

Multiplier une fraction avec un nombre

Multiplier une fraction avec un nombre revient à multiplier le nombre par le numérateur seulement :

$$3 * \frac{2}{8} = \frac{3 * 2}{8} = \frac{6}{8}$$

Et nous pouvons réduire le résultat puisque le numérateur et le dénominateur sont divisibles par 2 :

$$\frac{6}{8} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Equations impliquant des fractions

Cas Simple :

$$\frac{1}{4}x = \frac{5}{7}$$

Rappel : Solutionner une équation revient à isoler la variable.

Dans ce cas la variable est multiplier par $\frac{1}{4}$ donc nous devons faire l'inverse qui est de diviser par $\frac{1}{4}$. Nous avons avons que la division d'une fraction par une autre est de multiplier par l'inverse. Donc,

$$\frac{4}{1} * \frac{1}{4}x = \frac{5}{7} * \frac{4}{1}$$

Rappel : Une équation est une balance en équilibre. Ce que nous faisons d'un côté doit être fait de l'autre côté pour converser l'équilibre.

$$x = \frac{5}{7} * \frac{4}{1} = \mathbf{\frac{20}{7}}$$

Placer une fraction sur une droite (wikipédia.org)

Il y a plusieurs façons de situer un nombre sur une droite. J'ai l'habitude de leur donner des noms pour les reconnaître :

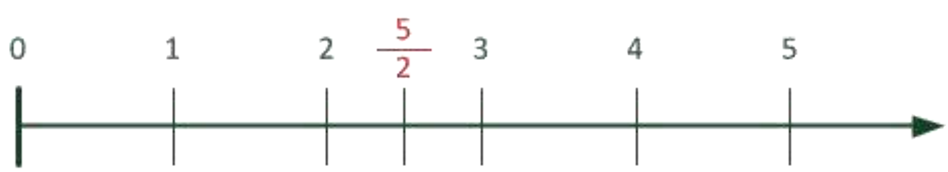
1. Le **calcul exact** de la division
2. Le **découpage** par le dénominateur
3. La **séparation** des éléments de la fraction

On vous demandera souvent de savoir placer une fraction sur une droite. Je vais donc vous présenter toutes ces techniques à connaître pour savoir placer une fraction ! Elles sont toutes valables, mais certaines seront plus faciles que d'autres à utiliser selon les cas.

Le calcul exact de la division

C'est la technique la plus facile, mais elle ne fonctionne bien que lorsque la division tombe juste. Si la fraction correspond à un nombre avec une infinité de chiffres après la virgule (comme 1,6666666666666666), il vaudra mieux utiliser une des deux autres techniques que je vous expliquerai plus loin.

Prenons une fraction simple comme $\frac{5}{2}$. On sait que $\frac{5}{2} = 5 \div 2 = 2,5$. On peut donc placer la fraction $\frac{5}{2}$à l'endroit où se trouve le nombre $2,5$:



Comme on a calculé la valeur exacte de la fraction, il a été facile de trouver où placer $\frac{5}{2}$.

Le nombre 2,5 se trouve en effet à mi- chemin entre 2 et 3.

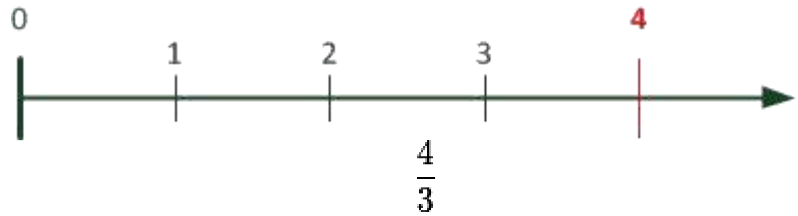
Le découpage par le dénominateur

La technique du calcul de la division qu'on vient de voir est probablement la plus facile. Mais parfois, la division ne tombe pas juste et il est préférable d'utiliser une autre technique. Celle que j'appelle du "découpage" n'est pas bien compliquée. Prenons une fraction qui ne correspond pas à un nombre exact : $\frac{4}{3}$ (qui correspond en fait au nombre 1,333333333333333 avec une infinité de 3). Voici les étapes que je vous propose de suivre pour trouver où placer la fraction :

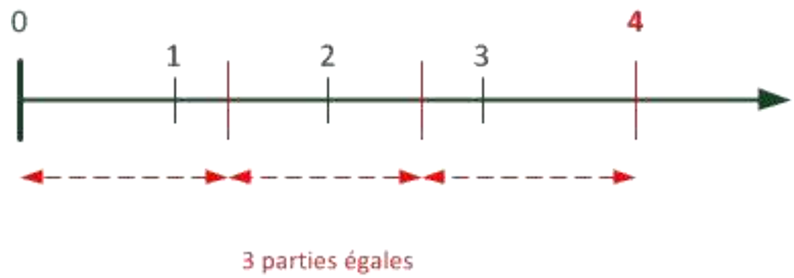
1. On repère le nombre du numérateur sur la droite (ici 4).
2. On le découpe en autant de parties que le dénominateur (ici 3).
3. On place la fraction au niveau de la première découpe (la plus à gauche sur la fraction).

Essayons d'appliquer cette technique pour placer la fraction $\frac{4}{3}$.

Etape 1 : placer le numérateur

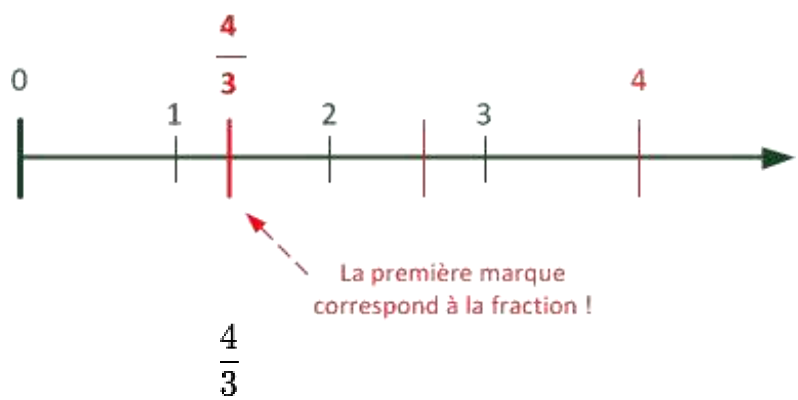


Etape 2 : découper en plusieurs parties



On découpe en autant de parties que le dénominateur de $\frac{4}{3}$ (ici 3) et on place des marqueurs

Etape 3 : on place la fraction sur la première marque de découpe !



La séparation des éléments de la fraction

Il existe une autre technique pour savoir où placer une fraction sur une droite. Reprenons notre fraction $\frac{4}{3}$ (que l'on peut prononcer "4 tiers") : c'est "4 fois un tiers". Notre fraction peut donc se découper comme ceci :

$$\frac{4}{3} = 4 \times \frac{1}{3}$$

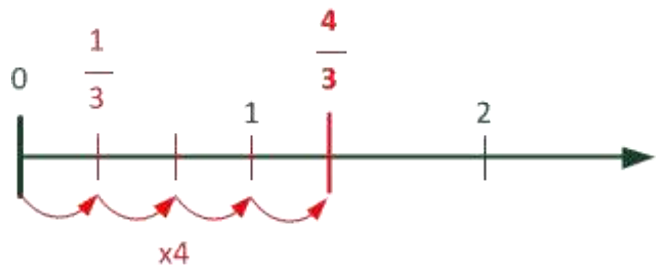
On a deuxéléments : une fraction plus simple ($\frac{1}{3}$) et un facteur multiplicateur (4). Sachant cela, on peut utiliser cette technique pour placer la fraction sur une droite :

1. Placer la fraction ($\frac{1}{3}$) sur la droite
2. Multiplier par 4 (faire "4 sauts de 1 tiers") pour trouver la position de $\frac{4}{3}$

Etape 1 : placer la fraction

$$\frac{1}{3}$$

Etape 2 : multiplier la fraction



On la multiplie par 4 pour trouver $\frac{4}{3}$

Les exercices de ce chapitre sont en ligne @ www.uespoir.org

Pourcentage

Le Pourcentage est un moyen de partager un gâteau, de l'argent ou autre chose en faisant 100 parties égales et chacun reçoit un nombre de ces parties ou morceaux.

Dans le cas de notre gâteau, nous faisons 100 tranches.

Si nous le partageons entre nous 2 de façon juste et équitable, chacun reçoit 50 morceaux sur les 100 et nous écrivons :

$$\frac{50}{100} \text{ ou encore en utilsant la notation des pourcentages : } \quad 50\%$$

Nous pouvons vite remarquer que chacun de nous recoit la moitié qui s'écrit :$\frac{1}{2}$

Donc $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ *qui est conforme à notre règle de réduction en divisant par* 50: $\frac{50 \div 50}{100 \div 50} = \frac{1}{2}$

Trouver le Pourcentage : Méthode 1

RAPPEL : Une fraction représente une division.

$$\frac{2}{10} \text{ veut dire que l'on doit diviser } 2 \text{ par } 10$$

Un pourcentage demande un dénominateur qui est égal à 100. Donc, selon les règles de fractions que nous avons déjà établis, nous pouvons multiplier le numérateur et le dénominateur par un nombre et la fraction ne changera pas.

