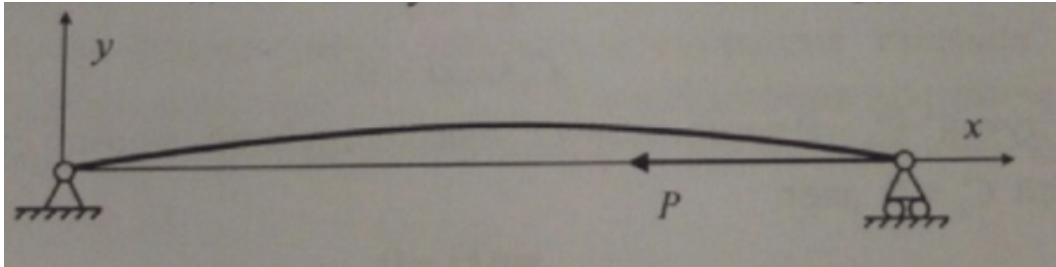


# Устойчивость

## Метод Эйлера

Задача об устойчивости по отношению к заданным малым возмущениям → задача об исследовании возможности существования двух различных форм равновесия (прямое и изогнутое состояние).



Постановка задачи: стержень длиной  $l$  с шарнирно закрепленными концами изогнулся (потерял устойчивость) под действием сжимающей силы  $P$ . Задача: определить силу, при которой изогнутое состояние стержня является новым положением равновесия.

В произвольном сечении с координатой  $x$ :  $M(x)$  — изгибающий момент в сечении. Условие равновесия части стержня  $(x, l)$ :

$$M(x) = -Py. \quad (1)$$

Если прогиб мал, то из теории изгиба балки:

$$y'' \approx \frac{M(x)}{EJ}. \quad (2)$$

Из (1), (2):

$$y'' + k^2 y = 0, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}$$

Из общего решения и граничных условий  $y(0) = y(l) = 0$ :

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 n^2 EJ}{l^2}, \quad y(x) = C_1 \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3)$$

Равновесие нарушается при минимальной критической силе, т.е. в данном случае при  $n = 1$ .

## Потеря устойчивости реальных стержней

### Влияние эксцентриситета силы

Пусть сила действует вдоль оси стержня, но приложена на удалении  $e$  от оси. Уравнение равновесия:

$$M(x) = -P(y + e) \quad (4)$$

Из (2) и (4):

$$y'' + k^2 y = -k^2 e, \quad k^2 = \frac{P}{EJ}.$$

Решение с учетом граничных условий:

$$y(x) = e \left[ \frac{1 - \cos kl}{\sin kl} \sin kx - (1 - \cos kx) \right].$$

Для максимального прогиба:

$$\frac{y_{max}}{e} = \frac{1 - \cos(\frac{kl}{2})}{\cos \frac{kl}{2}} = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}})}{\cos(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_{cr}}})}$$

### Влияние начального прогиба

Пусть у балки есть начальный прогиб  $y_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}$ . Уравнение

равновесия:

$$M = -P(y + y_0). \quad (5)$$

Из (5) и (2):

$$y'' + k^2 y = -k^2 y_0 = -k^2 f_0 \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Решение с учетом граничных условий:

$$y(x) = \frac{k^2 f_0}{(\frac{\pi}{l})^2 - k^2} \sin \frac{\pi x}{l} = \frac{\frac{P}{P_{cr}}}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} f_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$$

### Энергетический метод

Полная потенциальная энергия консервативной системы:

$$W = U + \Pi = U - A, \quad (6)$$

$U$  — энергия упругой деформации,  $\Pi$  — потенциальная энергия,  $A$  — работа консервативных сил.

