Algèbre Universitaire I

Université Espoir

Chapitre1

Section 1.1 : **Ensemble**

A.

Un ensemble est une collection d'éléments.

– Exemples : {0,1}, {rouge, noir}, {0,1,2,3,...}

– Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.

– On note $x \in E$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

Les *éléments* peuvent être de n'importe quelle nature : nombres, points géométriques, droites, fonctions, autres ensembles... On donne donc volontiers des exemples d'ensembles en dehors du monde mathématique. Par exemple : *lundi* est un élément de l'ensemble des *jours de la semaine* ; une *bibliothèque* est un ensemble de livres, etc.

Un même objet peut être élément de plusieurs ensembles : *4* est un élément de l'ensemble des nombres entiers, ainsi que de l'ensemble des *nombres pairs* (forcément entiers). Ces deux derniers ensembles sont *infinis*, ils ont une infinité d'éléments.

L'appartenance d'un élément, noté par exemple x, à un ensemble, noté par exemple A, s'écrit : $x \in A$.

Cet énoncé peut se lire :

- « x **appartient à** A »,
- « x **est élément de** A »,
- « x **est dans** A »,
- « A **a pour élément** x »,

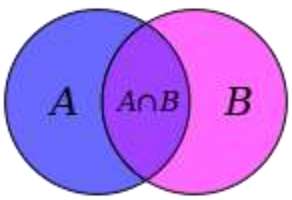
- « A **possède** x »,
- ou parfois « A **contient** x »

Comme souvent pour les relations, on barre ce symbole pour indiquer sa négation, la non-appartenance d'un objet à un ensemble :

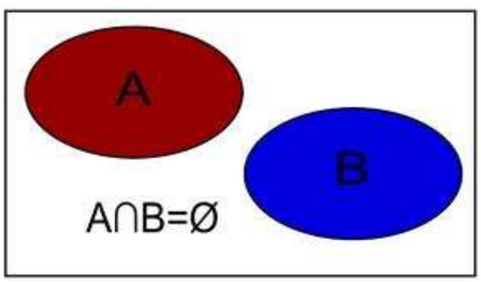
« $z \notin A$ » signifie « z n'appartient pas à A ».

B.

Dans la théorie des ensembles, l'**intersection** est une opération ensembliste qui porte le même nom que son résultat, à savoir l'ensemble des éléments appartenant à la fois aux deux opérandes : l'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble, noté $A \cap B$, qui contient tous les éléments appartenant à la fois à A et à B, et seulement ceux-là.



A et B sont disjoints si et seulement si $A \cap B$ est l'ensemble vide $\emptyset$.

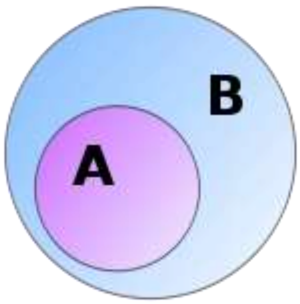


C.

En mathématiques, l'**inclusion** est une relation d'ordre entre ensembles. On dit qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B si tous les éléments de A sont aussi éléments de B. On dit dans ce cas que A est un **sous-ensemble** ou une **partie** de B, ou encore que B est **sur-ensemble** de A.

Cette relation n'est pas symétrique *a priori*, car il peut y avoir des éléments du deuxième ensemble qui n'appartiennent pas au premier. Plus précisément, il y a inclusion dans les deux sens entre deux ensembles si et seulement si ces deux ensembles sont égaux.

L'inclusion se note majoritairement[1] avec le symbole « ⊂ ».

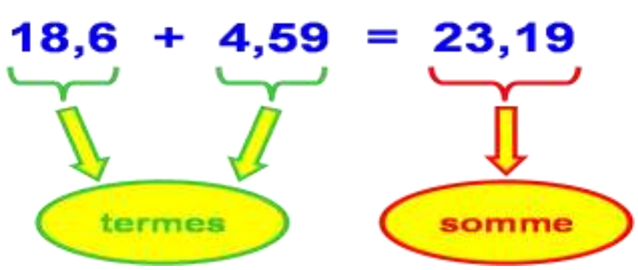


Section 1.2 **Les Opérations**

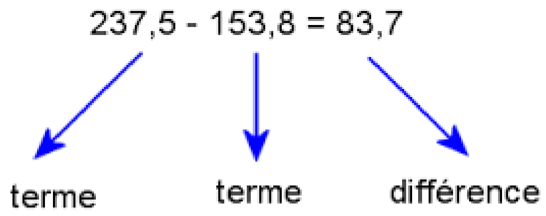
1) **Somme (termes)**
2) **Différence (termes)**
3) **Produit (facteurs)**
4) **Quotient (dividende et diviseur)**

Définitions

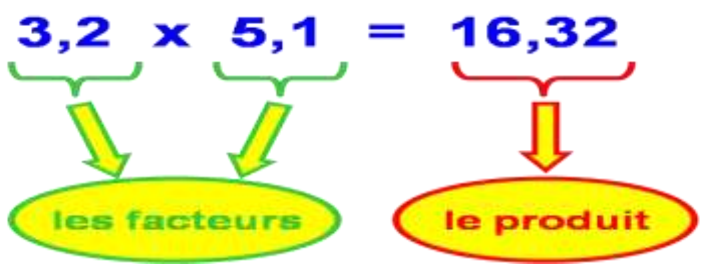
Somme : Résultat d'une addition.



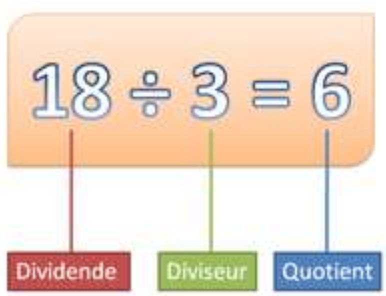
Différence : Résultat de la soustraction de deux nombres, deux fonctions, etc.



Produit : Résultat de la multiplication de deux nombres, deux fonctions, etc.



Quotient : Résultat d'une division.



1.3 Nombre premier et Nombre Composé

A.

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement
deux facteurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même).

- Ainsi, 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur entier positif ;
- 0 non plus car il est divisible par tous les entiers positifs.
- Les nombres 0 et 1 ne sont ni premiers ni composés.
- Exemples de nombres premiers :

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23…

B.

Un **nombre composé** est un entier naturel qui possède plus de 2 facteurs :

C'est-à-dire ce nombre a lui-même et 1 comme facteurs et au moins un autre nombre.

Exemples de nombres composés :

10 est un nombre composé : Facteurs → 1, 2, 5, 10

52 est un nombre composé : Facteurs →1, 2, 3, 14, 26, 52

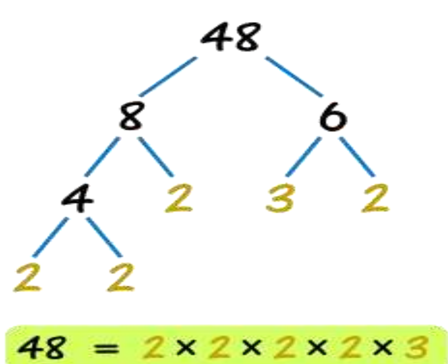
C.

Décompositions d'un nombre en facteurs premiers

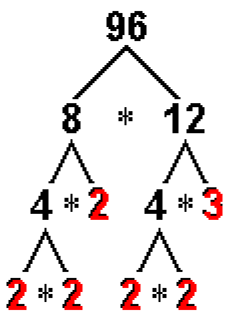
Le nombre est décomposé en facteurs. Par la suite, tous les facteurs qui suivent sont décomposés jusqu'à ce qu'ils aboutissent à des nombres premiers.

<u>Exemples</u>

1)

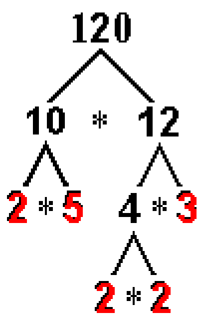


2)



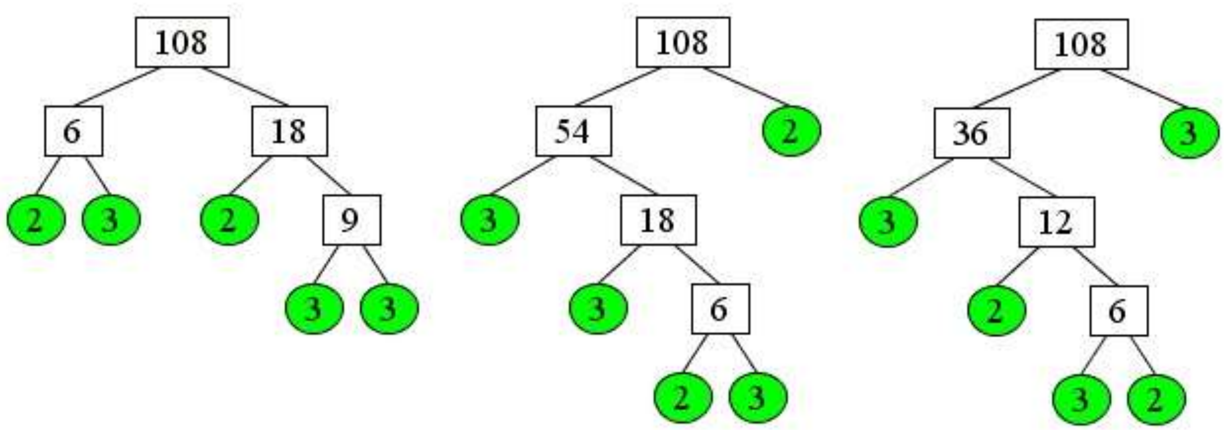
2*2*2*2*2*3=96

3)



2*2*2*3*5=120

4) Plusieurs façons de décomposer un nombre en facteurs premiers.



Algèbre Universitaire I

1.4 **Ensembles de nombres**

Les **ensembles** permettent de représenter des groupes de nombres. Ils sont utiles pour donner les solutions d'une équation, d'une inéquation ou encore pour écrire l'ensemble de définition d'une fonction. Ils sont également utiles en probabilités.

Il existe des ensembles prédéfinis introduits au fil du temps par les mathématiciens pour classer les nombres.

A.

Les nombres entiers naturels

Les **nombres entiers naturels** sont les nombres entiers positifs.
L'ensemble de tous les nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$0 \in \mathbb{N}$	$-3 \notin \mathbb{N}$
$\frac{8}{2} \in \mathbb{N}$	$4{,}7 \notin \mathbb{N}$
	$\pi \notin \mathbb{N}$
	$\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$

B.

Les **nombres relatifs** sont les nombres qui peuvent s'écrire sans virgule.
L'ensemble qui contient tous les nombres entiers est noté $\mathbb{Z}$.

$-4 \in \mathbb{Z}$	$21{,}2 \notin \mathbb{Z}$
$\frac{33}{3} \in \mathbb{Z}$	$-\frac{5}{2} \notin \mathbb{Z}$
	$\frac{4}{9} \notin \mathbb{Z}$
	$\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

C.

Les nombres décimaux

Les **nombres décimaux** sont les nombres qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule (les nombres qui ne se terminent pas ne sont pas des nombres décimaux).
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

$7{,}5 \in \mathbb{D}$	$\pi \notin \mathbb{D}$
$5 \in \mathbb{D}$	$\frac{2}{7} \notin \mathbb{D}$
$-\frac{3}{2} \in \mathbb{D}$	$\sqrt{3} \notin \mathbb{D}$

D.

Les nombres rationnels

Les **nombres rationnels** sont les nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$6 \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$
$0{,}23 \in \mathbb{Q}$	$\pi \notin \mathbb{Q}$
$-\frac{1}{9} \in \mathbb{Q}$	

E.

Un **nombre irrationnel** est un nombre qui ne peut pas s'écrire sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$, où *a* et *b* sont deux entiers relatifs (avec *b* non nul).

L'ensemble des nombres réels est noté *I*.

Exemples:

1) Les racines carrées qui ne sont pas des carrés parfaits :$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$…

2) π (pi) = 3.14159265358979323846264 3…

Note

Un carré parfait est un nombre dont la racine carrée est un nombre entier tel que : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100…

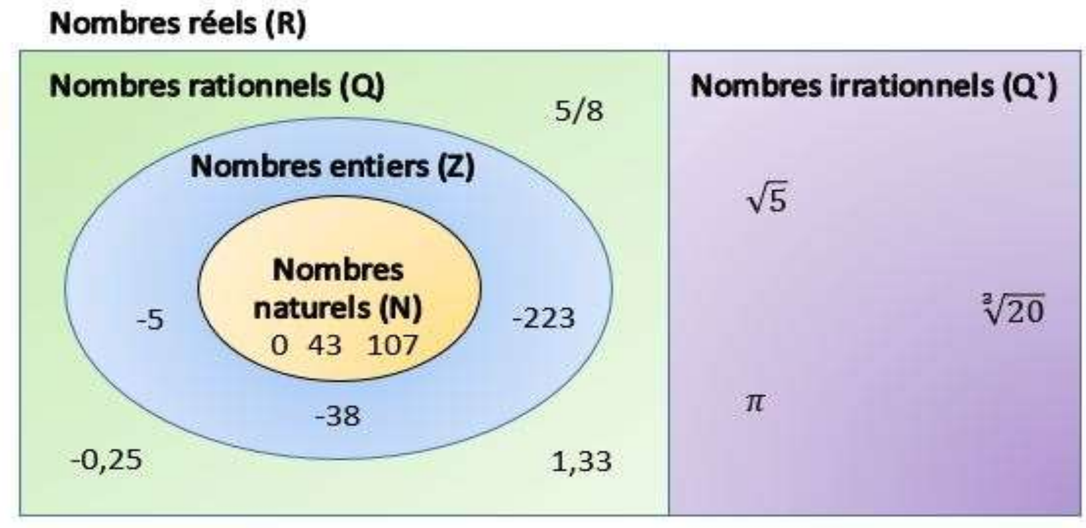
F.