Pour avoir un dénominateur égal à 100 nous multiplions le numérateur et le dénominateur par 10 :

$$\frac{2 * 10}{10 * 10} = \frac{20}{100} \text{ ou } 20\% \text{ (Lire 20 pour cent)}$$

Puisque $\frac{20}{100}$ *est une division, nous pouvons effectuer la divison et le résultat serait*: $0{,}20$

Dans ce cas, pour avoir la notation avec le signe % on multiplie 0,20 par 100 = 20 et l'on ajoute le signe % : 20%

Trouver le Pourcentage : Méthode 2

Nous pouvons juste procéder à diviser le numérateur par le dénominateur et ensuite multiplier le résultat par 100.

Exemple : La mère de Jacques et de Jean leur donne 25 gourdes à partager : 10 pour Jacques et 15 pour Jean. Quel pourcentage chacun a-t-il reçu ?

Jacques reçoit : $\frac{10}{25}$ *et divisons* 10 *par* 25 *qui donne* $0{,}40$ *et nous multiplions par* 100 : 40%

Jean reçoit : $\frac{15}{25}$ *et divisons* 15 *par* 25 *qui donne* $0{,}60$ *et nous multiplions par* 100 : 60%

Interprétation : Jacques reçoit 40 tranches des 100 et Jean en reçoit 60.

Le pourcentage est une façon de standardiser les fractions en considérant une dénominateur toujours égal à 100.

Solutionner des problèmes impliquant des fractions et des pourcentages

RAPPEL : Produit Croisé (Voir Méthode #3 de la Section Comment déterminer si 2 fractions égales ?)

Exemple 1: 5 pour cent de mon salaire mensuel est 1000 gourdes. Quel est mon salaire ?

Traduction : Salaire inconnu = x ; mot clé DE = Multiplier ; donc, $\frac{5x}{100} = 1000$

Solution : Si un nombre n'a pas de dénominateur, son dénominateur est 1

$$\frac{5x}{100} = \frac{1000}{1}$$

Produit croisé : 5x * 1 = 1000 * 100 ➔ 5x = 100000

Divisons par 5

$$\frac{5x}{5} = \frac{100000}{5}$$

$x = 20000$ Donc, mon salaire est 20000 gourdes par mois.

Exemple 2: Quel pourcentage de 60 est 12 ?

Traduction : Pourcentage inconnu = x ; mot clé DE = Multiplier ; donc, $\frac{x}{100} * 60 = 12$

Solution : Pour commencer, écrivons tout sous forme de fraction. Rappelons-nous que tout nombre a un dénominateur. S'il le dénominateur n'est pas visible, il est donc 1.

$$\frac{x}{100} * \frac{60}{1} = \frac{12}{1}$$

Multiplication des fractions (Multiplier les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux)

$\frac{60x}{100} = \frac{12}{1}$ et faisons le produit croisé : $60x * 1 = 12 * 100$

$60x = 1200$ ➔ $\frac{60x}{60} = \frac{1200}{60}$ ➔ $x = 20$

Les exercices de cette section sont en ligne @ www.uespoir.org

Révision et autres information utiles:

+	**L'addition** de deuxnombres **a** et **b** se note **a + b**.
–	**La soustraction** d'un nombre **a** à un nombre **b** se note **b - a**.

×	**La multiplication** de deuxnombres **a** et **b** peut se noter $a \times b$ ou $a.b$ ou simplement ab. Cette dernière notation étant utilisée quand au moins l'un des deuxnombres est désigné par une lettre plutôt que par son écriture en chiffres. Par exemple on notera 3πpour $3 \times \pi$, mais on évitera de noter 42 pour 4×2 pour éviter la confusion avec le nombre 42.
÷	**La division** d'un nombre **a** par un nombre **b** se note $a \div b$. Cette dernière notation est toutefois de moins en moins utilisée concrètement et on lui préfère une notation fractionnaire : **a/b** ou $\frac{a}{b}$. Si cette notation était à l'origine réservée aux nombres entiers, on peut l'utiliser en réalité pour désigner n'importe quelle division de nombres réels ou complexes.
∧	**La puissance** **a**ème d'un nombre peut se noter b^a, ou **b**^**a**
√	**La racine** **a**ème d'un nombre se note $\sqrt[a]{b}$. Dans le cas particulier **a > 0** on peut tout simplement noter $b^{1/a}$.
log	**Le logarithme** en base **n** d'un nombre **b** se note $\log_a(b)$. Le logarithme ayant pour base le nombre peut également se noter $\ln(b) = \log_e(b)$. Il peut arriver que le logarithme en base 10 soit noté simplement $\log(b)$sans indiquer la base. Mais attention cette dernière notation n'est pas universelle et il arrive aussi de trouver l'expression $\log(b)$utilisée pour désigner le logarithme en base .

Autres opérations

!	**La factorielle** de **n** s'écrit **n!** et désigne le produit de tous les nombres entiers entre 1 et n. *Par exemple*, **6!=1×2×3×4×5×6=720.**
$\binom{n}{k}$	Les **combinaisons** désignent le nombre de façons de choisir **k** objets parmi **n** . Elles sont définies par la formule :
$\mid \; \mid$	**La valeur absolue** d'un nombre réel **n** est notée **| n |**

Exposant (Puissane) et Racine : La puissance d'un nombre correspond au résultat de la multiplication de ce nombre par lui-même. Prenons un exemple : 2 puissance 5 (qui s'écrit 2^5) est égal à : 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 32. Le chiffre 2 est bien multiplié 5 fois. Dans notre cas, on appelle « exposant » le chiffre 5. On dit également 2 exposant 5 au lieu de 2 puissance 5.

Calculons 4 puissance 3 : 4^3 = 4 x 4 x 4 = 64

Cas particuliers :

L'exposant 2 est appelé « carré » : 4^2 se dit 4 « au carré »

L'exposant 3 est appelé « cube » : 4^3 se dit 4 « au cube »

Chapitre 5

Titre : Figures Géométrique – Périmètre – Surface/Aire – Volume

Objectif : Utiliser les figures géométriques qui font partie de la vie quotidienne.

La **géométrie** est la partie des mathématiques qui étudie les **figures du plan et de l'espace**. En mathématiques, un **plan** est un objet fondamental à deux dimensions. Intuitivement il peut être visualisé comme une feuille d'épaisseur nulle qui s'étend à l'infini. L'essentiel du travail fondamental en géométrie et en trigonométrie s'effectue en deux dimensions donc dans un plan. En mathématiques, un **espace** est un ensemble muni de structures supplémentaires remarquables, permettant d'y définir des objets analogues à ceux de la géométrie usuelle. Les éléments peuvent être appelés suivant le contexte points, vecteurs, fonctions... On parle encore d'espace pour désigner une certaine distance (l'espace entre deux personnes), une certaine surface (ce parc naturel couvre un espace considérable) ou un certain volume (ce placard occupe un grand espace). **Wikipédia**

Les objets étudiés en géométrie sont les points, les segments, les droites, les demi-droites, avec leurs propriétés d'incidence (la règle), ainsi que les cercles (le compas).

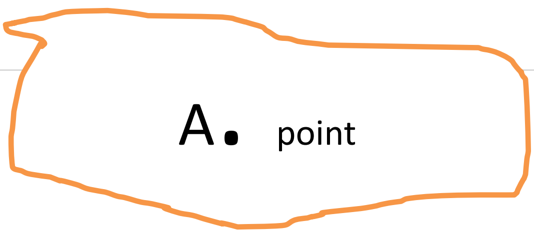
La géométrie nous aide à construire toute sorte d'objets allant à la boîte qui contient nos aliments à la maison où nous habitons.

La géométrie se constuit elle-même de la même façon qu'elle nous permet de construire les objets de la vie dans le sens que nous commençons avec une notion appelée point et nous défissons tout autre objet à partir de ce point.

Tout objet (chose) de la vie a un nom pour nous permettre de l'identifier uniquement. Il est de même en géométrie.

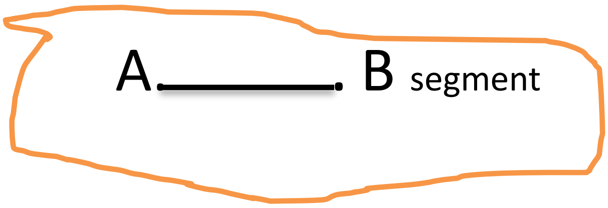
Pour nommer un point nous utilisons une lettre majuscule par convention. Pour un segment de droite ou une droite ou une demie droite, nous utilisons 2 lettres majuscules ou une lettre minuscule.

Point : Un lieu bien défini dans l'espace. Exemple : le lieu où vous êtes maintenant lisant ce texte. Un point est un repère, un endroit précis où se situe un objet (une chose).



