

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Основные понятия.....	4
2. Теория Эйлера устойчивости сжатого стержня.....	5
3. Потеря устойчивости реальных стержней.....	7
4. Исследование устойчивости стержня энергетическим методом.....	10
5. Описание лабораторной установки.....	12
6. Задание.....	13
7. Контрольные вопросы.....	14
Литература.....	14



## 1. Основные понятия

Стационарное состояние механической системы под действием внешних сил называется *состоянием равновесия*. Равновесие может быть как *устойчивым*, так и *неустойчивым*. Особый случай неустойчивого равновесия – *безразличное равновесие*. Устойчивость равновесия определяется по реакции системы на *возмущения*. Равновесие устойчиво, если всевозможные малые возмущения приводят к малым отклонениям системы от положения равновесия<sup>1</sup>.

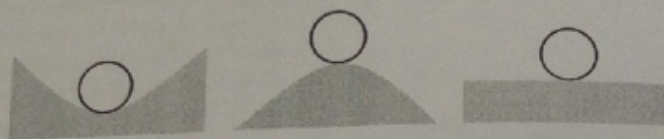


Рис. 1. Слева направо: устойчивое положение равновесия, неустойчивое положение равновесия, безразличное положение равновесия

В данном пособии речь пойдет о потере устойчивости сжатых стержней. При достаточно малой сжимающей силе прямолинейное состояние стержня устойчиво, то есть малое поперечное возмущение, создаваемое сосредоточенными или распределенными силами, неравномерным нагревом и т.д., приводит к малым прогибам. Когда сжимающая сила превышает некоторое *критическое* значение, малые возмущения вызывают большие прогибы, то есть сжатый стержень теряет устойчивость. Сжимающую силу, при которой происходит переход от устойчивого к неустойчивому состоянию равновесия, будем называть *критической*.

Основными методами исследования на устойчивость являются *динамический*, *энергетический* и *статический* методы.

Динамический метод является наиболее общим. Исследование на устойчивость основано на исследовании движения системы, выведенной из положения равновесия (при этом причины, вызвавшие отклонение от равновесия, должны быть устранены). Если в процессе движения система все больше отдаляется от положения равновесия, то это свидетельствует о неустойчивости.

Энергетический метод основан на исследовании экстремальных свойств полной потенциальной энергии системы (сумма потенци-

<sup>1</sup> Если конкретизировать критерии малости возмущений и отклонений, получатся различные формулировки определения устойчивости. Например, определение устойчивости по Ляпунову.



альной энергии внешних сил и потенциальной энергии упругой деформации) в состоянии равновесия [1, 3, 4]. Положение равновесия называется устойчивым, если полная потенциальная энергия системы при любых допустимых<sup>2</sup> малых отклонениях от положения равновесия увеличивается. Если же существуют допустимые отклонения, при которых полная потенциальная энергия уменьшается, то положение равновесия называется неустойчивым. Промежуточный случай относится к безразличному равновесию, которое также часто относят к неустойчивому равновесию. Любое поле смещений, на котором происходит уменьшение полной потенциальной энергии, называется *формой потери устойчивости*.

Для исследования устойчивости сжатого стержня воспользуемся *статическим методом Эйлера*, суть которого изложена в следующем параграфе.

## 2. Теория Эйлера устойчивости сжатого стержня

Метод Эйлера заменяет задачу об устойчивости по отношению к заданным малым возмущениям задачей об исследовании возможности существования двух различных форм равновесия (прямолинейное и изогнутое состояние) стержня при одной и той же сжимающей силе. Появление возможности существования нескольких положений равновесия в одинаковых условиях называется *бифуркацией*.

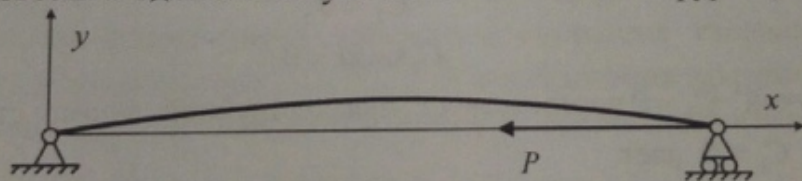


Рис. 2

Рассмотрим прямолинейный стержень длиной  $l$ , концы которого шарнирно закреплены (рис. 2). Пусть под действием сжимающей силы с модулем  $P > 0$  стержень изогнулся (потерял устойчивость). Наша задача определить величину силы, при которой изогнутое состояние стержня является новым положением равновесия.

Рассмотрим произвольное сечение с координатой  $x$ . Условие равновесия части стержня  $(x, l)$  имеет вид (рис. 3).