Les nombres réels

Les **nombres réels** regroupent tous les autres ensembles (mentionnés auparavant).L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.
On note aussi $\mathbb{R}^+$ l'ensemble des nombres réels positifs, $\mathbb{R}^-$ l'ensemble des nombres réels négatifs et$\mathbb{R}^*$ l'ensemble des nombres réels à l'exception de zéro.

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $-7 \in \mathbb{R}^-$ $\frac{1}{3} \in \mathbb{R}^*$	$0 \notin \mathbb{R}^*$ $-2 \notin \mathbb{R}^+$

Il existe des nombres qui ne sont pas réels, ce sont les nombres complexes. Nous en parlerons une prochaine fois. Vous êtes invités à les rechercher si vous désirez.



1.5 Inégalités

A.

En mathématiques, une **inégalité** est un énoncé permettant de comparer la taille, ou l'ordre de deux objets (dans le cas où ils seraient égaux, on a une égalité)

- La notation $a < b$ signifie que a est **strictement inférieur** à b
- La notation $a > b$ signifie que a est **strictement supérieur** à b
- La notation $a \neq b$ signifie que a et b ne sont pas égaux (on dira plus souvent qu'ils sont **différents**), mais ne fournit aucune information sur l'ordre de a par rapport à b.

Dans chacun des énoncés précédents, a ne peut pas être égal à b.

On peut aussi trouver des inégalités qui ne sont pas strictes, on parle alors d'*inégalité large* ou d'*inégalité au sens large* :

- La notation $a \leq b$ signifie que a est **inférieur** (ou **inférieur ou égal**) à b
- La notation $a \geq b$ signifie que a est **supérieur** (ou **supérieur ou égal**) à b[1]

B.

Intervalles et Inégalités

Les intervalles réels sont des parties de l'ensemble des réels **nombres réels R**.
Leur représentation sur la droite numérique est un segment ou une droite dont les

extrémités peuvent être exclues. C'est d'ailleurs ce qui fait qu'un intervalle est ouvert ou fermé.

Les différents types d'intervalles.

Dans le tableau ci-dessous, a et b sont deux réels tels que a □ b.

Notation	**Représentation sur la droite réelle**	Ensemble des réels x tels que	**Appellation**
[a ; b]		$a \leq x \leq b$	Intervalle fermé borné
[a ; b[		$a \leq x < b$	Intervalle borné semi-fermé en a et semi-ouvert en b (ou semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite)
]a ; b]		$a < x \leq b$	Intervalle borné semi-ouvert en a et semi-fermé en b (ou semi-ouvert à gauche et semi-fermé à droite)
]a ; b[		$a < x < b$	Intervalle ouvert borné.
]- ∞ ; b]		$x \leq b$	Intervalle non borné fermé en b (u fermé à droite)
]- ∞ ; b[		$x < b$	Intervalle non borné ouvert en b (ou ouvert à droite)
[a ; + ∞ [		$a \geq x$	Intervalle non borné fermé en a (ou fermé à gauche)
]a ; + ∞ [		$a > x$	Intervalle non borné ouvert en a (ou ouvert à

			gauche)

1) Quelques remarques sur ce tableau :

- La notation {x tels que a < x < b} désigne l'ensemble des réels x tels que a < x < b (sous-entendu qui sont strictement plus grand que a et strictement inférieur à b).

- Le fait de dire qu'un intervalle est par exemple ouvert en b signifie que le réel b ne fait pas partie de celui-ci. Par contre, s'il y avait été fermé alors il en aurait fait partie.

- Les deux réels qui délimitent un intervalle sont appelés bornes de l'intervalle.

- La notation + ∞ se lit "plus l'infini". Contrairement à ce que l'on pourrait croire, +∞ n'est pas un nombre. C'est juste un symbole pour désigner le "bout positif et infiniment grand" de l'ensemble des réels. C'est une sorte d'horizon...

- La notation - ∞se lit elle "moins l'infini".

2) Les crochets.

- Un crochet est ouvert lorsqu'il fait le dos à sa borne. Il indique que celle-ci ne fait pas partie de l'intervalle.

La borne 2 ne fait pas partie de l'intervalle] 2 ; 5].

La borne 7 ne fait pas partie de l'intervalle] 1 ; 7 [.

Aux infinis (en - ∞ et + ∞), le crochet est toujours ouvert.

- Un crochet fermé est un crochet qui s'ouvre sur sa borne. Il indique qu'elle fait partie de l'intervalle.

Un crochet qui n'est pas ouvert est nécessairement fermé.

Dans la notation d'intervalle comme dans la représentation sur la droite réelle, un crochet ouvrant indique que la borne ne fait pas partie de l'intervalle alors qu'un crochet fermant l'y inclut.

1.6 Opérations des nombres réels

Algèbre Universitaire I

A.

Inverse d'un Nombre

L'opposé de 3 est -3 parce que $3 + -3 = 0$

L'opposé de -6 est 6 parce que $-6 + 6 = 0$

Théorème :

1) $-(-x) = x$

L'opposé de - x est x.

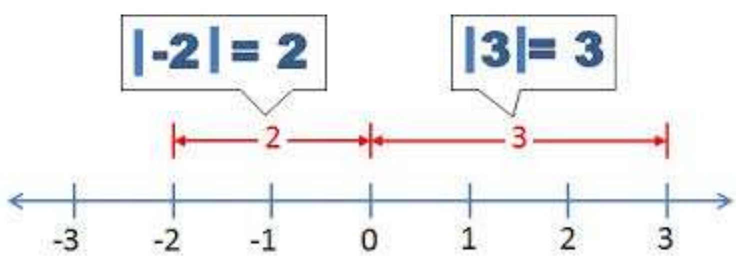
2) $-1(x) = -x$

Le produit de -1 et x est égal à l'opposé de x.

B.

Valeur Absolue

La valeur absolue d'un nombre est la distance d'un nombre de zéro sur la droite numérique.



Exemples

|-1|=+1

|+5, 3|=+5, 3

|-2011|= 2011

La valeur absolue peut être définie ainsi :

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

Si x est positif, la valeur absolue de x reste telle quelle.

Si x est négatif, la valeur absolue de x est son opposé.

C.

Addition des Nombres Relatifs

Stratégie de Paiement des Dettes

Mon Argent (Ce qui m'appartient)	Ma Dette (Ce que je dois)
Nombre Positif	Nombre Négatif
Addition	Soustraction

1) - 8 + 4 → Je dois 8 et j'ai 4. Après avoir payé, je dois encore 4.

Alors, -8 + 4 = -4

2) 9 + -3 → J'ai 9 et je dois -3. Il me reste 6.

Alors, 9 + -3 = 6

3) -5 + -9 → Je dois 5 et je dois 9. En tout, je dois 14.

Alors, -5 + - 9 = - 14

Algèbre Universitaire I

<u>Note</u>

Quand il y a plus de 2 nombres dans l'expression, on calcule par groupes de 2 :

-7 + 3 + -2 + 5 = (-7 + 3) + (-2 + 5) = - 4 + 3 = -1

D.

<u>Soustraction des Nombres Relatifs</u>

On peut appliquer le même tableau.

1) 3 – 9 → J'ai 3 et je dois 9. Je dois encore 6.

Alors, 3 – 9 = -6

2) - 5 – 7 → Je dois 5 et je dois aussi 7. En tout, je dois 12.

- <u>Soustraction d'un nombre négatif:</u>

1) 2 – (-5)

– - …….. Le moins négatif est équivalent à une addition.

Alors, 2 – (-5) = 2 + 5 = 7

2) - 4 – (-5)

On change les signes :

- 4 – (-5) = - 4 + 5 = 1 (On utilise la stratégie pour l'addition.)

E.

<u>Multiplication des Relatifs</u>

Dans la multiplication, nous utilisons les principes dans le tableau suivant:

Signe du Nombre	Multiplication Opération	Signe du Nombre		Signe du Produit
+	×	+	=	+
+	×	-	=	-
-	×	+	=	-
-	×	-	=	+

Notes:

- Quand les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.
- Quand les 2 nombres ont de différents signes, le produit est négatif.

Exemples:

1) 7 x 5 = 35
2) - 3 x 6 = -18
3) 8 x - 4 = - 32
4) - 2 x - 9 = 18

Division des Relatifs

Dans la division, nous utilisons les principes dans le tableau suivant:

Notes:

A) Quand les 2 nombres ont le même signe, le produit est positif.
B) Quand les 2 nombres ont de différents signes, le produit est négatif.

Exemples:

1) 30 ÷ 5 = 6
2) 28 ÷ - 7 = - 4
3) - 45 ÷ 9 = - 5
4) - 27 ÷ - 3 = 9

Algèbre Universitaire I

Exercices de Pratique

Ensemble

1. Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Décrire les ensembles $A \cap B$, $A \cup B$.

2. Soient $A = [1,3]$ et $B = [2,4]$. Déterminer $A \cap B$ et $A \cup$.

3. Si U = {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13}, lesquels des suivants sont des sous-ensembles de U.
B = {2, 4}
A = {0}
C = {1, 9, 5, 13}
D = {5, 11, 1}
E = {13, 7, 9, 11, 5, 3, 1}
F = {2, 3, 4, 5}

4. Soient A = {2, 3, 4, 5, 6, 7} B = {2, 4, 7, 8) C = {2, 4}. Combler les vides avec $\subset$ ou $\not\subset$ dans chaque cas.
a) B ____ A
b) C ____ A
c) B ____ C
d) ∅ ____ B
e) C ____ C
f) C ____ B

5. Soient P = {3, 5, 7, 9, 11}   Q = {9, 11, 13}   R = {3, 5, 9}   S = {13, 11}

Ecrire Vrai ou Faux pour chacun des cas suivants.

a) $R \subset P$ ____________ b) $Q \subset P$ ____________ c) $R \subset S$ ____________
d) $S \subset Q$ ____________ e) $S \subset P$ ____________ f) $P \not\subset Q$ ____________
g) $Q \not\subset R$ ____________ h) $S \not\subset Q$ ____________

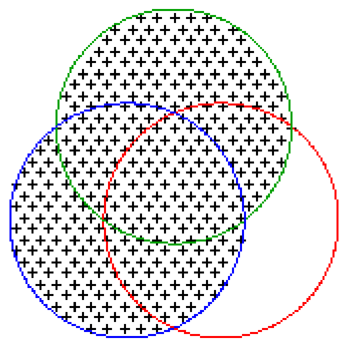
6. Soient U = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 } ; S = {1, 2, 4, 7} ; T = {1, 2, 4, 5, 6, 7} ; V = {4, 5, 6}.

Ecrire Vrai ou Faux pour chacun des cas suivants.

a) $S \subset T$ ____________ b) $4 \notin V$ _____________ c) $T \subseteq V$ ______________

d) $7 \in T$ ___________ e) $\{7, 4, 2, 1\} = S$ ____________ f) 7. $\{1\} \subset T$ __________

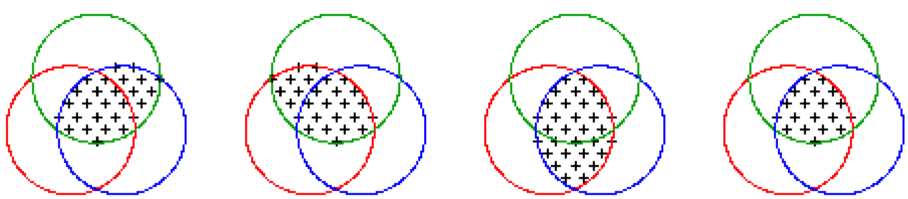
7. A



B C

Indiquer la formule d'ensembles qui applique à la figure ci-dessus : _____________

8. Soit les ensembles A, B, C ci-dessous. Entourer le dessin correspondant au sous-ensemble $A \cap B$.



9.

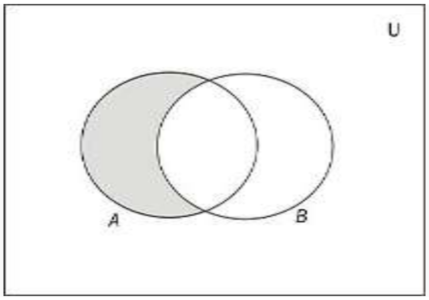
Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble. Peut-on écrire ces dérivés ? Répondre par Oui ou par Non.

a) $a \in E$ ___________ b) $a \subset E$ ___________ c) $\{a\} \subset E$ ___________

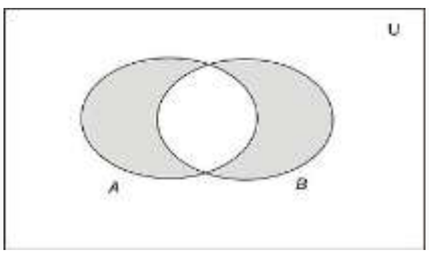
d) $\emptyset \in E$ ___________ e) $\emptyset \subset E$ ___________ f) $\{\emptyset\} \subset E$? __________

10. Ecrire les sous-ensembles correspondants aux figures suivantes :

a) ____________________



b) _____________________



11.

Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Montrer que :

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

<u>Nombres Premiers et Composés</u>

1. Dire si les nombres suivants sont premiers ou composés. Puis expliquer pourquoi.

a) 27 est ___________ parce que _______________________________________.

b) 31 est ____________ parce que ______________________________________.

c) 57 est _____________ parce que _____________________________________.

d) 73 est _____________ parce que _____________________________________.

e) 91 est_______________ parce que _______________________________________.

2. Énumérer tous les nombres premiers entre 30 et 60.

____.

3. Énumérer tous les nombres composés entre 60 et 80.