Segment : Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques distincts. Donc, un segment est une succession de points qui sont tellement proches (collés) l'un de l'autre que nous ne voyons pas de trous entre eux : **<..>**

Dans l'exemple précédent, nous devons ajouter d'autres points dans les trous afin de créer une continuité comme l'exemple de segment suivant où nous magnifions le premier et le dernier point en vue de marquer le début et la fin du segment. **AB**



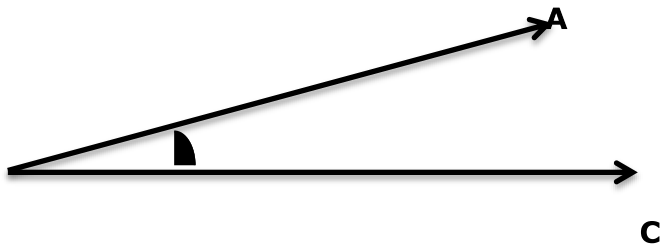
Droite : Un segment de droite prolongé indéfiniment en une ligne droite.

Les flêches dans les extrémités veulent dire que la droite continue indéfiniment. Nous ne pouvons pas tracer la droite indéfiniment, donc les flêches illustrent le concept pour nous.

Demi Droite : Un segment de droite prolongé un seul côté indéfiniment en une ligne droite.

Angle : Espace formé par 2 demi-droites qui s'interceptent. **On utilise 3 lettres majuscules pour le nommer : angle ABC** (B représente l'interception)

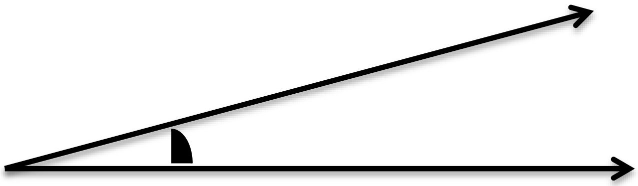
Notation : $\angle$ ABC ou encore B $\angle$



Les unités utilisée pour mesurer les angles sont en général : le degré et le radian. Au fur et à mesure que l'angle grandit le nombre de degrés augmente.

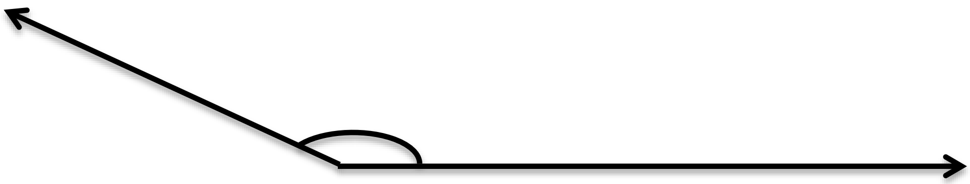
Il y a plusieurs types d'angles selon sa mesure :

1. Angle **aigu : inférieur à 90°**



2. Angle **droit : 90°**

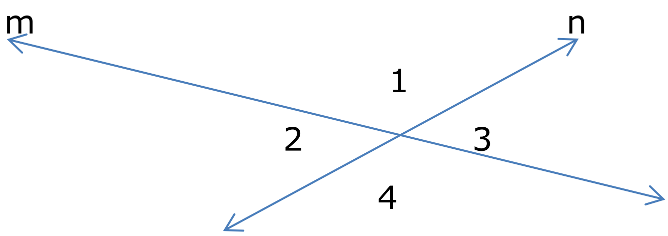
3. Angle **obtus : entre 90 et 180°**



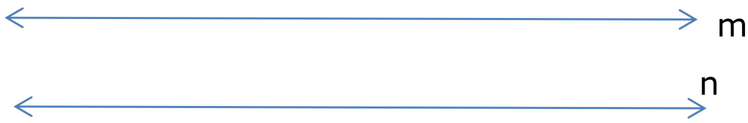
La surface qui contient les objets géométriques est un : PLAN.

Quelques Propriétés des droites et des angles : Important !!!

1. Quand 2 droites interceptent, ils forment des angles opposés qui sont égaux.

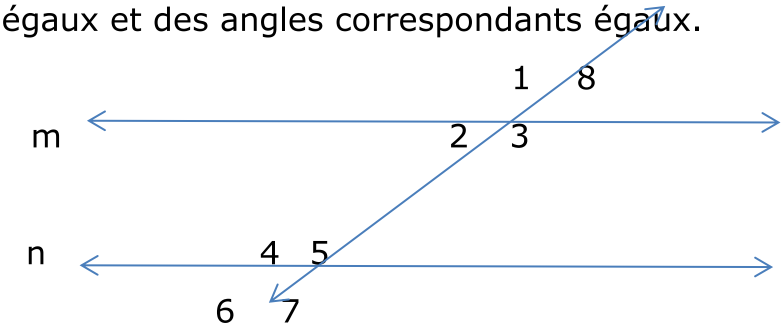


2. Si 2 droites ne s'interceptent (coupent) jamais, ils sont parallèles.



Ils sont notés : m || n (m est parallèle à n)

3. 2 droites parallèles (m || n) et coupés par un transversal (t) forment des angles qui sont : alternes-internes égaux, alternes-externes égaux et des angles correspondants égaux.



∠ 2 et 5 sont alternes-internes, donc sont égaux

∠ 3 et 4 sont alternes-internes, donc sont égaux

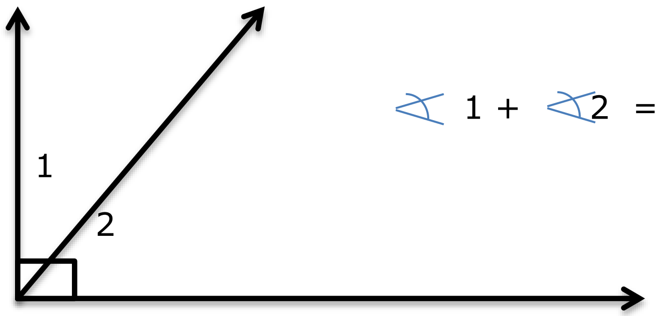
∠ 1 et 7 sont alternes-externes, donc sont égaux

∠ 6 et 8 sont alternes-externes, donc sont égaux

∠ 1 et 4 sont alternes-internes, donc sont égaux

∠ 5 et 8 sont alternes-internes, donc sont égaux etc….

4. Angles complémentaires : Leur somme est égale à 90°

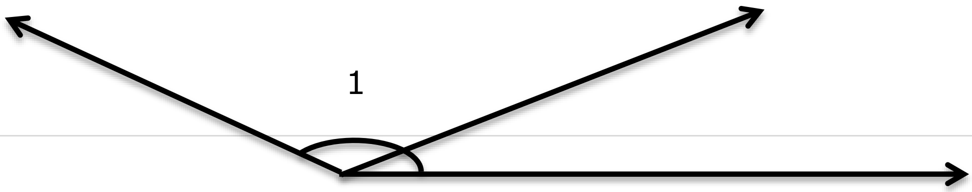


∢ 1 + ∢2 = 90°

Si l'angle est 1 est égal à 30° et l'angle 2 est inconnu ou x nous pouvons écrire :

$x + 30 = 90$ et solutionner pour x.

5. Angles supplémentaires: Leur somme est égale à 180°



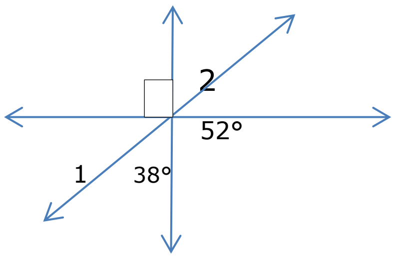
2

Si l'angle est 1 est égal à 145° et l'angle 2 est inconnu ou x nous pouvons écrire :

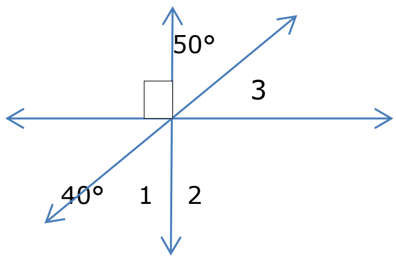
$x + 145 = 180$ et solutionner pour x.

Exercices : Trouver les angles inconnus !

1.



2.



Mesure d'une droite (ou demi droite ou segment) :

La mesure ou unité utilisée dépend de ce que nous allons mesurer. Si nous allons mesurer la longueur d'une table nous pouvons utilisé le pied ou le centimètre mais s'il s'agit de la longueur d'une rue, mètre ou même kilomètre serait plus approprié.

Donc, pour commencer nous n'allons pas spécifier quelle unité est utilisée. Nous disons seulement unité.

Savez-vous que les unités sont des inventions (ou plutôt conventions) des hommes afin de pouvoir parler le même langage en matière de mesure. C'est pourquoi les unités changent d'un pays à l'autre. Un pied par exemple, est la mesure typique du soulier d'un homme. En général, les pieds des hommes (mâle) sont 1 pied de mesure que l'on subdivise en 12 parties égales appelées pouces. 1 pied = 12 pouces.