<sup>2</sup> То есть совместимых со связями.



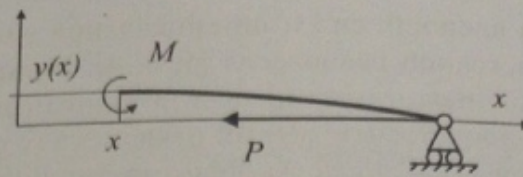


Рис. 3

$$M(x) = -Py < 0, \quad (1)$$

где  $M(x)$  – изгибающий момент в сечении.

Будем считать прогиб стержня  $y(x)$  малой величиной. Тогда из теории изгиба балки следует

$$y'' \approx \frac{M(x)}{EJ}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $J$  – осевой момент сечения. Подставляя выражение (1) в (2), получим дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня:

$$y'' + k^2 y = 0, \quad k^2 = P/EJ. \quad (3)$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx. \quad (4)$$

Граничные условия  $y(0) = y(l) = 0$  дают

$$\begin{aligned} C_2 &= 0, \\ C_1 \sin kl &= 0. \end{aligned}$$

Случай  $C_1 = 0$  соответствует прямолинейной форме стержня, а случай  $C_1 \neq 0$  дает

$$\sin kl = 0.$$

Это возможно, если

$$kl = \pi n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2}, \quad y(x) = C_1 \sin \frac{\pi nx}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Бифуркация является признаком потери устойчивости. Однако, согласно формуле (5), существует бесконечное количество критических сил, соответствующих различным  $n$ . Что же реализуется на практике?



Энергетический анализ (см. параграф 4) показывает, что равновесие нарушается при минимальной критической силе, т.е. в рассматриваемом случае при  $n = 1$ .

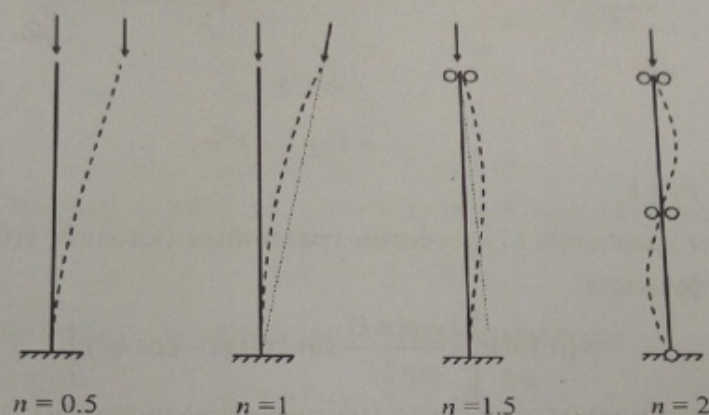


Рис. 4

При других способах закрепления стержня потеря устойчивости происходит при других минимально возможных критических силах, которые могут соответствовать иным значениям  $n$ . Например, на рис. 4 представлены конфигурации с  $n = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ .

Отметим, что теория Эйлера ничего не говорит о возможности существования равновесного изогнутого состояния стержня при промежуточных значениях  $P > P_{кр}$ . Для исследования закритического поведения стержня следует отказаться от предположения о малости прогибов [1, 2].

### 3. Потеря устойчивости реальных стержней

Рассмотренный выше случай является идеальным. Реальные стержни слегка искривлены, а сила не действует строго вдоль оси. Рассмотрим следующие модельные случаи [3].

#### Влияние эксцентриситета силы

Пусть сила действует вдоль оси стержня, но приложена на некотором удалении от оси  $e$  (эксцентриситет). Тогда условие равновесия части стержня принимает вид

$$M(x) = -P(y + e) < 0. \quad (6)$$

Подставив выражение для изгибающего момента (6) в уравнение изогнутой оси балки (2), получим дифференциальное уравнение



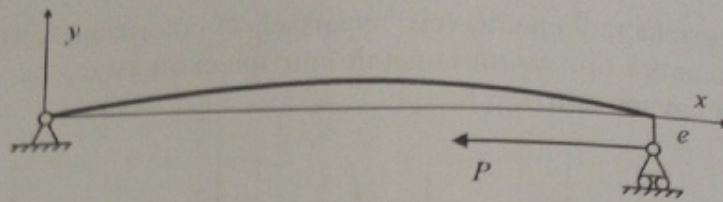


Рис. 5

$$y'' + k^2 y = -k^2 e, \quad (7)$$

где  $k^2 = P/EJ$ .