____.

4. Décomposer les nombres suivants en des facteurs premiers.

a) 42

b) 69

c) 60

d) 80

e) 105

Ensemble des Nombres

Compléter chaque case par ∈ ou ∉ :	N	Z	D	Q	I	R
-568						
94						
-5						
-0. 1						
36						
$\sqrt{5}$						
0						
$\sqrt{36}$						
$\frac{3}{7}$						

Algèbre Universitaire I

Inégalités

1.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

Enoncé	Intervalle	Représentation graphique
$-1 \leq x < 3$	$x \in$	
$4 > x > 0$	$x \in$	
$-7 \geq x > -8$	$x \in$	
$x \in \mathbb{R}^+$	$x \in$	
$x \neq 5$	$x \in$	

2.

Traduire sous forme d'intervalle :

a) $y > -3$ et $y < 4$ ____________________________________

b) $y > -3$ ou $y < 4$ ____________________________________

3.

Compléter avec les symboles ∈ ou ∉ :

a) 7 …] 0 ; 7 [

b) 5,9 …] 5,8 ; +∞ [

c) – 0,25 …] – 0,3 ; – 0,2 […] 1 ; 2]

d) – 0,199 …] – 0,2 ; – 0,19 [

e) π □…. [3,14 ; 3,141 [

4. Vrai ou faux ?

a) Si $x \in [\ 6{,}7\ ;\ +\infty\ [$ alors $x \in [\ 6\ ;\ +\infty\ [$

b) Si $x \in\ ]\ -3\ ;\ 4\ [$ alors $x \in [\ -2\ ;\ 5\ [$

c) Si $x \notin [\ -5\ ;\ 2[$ alors $x \in\ ]-\infty\ ;\ -3\ [\ \cup\ [\ 2\ ;\ +\infty[$

d) L'intervalle $]\ 0\ ;\ 4[$ est inclus dans $[\ 0\ ;\ 4\ [$

e) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}^{+}$

f) Si $x \notin \mathbb{Q}$ alors $x \notin \mathrm{D}$

5. Simplifier les notations suivantes lorsque c'est possible.

A = $[\ -5\ ;\ 7[\ \cup\ [\ -2\ ;\ 12\ [$

B = $[\ 0\ ;\ +\infty\ [\ \cup\ ]\ -2\ ;\ +\infty\ [$

C = $]-\infty\ ;\ 0\ [\ \cup\ [\ 0\ ;\ +\infty\ [$

D =] □∞ ; 4/3 [∩ [– 10 ; 10] E = [– 4 ; [∪] □/2 ; 10]

6. Représenter I et J sur une droite graduée, puis déterminer I ∩ J et I ∪ J.

a) I = $[\ 2\ ;\ 5{,}5\ ]$ et J = $]\ 1\ ;\ 3\ ]$

b) I = $[\ -1\ ;\ +\infty\ [$ et J = $]-2\ ;\ 3\ ]$

c) I = $]\ -1\ ;\ 3\ ]$ et J = $[\ -\sqrt{2};\ \pi\ [$

d) I = $\mathbb{R}^{-}$ et J = $\mathbb{R}^{+}$

e) I = $\{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\}$ et J = $[\ -5\ ;\ 5\ ]$

<u>Opérations des nombres Réels</u>

1.

Trouver la valeur absolue.

a) $|8| =$ b) $|9| =$ c) $|-2| =$ d) $|-8.5| =$

2.

Mettre le signe qui convient <, > ou = :

a) |7| ____ |−3|	b) |−32| ____ |−14|	c) −6,7 _____ |1,2|
d) |5,7| _____	e) 8,3_____ |-8, 3|	f) -2,1_______ |−2,1|

3.

Evaluer les expressions suivantes :

a) |-3| + 9 =	b) |−18| −5 =	c) −|12 + 7| =
d) - |6| =	e) |-8| + |4|	f) - |-26| =
g)- |4| . |-5| =	h) |-64| . |8 |	i)- | |-16 | + |-22| |

4.

Trouver la somme.

a) 5 + -6	b) -17 + 24	c) 15 + (-29)	d) -6 + 3
e) 50 + (-14)	f) (-21) + (-4)	g) 30 + (-7)	h) -3 + -10
i) -15 + 26	j) -17 + 4 + -2	k) 50 + -16 + -11	l) -17 + 8+ -14
m)-11 + 15 + -6	n) 23 + (-64)	n) -1 + 14 + (-71)	o) 8 + -9 + -1

p) -16 + (-12) + 13	q) 12 + -20+ 16	r) 100 + -54 + -17

5.

Trouver la différence.

a) 8 – 17	b) -15 – 3	c) 10 – 21	d) 20 – (-5)
e) 5 – - 9	f) -12 – - 7	g) -19 – - 8	h) -16 – (-23)
i) -56 – 32	j) -49 – (-53)	k) -6 – 9 – (-7)	l) -6 – (-10) – 7
m) 17 – 33	n) -21 – 19	o) 12 – (-24)	p) -35 – (- 18)
r) -54 – 27	s) 32 – (-18)	t) -26 – - 41	u) 54 – 100

6.

Trouver le produit.

a) -4 (2)	b) -8 (-5)	c) 13 (-4)	d) -5 . 6 . 10
e) -6 (-2) (-14)	f) 18 (-3) (6)	g) 4 (-10) (-3)	h) -9 (3) (2)

7.

Trouver le quotient.

a) -36 ÷ 9	b) 112 ÷ - 8	c) -72 ÷ 2	d) -26 ÷ (-13)
e) -144 ÷ 6	f) -180 ÷ (-10)	g) 80 ÷ -5	h) -105 ÷ 15
i) 120 ÷ (-30)	j) -200 ÷(-8)	k) 42 ÷ (-6)	l) -84 ÷ -6

Algèbre Universitaire I

Chapitre2

Section 2.1

Les Expressions Algébriques

2.1.1

Une **expression algébrique** est un ensemble de lettres et de nombres reliés entre eux par des symboles d'opération mathématique.

Une expression algébrique est formée d'une ou plusieurs lettres appelées *variables* ainsi que d'un ou plusieurs appelés *coefficients* ou *constantes*. Lorsque ces expressions algébriques sont reliées par des opérations mathématiques, généralement par des symboles d'addition (+) et de soustraction (-), chaque expression est nommée *terme*.

Les expressions algébriques peuvent être classées selon le nombre de termes qu'elles contiennent. De plus, on peut effectuer des opérations mathématiques sur les expressions algébriques. Il est aussi possible de les réduire en termes plus simples. Les fiches suivantes portent sur ces différentes notions:

2.1.2

Les variables

Une **variable** est présentée sous la forme de lettres ou des fois symboles pour représenter une certaine valeur.

En algèbre, on tente de généraliser les calculs en remplaçant très souvent les nombres par des lettres. Ces lettres se nomment des variables. Une variable peut être représentée par n'importe quelle lettre de l'alphabet.

a^2

$4b^4 - 3c$
y + z

Dans ces expressions algébriques, les lettres **a**, **b**, **c**, **y** et **z** sont des variables.

- On donne la valeur voulue à une variable selon le contexte dans lequel on l'utilise. Dans l'équation 2x+3, les valeurs des variables sont inconnues. On peut donc leur donner la valeur que l'on désire. Le remplacement d'une variable par un nombre s'appelle une substitution.

1) Si x = 2 dans l'expression algébrique 2x+3.
On remplace la variable par sa valeur respective:

$2x+3 = 2(2) + 3 = 4+3 = 7$

Dans ce cas, la valeur de l'expression algébrique serait de **7**.

2) Si x=5,5 dans l'expression algébrique 2x+3.
$2x+3 = 2(5,5)+3 = 11+3 = 14$

Dans ce cas, la valeur de l'expression algébrique serait de **14**.

2.1.3

Les constantes et les coefficients

Un **coefficient** est un nombre qui multiplie une ou plusieurs variables.

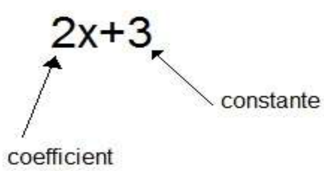
Une **constante** est un nombre qui ne multiplie par une variable.

Dans une expression algébrique, les nombres peuvent être classés en deux groupes: les coefficients et les constantes.

- Lorsqu'un nombre est placé directement devant une ou plusieurs variables, il est alors qualifié de **coefficient** de la variable**.** Le coefficient est un **facteur de multiplication** de la variable. Il peut être un nombre positif ou négatif.

- Lorsqu'un terme est composé uniquement d'un nombre, on qualifie alors ce nombre de **constante**. Ce nombre n'est alors qu'une valeur ajoutée ou soustraite à l'expression algébrique et il peut être autant positif que négatif.

Dans l'équation suivante, le 2 est un **coefficient**, car il multiplie la variable **x** alors que le 3 est une **constante**, car il est seul.



L'expression algébrique ci-dessus signifie: 2 multiplié par **x** plus 3.

Les coefficients et les constantes peuvent être autant des nombres entiers que des nombres fractionnaires et décimaux.

<u>Exemple</u>

Soit les expressions algébriques suivantes:
2b + 7
3,5 xy + 4,3
2y − 58

Les nombres 2; 3,5 et 2 sont des coefficients alors que les nombres 7 ; 4,3 et 58 sont des constantes.

Pour exprimer le produit d'un coefficient et d'une ou plusieurs variables, le symbole de multiplication n'est pas inscrit. Ainsi, l'expression 3 × x est plutôt écrite de la façon suivante: 3x.

<u>2.1.4</u>

Les conventions d'écriture en algèbre

Lorsqu'on écrit une expression algébrique, il importe de respecter certaines conventions d'écriture.

Règles

1. Dans un terme, **le coefficient est toujours écrit devant les variables**. Il est important de noter qu'un coefficient de **1** n'est toutefois pas écrit dans une expression.

Les termes 5x et 32xy respectent la convention d'écriture.

Le terme b15c ne respecte pas la convention puisqu'il ne débute pas par son coefficient. Il faudrait plutôt écrire 15bc

2. Si un terme comporte plusieurs variables, il est convenu de **placer ces variables en respectant l'ordre alphabétique**.

3. Dans un polynôme, **les termes sont disposés dans l'ordre décroissant de leur degré** respectif. Si deux termes sont du même degré, il faudrait alors les écrire selon l'ordre alphabétique.

Le polynôme $4y^3+5x^2-32x+6$ respecte la convention d'écriture.

Le polynôme $5x^2 + 4y^3 + 6$ ne respecte pas la convention puisqu'il n'est pas en ordre décroissant des degrés de ses termes. Il faudrait plutôt écrire $4y^3+5x^2-32x+6$

Le polynôme $4b-5a$ ne respecte pas la convention puisque les variables du même degré ne sont pas en ordre alphabétique. Il faudrait plutôt écrire $-5a+4b$.

2.1.5

Première Loi des Exposants

Produit de puissances de même base:
Lorsque des notations exponentielles de mêmes bases sont multipliées, on additionne leurs exposants.

$a^m . a^n = a^{m+n}$

$8^3 . 8^4 = 8^{3+4} = 8^7$

(Le pourquoi: $8^3 = 8 . 8 . 8$; $8^4 = 8 . 8 . 8 . 8$

Alors, $8^3 . 8^4 = 8 . 8 . 8 . 8 . 8 . 8 . 8 = 8^7$

Autres Exemples

$(3x^3y)$ $(-4xy^{2n}) = -12\, x^{3+1} . y^{1+2} = -12x^4y^3$

On multiplie les coefficients.
On combine les variables de même base.
On applique la première loi des exposants.

- Cette loi eut être généralisée pour inclure plus de 2 expressions. Par exemple :

$a^m . a^n\ a^q . a^p = a^{m+n+q+p}$

$-5^3 . -5^4 . -5^2 . -5^5 = -\ 5^{3+4+2+5} = -5^{14}$

Section 2.2

Addition et Soustraction des Expressions Algébriques

__2.2.1__

__Termes Semblables__

Des termes sont semblables lorsqu'ils:

- ont la (s) même (s) variable (s).
- les variables ont les mêmes exposants.

__Exemples__
5a et -2a sont des termes semblables.
$9a^2$ et $-5a^2$ sont des termes semblables.

-$7x^2y$ et $11x^2y$ sont des termes semblables.

Termes Non-semblables

Des termes sont non-semblables lorsqu'ils:

- n'ont pas la (s) même (s) variable (s)… ou
- les variables ont des exposants différents.

Exemples
8a et -7b sont des termes non-semblables.
-$6a^2$ et 3a sont des termes non-semblables.
-$5xy^2$ et $4x^2y$ sont des termes non-semblables.

Pourquoi est-ce qu'on parle de termes semblables et de termes non-semblables ?

Parce que dans l'addition et la soustraction des expressions algébriques, les termes semblables peuvent se combiner tandis que les termes non-semblables ne peuvent pas se combiner.

2.2.2

Distributivité de la multiplication

Dans la multiplication des expressions algébriques telle que dans cet exemple-ci: 3x (x + 4), nous faisons l'opération utilisant la propriété distributive.

(b + c) a = ab + ac   ou   a (b + c) = ab + ac

Le facteur (a) qui est hors des parenthèses est multiplié à tous les termes de l'addition qui sont entre les parenthèses.

Il en est de même pour les termes de la soustraction qui sont entre parenthèses.

a (b – c) = ab – ac

Exemples :

1) 5 (x + y – 3) = 5. x + 5 . y – 5 . 3
   = 5x + 5y – 15

2) $3x (y + 4) = 3x. y + 3x . 4$
$= 3xy + 12x$

<u>Important</u>

Lorsque le facteur en dehors des parenthèses est négatif, cela va affecter les signes des termes et **<u>toutes</u>** les opérations qui sont entre parenthèses.

<u>Exemples</u>

1) $-2 (x + y – 3) = -2 . x + -2 . y – -2 . 3$
$= - 2x + -2y – -6$ **ou** $-2x –2y + 6$

2) $-5 (2x – 3 y + 5) = -5 . 2x – -5 . 3y + -5 . 5$
$= - 10x + 15y – 25$

<u>Autres Exemples</u>

Distribuer puis résoudre :

1) $6x – 3 (x – 4) = 6x – 3. x – 3 . -4$
$= 6x – 3x + 12$
$= 3x + 12$

2) $3a – [5a – 3 (2a – 1)] = 3a – [5a – 3. 2a – 3 . -1]$
$= 3a – [5a – 6a + 3]$
$= 3a – [-a + 3]$
$= 3a + a - 3$
$= 4a – 3$

<u>2.2.3</u>

Équations de Premier Degré

Une équation représente une égalité entre deux entités soient numériques ou algébriques.