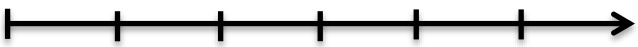
Le système international d'unités (www.wikipedia.org)

Le **Système international d'unités** (abrégé en **SI**), inspiré du **système métique**[1], est le [système d'unités] le plus largement employé au monde. Il s'agit d'un système décimal (on passe d'une unité à ses multiples ou sous-multiples à l'aide de puissances de 10) sauf pour la mesure du temps et d'angle. C'est la Conférence générale des poids et mesures, rassemblant des délégués des États membres de la Convention du Mètre, qui décide de son évolution, tous les quatre ans, à Paris[2]. L'abréviation de « Système International » est SI, quelle que soit la langue utilisée[3]

Le Système international compte sept unités de base, censées quantifier des grandeurs physiques indépendantes possédant chacune un symbole :

Grandeur	Symbole de la grandeur	Symbole de la dimension	Unité SI	Symbole associé à l'unité
Masse	*m*	M	kilogramme	kg
Temps	*t*	T	seconde	s
Longueur	*l, x, r…*	L	mètre	m
Température	*T*	Θ	kelvin	K
Intensité électrique	*I, i*	I	ampère	A
Quantité de matière	*n*	N	mole	mol
Intensité lumineuse	I_v	J	candela	cd

Nous découpons la droite selon la mesure que nous utilisons :



Cette demi-droite mesure 6 unités (l'unité sera dans la pratique : centimètre ou mètre ou kilomètre ou pouce ou pied, etc.)

Maintenant, nous allons utiliser les éléments de base dans la pratique.

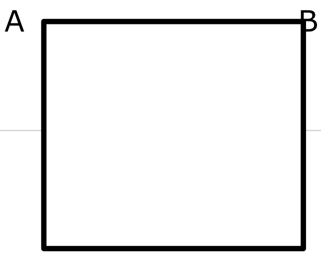
Il y a dans la vie **courante 2 grandes catégories de formes d'objets** : forme **régulière** et forme **irrégulière**.

Example de formes régulières :

Carré : Les 4 cotés sont de sont égaux et forment des angles droits. On le nomme en utilisant les 4 points de 4 quatres interceptions : ABCD

Propriétés :

AB || CD
AC || ED
AB = CD = AC = ED et 4 angles égaux = 90°



C D

Définition d’un carré :

Un carré est un quadrilatère ayant quatre angles droits et dont les quatre côtés ont la même longueur.

Définition d’un quadrilatère :

Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

Propriétés d’un carré :

- - Les diagonales d’un carré sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu,
- - Les côtés opposés d’un carré sont parallèles deux à deux.

Le rectangle est un cas particulier du parallélogramme dont ɑ = 90° et b= h. Si de plus a = b, on a affaire à un carré.
Le carré est un losange car il a ses quatre côtés égaux.
Rectangle : Les 4 cotés sont de sont égaux 2 à 2 et forment des angles droits. On le nomme en utilisant les 4 points de 4 quatres interceptions : ABCD

Propriétés :

AB || CD
AC || ED

AB = CD
AC = ED et 4 angles égaux = 90°

Définition d’un rectangle :

Un rectangle est un quadrilatère ayant quatre angles droits.

Définition d’un quadrilatère :

Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

Polygone

Un polygone (du grec polus, nombreux, et gônia, angle) est une figure géométrique plane fermée formée de 3 ou plus de segments de droites.

Définition d’un triangle :

Un triangle est une figure géométrique ayant trois côtés.

Définition d’un triangle isocèle :

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés (au moins) ont la même longueur, et dont deux des angles sont égaux.

Définition d’un triangle équilatéral :

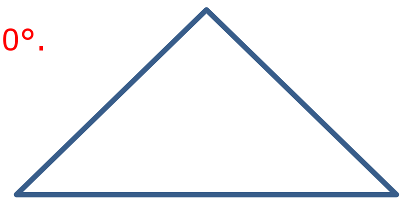
Un triangle équilatéral est un triangle dont les trois côtés sont de même longueur et dont chacun des angles fait 60°.

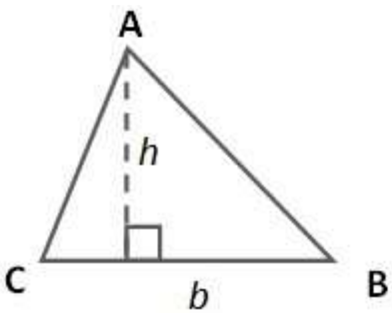
Propriété d’un triangle :

La somme des angles d’un triangle est égale à 180°.

3 Segments : Triangle

La somme des angles d’un triangle est égale à 180°.





CB = base = b
h = hauteur

L’aire A d’un triangle (ou surface d’un triangle) est égale à la moitié du produit de la longueur de sa base b et de sa hauteur h :

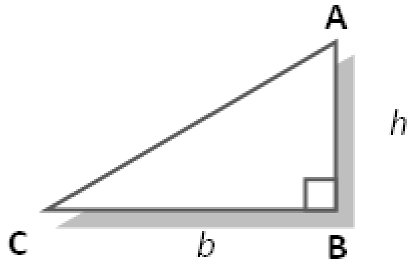
$$\textbf{Aire du triangle} = \frac{b \times h}{2}$$

Exemple de calcul d'une aire d'un triangle :

ABC est un triangle de base b = 3 cm et de hauteur h = 5 cm

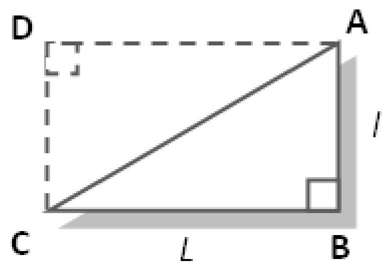
Aire A du triangle ABC = (b x h)/2 = (3 x 5)/2 = 15/2 = 7,5 cm²

Cas du triangle rectangle : calcul de l'aire d'un triangle rectangle



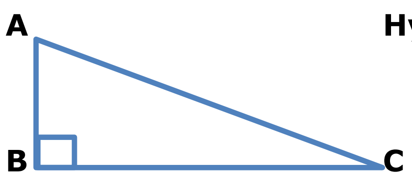
AB = hauteur = h
BC = base = b

Info : le triangle rectangle est en fait la moitié d'un rectangle coupé par sa diagonale (ci-dessous AD, la diagonale du rectangle ABCD). Pour calculer l'aire d'un triangle rectangle, on se basera donc sur la formule du calcul de l'aire d'un rectangle que l'on divisera par 2 :



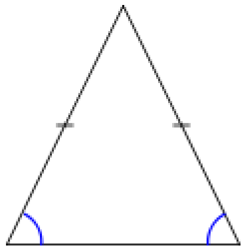
Aire du triangle rectangle = $\frac{bxh}{2}$ ou $\frac{Lxl}{2}$

Triangle Rectangle : 1 Angle Droit. Le côté opposé à l'angle droit est appelé hypothénuse.

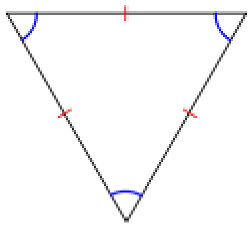


Hypothénuse : AC

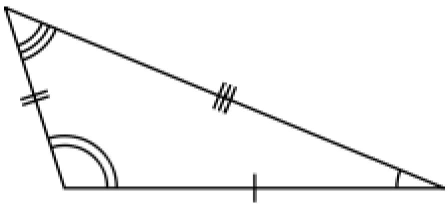
Triangle Iscocèle : 2 angles égaux et 2 côtés égaux.



Triangle Equilatéral : 3 angles égaux et 3 côtés égaux.



Triangle Scalène: Un triangle qui n'est ni isocèle (ce qui exclut également le cas équilatéral) ni plat est dit quelconque ou **scalène**.



Un triangle scalène n'a aucun élement de symétrie : Pas d'angles ou de côtés égaux.

4 Segments : Quadrilatéral (Quadri = 4 – Latérale = Côté)

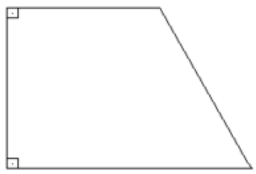
Exemples de Quadrilatérales

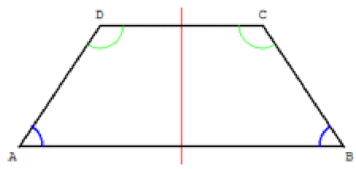
1. **Trapèze** : Un trapèze est un quadrilatère, possédant deux côtés opposés parallèles. Ces deux côtés parallèles sont appelés bases.

Trapèze quelconque

Trapèze Rectangle : 2 Angles Droits

Trapèze Isocèle : Angles égaux 2 à 2





Définition d'un losange :

Un losange est un quadrilatère dont les quatre côtés ont la même longueur.

Définition d’un quadrilatère :

Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

Propriétés d’un losange :

- - Les diagonales du losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu,
- - Le losange est un parallélogramme,
- - Les côtés opposés du losange sont parallèles deux à deux,
- - Le losange est un trapèze.

Définition d’un trapèze :

Un trapèze est un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles.