Решением уравнения (7) с учетом граничных условий  $y(0) = y(l) = 0$  является функция

$$y(x) = e \left[ \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - (1 - \cos kx) \right]. \quad (8)$$

Для максимального прогиба (центр балки) получаем

$$y_{\max}/e = \frac{1 - \cos(kl/2)}{\cos(kl/2)} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{\text{кр}}}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{P/P_{\text{кр}}}\right)}. \quad (9)$$

График, построенный по формуле (9), представлен на рис. 6.

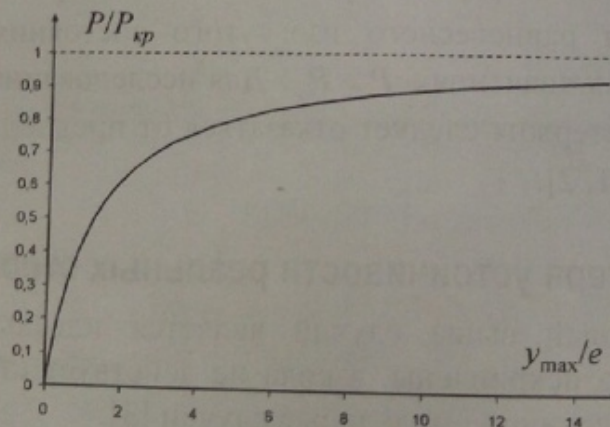


Рис. 6

### Влияние начального прогиба

Пусть сила действует строго вдоль оси балки, но у балки есть первоначальный прогиб  $y_0(x)$ . Будем отсчитывать прогиб  $y(x)$  от первоначального искривленного состояния

$$M = -P(y + y_0), \quad (10)$$

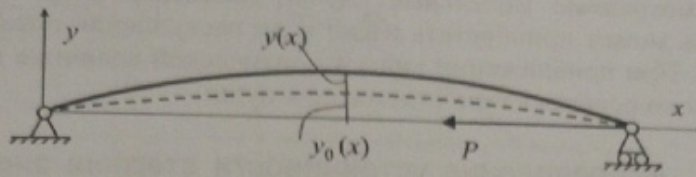


Рис. 7

$$y'' + k^2 y = -k^2 y_0(x). \quad (11)$$

Пусть начальный прогиб задан следующей простой функцией:

$$y_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (12)$$

Тогда с учетом (12) уравнение (11) принимает вид

$$y'' + k^2 y = -k^2 f_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (13)$$

Уравнение (13) можно решить, например, с помощью метода вариации постоянной. Решением уравнения (13) с учетом граничных условий  $y(0) = y(l) = 0$  является

$$y(x) = \frac{k^2 f_0}{(\pi/l)^2 - k^2} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{P/P_{кр}}{1 - P/P_{кр}} f_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad (14)$$

где  $P_{кр} = \pi^2 EJ/l^2$  ( $n=1$ ).

Зависимость  $y(l/2)/f_0 = y_{\max}/f_0$  от  $P/P_{кр}$ , соответствующая формуле (14), представлена на рис. 8.

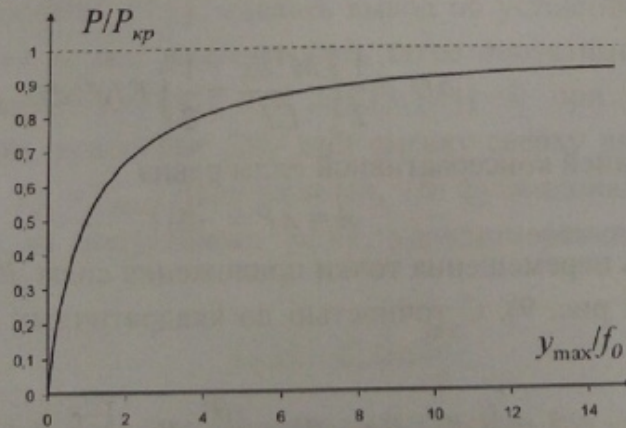


Рис. 8



Рассмотренные модельные случаи показывают, что реальный стержень может приобретать изгиб и до наступления потери устойчивости. При приближении силы к критической величине производная силы по перемещению стремится к нулю.

#### 4. Исследование устойчивости стержня энергетическим методом

Рассмотрим полную потенциальную энергию консервативной системы

$$W = U + \Pi = U - A, \quad (15)$$

где  $U$  – энергия упругой деформации,  $\Pi$  – потенциальная энергия,  $A$  – работа консервативных сил.