Ex : $3 + 7 = 10$ (équation numérique)

$2a – b = 14$ (équation algébrique)

Algèbre Universitaire I

Définitions

1) Une équation est appelée une **contradiction** quand elle est toujours fausse, quelle que soit la valeur du variable**.**

Exemple: $3(a+4) - 3a - 7 = 0$

$3a + 12 - 3a - 7 = 0$

$3a - 3a + 12 - 7 = 0$

$5 = 0$ Faux

2) Une équation est appelée une **identité** quand elle est toujours vraie quelle que soit la valeur du variable.

Exemple: $4(b-5) - 4b - 20 = 0$

$4b - 20 - 4b - 20 = 0$

$0 = 0$

3) Une équation qui est vraie dépendamment de la valeur du variable est une **équation conditionnelle**.

Exemple: $-3(x-2) - 12 = 0$

$-3x + 6 - 12 = 0$

$-3x - 6 = 0$

$x = -2$

4) Une (des) valeur (s) qui rende (nt) une équation vrai s'appelle (nt) solution (s). Nous disons alors que cette (ces) valeur (s) satisfait (ont) l'équation.

a) Déterminons si y= 1 et y= -1 satisfont l'équation suivante :

$4 + 3(y-1) = 5(y+1) - (1-y)$

Vérifions d'abord avec y = 1 en le remplaçant par sa valeur dans l'équation:

$4 + 3(1-1) = 5(1+1) - (1-1)$

$4 + 3(0) = 5(2) - (0)$

$4 = 10$ Faux. Donc, 1 n'est pas **solution** de l'équation.

b)

$4 + 3(y-1) = 5(y+1) - (1-y)$

Vérifions maintenant avec y = 1 en le remplaçant par sa valeur dans l'équation:

$4 + 3(-1 - 1) = 5(-1 + 1) - (1 - - 1)$

$4 + 3(-2) = 5(0) - (1 + 1)$

$4 + -6 = 0 - (2)$

$-2 = -2$ Vrai. Donc, -1 est **solution** de l'équation.

2.2.4

Propriétés d'Égalité

1) Propriété d'addition
   Si a = b , alors a + c = b + c

2) Propriété de soustraction
   Si a = b , alors a – c = b – c

3) Propriété de multiplication
   Si a = b , alors a . c = b . c

4) Propriété de division
   Si a = b , alors $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

5) Propriété Réflexive
   a = a

6) Propriété Symétrique
   Si a = b , alors b = a
7) Propriété Transitive
   Si a = b et b = c , alors a = c

2.2.5

Equations de Premier Degré

Une équation de premier degré est une équation sous la forme suivante:
$ax + b = 0$;

- a et b sont des constants.
- $a \neq 0$; (a ne peut être égal à zéro).

Dans une équation de premier degré, le variable a pour exposant 1.

Rappel: Il n'est pas obligatoire d'écrire l'exposant quand c'est égal à 1.

Exemple: $3x – 2 = 6$; $2x + 5 = 3x – 2$

Résoudre des équations de premier degré

Exemple 1 : *Transposition de coefficient*

$3x – 5 = 13$

On transpose le – 5 de l'autre côté du signe égal pour isoler le variable.

Quand on transpose, on fait l'opération inverse de l'autre côté : -5 devient +5

$3x = 13 + 5$; $3x = 18$; $x = \frac{18}{3}$; alors $\mathbf{x = 6}$

* **Check**

On peut vérifier si la *solution* est correcte en remplaçant la solution dans l'équation et voir si elle est vraie.

$3x = 13 + 5$; $3 \, . \, 6 = 13 + 5$
$18 = 18$ √raie

Exemple 2 : *Transposition de variables*

$- 4m = m – 15$;

On transpose le m de l'autre côté du signe égal pour consolider les variables.

On effectue les calculs nécessaires

$- 4 m – m = -15$; $-5m = -15$

Puis on résout pour *m* en faisant l'opération inverse de l'autre côté:

m = $\frac{-15}{-5}$;   alors **m = 3**

*** Check**

On peut vérifier si la *solution* est correcte en remplaçant la solution dans l'équation et voir si elle est vraie.

- 4m = m – 15 ; - 4 . 3 = 3 – 15
-12 = - 12 √raie

Section 2.3

Inégalités de Premier Degré

2.3.1

Définitions

1) Une inégalité peut être une **contradiction** comme dans le cas de:

Exemple: $x^2 < 0$

2) Une inégalité peut être une **identité** comme dans le cas de :

Exemple: x + 1 > x

3) Une inégalité peut être **conditionnelle** comme dans le cas de:

Exemple: x + 1 > 3

2.3.2

Vérifier si une valeur est solution d'une inégalité

Déterminer si x = -1 , x = 2 et x = 4 sont solution de l'équation suivante:
8x + 2 (x – 4) ≥ 12

1) Vérifions pour x = -1
8. -1 + 2 (-1 – 4) ≥ 12 ?

$-8 + 2(-5) \geq 12$?

$-8 + -10 \geq 12$?

$-18 \geq 12$ Fausse. Alors, x = -1 n'est pas une solution de l'inégalité.

2) Vérifions pour x = 2

$8.2 + 2(2 - 4) \geq 12$?

$16 + 2(-2) \geq 12$?

$16 + -4 \geq 12$?

$12 \geq 12$ Vraie. Alors, x = 2 est une solution de l'inégalité.

3) Vérifions pour x = 4

$8.4 + 2(4 - 4) \geq 12$?

$32 + 2(0) \geq 12$?

$32 + 10 \geq 12$?

$32 \geq 12$ Vraie. Alors, x = 4 est une solution de l'inégalité.

2.3.3

Propriétés des Inégalités

Si a < b , alors

1) $a + c < b + c$
2) $a - c < b - c$
3) $ac < bc$ lorsque c est positif ; $ac > bc$ lorsque c est négatif.
4) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$ lorsque c est positif ; $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ lorsque c est négatif.

Définition

Une inégalité de premier degré est une inégalité sous la forme suivante:

$ax + b < 0$; (< eut être remplacé également par > , ≤ et ≥.

- a et b sont des constants.
- $a \neq 0$; (a ne peut être égal à zéro).

Dans une équation de premier degré, le variable a pour exposant 1.

Rappel: Il n'est pas obligatoire d'écrire l'exposant quand c'est égal à 1.

Exemple: $3x - 2 = 6$; $2x + 5 = 3x - 2$

2.3.4

Résoudre des inégalités

$9 + 5(x - 3) \geq 14$

Résolvons en utilisant les mêmes stratégies que dans l'équation.

$9 + 5x - 15 \geq 14$

$5x - 6 \geq 14$

$5x \geq 14 + 6$

$5x \geq 200$; $x \geq \frac{20}{5}$ alors $x \geq 4$

Très Important

Dans le cas où le variable est négatif:

Exemple

$-a > 2$

On utilise la stratégie appelée: *Change Change Change*

1) On change le signe de la variable.
2) On change la direction de l'inégalité.
3) On change le signe de la constante de l'autre côté du signe égal.

Réponse : $a < -2$

Équations et Inégalités de la Valeur Absolue

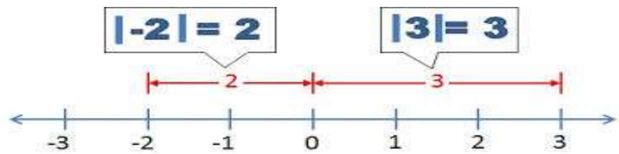
Section 2.4

2.4.1

Équations de la valeur absolue

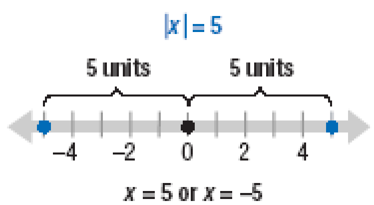
Rappel

Nous avons décrit dans Chapitre 1 que la valeur absolue de x, I x I, est la distance de x à 0 sur la droite numérique.



Résoudre I x I = 5

L'équation I x I = 5 signifie que la distance de x à 0 est de 5. C'est-à-dire que x est situé à 5 unités de 0. Par conséquent, x doit être placé sur 5 et -5 parce que les deux sont à 5 unités de 0.



Autres Exemples :

I. Dans le cas de :

I 3 y – 1 I = 7, 3y – 1 est placé à 7 unités de 0 ; c'est-à-dire 7 et -7.

Donc, il y a 2 cas :

1) 3y – 1 = 7

3y = 7 + 1

3y = 8

$y = \frac{8}{3}$

2) 3y – 1 = -7

3y = -7 + 1

3y = -6

y = -6 ÷ 3

y = -2

Lorsqu'on remplace les deux valeurs de y dans l'équation, ça donne 7 dans les deux cas.

Théorème

Pour $a \geq 0$,

$|x| = a$ est équivalent à $x = a$ ou $x = -a$

II. Dans le cas de:

$|2x + 5| = |x - 2|$

1) $2x + 5 = x - 2$

$2x - x = -2 - 5$

$x = -7$

2) $2x + 5 = -(x - 2)$

$2x + 5 = -x + 2$

$2x + x = 2 - 5$

$3x = -3$

$x = -1$

Lorsqu'on remplace les deux valeurs de x dans l'équation, les équations sont justifiées dans les deux cas.

Prenez Garde !

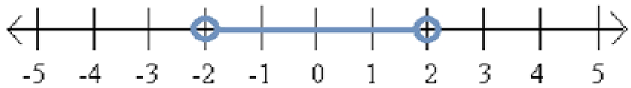
Peut-on résoudre: $|y - 3| = -2$?

Dans cet exemple, la valeur absolue, qui est une distance, est négative. Or la distance est toujours mesurée en unités positives. Donc, dans ce genre de cas, il n'y a pas de solutions.

2.4.2
Inégalités de la valeur absolue

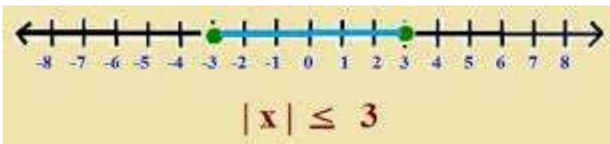
Résoudre $|x| < 2$

Cette inégalité veut dire que x dit être moins de 3 unités de 0. Par conséquent x se trouve entre les valeurs de -2 et 2 : $-2 < x < 2$

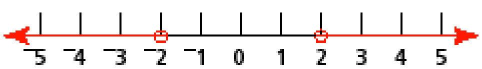


Autres Exemples

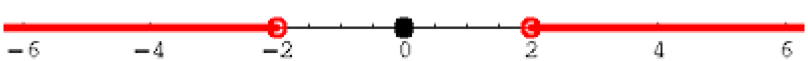
1) $|x| \leq 3$ signifie que: $-3 \leq x \leq 3$



2) $|x| > 2$ signifie que $-2 > x > 2$



3) $|x| \geq 2$ signifie que $-2 \geq x \geq 2$



Résoudre $|2n - 1| < 5$

On peut l'écrire telle une double inégalité

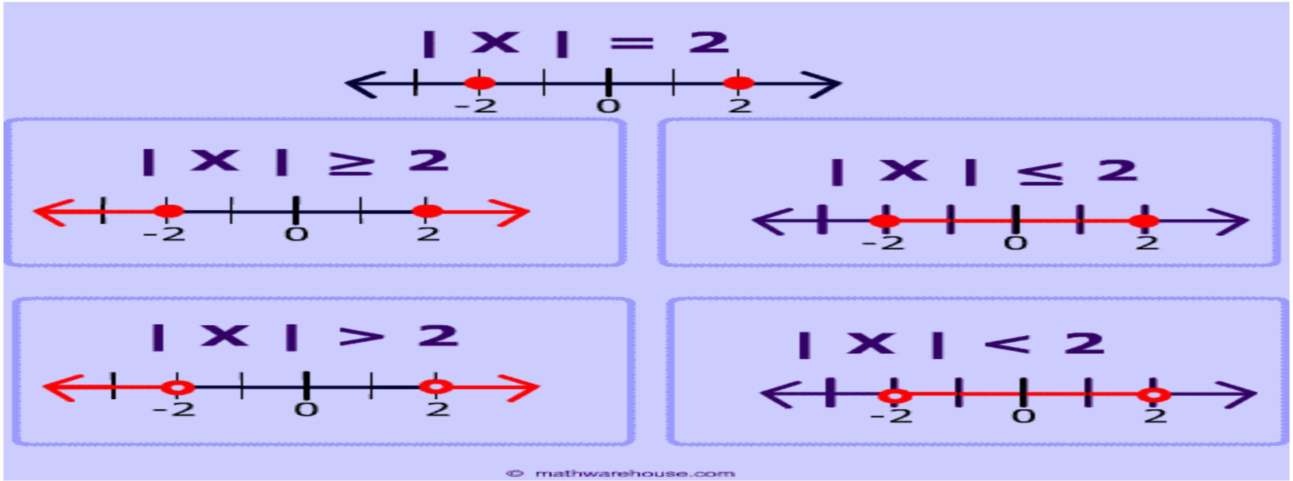
$$-5 < |2n - 1| < 5$$

$$-5 + 1 < 2n < 5 + 1$$

$$-4 < 2n < 6$$

$$-\frac{4}{2} < n < \frac{6}{2}$$

$$-2 < n < 3$$


| X | = 2
-2
0
2
| X | ≥ 2
-2
0
2
| X | ≤ 2
-2
0
2
| X | > 2
-2
0
2
| X | < 2
-2
0
2
© mathwarehouse.com