Définition d’un quadrilatère :

Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

Propriétés d’un trapèze :

- - Un trapèze a deux de ses côtés parallèles./li>

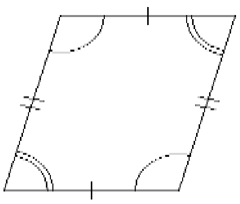
  #### Définition d’un trapèze isocèle :

  Un trapèze est isocèle lorsque ses 2 côtés non parallèles ont la même longueur.

  #### Définition d’un trapèze rectangle :

  Un trapèze est rectangle lorsqu’il a 1 angle droit.

2. **Parallélogramme :** Côtés parallèles 2 à 2 et angles opposés égaux.



Définition d’un parallélogramme :

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sonr parallèles deux à deux.

Définition d’un quadrilatère :

Un quadrilatère est un polygone ayant quatre côtés.

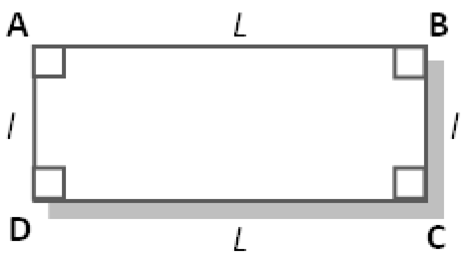
Propriétés du parallélogramme :

- \- Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu,
- \- Les côtés opposés du parallélogramme ont la même longueur,
- \- Les angles opposés d'un parallélogramme sont égaux.

a. **Rectangle (Recto = Droit)** : Un parallélogramme don les **Angles** sont droits et les côtés opposés sont égaux. Donc, un rectangle est un quadrilatère qui possède quatre angles droits.

AB = CD

AC = BD



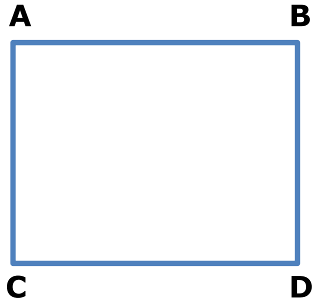
AB = DC = Grande longueur = L
AD = BC = Petite longueur = l

Propriétés d'un rectangle :

- \- Les diagonales d'un rectangle sont de même longueur et se coupent en leur milieu,
- \- Les côtés opposés d'un rectangle sont parallèles deux à deux.

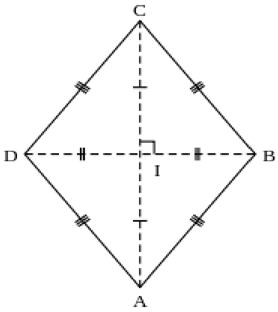
Le rectangle est un cas particulier du parallélogramme dont α = 90° et b= h. Si de plus a = b, on a affaire à un carré, mais c'est aussi un losange.

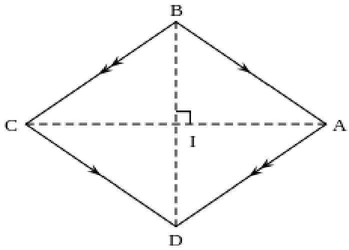
b. **Un Carré est un rectangle dont les 4 côtés sont égaux.**



AB = CD = AC = BD

c. **Losange (appelée aussi rhombe) :** 4 Côtés égaux et parallèle 2 à 2





[5 Segments : Pentagone (Penta = 5 – Gone = Côté)]

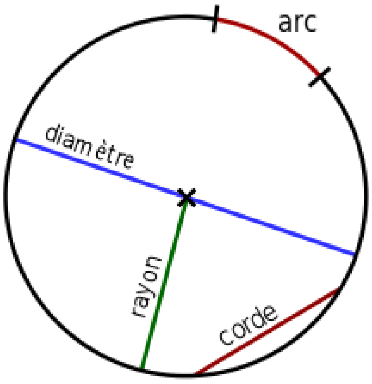
En géométrie, un pentagone est un polygone à cinq sommets, donc cinq côtés et cinq diagonales.

Pour votre information / référence

Polygones	
Entre 1 et 10 côtés	Hénagone (1) · Digone (2) · Triangle (3) · Quadrilatère (4) · Pentagone (5) · Hexagone (6) · Heptagone (7) · Octogone (8) · Ennéagone (9) · Décagone (10)
Entre 11 et 20 côtés	Hendécagone (11) · Dodécagone (12) · Tridécagone (13) · Tétradécagone (14) · Pentadécagone (15) · Hexadécagone (16) · Heptadécagone (17) · Octadécagone (18) · Ennéadécagone (19) · Icosagone (20)
Entre 21 et 30 côtés	Henicosagone (21) · Doicosagone (22) · Triaicosagone (23) · Tétraicosagone (24) · Pentaicosagone (25) · Hexaicosagone (26) · Heptaicosagone (27) · Octaicosagone (28) · Ennéaicosagone (29) · Triacontagone (30)
Entre 31 et 40 côtés	Hentriacontagone (31) · Dotriacontagone (32) · Tritriacontagone (33) · Tétratriacontagone (34) · Pentatriacontagone (35) · Hexatriacontagone (36) · Heptatriacontagone (37) · Octatriacontagone (38) · Ennéatriacontagone (39) · Tétracontagone (40)
Autres	Pentacontagone (50) · Hexacontagone (60) · Heptacontagone (70) · Octacontagone (80) · Ennéacontagone (90) · Hectogone (100) · Dihectogone (200) · 257-gone (en) · Trihectogone (300) · Tétrahectogone (400) · Pentahectogone (500) · Hexahectogone (600) · Heptahectogone (700) · Octahectogone (800) · Ennéahectogone (900) · Chiliogone (1 000) · Myriagone (10 000) · 65 537-gone (en)

6 Rond : Cercle

Cercle : En géométrie euclidienne, un cercle est une courbe plane fermée constituée des points situés à égale distance d'un point nommé centre. La valeur de cette distance est appelée rayon du cercle.



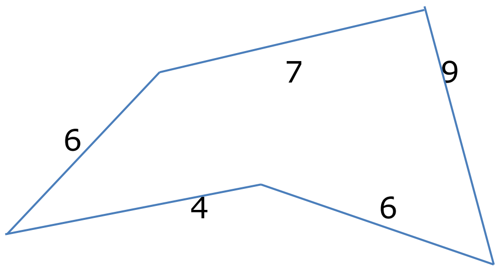
Définition d'un cercle :

Un cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan situé à la distance du point O. Cette distance s'appelle le rayon du cercle. Un cercle est donc défini par son centre O et son rayon R.

Périmètre

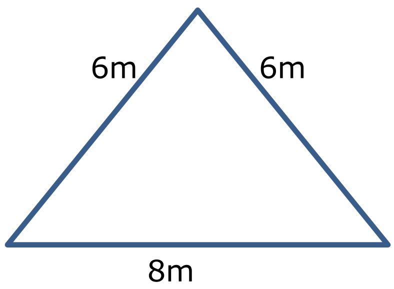
Supposons que nous avons un terrain que nous voulons protéger par une clôture métallique, nous devons savoir la longueur pour pouvoir acheter une quantité appropriée de fil de fer. La longueur de tous les côtés réunis est appelé Périmètre.

Si le terrain est la figure suivante :



Le Périmètre est la somme de la longueur des côtés : P = 6 + 4 + 7 + 6 + 9 = 32 unités de mesure

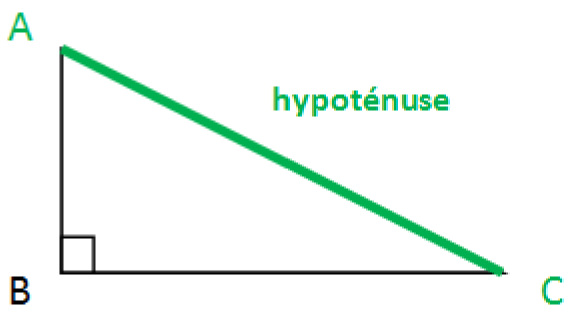
Triangle



P = 6 + 6 + 8 = 20m

Le célèbre mathématicien **Pytagore** nous aide à découvrir une relation importante entre les côtés d'un triangle rectangle.

$$\mathbf{AC^2 = AB^2 + BC^2}$$

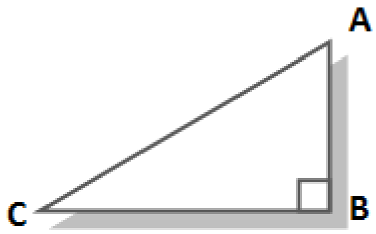


Théoreme de Pytagore : Carré de l'hypothénuse est égal au carré des 2 autres côtés.

Si un triangle est rectangle, alors le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des côtés de l'angle droit.

L'hypoténuse est le côté le plus long dans un triangle rectangle.

Si ABC est un triangle rectangle en B comme ci-dessous, alors $AC^2 = BA^2 + BC^2$



Théorème réciproque (ou réciproque de Pythagore) :

Si dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

Ce théorème permet de prouver qu'un triangle est rectangle ou non.

Exemple d'application du théorème de Pythagore :

Soit ABC un triangle rectangle en B avec AB = 3 cm et BC = 4 cm.