Пусть  $y(x)$  — произвольное малое отклонения стержня, удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = y(l) = 0$ . Изменение потенциальной энергии упругой деформации:

$$\Delta U = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2 dx}{EJ} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ y''^2 dx. \quad (7)$$

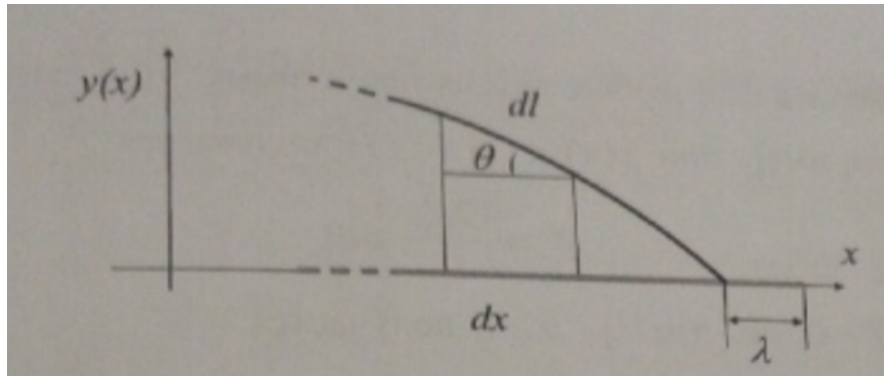
Работа внешней консервативной силы:

$$A = \lambda P = -\Delta \Pi,$$

$\lambda$  — модуль перемещения точки приложения силы  $P$ .

$$\lambda = \int_0^l (dl - dl \cos \theta) = \int_0^l \frac{\theta^2}{2} dl = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx \quad (8)$$

Из (6) - (8):

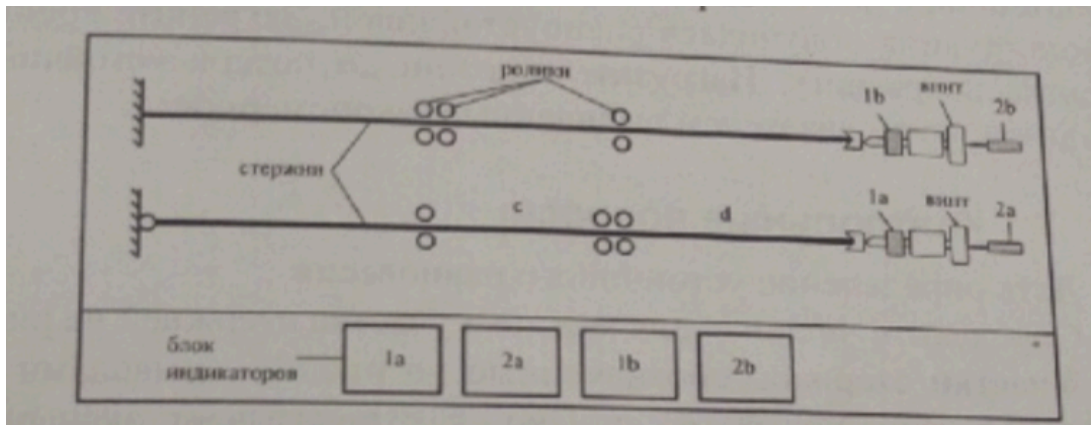


$$\Delta W = \frac{1}{2} \left( \int_0^l EJ y''^2 dx - P \int_0^l y'^2 dx \right)$$

При  $\Delta W < 0$  ( $P > P^*$ ) — неустойчивость, где  $P^* = \frac{\int_0^l EJ y''^2 dx}{\int_0^l y'^2 dx}$ .  $P^*$  достигает

минимума при  $y(x) = C_1 \sin \frac{\pi x}{l} \Rightarrow P_{cr} = P_{min}^* = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$  ( $n = 1$ ).