Algèbre Universitaire I

<u>Exercices de Pratique</u>

Section 2.1

Expressions Algébriques

I. **Calculer les opérations suivantes. Entourer la bonne réponse.**
(Questions à choix multiples – qcm)

1) $4x^2 + 8x - 2 + 5x^2 - 4x + 3$
   A. ? $9x^2 + 4x + 1$
   B. ? $9x^4 + 4x^2 + 1$
   C. ? $20x^2 - 32x - 6$
   D. ? $9x^2 + 4x - 1$

2) $-m - 7n + 4m - 11n$
   A. ? $3m + 18n$
   B. ? $3m - 18n$
   C. ? $5m - 18n$
   D. ? $3m + 4n$

3) $4a^2 - 2a + 8a^2 + 3a$
   A. ? $12a^2 - a$
   B. ? $32a^2 - 6a$
   C. ? $12a^2 + a$
   D. ? $12a^4 + a^2$

4) $8p - 5p$
   A. ? $13p$
   B. ? $3p^0$
   C. ? $3p^2$
   D. ? $3p$

5) $3{,}4v + 1{,}2w - 7{,}8v - 4{,}1W$
   A. ? $-4{,}4v - 2{,}9w$
   B. ? $11{,}2v - 2{,}9w$
   C. ? $-4{,}4v + 5{,}3w$
   D. ? $11{,}2v + 5{,}3w$

6) $4a^2b + 6ab - 2a^2b - 3ab$

A. ? $2a^{4}b$ <sup<2 + $3a^{2}b^{2}$
B. ? $2a^{2}b + 9ab$
C. ? $2a^{2}b + 3ab$
D. ? $6a^{2}b + 3ab$

7) $-4x^{3} + 5x^{2} + 6x^{3} - 4x + 7x^{2} - 7x$
A. ? $2x^{3} + 12x^{2} - 11x$
B. ? $10x^{3} + 12x^{2} - 11x$
C. ? $2x^{3} + 12x^{2} + 3x$
D. ? $2x^{3} + 13x^{2} - 11x$

8) $a + 5b + 3a - 7b$
A. ? $4a - 2b$
B. ? $4a + 2b$
C. ? $4a + 12b$
D. ? $-2a - 2b$

9) $2{,}5\,x^{2} - 4{,}2x - 7{,}3x^{2} + 5x$
A. ? $-4{,}8x^{2} + 0{,}8x^{2}$
B. ? $-4{,}8x^{2} - 9{,}2x$
C. ? $9{,}8x^{2} + 0{,}8x$
D. ? $-4{,}8x^{2} + 0{,}8x$

10) $2x + 3 + 4x - 2$
A. ? $8x^{2} + 1$
B. ? $7x$
C. ? $6x^{2} + 1$
D. ? $6x + 1$

II. **Calculer les additions et soustractions d'expressions algébriques.**

1) $r - 9 + 10$	2) $n + n$	3) $8v + 7v$	4) $x - 10 - 6x + 1$
5) $k - 2 + 7$	6) $-7x - 2x$	7) $m - 2m$	8) $9n - 1 + n + 4$
9) $-4x + 2 - 4$	10) $-x + 8x$	11) $-8p + 5p$	12) $4b + 6 + 1 + 7b$
13) $-7a - 6 + 5$	14) $1 - 10n - 10$	15) $1 - r - 6$	16) $-4b + 9b$
17) $9(b + 10) + 5b$	18) $-3x\,(1 - 4x) - 4x^{2}$	19) $-4k^{2} - 8k\,(8k + 1)$	

20) $1 - 7(5 + 7p)$ 21) $-10 - 4(n - 5)$ 22) $4(x + 7) + 8(x - 2)$

23) $4v - 7(1 - 8v)$ 24) $-8x + 9(-9x + 9)$ 25) $-9 - 10(1 + 9a)$

26) $-10(x - 2) - 3$ 27) $-6(5 - m) + 3m$

28) $-2r(1 + 4r) + 8r(-r + 4)$ 29) $-8(n + 6) - 8n(n + 8)$

30) $7(7 + 3v) + 10(3 - 10v)$ 31) $2n(-10n + 5) - 7(6 - 10n)$

32) $5(1 - 6k) + 10(k - 8)$ 33) $(8n\ 2 - 3n) - (5 + 4n^2)$

34) $(5p - 6) + (1 - p)$ 35) $(2 - 4v^2) + (3x^2 + 2v)$

36) $(4 - 2k^2) + (8 - 2k^2)$ 37) $(x^2 - 8) + (2x^2 - 7)$

38) $9(6b + 5) - 4b(b + 3)$ 39) $-7(4x - 6) + 2(10x - 10)$

40) $-3(4 + a) + 6a(9a + 10)$ 41) $-7(4x + 3) - 10(10x + 10)$

42) $(7x^2 - 3) - (5x^2 + 6x)$ 43) $(3x^2 - x) - (7 - 8x)$

44) $(2b - 8) + (b - 7b^2)$ 45) $(7aa^2 + 7a) - (6a^2 + 4a)$

46) $(3 - 7n^2) + (6n^2 + 3)$

III. **Calculer les multiplications d'expressions algébriques.**

1) $2x^3\ (3x^2)$ 2) $(2x)^3\ (3x)^2$ 3) $5a^2\ (2a^4)$

4) $(5a)^2\ (2a)^4$ 5) $(-2x)^5\ (x)^6$ 6) $(-3a)^4\ a^8$

7) $5a^2bc\ (-2ab^2)(-4bc^2)$ 8) $-2xyz^2\ (-4x^3y)(6yz^2)$

Algèbre Universitaire I

Section 2.2

Équations de Premier Degré

I. **Résoudre les simples équations suivantes.**

1) $5+ n / 4 =4$	2) $102 = -7r +4$	3) $-8n +3 = -77$
4) $0= -6v$	5) $-8= x / 5 - 6$	6) $0 = -7+ k / 2$
7) $-12 + 3x =0$	8) $24 =2n - 8$	9) $2= -12 +2r$
10) $b / 3 + 7= 10$	11) $152 =8n + 64$	12) $-16 = 8a + 64$
13) $56 +8k = 64$	14) $-2x + 4= 22$	15) $-20 = 4p + 4$
16) $-5= 3+ n / 2$	17) $r / 8 - 6= -5$	18) $-40 = 4n - 32$
19) $87 =3 - 7v$	20) $-x + 1 = -11$	21) $-2= -2m + 12$
22) $27 = 21 - 3x$	23) $-4 - b = 8$	24) $-2+ x / 2 = 4$
25) $-5= a / 4 - 1$	26) $-6= 15 + 3p$	27) $-5m + 2 = 27$
28) $-37 = 8+ 3x$	29) $-8+ n / 12 = -7$	30) $x / 1 - 8= -8$
31) $-11 = -8+ v / 2$	32) $-2x - 3= -29$	33) $-4 - 3n = -16$
34) $67 =5m - 8$	35) $9=8 + x 6$	36) $m / 4 - 1= -2$
37) $-80 = 4x - 28$	38) $33 =3b + 3$	39) $3x - 3= -3$
40) $4+ a 3 = 1$		

II. **Résoudre les équations suivantes ayant des variables des 2 côtés**

1) $-21x+12=-6-3x$	2) $-1-7m=-8m+7$	3) $1-12r =29-8r$
4) $20-7b=-12b+30$	5) $-32-24v =34-2v$	6) $-4n+ 11=2(1-8n)+3n$

Algèbre Universitaire I

7) $-3n-27=-27-3n$ 8) $56p-48=6p+2$ 9) $4+3x=-12x+4$

10) $-16n+12=39-7n$ 11) $17-2x=35-8x$ 12) $-25-7x=6(2x-1)$

13) $-7(1+b)=-5-5b$ 14) $2(4x-4)=-20-4x$ 15) $-a-5(8a-1)=39-7a$

16) $-57=-(-p+1)+2(6+8p)$

17) $-2(m-2)+7(m-8)=-67$

18) $50=8(7+7r)-(4r+6)$

19) $-8(n-7)+3(3n-3)=41\ 3$

20) $-61=-5(5r-4)+4(3r-4)$

21) $-2(8n-4)=8(1-n)$

23) $-7(x-2)=-4-6(x-1)$

23) $-6(8k+4)=-8(6k+3)-2$

24) $-3(-7v+3)+8v=5v-4(1-6v)$

25) $-8(8r-2)=3r+16$

26) $-8n-19=-2(8n-3)+3n$

27) $-4+4k=4(8k-8)$

28) $16=-5(1-6x)+3(6x+7)$

29) $7=4(n-7)+5(7n+7)$

30) $-8(6+6x)+4(-3+6x)=-12$

31) $-76=5(1+3b)+3(3b-3)$

32) $-6(x-8)-4(x-2)=-4$

33) $-4(1+a)=2a-8(5+3a)$

34) $-6(x-3)+5=-2-5(x-5)$

35) $-(n+8)+n=-8n+2(4n-4)$

36) $-5(x+7)=4(-8x-2)$

37) $-2(1-7p)=8(p-7)$

38) $8(-8n+4)=4(-7n+8)$

39) $2-5(2-4m)=33+5m$

40) $-6v-29=-4v-5(v+1)$

Algèbre Universitaire I

Section 2.3

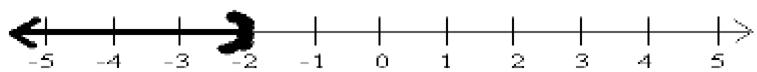
Inégalités de Premier Degré

I. **Tracer un graphe sur la droite numérique pour les inégalités suivantes**.

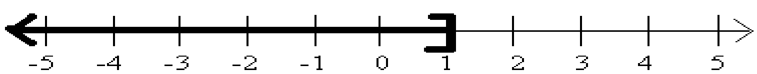
1) $n > -5$ 2) $-2 > k$ 3) $5 > x$ 4) $n > 4$ 5) $1 > k$ 6) $-5 < x$

II. **Écrire l'inégalité qui correspond à chacune des figures suivantes**.

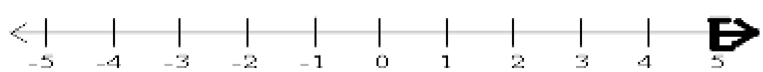
1)



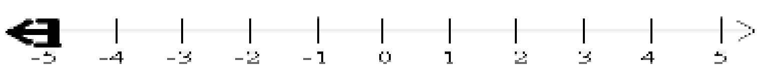
2)



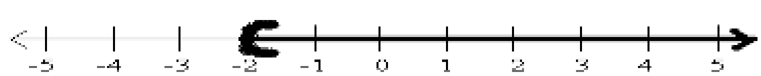
3)



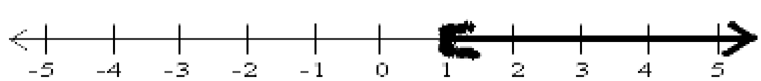
4)



5)



6)



III. **Résoudre les inégalités suivantes, puis montrer les intervalles sur une droite numérique.**

1) $-47>8-5x$ 2) $-2(3+k)<-44$ 3) $18<-2(-8+ p)$

4) $-8x - 3 < -16x - 1$

5) $6x - 6 > 3x + 3$

6) −12x + 5 " −3x − 4

7) $-11x - 9 < -3x + 1$

8) $4x - 5 > 5x - 7$

9) $-14x + 4 > -6x + 8$

10) $2x - 1 > 7x + 2$

11) $-3x - 2 > -4x - 9$

12. $-3x + 3 < -11x - 3$

13) $6x + 3 < 8x + 8$

14) $24>-6(m-6)$

15) $-r -5(r -6)<-18$

16) $-7n-10>60$

17) $-8(n-5)>0$

18) $24+4b<4(1+6b)$

19) $-5v -5<-5(4v +1)$

20) $-60>-4(-6x-3)$

21) $4+2(a+5) <-2(-a-4)$

22) $-(k -2)>-k -20$

23) $-8(2-2n)>-16+n$

24) $-36+6x>-8(x+2)+4x$

25) $-(4-5p)+3>-2(8-5p)$

26) $3(n+3)+7(8-8n)<5n+5$

IV. **Résoudre les combinaisons d'inégalités suivantes, puis montrer les intervalles sur une droite numérique.**

1) $2x - 1 < 4$ ou $7x + 1 > -4$

2) $-8x + 9 < -3$ et $- 7x + 1 > 3$

3) $-6x-4 < -4$ et $-3x+7 \geq -5$

4) $-3x + 3 < 8$ et $- 3x - 6 > -6$

5) $8x + 5 \leq -1$ et $4x - 2 > -1$

6) $-x - 1 < 7$ et $- 6x - 9 > 8$

7) $-6x - 7 < -3$ et $- 8x > 3$

8) $9x - 9 \leq 9$ et $5x > -1$

9) $-7x + 3 < -3$ ou $- 8x \geq 2$

10) $3x - 5 < 4$ et$- x + 9 > 3$

11) $-8x - 6 < 5$ ou $4x - 1 \geq 3$

12) $9x + 3 \leq -5$ ou $- 2x - 4 \geq 9$

13) $-7x + 6 < -4$ ou $- 7x - 5 > 7$

14) $4x - 2 \leq 2$ ou $3x - 9 \geq 3$

15) $-5x + 5 < -4$ ou $- 5x - 5 \geq -5$

16) $5x + 1 < -6$ et $3x + 9 > -4$

17. $7x + 2 < -5$ ou $6x - 9 \geq -7$

18) $-7x - 7 < -2$ et $3x \geq 3$

19. $4x + 1 < 0$ ou $8x + 6 > 9$

Algèbre Universitaire I

V. Résoudre les équations de valeur absolue suivantes.

1) $\|x\|=8$	2) $\|b\|=1$	3) $\|5+8a\|=53$	4) $\|3k+8\|=2$
5) $\|9+7x\|=30$	6) $\|8+6m\|=50$	7) $\|6-2x\|=24$	8) $-7\|-3-3r\|=-21$
9) $\|n\|=7$	10) $\|x\|=2$	11) $\|9n+8\|=46$	12) $\|3-x\|=6$
13) $\|5n+7\|=23$	14) $\|9p+6\|=3$	15) $\|3n-2\|=7$	16) $\|2+2b\|+1=3$

17) $\left\|\frac{-4-3n}{4}\right\|=2$	18) $8\|5p+8\|-5=11$	19) $3-\|6n+7\|=-40$
20) $4\|r+7\|+3=59$	21) $5+8\|-10n-2\|=101$	22) $7\|10v-2\|-9=5$
23) $8\|3-3n\|-5=91$	24) $\|2+3x\|=\|4-2x\|$	25) $\left\|\frac{2x-5}{3}\right\|=\left\|\frac{3x+4}{2}\right\|$
26) $7\|-7x-3\|=21$	27) $\left\|\frac{-4b-10}{8}\right\|=3$	28) $8\|x+7\|-3=5$
29) $5\|3+7m\|+1=51$	30) $3+5\|8-2x\|=63$	31) $\|6b-2\|+10=44$
32) $-7+8\|-7x-3\|=73$	33) $\|5x+3\|=\|2x-1\|$	34) $\|3x-4\|=\|2x+3\|$

VI. Résoudre les inégalités de valeur absolue suivantes. Puis, représenter sur la droite numérique tout indiquant les intervalles.