Calculons AC :
D'après le théorème de Pythagore, si ABC est un triangle rectangle en B, alors :
$AC^2 = BA^2 + BC^2$
$AC^2 = 3^2 + 4^2$
$AC^2 = 9 + 16$
$AC^2 = 25$
$AC = \sqrt{25}$
AC = 5 cm

Définition de l'hypoténuse

Soit ABC un triangle rectangle en B, l'hypoténuse est le côté opposé à l'angle droit (il n'est pas adjacent à l'angle droit). C'est le plus grand des côtés du triangle rectangle.

$$\textbf{Hypoténuse = AC =} \sqrt{AB^2 + BC^2}$$

Quadrilatérale

Le périmètre d'un quadrilatéral est la somme des 4 côtés.

Rectangle : P = 2L + 2l (les 2 Longueurs + les 2 largeurs)

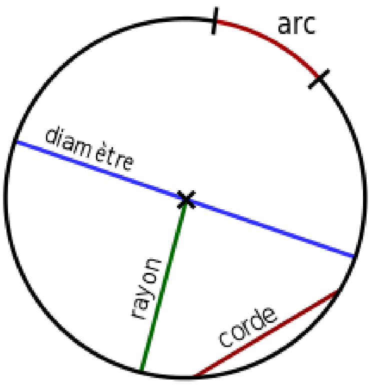
Carré : P = 4c (c étant la longueur d'un côté, le périmètre est c + c + c + c = 4c

Cercle

Le périmètre d'un cercle est proportionnel à son diamètre D.
P = πD (Périmètre = Pi * Diamètre)

Le périmètre d'un cercle est appelé circonférence C.

L'usage du compas ayant favorisé l'utilisation du rayon R du cercle plutôt que de son diamètre D, cette formule devient : **P = 2 π R** puisque le diamètre D est 2 fois le rayon.



Exercices :

1. Ecrire une équation et solutionner pour l'inconnu x : Les 2 angles connus d'un triangle est respectivement 30° et 130°. Calculer la valeur du troisieme angle x.

   Solution : La somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180°.

   Donc, x + 30° + 130° = 180°

   x + 160° = 180° ➔ x = 180° -160° ➔ **x = 20°**

2. Les 2 côtés d'un triangle rectangle sont respectivement a = 4m et b =3m. Quelle est la longueur de l'hypothénuse c et le périmètre du triangle ?

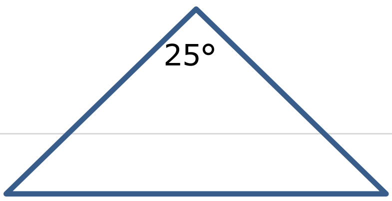
   Pithagore : $c^2 = a^2 + b^2$ ➔ $c^2 = 4^2 + 3^2$ ➔ $c^2 = 4*4 + 3*3$

   $c^2 = 16 + 9$ ➔ $c^2 = 25$

   c = 5 puisque 5 est le nombre qui, quan élevé au carré nous donne 25.

   Périmètre du triangle : **P = 4 + 3 + 5**

3. Trouver x :



2x 3x

Solution : $3x + 2x + 25 = 180$ ➔ $5x + 25 = 180$ ➔ $5x = 180 - 25$

$5x = 155$ ➔ $x = 155/5$ ➔ $\mathbf{x = 31°}$

4.

5.

6.

7.

8. Les 2 angles égaux d'un triangle isocèle ont une valeur de 25°, calculer le troisième.

9. Les 2 angles aigus d'un triangle rectangle sont égaux. Quelle est leur valeur en degré ?

10.

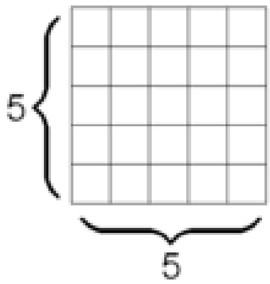
Surface / Aire

Supposons maintenant que nous voulons planter des arbres ou planter quelque chose d'autre dans le jardin. Alors, nous avons maintenant affaire avec la surface ou encore la superficie du jardin pour savoir exactement comment planifier, une plante par m^2, etc.

Oh oh, stop… par quoi ? Mètre carré ? Pourquoi carré ?

Rappelons-nous que les unités de mesure sont des conventions des hommes pour améliorer notre language. Pour parler le même langage, nous devons utiliser des symboles qui ont des significations spéciales pour nous.

Si notre jardin est une surface régulière comme un carré, donc nous pouvons le découper et petits carrés correspondant à notre unité de mesure : pied, centimètre, mètre, etc.



La figure précédente nous montre un jardin carré parce quel la longueur est égale à la largeur, 5 unités de mesure. Nous pouvons tracer les unités et les compter pour savoir combien de plantes nous allons planter. Nous avons un total de 10 carrés ou 10 unités de mesure. Si l'unité de mesure est le mètre nous avons donc 10 mètres carrés ou 10 m^2. Le carré veut dire que nous avons utilisé 2 mesures : La longueur et la largeur, 10 mm.

Cela nous amène à utiliser une notion déjà vue : Puissance.

En algèbre, une puissance d'un nombre est le résultat de la multiplication répétée de ce nombre avec lui-même.

$x^0 = 1$

$x^1 = x$

$x^2 = x*x$

$x^3 = x*x*x$

$x^4 = x*x*x*x*$

$x^5 = x*x*x*x*x$

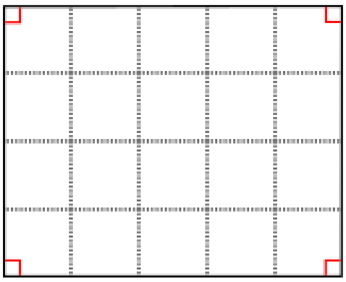
.
.
.

$X^n = x*x* x*x* x*x* … … x*x$ (n fois)

C’est pour cela que 10mm = 10m*m = $10m^2$

Dans les codes informatiques nous écrivons x^2 au de X^2
x^0 = x^0 x^1 = x^1 x^2 = x^2 x^3 = x^3

Surface d’un Rectangle : A



Nous faisons le même découpage que nous avons fait pour le carré et nous comptons 20 petits carrés. Nous remarquons donc que la surface d’un rectangle (ou carré) est égale au produit (mulitiplication) de la longueur et de la largeur.

A = L*l

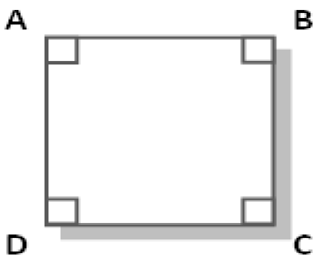
Dans ce cas la longueur est L = 5 et la largeur est l = 4.

A = L*l (Remplaçons les inconnues par leurs valeurs) ➔ A = 5 * 4 = 20 petits carrés.

Si l’unité en question est mètre, donc A = 5m*4m

En mulipliant les nombres en eux et les lettres entre elles nous avons : **A = $20m^2$**

Autre exemple :



Longueur AB = un côté = c
AB = BC = CD = DA

L’aire A d’un carré (ou surface d’un carré) est égale au produit de la longueur du côté c du carré par elle-même, soit :

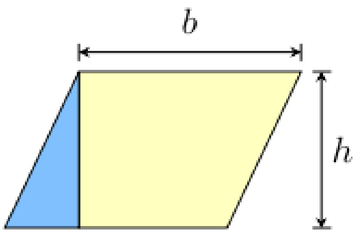
Aire A = c x c = c²

ABCD est donc un carré et si le côté c = 2 cm
Aire A du carré ABCD = c x c = 2 x 2 = 4 cm²

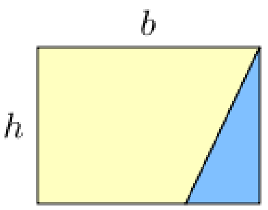
Surface d’un parallélogramme

Puisqu’un parallélogramme n’est pas une figure régulière nous pouvons la découper en figures régulières (triangles et rectangles)

Le triangle en bleu peut être découpé et déplacé pour le mettre à droite. Ainsi, le parallélogramme devient un rectangle et nous pouvons appliquer la formule du rectanble : A = L * l.

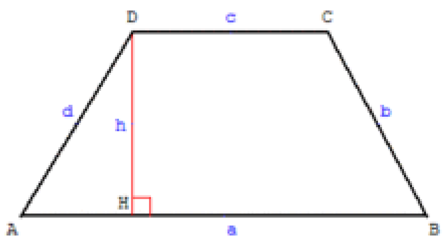


La base b devient la longueur du rectangle et la hauteur devient la largeur. **A = b * h.**



Surface d’un trapèze : Puisqu’un trapèze n’est pas une figure régulière nous pouvons le découper comme le parallélogramme en figures régulières (triangles et rectangles). La longueur du rectangle dans ce cas est la moyenne des 2 base (B + b)/2

$$\boldsymbol{A} = \frac{(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B})*\boldsymbol{h}}{\mathbf{2}}$$

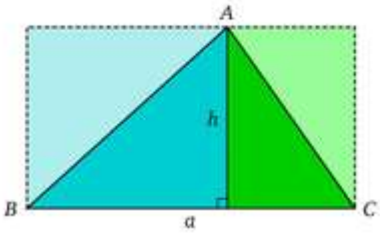


Surface d’un triangle

Remarquons que le triangle est toujours la moitié d’un rectangle. Donc la surface est la moitié de la surface d’un rectangle.