Как уже было сказано, состояние равновесия устойчиво, если полная потенциальная энергия системы при любых допустимых малых отклонениях от положения равновесия увеличивается. Состояние равновесия неустойчиво, если найдутся такие допустимые малые отклонения от положения равновесия, что полная потенциальная энергия будет уменьшаться. В безразличном равновесии полная потенциальная энергия не изменяется.

Вернемся к нашей задаче. Пусть  $y(x)$  – произвольное малое отклонение стержня (рис. 2) от равновесного прямолинейного состояния, удовлетворяющее граничным условиям  $y(0) = y(l) = 0$ . При этом потенциальная энергия упругой деформации изменится на величину

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2 dx. \quad (16)$$

Работа внешней консервативной силы равна

$$A = \lambda P = -\Delta \Pi, \quad (17)$$

где  $\lambda$  – модуль перемещения точки приложения силы  $P$ .

Найдем  $\lambda$  (см. рис. 9). С точностью до квадратичных малых величин:

$$\lambda = \int_0^l (dl - dl \cos \theta) = \int_0^l \frac{\theta^2}{2} dl = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (18)$$



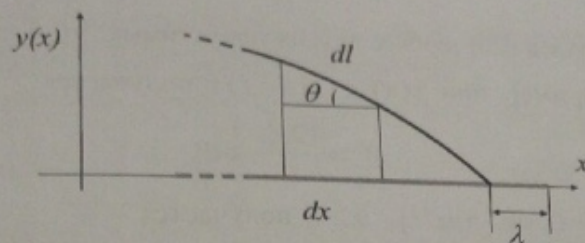


Рис. 9

Тогда с учетом (15) – (18) изменение полной потенциальной энергии при отклонении от положения равновесия равно

$$\Delta W = \frac{1}{2} \left( \int_0^l EJ y''^2 dx - P \int_0^l y'^2 dx \right). \quad (19)$$

Исследуем знак  $\Delta W$  при различных  $P > 0$ . Оба интеграла в (19) положительны для любых  $y(x)$ , тогда  $\Delta W > 0$  при  $P < P^*$  и  $\Delta W < 0$  при  $P > P^*$ , где обозначено

$$P^* = \frac{\int_0^l EJ y''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx}. \quad (20)$$

Отрицательность приращения полной потенциальной энергии  $\Delta W < 0$  означает, что при  $P > P^*$  имеет место неустойчивость. При этом, несмотря на то, что  $\Delta W > 0$  при условии  $P < P^*$  на рассматриваемом отклонении  $y(x)$ , сделать вывод об устойчивости стержня еще нельзя, т.к. может существовать такое допустимое отклонение  $y_1(x)$ , отличное от  $y(x)$ , что  $\Delta W(y_1(x)) < 0$  при  $P < P^*(y(x))$ . Таким образом, уравнение (20) дает оценку сверху для  $P_{кр}$ . Истинное значение  $P_{кр} = P_{min}^*$ . Доказывается, что функционал (20) достигает минимума на допустимых  $y(x)$ , удовлетворяющих уравнению равновесия (2):

$$y(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Тогда из (20) следует уже знакомое выражение для критической силы при  $n = 1$ :

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}.$$



Подстановка в (20) любых других допустимых  $y(x)$  дает значение  $P^* > P_{кр}$ . Например, при  $y(x) = C_1(x-l)x$  получается

$$P_1^* = \frac{12EJ}{l^2} > P_{кр}.$$

При  $y(x) = C_1 \sin(\pi nx/l)$ ,  $n \geq 2$  получается

$$P_2^* = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2} > P_1^* > P_{кр}.$$

## 5. Описание лабораторной установки

Внешний вид лабораторной установки представлен на рис. 10, схема установки представлена на рис. 11.

На лабораторном стенде смонтированы два длинных стержня прямоугольного сечения (линейки). На стержни нанесена миллиметровая шкала. Один стержень закреплен консольно, другой имеет на конце ролик, который может свободно проскальзывать по опоре. Передача сжимающей нагрузки производится винтами, величину сжимающей силы регистрируют датчики силы 1a, 1b. Контроль перемещения точки приложения силы осуществляется с помощью датчиков перемещения 2a, 2b.