1) $\|x\|<5$	2) $\|x\|\leq 2$	3) $\|x+3\|\leq 1$	4) $\|x-7\|<8$
5) $\|x-5\|<0$	6) $\|x+8\|<-7$	7) $\|2x-3\|\leq 5$	8) $\|3x-9\|<27$
9) $\|5x-3\|\leq 0$	10) $\|10x+5\|<25$	11) $\|13x-23\|\leq 1$	12) $\|112x-12\|\leq 32$
13) $\|x\|\geq 5$	14) $\|x\|>1$	15) $\|x+2\|>8$	16) $\|x-7\|\geq 11$
17) $\|x+5\|\geq 0$	18) $\|x-12\|>-4$	19) $\|2x-5\|\geq 9$	20) $\|2x+3\|\geq 15$

Algèbre Universitaire I

21) $|4x-3|>9$ 22) $|3x-7|\geq 2$ 23) $|17x-314|>12$ 24) $|12x+54|>34$

25) $|3(2x-1)|>15$ 26) $|3(x-3)|\leq 21$ 27) $-5|x-4|>-15$

28) $-3|x+8|\leq -18$ 29) $6-3|x-4|<3$ 30) $5-2|x+4|\leq -7$

31) $6-|2x+5|<-5$ 32) $25-|3x-7|\geq 18$ 33) $|2x+25|-4\geq 9$

34) $|3(x-3)|-8<-2$ 35) $2|9x+5|+8>6$ 36) $3|4x-9|+4<-1$

37) $5|4-3x|-10\leq 0$ 38) $6|1-4x|-24\geq 0$ 39) $3-2|x+7|>-7$

40) $9-7|x-4|<-12$ 41) $|5(x-4)+5|>15$ 42) $|3(x-9)+6|\leq 3$

43) $|13(x+2)-76|-23\leq -16$ 44) $|110(x+3)-12|+320>14$

45) $12+4|2x-1|\leq 12$ 46) $3-6|3x-2|\geq 3$

47) $12|2x-1|+3<4$ 48) $2|12x+2|-3\leq -1$

49) $7-|-4+2(3-4x)|>5$ 50) $9-|6+3(2x-1)|\geq 8$

51) $32-|2-13x|<12$ 52) $54-|12-14x|<38$

Algèbre Universitaire I

Chapitre 3
Polynômes

Section 3. 1
3.1.1 Définitions

1) Un **monôme** est une expression algébrique qui est soit un constant ou un produit d'un constant et 1 ou plusieurs variables mis à la puissance de nombres entiers.

Exemples

7 $\quad 3x^2$y $\quad$ 5xy^3 $\quad \frac{x}{4}$ ou $\frac{1}{4}x$

Les suivants ne sont pas des monômes.

3x + 2y $\quad 7x^{1/2}$ $\quad \frac{3}{x+2}$ $\quad$ a – 5

2) Un **polynôme** représente la somme des monômes.

On nomme les polynômes en se basant sur le nombre de monômes qu'il y a dans l'expression. Un binôme comprend 2 termes alors qu'un trinôme en comprend 3.

3) Le degré d'un monôme est la somme des exposants des variables. Le degré d'un constant non égal à zéro est zéro.

3.1.2 Addition et Soustraction des Polynômes

Pour additionner ou soustraire les polynômes, on identifie les termes semblables pour pouvoir les grouper et effectuer les opérations:

Rappel

Des termes sont semblables lorsqu'ils ont les mêmes variables et leurs variables ont les mêmes exposants.

Exemples :

-7a et 11 a sont des termes semblables.

4xy^2 et 87 xy^2 sont des termes semblables.

Résolvons :

(1−3n^4− 8n^3) + (7n^4+ 2−6n^2+3n^3) + (4n^3+ 8n^4+ 7) = 12n^4 - n^3— $6n^2$ + 10

3.1.3 Multiplication des Polynômes

Pour multiplier les polynômes,

- On applique la propriété de distributivité (Voir Chapitre 2, page 7).
- On utilise la première loi des exposants (Voir Chapitre 2, page 5).

5a^2b (4ab + 3ab^2) = (5a^2b). (4ab) + (5a^2b) (3ab^2)

= 20a^3b^2 + 15a^3b^3

Multiplication de polynômes ayant au moins 2 termes chacun

- On prend chacun des termes d'un des polynômes et le distribue à tous les termes de l'autre polynôme.

(3a – 2) (2a + 5) = 3a (2a + 5) – 2 (2a + 5)

= 6a^2 + 15a – 4a – 10 (Puis, on combine les termes semblables.)

= 6a^2 + 11a – 10

$(2y^2 + 3y + 1)(y - 5) = 2y^2 (y - 5) + 3y (y - 5) + 1 (y - 5)$

$= 2y^3 - 10y^2 + 3y^2 - 15y + y - 5$

$= 2y^3 - 7y^2 - 14y - 5$

Section 3. 2

3.2.1 Formes Générales des multiplications de polynômes

Les Produits Spéciaux

1) Différence de 2 carrés : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
2) Carré parfait d'une somme: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3) Carré parfait d'une différence: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Lorsqu'un binôme est mis au carré ou lorsqu'on a une différence de 2 carrés, on utilise la formule qui convient:

Résolvons le produit des binômes suivants:

1) $(2a - 7b)(2a + 7b) = (2a)^2 - (7b)^2$
   $= 4a^2 - 49b^2$

2) $(3x + 5)^2 = (3x)^2 + 2(3x)(5) + (5)^2$
   $= 9x^2 + 30x + 25$

3) $(2a - 7b)^2 = (2a)^2 - 2(2a)(7b) + (7b)^2$

   $= 4a^2 - 28ab + 49b^2$

Section 3.3

3.3.1 Factorisation à partir du plus grand diviseur commun (PGDC)

Il faut trouver le plus grand diviseur commun, c'est-à-dire le terme avec le plus grand coefficient et exposant possible et les diviser:

$40r^3 - 8r^2 - 25r + 5 = 8r^2(5r - 1) - 5(5r - 1)$

Le facteur (5r – 1) est présent dans les deux termes, alors on peut le factoriser:

$= (5r - 1)(8r^2 - 5)$

Quand on ôte (5r – 1) du premier terme, il reste $8r^2$, et du second terme, il reste 5.

Exercices de Pratique

3.1.2 Résoudre les opérations d'addition et de soustraction des polynômes suivants.

1) $(5p - 5p^4) - (8p - 8p^4)$

2) $(7m^2 + 5m^3) - (6m^3 - 5m^2)$

3) $(3n^2 + n^3) - (2n^3 - 7n^2)$

4) $(x^2 + 5x^3) + (7x^2 + 3x^3)$

5) $(8n + n^4) - (3n - 4n^4)$

6) $(3v^4 + 1) + (5 - v^4)$

7) $(1 + 5p^3) - (1 - 8p^3)$

8) $(6x^3 + 5x) - (8x + 6x^3)$

9) $(5n^4 + 6n^3) + (8 - 3n^3 - 5n^4)$

10) $(8x^2 + 1) - (6 - x^2 - x^4)$

11) $(3 + b^4) + (7 + 2b + b^4)$

11) $(1 + 6r^2) + (6r^2 - 2 - 3r^4)$

12) $(8x^3 + 1) - (5x^4 - 6x^3 + 2)$

13) $(4n^4 + 6) - (4n - 1 - n^4)$

14) $(2a + 2a^4) - (3a^2 - 5a^4 + 4a)$

15) $(6v + 8v^3) + (3 + 4v^3 - 3v)$

16) $(4p^2 - 3 - 2p) - (3p^2 - 6p + 3)$

17) $(7 + 4m + 8m^4) - (5m^4 + 1 + 6m)$

18) $(4b^3 + 7b^2 - 3) + (8 + 5b^2 + b^3)$

19) $(7n + 1 - 8n^4) - (3n + 7n^4n + 7)$

20) $(3 + 2n^2 + 4n^4) + (n^3 - 7n^2 - 4n^4)$

21) $(7x^2 + 2x^4 + 7x^3 + (6x^3 - 84x^4 - 7x^2)$

22) (n−5n^4+7) + (n^2−7n^4− n)

23) (8x^2+ 2x^4 +7x^3) + (7x^4 −7x^3+ 2x^2)

24) (4x^3+ x −7x^3)+(x^2− 8 +2x +6x^3)

25) (2n^2+7n^4−2) + (2 + 2n^3+ 4n^2+ 2n^4)

26) (6x−5x^4 − 4x^2) − (2x−7x^2−4x^4 −8) − (8− 6x^2−x^4)

27) (7b^3− 4b +4b^4) − (8b^3−4b^2+ 2b^4− 8b)

28) (8−b + 7b^3) − (3b^4+7b−8+7b^2) + (3−3b+ 6b^3)

29) (1−3n^4− 8n^3) + (7n^4+ 2−6n^2+3n^3) + (4n^3+ 8n^4+ 7)

30) (8x^4+ 2x^3+2x) + (2x+2−2x^3− x^4) − (x^3+5x^4+ 8x)

3.1.3 Résoudre les opérations d'addition et de soustraction des polynômes suivants.

1) 6(p−7)
2) 2(6x+3)
3) 4k (8k +4)
4) 3n^2(6n+7)
5) 3 (4r −7)
6) (2x+1) (x−4)
7) 5m^4(4m+4)
8) (4n+6) (8n+8)
9) (8b+3) (7b−5)
10) (4x+5) (2x+3)
11) (3v −4) (5v −2)
12) (6x−7) (4x+1)
13) (5x+ y) (6x−4y)
14) (x+3y) (3x+4y)
15) (7x+5y) (8x+3y)
16) (r +8) (4r +8)
17) (7n−6) (n+7)
18) (6a+4) (a−8)
19) (5x−6) (4x−1)
20) (2u+3v) (8u−7v)
21) (8u+6v) (5u−8v)
22) (5a+8b) (a−3b)
23) (r −7) (6r^2−r +5)
24) 3(3x−4) (2x+1)
25) 3(2x+1) (4x−5)
26) 7(x−5) (x−2)
27) 6(4x−1) (4x+1)
28) 5(x−4) (2x−3)
29) 2(4x+1) (2x−6)
30) 5(2x−1) (4x+1)
31) 3(2x+3) (6x+9)
32) (6n−4) (2n^2−2n+5)
33) (4x+8) (4x^2+3x+5)
34) (2b−3)(4b^2+4b +4)

35) (6x+3y) ($6x^2$−7xy +$4y^2$)   36) (3m−2n)($7m^2$+ 6mn+ $4n^2$)

37) ($8n^2$+ 4n+ 6) ($6n^2$−5n+ 6)   38) ($5k^2$+3k +3) ($3k^2$+3k +6)

39) ($7u^2$+ 8uv −$6v^2$) ($6u^2$+ 4uv +$3v^2$)

3.2.1 Résoudre les <u>produits spéciaux</u> des polynômes suivants.

1) (x+8) (x−8)   2) (1+3p) (1−3p)   3) (1−7n) (1+7n)   4) (5n−8) (5n+8)

5) (4x+8) (4x−8)   6) (4y −x) (4y +x)   7) $(a+5)^2$ 8) $(x-8)^2$

9) $(p+7)^2$ 10) $(7-5n)^2$ 11) (($5m-8)^2$ 12) $(5x+7y)^2$

13) $(2x+y)^2$ 14) $(5+2r)^2$ 15) $(2+5x)^2$ 16) (4m−8n) (4m+8n)

17) (6x−2y) (6x+2y)   18) (4v −7) (4v +7)   19) (n−5) (n+5)

20) $(4k+2)^2$ 21) (a−4) (a+4)   22) (x−3) (x+3)

23) (8m+5) (8m−5)   24) (2r +3) (2r −3)   25) (b−7) (b+7)

26) (7a+7b) (7a−7b)   27) (3y −3x) (3y +3x)   28) $(1+5n)^2$

29) $(v+4)^2$ 30) $(1-6n)^2$ 31) $(7k-7)^2$

32) $(4x-5)^2$ 33) $(3a+3b)^2$ 34) $(4m-n)^2$

35) $(8x+5y)^2$ 36) $(m-7)^2$ 37) (8n+7) (8n−7)

38) (b+4) (b−4)   39) $(7x+7)^2$ 40) (3a−8) (3a+8)

3.3.1 Factoriser les polynômes suivants utilisant le PGDC.

1) $40r^3$−$8r^2$−25r +5   2) $3n^3$−$2n^2$−9n+6   3) $15b^3$+$21b^2$− 35b−49

4) $3x^3$+$15x^2$+2x+10   5) $35x^3$−$28x^2$−20x+16   6) 7xy −49x+5y −35

7) $35x^3 - 10x^2 - 56x + 16$ 8) $14v^3 + 10v^2 - 7v - 5$ 9) $6x^3 - 48x^2 + 5x - 40$

10) $28p^3 + 21p^2 + 20p + 15$ 11) $7n^3 + 21n^2 - 5n - 15$ 12) $42r^3 - 49r^2 + 18r - 21$

13) $15ab - 6a + 5b^3 - 2b^2$ 14) $16xy - 56x + 2y - 7$ 15) $32xy + 40x^2 + 12y + 15x$

16) $8xy + 56x - y - 72$ 17) $56ab + 14 - 49a - 16b$ 18) $2xy - 8x^2 + 7y^3 - 28y^2x$

19) $32uv - 20u + 24v - 15$ 20) $10xy + 30 + 25x + 12y$ 21) $3uv + 14u - 6u^2 - 7v$

22) $16xy - 3x - 6x^2 + 8y$ 23) $3mn - 8m + 15n - 40$ 24) $5mn + 2m - 25n - 10$

25) $4uv + 14u^2 + 12v + 42u$ 26) $24xy + 25y^2 - 20x - 30y^3$

Algèbre Universitaire I

Chapitre 4

Expressions Rationnelles

Section 4.1 Fractions Équivalentes

4.1.1

L'ensemble des nombres rationnels contient tous les nombres qui peuvent être représentés tel un quotient de 2 nombres relatifs, tandis que le diviseur ou dénominateur ne peut être égal à zéro.

$$R = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in Z, \; b \neq 0 \}$$

On peut aussi définir une **expression rationnelle** ou une **fraction algébrique** telle une fraction de 2 polynômes, tandis que le diviseur ou dénominateur ne peut être égal à zéro.