## Экспериментальная установка

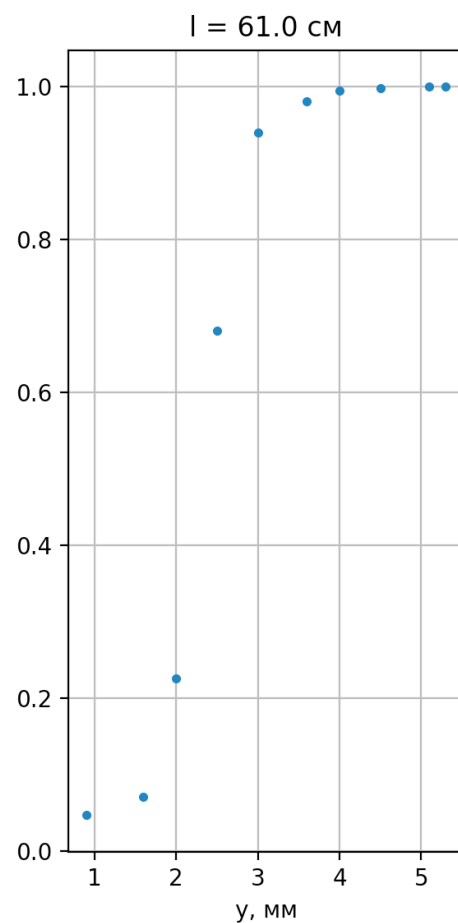
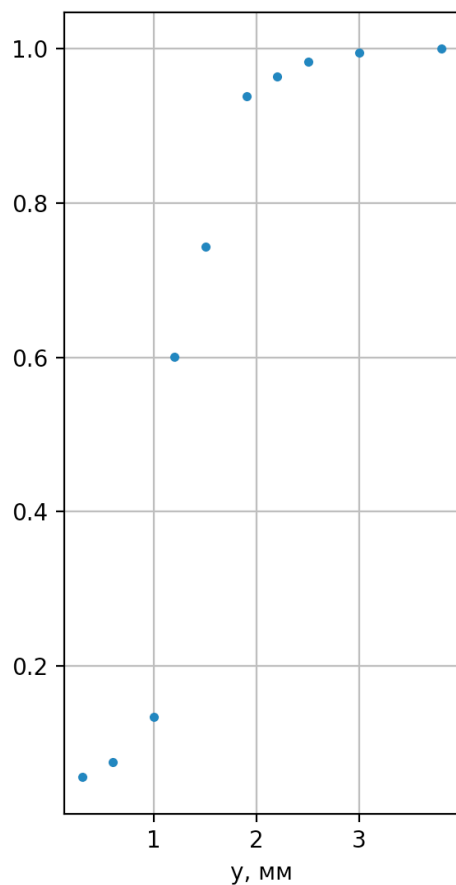
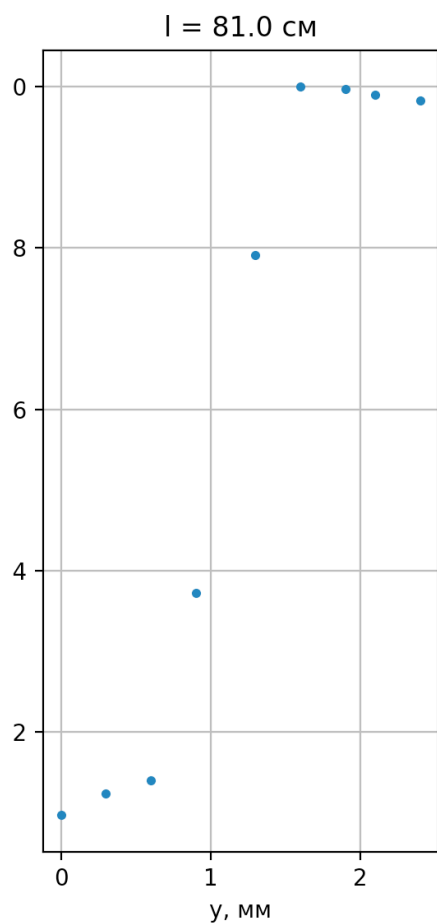


## Экспериментальные данные

1-я балка:

L = 81 см		L = 71 см		L = 61 см	
P, Н	y, мм	P, Н	y, мм	P3, Н	x3, мм
2,9	0	2	0,3	2,5	0,9
3,7	0,3	2,7	0,6	3,8	1,6
4,2	0,6	4,8	1	12	2
11,2	0,9	21,5	1,2	36,2	2,5
23,8	1,3	26,6	1,5	50	3
30,1	1,6	33,6	1,9	52,2	3,6
30	1,9	34,5	2,2	52,9	4
29,8	2,1	35,2	2,5	53,1	4,5
29,6	2,4	35,6	3	53,2	5,1
		35,8	3,8	53,2	5,3