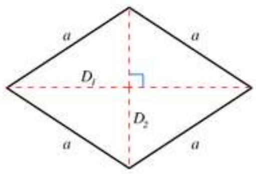
La base a est la longueur du rectangle imaginaire et la hauteur h est sa largeur. Donc,

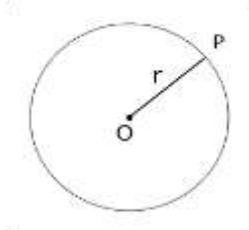
$$A = \frac{a * h}{2}$$



Surface d'un triangle : Le produit des 2 diagonales divisié par 2.

$A = \dfrac{d \times D}{2}$ où *d* représente la longueur de la petite diagonale (D_1) et *D* représente la longueur de la grande diagonale (D_2) du losange.



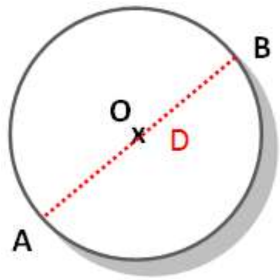


Surface d'un triangle : A = πr^2 (Pi * Rayon au carré).

Calcul du diamètre d'un cercle

Il existe 3 manières de calculer le diamètre d'un cercle en fonction de la donnée en notre possession :

1. **Je connais le rayon**
2. **Je connais la longueur du cercle**
3. **Je connais l'aire du cercle**



Soit un cercle de centre O et de diamètre AB
AB = le diamètre du cercle = D
OA = OB = le rayon du cercle = r

1. Je connais le rayon

D = 2 x r
Prenons un exemple. Soit r = 3 cm
D = 2 x r = 2 x 3 = **6 cm**

2. Je connais la longueur du cercle

Longueur du cercle = 12 cm
Prenons la formule du périmètre du cercle : P = 2 x π x r avec P = 12 cm et π =

pi = 3,14

P = 2 x π x r
P = π x D (car D = 2 x r)
D = P / π
D = 12 / π = 12 / 3,14 = **3,82 cm** (arrondi à 0,01 près)

Avec π arrondi à 3,14

Nota : la longueur du cercle est également appelée périmètre d’un cercle ou circonférence d’un cercle.

3. Je connais l’aire du cercle (ou du disque)

Aire du cercle = 8 cm²
Prenons la formule de l’aire du cercle : A = π x r² avec A = 8 cm²

A = π x r²
A = π x (D/2)² (car D = 2 x r soit r = D / 2)
A = π x D²/2²
A = π x D²/4
D² = A x 4 / π

$$D = \sqrt{\frac{A \times 4}{\pi}}$$

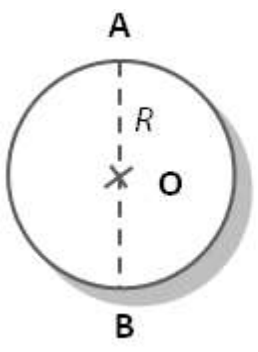
$$D = \sqrt{\frac{8 \times 4}{3,14}}$$

$$D = \sqrt{10,19}$$

D = **3,19 cm** (arrondi à 0,01 près)

Avec π arrondi à 3,14

Calcul de l'aire d'un cercle (ou d'un disque)



Rayon = AO = OB = R
Diamètre = AB = 2 R

L’Aire A d’un cercle (ou la surface d’un cercle) est égale au produit de π (nombre pi) par la longueur du rayon R du cercle au carré :

Aire d'un cercle (ou d'un disque) = π x R²
avec π (nombre pi) environ égal à 3,14

Exemple de calcul d’une aire d’un cercle / d’un disque :

Prenons un cercle de centre O et de rayon R. Sachant que la longueur de R = 3 cm, son aire sera égale à :
Aire A = $\pi \times R^2 = 3{,}14 \times 3^2 = 3{,}14 \times 9 = 28{,}26$ cm²

NB: Avec π arrondi à 3,14.

Définition d’un triangle isocèle :

Un triangle isocèle est un triangle dont deux côtés (au moins) ont la même longueur, et dont deux des angles sont égaux.

Définition d’un disque :

Un disque de centre O et de rayon R est l’ensemble des points du cercle et ceux intérieurs au cercle.

NB : on peut dire qu’un cercle équivaut au simple périmètre d’un disque.

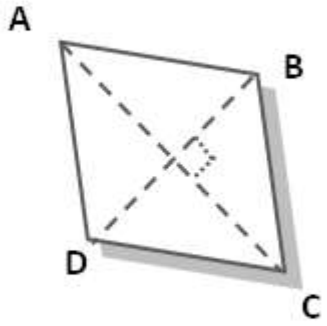
Définition d’un cercle / d’un disque circonscrit dans un triangle :

Un cercle circonscrit est le cercle passant par les trois sommets d’un triangle. Son centre est situé à l’intersection des médiatrices.

Propriétés d’un cercle / d’un disque :

- - Deux points situés sur un même cercle sont situés à égale distance du centre de ce cercle.
- - Le centre d'un cercle est le milieu de tous ses diamètres. Je peux alors appliquer les mêmes propriétés que pour le milieu d'un segment
- - Si la droite T est tangente du cercle en un point F, alors (T) est perpendiculaire au rayon OF (ou diamètre EF)
- - et la propriété inverse : Si une droite est perpendiculaire à un rayon du cercle en un point du cercle, alors cette droite est appelée tangente de ce cercle.

Calcul de l'aire d'un losange



<="" td="">

Grande diagonale D = AC
Petite diagonale d = AB
Côté = AB = BC = CD = DA = c

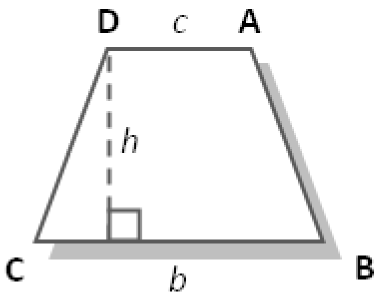
L'aire A d'un losange (ou surface d'un losange) est égale au produit de 1/2 par la longueur de la grande diagonale D par la longueur de la petite diagonale d, soit :

$$\textbf{Aire A} = \frac{D \times d}{2}$$

Exemple de calcul d'une aire d'un losange :

ABCD est un losange. Sa grande diagonale D mesure 6 cm et sa petite diagonale d mesure 2 cm. Aire A du losange ABCD = (D x d) / 2 = (6 x 2) / 2 = 12 / 2 = 6 cm²

Calcul de l'aire d'un trapèze



DA = Petite base = c
CB = Grande base = b
Hauteur = h

- L'aire A d'un trapèze (ou surface d'un trapèze) est égale à :

$$\textbf{Aire A} = \frac{(b+c) x h}{2}$$

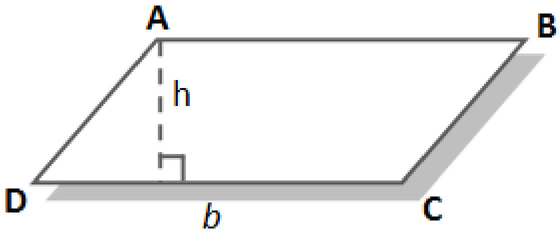
avec b = grande base
c = petite base h = hauteur du trapèze

Exemple de calcul d'une aire de trapèze :

ABCD est un trapèze. Sa grande base b mesure 6 cm, sa petite diagonale c fait 4 cm et sa hauteur h a une longueur de 3 cm.

Aire A du trapèze ABCD = ((b + c) x h) / 2 = ((6 + 4) x 3) / 2 = (10 x 3) / 2 = 30 / 2 = 15 cm²

Calcul de l'aire d'un parallélogramme



DC = Base = b
AH = Hauteur = h

<="" td="">

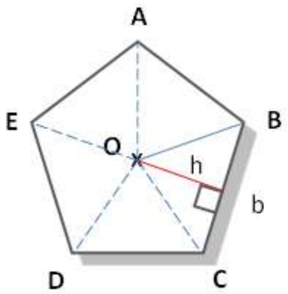
L'aire A d'un parallélogramme (ou surface d'un parallélogramme) est égale au produit de la longueur de la base b par la hauteur h, soit :

Aire A = b x h

Exemple de calcul d'une aire d'un parallélogramme :

ABCD est un parallélogramme de base b = 5 cm et de hauteur h = 2 cm
Aire A du parallélogramme ABCD = b x h = 5 x 2 = 10 cm²

Calcul de l'aire d'un pentagone régulier



O = le centre du pentagone régulier ABCDE
h = la hauteur du triangle CÔB
b = longueur de chaque côté du polygone régulier ABCDE

L'aire du polygone régulier est égale à la somme de l'air des 5 triangles isométriques qui le composent :

Aire du pentagone régulier = $5 \times \left(\frac{b \times h}{2}\right)$

Définition d'un pentagone régulier

Un pentagone régulier est une figure géométrique dont les 5 côtés sont de même longueur.
Le pentagone régulier fait donc partie des polygones (figures à plusieurs côtés) réguliers.