Exemple: $\frac{3x-2}{x-7}$ est une expression rationnelle. Elle n'est pas définie quand le dénominateur est égal à zéro.

$x - 7 = 0$; $x \neq 7$

Cela veut dire pour la x ne peut être égal à 7.

4.1.2 Factorisation des expressions quadratiques. (a=1)

4.1.2.1

$x^2 - 4x - 21$

Factoriser une expression quadratique telle que celle-ci signifie la mettre sous forme d'un produit de 2 facteurs.

Il y a plusieurs méthodes à considérer pour réaliser cette factorisation.

1ère Méthode :

$x^2 - 4x - 21$

On nomme les coefficients de la façon suivante:

1er terme: a ; 2ème terme: b ; 3ème terme: c de sorte que l'expression ait la forme suivante: $ax^2 + bx + c$

Dans notre exemple là-haut: a = 1 ; b = -4 ; c = -21

Pour factoriser, nous devons trouver les racines de l'expression. On commence par trouver le déterminant.

$\Delta = b^2 - 4ac$ On remplace les variables par leurs valeurs.

$\Delta = (-4)^2 - 4\,(1)\,(-21)$

$\Delta = 16 - -84 = 16 + 84$

$\Delta = 100$

<u>Les Racines</u>

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1 = \frac{-(-4) + \sqrt{100}}{2 \times 1}$

$x_1 = \frac{4 + 10}{2}$

$x_1 = \frac{14}{2} = 7$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_2 = \frac{-(-4) - \sqrt{100}}{2 \times 1}$

$x_2 = \frac{4 - 10}{2}$

$x_2 = \frac{-6}{2} = -3$

La forme de l'expression factorisée est la suivante: $(x - x_1)\,(x - x_2)$

D'où : $(x - 7)\,(x + 3)$

<u>4.1.2.2</u>

2ème Méthode

$x^2 + 5x + 6$

Nous avons besoin de trouver des facteurs de 6 qui s'ajoutent pour donner 5. Alors, deux produits de 6 sont 2 et 3 et ils s'ajoutent pour donner 5. Alors, nous allons utiliser 2 et 3.

Dans ce cas, nous utilisons ces racines sous la forme de $(x + m)(x + n)$. D'où, la factorisation: $(x + 2)(x + 3)$:

<u>Autre exemple</u>

$x^2 - 7x + 10$

Nous avons besoin de trouver des facteurs de 10 qui s'ajoutent pour donner -7. Alors, deux produits de 10 sont -2 et -5 et ils s'ajoutent pour donner -7. Alors, nous allons utiliser -2 et -5.

$(x - 2)(x - 5)$

4.1.3 Factorisation des expressions quadratiques. (a>1)

$2x^2 + x - 6$

Dans cette expression quadratique, a = 2, b = 1, and c = -6, alors a . c = (2)(-6) = -12. Alors, nous avons besoin de trouver deux facteurs de -12 qui s'ajoutent pour donner +1. Ces facteurs sont 4 et -3.

Dressons un tableau 2 x 2 en y mettant le 1er terme en haut à gauche et le dernier terme en bas à droite:

$2x^2$	
	-6

Ensuite, nous mettons les facteurs -3 et 4 avec leurs signes et variables dans les espaces vides restants (de n'importe quelle façon) .

$2x^2$	$-3x$
$+4x$	-6

Puis, on fait la factorisation dans le tableau:

<table>
<tr><th>Rangée en haut</th><th>Rangée en bas</th></tr>
<tr>
<td><table><tr><td>x</td><td>$2x^2$</td><td>$-3x$</td></tr><tr><td></td><td>$+4x$</td><td>-6</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>x</td><td>$2x^2$</td><td>$-3x$</td></tr><tr><td>$+2$</td><td>$+4x$</td><td>-6</td></tr></table></td>
</tr>
<tr><th>Colonne à gauche</th><th>Colonne à droite</th></tr>
<tr>
<td><table><tr><td></td><td>$2x$</td><td></td></tr><tr><td>x</td><td>$2x^2$</td><td>$-3x$</td></tr><tr><td>$+2$</td><td>$+4x$</td><td>-6</td></tr></table></td>
<td><table><tr><td></td><td>$2x$</td><td>-3</td></tr><tr><td>x</td><td>$2x^2$</td><td>$-3x$</td></tr><tr><td>$+2$</td><td>$+4x$</td><td>-6</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

Dans la factorisation des rangées et des colonnes, nous devons porter attention au signe du facteur qui est mis en dehors du tableau:

Règles :

1) Si les deux termes des colonnes ou rangées ont le même signe, le facteur garde le signe commun.
   Exemples:
   a) Colonne à gauche → $2x^2$ et 4x sont tous les deux positifs, alors le facteur est positif aussi: 2x
   b) Colonne à droite → -3x et -6 sont tous les deux négatifs, alors le facteur est négatif aussi: -3.

2) Si les deux termes des colonnes ou rangées ont des signes différents, le facteur garde le signe du terme qui est le plus proche.
   Exemples:

a) Rangée en haut → $2x^2$ et -3x ont de différents signes alors le facteur est positif parce que $2x^2$ est plus proche du facteur dans le tableau : x

b) Rangée en bas → 4x et -6 ont de différents signes alors le facteur est positif parce que 4x est plus proche du facteur dans le tableau: 2.

(Note: Les règles précédentes ont été découvertes en classe au cours des exercices de pratique et ont été surnommées le ***Théorème de Barbaco***, faisant allusion à deux des étudiants (Session I ; 2015- 16) qui ont contribué à l'élaboration de ces règles. Voir réf. au bout du livre)

3) Nous pouvons écrire la factorisation de l'expression quadratique à partir des facteurs dans le tableau: $2x^2 + x - 6 =$ **$(2x - 3)$ $(x + 2)$**.

Autres exemples

1) **$4x^2 - 19x + 12$**

a . c = 4 x 12 = 48

Les deux facteurs de 48 qui se multiplient pour donner -19 sont -3 et -16.

	4x	-3
x	$4x^2$	-3x
-4	-16x	12

$4x^2 - 19x + 12 =$ **$(x - 4)(4x - 3)$**.

2) **$6x^2 + xy - 12y^2$.**

a x c = (6)(-12) = -72

Les facteurs de -72 qui s'ajoutent pour donner sont 9 and -8.

	$3x$	$-4y$
$2x$	$6x^2$	$-8xy$
$+3y$	$+9xy$	$-12y^2$

Alors: $6x^2 + xy - 12y^2 =$ $\mathbf{(2x + 3y)(3x - 4y)}$

4.1.4 Simplification des expressions quadratiques

$\frac{a^2 - b^2}{(a-b)^2}$

Nous devons factoriser au numérateur et au dénominateur respectivement.

$\frac{(a-b)\,(a+b)}{(a-b)(a-b)}$

Tout <u>facteur</u> étant présent au numérateur et en même temps au dénominateur peut être éliminé.

$\frac{(a-b)\,(a+b)}{(a-b)(a-b)} = \frac{(a+b)}{(a-b)}$

<u>Autres exemples</u>

1) $\frac{y-8}{y^2-5y-24} = \frac{y-8}{(y-8)\,(y+3)} = \frac{1}{(y+3)}$

2) $\frac{4c^2-4\,cd\,-3d^2}{2c^2-\,cd\,-3d^2} = \frac{(2c-3)(2c+d)}{(2c-3)(c+d)} = \frac{(2c+d)}{(c+d)}$

3) $\frac{2ax + bx - 2ay - by}{3ax + 2bx - 3ay - 2by} = \frac{x\,(2a+b) - y\,(2a+b)}{x\,(3a+2b) - y\,(3a+2b)}$

$$= \frac{(2a+b)\,(x-y\,)}{(3a+2b)\,(x-y)} = \frac{(2a+b)}{(3a+2b)}$$

Section 4.2

Multiplications et Divisions des Expressions Rationnelles

4.2.1 Multiplication

$\frac{a}{b}$ x $\frac{c}{d}$ = $\frac{a\,.\,c}{b\,.\,d}$ b , d $\neq$ 0

<u>Rappel: Section 2.1</u>

Première Loi des Exposants

Produit de puissances de même base:
Lorsque des notations exponentielles de mêmes bases sont multipliées ensemble, on additionne les exposants.

$a^m . a^n = a^{m+n}$

$8^3 . 8^4 = 8^{3+4} = 8^7$

Exemples

1) $\frac{2x}{z}$ x $\frac{7x^3}{5z^2}$ = $\frac{14x^4}{5z^3}$

$\frac{x-y}{2x+y}$ x $\frac{3x-2y}{x+y}$ = $\frac{(x-y)(3x-2y)}{(2x+y)(x+y)}$

Procédons à la multiplication des facteurs.

$\frac{(x-y)(3x-2y)}{(2x+y)(x+y)} = \frac{3x^2 - 5xy + 2y^2}{2x^2 + 3xy + y^2}$

4.2.2 Division

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{d}{c}$ b , c , d $\neq 0$

Dans ce cas, on multiplie la première fraction par le **réciproque** de la deuxième fraction ; c'est-à-dire:

1) La 1ère fraction reste telle quelle.
2) L'opération de division est remplacée par la multiplication
3) La 2ème fraction est renversée. (Réciproque)

Définition

La *réciproque* de x est $\frac{1}{x}$ (x $\neq 0$).

Exemples de réciproques

La réciproque de 3 est $\frac{1}{3}$.

Réciproque de $x^2 - 3$ → $\frac{1}{x^2 - 3}$

Réciproque de $\frac{7x}{9y}$ → $\frac{9y}{7x}$

Alors, diviser par une fraction, c'est multiplier par sa réciproque.

- **Deuxième Loi des Exposants**

Quotient de puissances de même base:
Lorsque des notations exponentielles de mêmes bases sont divisées, on soustrait leurs exposants.

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\frac{8^6}{8^2} = 8^{6-2} = 8^4$

Exemples de division de fractions

$\frac{16x^3}{9y^4} \div \frac{32x^6}{27y^3} = \frac{16x^3}{9y^4} \times \frac{27y^3}{32x^6}$

Nous simplifions 16 et 32et aussi nous simplifions 27 et 9. Alors, il reste:

$\frac{16x^3}{9y^4} \times \frac{27y^3}{32x^6} = \frac{x^3}{y^4} \times \frac{3y^3}{2x^6}$

Nous simplifions aussi les variables qui sont semblables (par la division).

$\frac{x^3}{y^4} \times \frac{3y^3}{2x^6} = \frac{3}{2x^3y}$

Section 4.3

Somme et Différence des Expressions Rationnelles

Dans l'addition et la soustraction de fractions qui ont le même dénominateur, nous faisons l'opération au numérateur et nous gardons le dénominateur tel quel.

$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ et $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$ $c \neq 0$

4.3.1 Somme et Différence / Même Dénominateur

Exemples

1) $\frac{7x}{y} + \frac{-9x+6}{y} = \frac{7x-9x+6}{y}$

$$= \frac{-2x + 6}{y}$$

2) $\frac{3y-9}{(x-3)} - \frac{2x-8y+12}{(x-3)} = \frac{3y - 9 - (2x-8y+12)}{(x-3)}$

$$= \frac{3y - 9 - 2x + 8y - 12}{(x-3)}$$

$$= \frac{-2x + 11y - 21}{(x-3)}$$

4.3.2 Somme et Différence / Différents Dénominateurs

Dans le cas où les dénominateurs des fractions sont différents, nous devons trouver un dénominateur commun qui nous permettra de faire l'opération au numérateur tel que dans les cas précédents (là-haut).

Pour cela, nous devons trouver le plus petit diviseur commun. (PPDC)

Comment trouver le PPDC ?

$$\frac{7}{15x^2} + \frac{11}{16x^3y^4} - \frac{4}{20y^3}$$

Note: En réalité, le PPDC d'une fraction est le plus petit multiple commun (PPMC) du dénominateur de cette fraction.

Alors, le PPDC de ces trois fractions algébriques est en fait le PPMC de $15x^2$, $16x^3y^4$ et $20y^3$.

Pour trouver le PPDC de ces fractions:

1) Factoriser chacun des dénominateurs au maximum
   $15x^2 \rightarrow$ 3 . 5 . x . x

   $16x^3y^4 \rightarrow$ 2 . 2 . 2 . 2 . x . x . x . y . y . y . y

$20y^3 \rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot y \cdot y \cdot y$

2) Choisir chaque facteur à partir du dénominateur qu'il est le plus fréquent.
   a) 2 apparait 4 fois au maximum.
   b) 3 apparait 1 fois au maximum.
   c) 5 apparait une fois au maximum apparait.
   d) x apparait 3 fois au maximum.
   e) y apparait 4 fois au maximum.