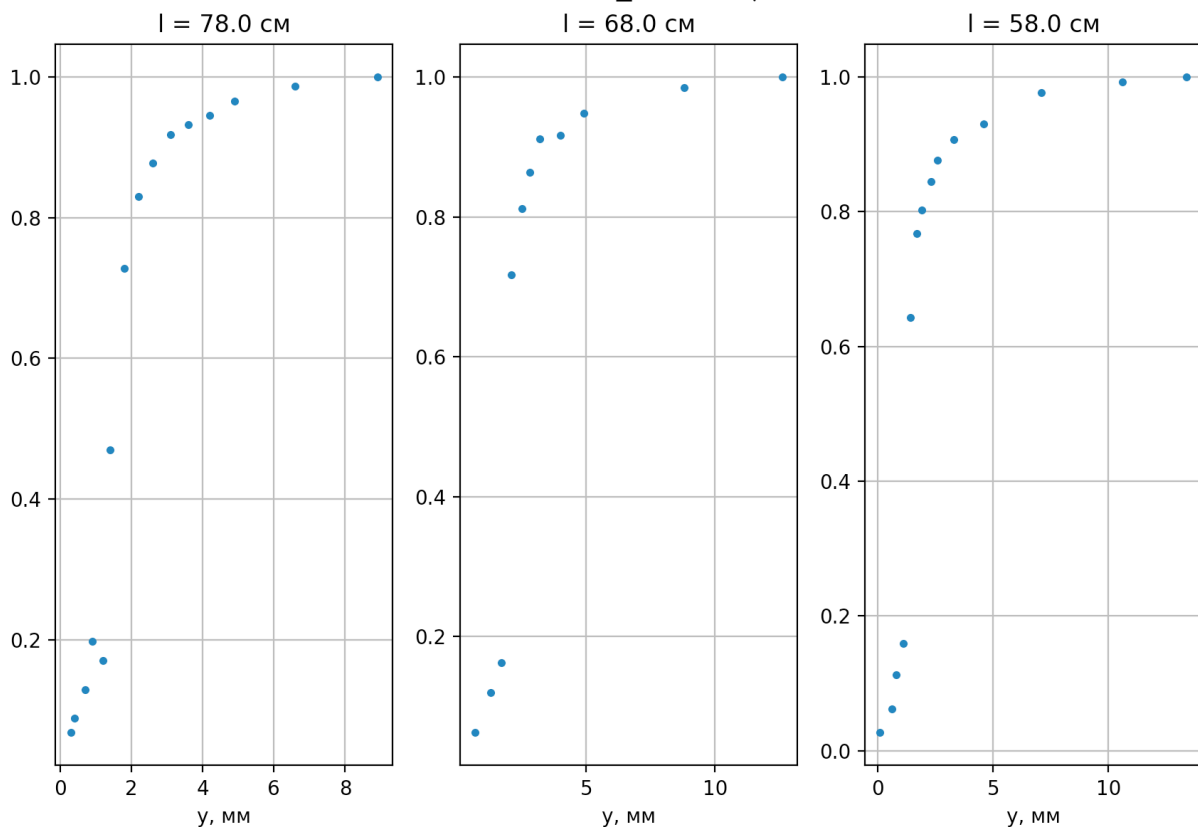
1-я балка  
Зависимость  $P / P_{cr}$  от смещения  
 $l = 71.0$  см



2-я балка:

L = 78 см		L = 68 см		L = 58 см	
P4, Н	x4, мм	P5, Н	x5, мм	P6, Н	x6, мм
1	0,3	1,2	0,7	0,7	0,1
1,3	0,4	2,3	1,3	1,6	0,6
1,9	0,7	3,1	1,7	2,9	0,8
2,9	0,9	13,7	2,1	4,1	1,1
2,5	1,2	15,5	2,5	16,6	1,4
6,9	1,4	16,5	2,8	19,8	1,7
10,7	1,8	17,4	3,2	20,7	1,9
12,2	2,2	17,5	4	21,8	2,3
12,9	2,6	18,1	4,9	22,6	2,6
13,5	3,1	18,8	8,8	23,4	3,3
13,7	3,6	19,1	12,6	24	4,6
13,9	4,2			25,2	7,1
14,2	4,9			25,6	10,6
14,5	6,6			25,8	13,4
14,7	8,9				