NOTE IMPORTANTE : On notera que cette formule peut s'utiliser pour le calcul de n'importe quel polygone régulier. Il suffira de remplacer dans la formule 5 par le nombre de côté du polygone.

Exemple : pour un hexagone régulier, on indiquera 6 en nombre de côtés, pour un heptagone régulier on indiquera 7, etc.

Définition de l'apothème :

Apothème : Un apothème désigne la ligne la médiatrice du côté d'un polygone régulier, qui est aussi le rayon du cercle inscrit au polygone.

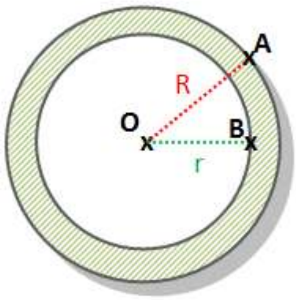
Exemple de calcul d'une aire d'un pentagone régulier :

ABCDE est un pentagone régulier dont la longueur de chaque côté est de 6 cm.

Soit b, la longueur de l'apothème égale à 4,9 cm.

Aire du pentagone régulier ABCDE = $5 \times (6 \times 4{,}9) / 2 = 73{,}5$ cm²

Calcul de l'aire d'une couronne (ou d'un anneau)



Soit OA le cercle de centre O et de rayon OA = R (grand cercle),
soit OB le cercle de centre O et de rayon OB = r (petit cercle)

L'aire A de la couronne (ou de l'anneau) hachurée est égale à : **Aire de la couronne** $\mathbf{A = \pi \times (R^2 - r^2)}$

Exemple de calcul de l'aire d'une couronne (ou d'un anneau) :

Calculons l'aire d'une couronne avec un rayon de 3 cm pour le petit cercle et de 5 cm pour le grand cercle.

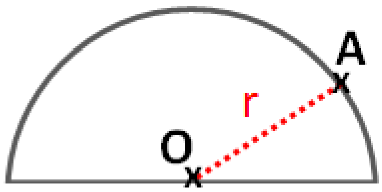
Dans notre cas : OA = R = 5 cm et OB = r = 3 cm

$A = \pi \times (R^2 - r^2)$ $\quad$ $A = \pi \times (5^2 - 3^2)$
$A = \pi \times (25 - 9)$ $\quad$ $A = \pi \times 16 = 3{,}14 \times 16 =$ **50,24 m²**
Avec π = pi = 3,14

Définition d’une couronne (ou d'un anneau) :

Une couronne correspond à l'aire comprise entre deux cercles concentriques.
Deux cercles sont dits concentriques s'ils ont le même centre.

Calcul de l'aire d'un demi-cercle (ou d'un demi-disque)



Prenons un demi-cercle de centre O et de rayon OA =r
L’aire du demi-cercle correspond tout simplement à la moitié de l’aire d’un cercle.

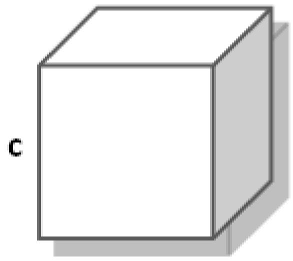
Petit rappel : l’aire d’un cercle est également à π x r²

Aire A = ½ x π x r²

Faisons ensemble un exemple de calcul :
Soit un demi-cercle de centre O et de rayon OA = r = 5 cm

Calculons l’aire A du demi-cercle.
A = ½ x π x r²
A = ½ x π x 5²
A = ½ x 3,14 x 25 (avec π = pi = 3,14)
A = 39,25 m²

Calcul du volume d'un cube (ou d’un parallélépipède cubique)

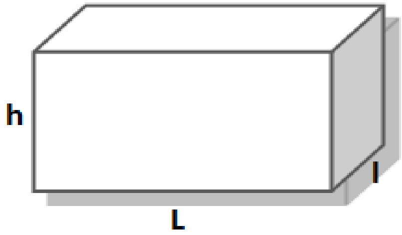


Longueur de l’arête **c** est identitique aux autres arêtes du cube

NOTE : Le cube est l’équivalent d’un carré dans l’espace (en 3 dimensions). Le carré quant à lui est en 2 dimensions.

Le volume V d’un cube est égal à : Volume **V = c x c x c = c^3**

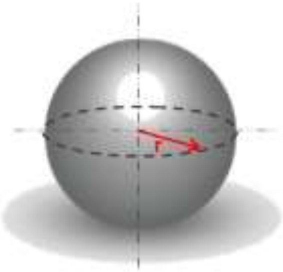
Calcul du volume d'un parallélépipède rectangle



L = grande langueur de la base
l = petite longueur de la base
h = hauteur

Le volume V d'un parallélépipède rectangle est égal au produit de la longueur de sa base L par la largeur de sa base l par sa hauteur h, soit : **Volume V = L x l x h**

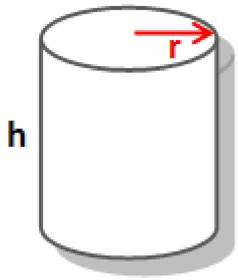
Calcul du volume d'une sphère



Le volume d'une sphère est égal au produit de 4/3 par п (nombre pi environ égal à 3,14) par son rayon au cube :

$$\textbf{Volume d'une sphère} = \frac{4 \pi r^3}{3}$$

Calcul du volume d'un cylindre

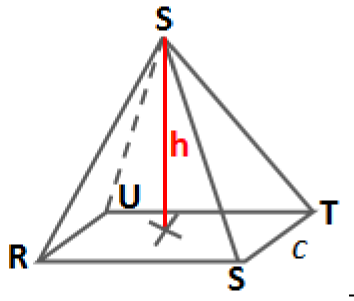


Rayon = r
Hauteur = h

Le volume V d'un cylindre est égal au produit de п (nombre Pi arrondi à 3,14) par le rayon au carré et par la hauteur :

Volume du cylindre V = п x r² x h

Calcul du volume d'une pyramide à base carrée



c = longueur du côté de la base

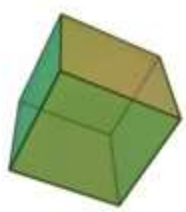
Le volume V d'une pyramide à base carrée est le produit de 1/3 par l'aire de la base par la hauteur h de la base, avec h perpendiculaire au plan qui contient la base.

Volume de la pyramide base carrée = $\frac{A \times h}{3}$

avec A = aire de la base = c x c = c^2

Les solides de Platon

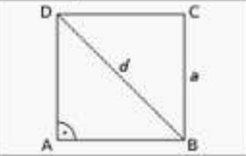
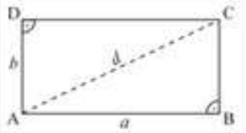
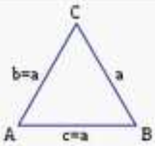
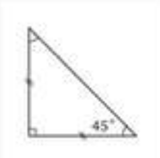
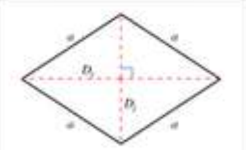
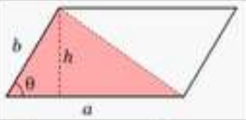
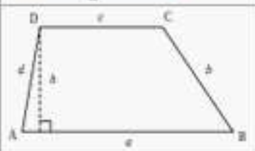
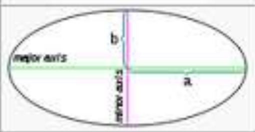
Ce sont les cinq seuls polyèdres réguliers convexes. Leurs volumes sont donnés par les formules suivantes :

polyèdre	**volume**	
Tétraèdre régulier	$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$	
Cube	a^3	

Octaèdre régulier $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$

Dodécaèdre régulier $\frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$

Icosaèdre régulier $\frac{5\varphi^2}{6}a^3$ où φ est le nombre d'or

Nom	Représentation	Périmètre p	Aire intérieure $\mathcal{A}$	Relations supplémentaires
Carré		$4a$	a^2	$d = a\sqrt{2}$
Rectangle		$2(a+b)$	$a \times b$	$d = \sqrt{a^2+b^2}$
Triangle		$a+b+c$	$\frac{1}{2}b \times h$	$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ où $s = \frac{1}{2}p$ (formule de Héron)
Triangle équilatéral		$3a$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$	$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Triangle isocèle rectangle		$(2+\sqrt{2})c$	$\frac{1}{2}c^2$	$d = c\sqrt{2}$
Losange		$4a$	$\frac{1}{2}D_1 \times D_2$	$a = \frac{1}{2}\sqrt{{D_1}^2 + {D_2}^2}$
Parallélogramme		$2(a+b)$	$a \times h$	
Trapèze		$a+b+c+d$	$\frac{1}{2}(a+c) \times h$	
Disque		$2\pi r$	πr^2	
Ellipse		(non algébrique)	πab	(voir ci-dessous)