Le PPDC est le produit de tous les facteurs pris au maximum.

PPDC $\rightarrow$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = 240x^3y^4$

Résolvons: $\frac{7}{15x^2} + \frac{11}{6x^3y^4} - \frac{4}{20y^3}$

- Nous divisons le PPDC par chacun des dénominateurs pour trouver facteur commun.

$240x^3y^4 \div 15x^2 = 16xy^4$

$240x^3y^4 \div 16x^3y^4 = 15$

$240x^3y^4 \div 20y^3 = 12x^3y$

- Chaque facteur commun sera multiplié au numérateur qui lui correspond.

$$\frac{7}{15x^2} + \frac{11}{16x^3y^4} - \frac{4}{20y^3} = \frac{7\,(16xy^4)}{240x^3y^4} + \frac{11\,(15)}{240x^3y^4} - \frac{4\,(12x^3y)}{240x^3y^4}$$

$= \frac{112xy^4 + 165 - 48x^3y}{240x^3y^4}$ (Simplifions si possible.)

<u>Autre Exemple</u>

$\frac{7}{x^2-4} + \frac{2}{x^2+4x+4} = \frac{7}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{7}{(x+2)(x-2)} + \frac{2}{(x+2)(x+2)}$

(x + 2) apparait 2 fois au maximum

(x – 2) apparait une fois au maximum.

PPDC → (x + 2) (x + 2) (x – 2)

$\frac{7\,(x+2)}{(x+2)(x+2)(x-2)} + \frac{2\,(x-2)}{(x+2)(x+2)(x-2)} = \frac{7x+14}{(x+2)(x+2)(x-2)} + \frac{2x-4}{(x+2)(x+2)(x-2)}$

$= \frac{9x+10}{(x+2)(x+2)(x-2)}$

<u>Exercices de Pratique</u>

Section 4.1

4.1. 2 Factoriser les expressions quadratiques suivantes. (a=1)

1) p^2+17p+72 2) n^2−9n + 8 3) x^2−9x −10 4) b^2+12b + 32

5) x^2+3x – 70 6) n^2−8n + 15 7) p^2+15p + 54 8) n^2−15n + 56

9) x^2+x −72 10) x^2+ x −30 11) x^2+13x + 40 12) b^2−17b + 70

13) x^2+3x −18   14) a^2−6a −27   15) p^2+7p – 30   16) m^2 −15mn + 56

4.1.3 Factoriser les expressions quadratiques suivantes. (a>1)

1) $7x^{\,2}$−48x + 36   2) $7b^2$+15b + 2   3) $5a^2$−13a – 28   4) $2x^2$−5x + 2

5) $2x^2$+19x + 35   6) $2b^2$−7b + 6   8) $3x^2$−17x + 20   9) $5n^2$−4n – 20

10) $7n^2$−44n +12   11) $4k^2$−17k +4   9) $7v^2$−24v – 16   13) $3r^2$−4r – 4

14) $4r^2$+ r – 3   15) $6p^2$+11p – 7   16) $4r^2$+3r – 7   17) $6x^2$−39x – 21

18) $21k^2$−87k −90   19) $14x^2$−60x + 16   20) $6x^2$+29x + 20

21) $7x^2$+29x – 30   22) $5k^2$ −26k + 24   23) $3r^2$+16r + 21

24) $10a^2$−54a −36   25) $21n^2$+45n −54   25) $3x^2$+17xy +$10y^2$

26) $5x^{\,2}$+28xy −$49y^2$ 27) $4x^2$+9xy +$2y^2$ 28) $4m^2$−9mn−$9n^2$

29) $4x^2$+13xy +$3y^2$ 30) $12x^2$+62xy +$70y^2$ 31) $24x^2$−52xy +$8y^2$

32) $3u^2$+13uv − $10v^2$ 33) $7x^2$−2xy − $5y^2$

34) $5u^2$+31uv −$28v^2$ 35) $4m^2$+6mn+$6n^2$ 36) $4x^2$−6xy +$30y^2$

37) $18u^2$−3uv −$36v^2$ 38) $16x^2$+60xy +$36y^2$ 39) $12x^2$+50xy +$28y^2$

4.1.4 Factoriser les expressions rationnelles, puis simplifier.

1) $\frac{27p}{18p^2-36p}$ 2) $\frac{3k^2+30k}{k+10}$ 3) $\frac{10\text{x}+16}{6x+20}$

4) $\frac{15n^2}{10n+25}$ 5) $\frac{10m^2+8\text{m}}{10m}$ 6) $\frac{x+10}{8x^2+80x}$

7) $\frac{6a-10}{10a+4}$ 8) $\frac{6n^2-21n}{6n^2+3n}$ 9) $\frac{12x^2-42x}{30x^2-42x}$

10) $\frac{35v+35}{21v+7}$ 11) $\frac{9v+54}{v^2-4v-60}$ 12) $\frac{r^2+3r+2}{5r+10}$

13) $\frac{b^2+12b+32}{b^2+4b-32}$ 14) $\frac{10v^2+30v}{35v^2-5v}$ 15) $\frac{n^2+4\text{n}-12}{n^2-7n+10}$

16) $\frac{2n^2+19n-10}{9n+90}$ 17) $\frac{b^2+14b+48}{b^2+15b+56}$ 18) $\frac{k^2-12k+32}{k^2-64}$

19) $\frac{9\text{p}+18}{p^2+4p+4}$ 20) $\frac{3x^2-29x+40}{5x^2-30x-80}$ 21) $\frac{2x^2-10x+8}{3x^2-7x+4}$

22) $\frac{7n^2-32n+16}{4n-16}$ 23) $\frac{n^2-2n+1}{6n+6}$ 24) $\frac{7a^2-26a-45}{6a^2-34a+20}$

25) $\frac{56x-48}{24x^2+56x+32}$ 26) $\frac{56x-48}{24x^2+56x+32}$ 27) $\frac{4k^3-2k^2-2\text{k}}{9k^3-18k^2+9k}$

4.3.2

A. **Trouver le plus petit multiple commun (PPMC)**

1) $2a^3$, $6a^4b^2$, $4a^3b^5$ 2) $x^2-3x, x-3,\ x$ 3) x+2, x −4

4) x^2−25, x +5 5) 4x −8, x −2, 4 6) x^2+3 x +2, x^2+5 x +6

7) 5 x^2y, 25x, $3y^5$ 8) x^2- 1, x−7, x +1 9) x^2−9, x^2−6x+9

10) x^2−7x +10, x^2−2x−15, x^2+x − 6

B. **Trouver le PPDC, puis calculer.**

1) $\frac{3a}{5b^2}-\frac{2}{10a^3b}$ 2) $\frac{x+2}{x-3}+\frac{x-3}{x+2}$ 3) $\frac{x}{x^{2-16}}+\frac{3x}{x^2-8x+16}$

4) $\frac{x+1}{x^2-36}-\frac{2x+3}{x^2+12x+36}$ 5) $\frac{4x}{x^2-x-6}+\frac{x+2}{x-3}$ 6) $\frac{3x}{x-4}+\frac{2}{x+2}$

7) $\frac{5}{x^2-6x}+\frac{2}{x}-\frac{-3}{x-6}$ 8) $\frac{5x+1}{x^2-3x-10}+\frac{4}{x-5}$ 9) $\frac{3x+1}{x^2-x-12}-\frac{2x}{x^2+4x+3}$

10) $\frac{3x}{x^2-6x+8}+\frac{x-2}{x^2+x-20}-\frac{5}{x^2+3x-10}$

Algèbre Universitaire I

Chapitre 5

Tracer des Équations et Inégalités Linéaires

&

Résoudre des Systèmes d’ Équations de 2 Variables

Section 5.1 Système d’équations

2 équations ou plus considérées ensemble s’appellent un ***système d’équations***. Puisque ces équations sont du premier degré, c’est appelé un ***système linéaire***.

$2x - 3y = 6$
$x - y = 1$

2 Méthodes

Nous pouvons utiliser 2 méthodes pour résoudre un système d’équations linéaires : ***Élimination*** et ***Substitution***.

Section 5.1.1

1) Méthode d’Élimination

Nous allons manipuler les deux équations de telle façon que nous éliminons l’une des variables pour pouvoir trouver le résultat de l’autre.

Résolvons ce système d’équations :

$2x - 3y = 6$ ①
$x - y = 1$ ②

Les coefficients des variables de chacune des 2 équations ci-dessus sont différents. Or, pour éliminer une paire de variables, l'un (coefficient) doit être l'opposé de l'autre tel que 2 et -2 ou -3 et 3.

Nous allons manipuler l'une des 2 équations pour que l'un de ses deux variables ait un coefficient opposé au même variable de l'autre. Si nous décidons d'éliminer x, alors le coefficient de x dans l'équation ② doit devenir -2. Pour cela, nous devons multiplier **toute** l'équation par -2.

$$\begin{array}{lcr} 2x - 3y = 6 & & 2x - 3y = 6 \\ -2\,(x - y = 1) & \rightarrow & -2x + 2y = -2 \\ \hline & & -y = 4 \quad \text{ou } y = -4 \end{array}$$

Nous pouvons remplacer la valeur de y dans n'importe laquelle de nos 2 équations et nous trouverons la même valeur pour x. Remplaçons y dans ①.

$2x - 3(-4) = 6 \rightarrow 2x - -12 = 6 \rightarrow 2x + 12 = 6 \rightarrow 2x = -6$; donc $x = -3$.

La solution du système d'équations est le point (-3 , -4) ; c'est-à-dire, sur le graphe, les deux droites correspondant à ces deux équations se rencontrent au point de coordonnées (-3 , -4)

L'autre démarche

Si nous décidons d'éliminer y, alors le coefficient de y dans l'équation ② doit devenir +3. Pour cela, nous devons multiplier **toute** l'équation par -3.

$$\begin{array}{lcr} 2x - 3y = 6 & & 2x - 3y = 6 \\ -3\,(x - y = 1) & \rightarrow & -3x + 3y = -3 \\ \hline & & -x = 3 \quad \text{ou } x = -3 \end{array}$$

Nous pouvons remplacer la valeur de x dans n'importe laquelle de nos 2 équations et nous trouverons la même valeur pour y. Remplaçons x dans ②.

$x - y = 1 \rightarrow -3 - y = 1 \rightarrow -y = 4$; donc $y = -4$.

Section 5.1.2

2) Méthode de Substitution

Nous allons résoudre manipuler les deux équations de telle façon que nous éliminons l'un des variables pour pouvoir trouver le résultat de l'autre.

Résolvons ce système d'équations :

$2x - 3y = 6$ ①
$x - y = 1$ ②
Nous allons résoudre explicitement pour n'importe lequel des 2 variables dans l'une des 2 équations. (Choisissons ② pour la simplicité.)

$x - y = 1$ (Résoudre explicitement pour x.)
$x = y + 1$
Remplaçons y par sa valeur dans ①.

$2x - 3y = 6 \rightarrow \quad 2(y + 1) - 3y = 6 \quad \rightarrow \quad 2y + 2 - 3y = 6 \quad \rightarrow -y + 2 = 6$

$-y = 4$ donc $y = -4$

Nous remplaçons la valeur de y dans n'importe dans ①.

$2x - 3(-4) = 6 \quad \rightarrow \; 2x - -12 = 6 \quad \rightarrow \quad 2x + 12 = 6 \quad \rightarrow \quad 2x = -6$; donc $x = -3$.

Nous pouvons aussi résoudre le système d'équations en **résolvant** l'une des équations **explicitement pour y** et le remplacer dans l'une des équations.

<u>Notes</u>

1) Pour cette méthode, on remplace <u>toujours</u> la valeur explicite d'une équation dans l'autre équation.)

2) Cela peut arriver qu'un système d'équations ne puisse être résolu ; cela veut dire que ces équations n'ont pas de solutions et leurs droites ne se coupent pas as sur le graphe.

Exercices de Pratique

1. $2x + y = 12$ $3x - y = 13$	2. $x + 4y = 6$ $-x + 3y = 8$	3. $-x + 5y = 11$ $x - 2y = -2$	4. $4x + y = 6$ $3x - y = 5$
5. $3x - y = 0$ $2x + 3y = 11$	6. $5x - y = 13$ $3x - 2y = 5$	7. $x + 7y = 20$ $5x + 2y = 34$	8. $-x + 5y = 12$ $-3x + 4y = 3$
9. $4x + 5y = 0$ $2x + 3y = -2$	10. $5x - 3y = 18$ $4x - 6y = 0$	11. $2x + 3y = 7$ $4x + 6y = 14$	12. $2x - 5y = 4$ $6x - 10y = 9$
13. $5x - 6y = 3$ $10x - 12y = 5$	14. $-2x + 14y = 8$ $x - 7y = -4$	15. $2x - 3y = 10$ $3x - 2y = 15$	16. $2x + 3y = 18$ $3x + 2y = 12$
17. $y = 2x + 3$ $2x + y = -1$	18. $X = 3y - 4$ $x = 3y - 4$	19. $6a - 3b = 1$ $8a + 5b = 7$	20. $2a - 6b = -4$ $5a - 7b = -4$
21. $s = 3t - 5$ $t = 3s - 5$	22. $s = 5t - 8$ $t = 5s - 8$	23. $3m - 2n = 8$ $3n = m - 8$	24. $5m - 3n = 2$ $m - 4 = 2n$
25. $3p - 4q = 5$ $3q - 4p = -9$	26. $5p + 6q = 1$ $5p + 6q = -1$	27. $\frac{u}{3} - v = 1$ $u - \frac{v}{2} = 5$	28. $u - \frac{v}{4} = 4$ $\frac{u}{5} - v = -3$