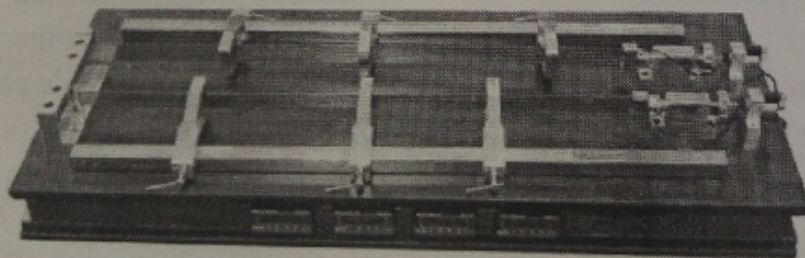


Рис. 10. Внешний вид лабораторной установки

На жесткой раме смонтированы кронштейны с роликами, которые можно перемещать вдоль стержней. Кронштейны фиксируются специальными винтами. Отдельный кронштейн фиксирует перемещение стержня поперек, но не фиксирует угол поворота. Если расположить кронштейны рядом, получается условие, когда запрещены не только перемещения поперек стержня, но и изменение угла.

Материал стержней – сталь с модулем Юнга  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>.



Единицы показаний датчиков силы – Ньютоны, показания датчиков перемещения – десятые доли миллиметров

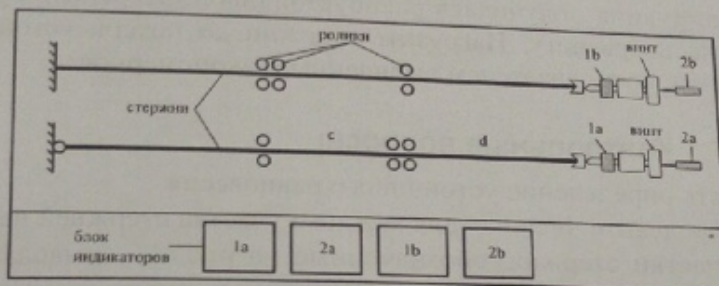


Рис. 11. Схема лабораторной установки. Показан вариант расположения кронштейнов с роликами относительно стержней

## 6. Задание

1. Включите установку. В течение нескольких минут электронные датчики будут прогреваться. Непосредственным измерением с помощью штангенциркуля и микрометра измерьте геометрические характеристики сечений стержней.

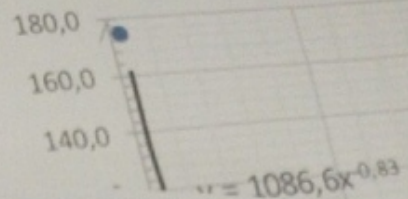
2. Под руководством преподавателя расположите и закрепите кронштейны с роликами на раме. Измерьте длины получившихся участков стержней (всего шесть участков). Для каждого участка определите  $n$ . С учетом граничных условий по теории Эйлера рассчитайте критические силы для каждого участка. Определите наиболее «слабые» участки, именно они должны в эксперименте потерять устойчивость первыми. Нагрузите стержни, используя винты, до потери устойчивости. Для этого снимите показания датчиков перемещения для 8–10 значений силы и отложите полученные значения на графике. С помощью графика определите критическую силу. Сравните расчетные и экспериментальные значения критических сил.

3. Соберите конфигурацию так, чтобы устойчивость терял определенный участок одного из стержней. Аналогично пункту 2 исследуйте зависимость критической силы от длины участка стержня. Экспериментальные данные, согласно (5), удобно представить в координатах  $P_{кр}, 1/l^2$ .

4. Обобщая полученные в предыдущих пунктах данные, определите зависимость критической силы от осевого момента сечения.



300			
360	3,99	0,0499	8,33
420	4,03	0,0504	8,33
480	4,07	0,0509	6,25
		0,0513	4,17



5<sup>3</sup>. Для предложенного преподавателем способа расположения кронштейнов с роликами рассчитайте длины участков стержня, чтобы конструкция получилась равноустойчивой. Закрепите кронштейны согласно расчету. Нагрузите стержни до потери устойчивости. Обсудите с преподавателем выявленные закономерности.

## 7. Контрольные вопросы

1. Дать определение устойчивого равновесия.
2. Определите число  $n$  для каждого участка стержней на рис. 11.
3. Участки стержня, обозначенные на рис. 11 символами «с» и «d», имеют одинаковые  $n$ , однако, как показывает эксперимент, критическая сила для участка «с» несколько выше, чем для участка «d». С чем это связано?

## Литература

1. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: учеб. для вузов. 10-е изд., перераб. и доп. М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 1999. 592 с.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
3. Горшков А.Г., Трошин В.Н., Шалашилин В.И. Сопротивление материалов: учеб. пос. 2-е изд., испр. М.: Физматлит, 2002. 544 с.
4. Никитин Л. В., Рыжак Е. И. Об устойчивости и неустойчивости сжатого блока, прижатого к гладкому основанию // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 4. С. 42–57.