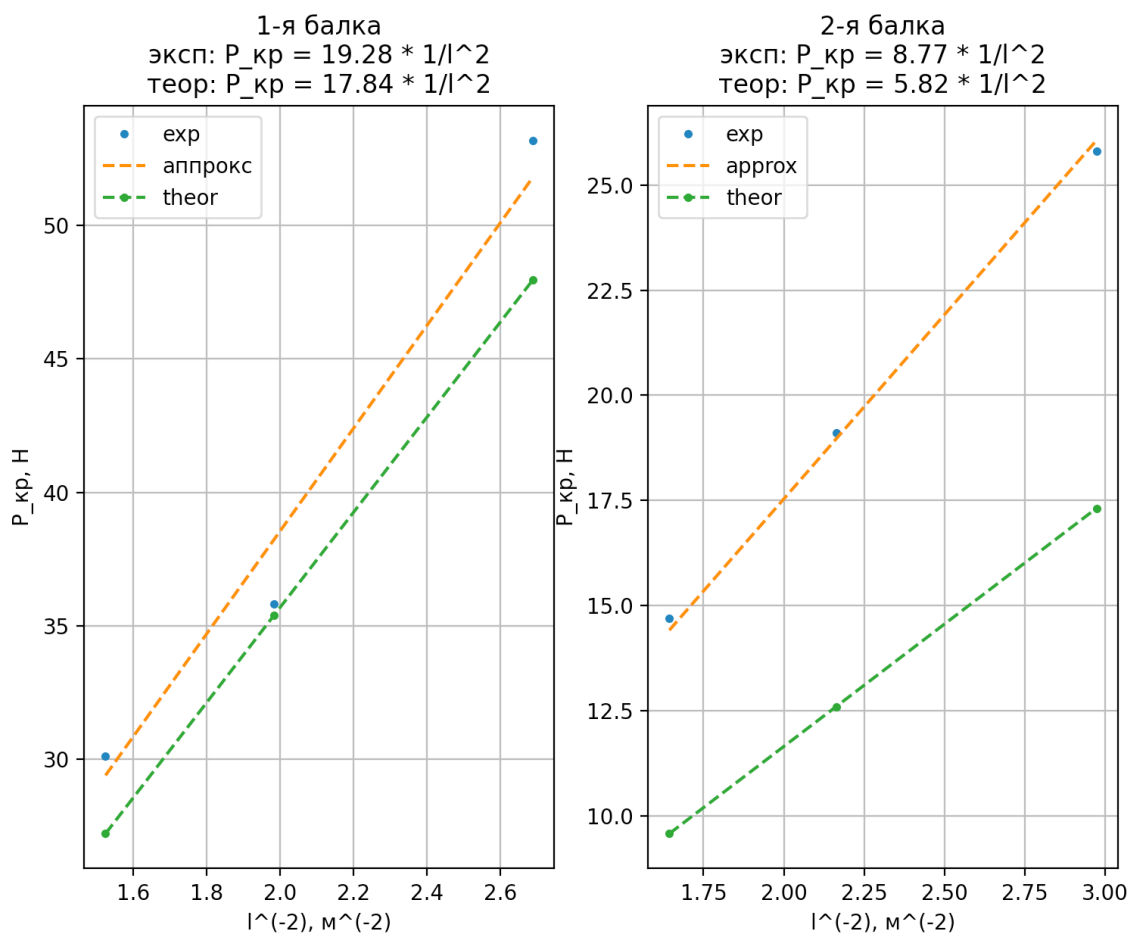
2-я балка  
Зависимость  $P / P_{cr}$  от смещения



## Обработка результатов

Для каждого участка стержней определяем  $P_{cr}$  из графиков и вычисляем  $n$  из формулы (3). Усредняем  $n$  для каждого из стержней и находим теоретическую зависимость  $P_{cr}(\frac{1}{l^2})$  ( $n_1 \approx 1.8 \approx 2$ ,  $n_2 \approx 1.2 \approx 1$ ).

Для этого рассчитываем  $J = \frac{ah^3}{12}$  для каждого из стержней ( $h_1 = h_2 = 0.99$  мм,  $a_1 = 28$  мм,  $a_2 = 36.5$  мм). Сравниваем эту зависимость с экспериментальной.



1-я балка:

Среднее отклонение: 8.0 %

Среднеквадратичное отклонение: 8.0 %

2-я балка:

Среднее отклонение: 51.0 %

Среднеквадратичное отклонение: 45.0 %