

# Рост дендритов

Групповой проект. Этап 1.

---

Дворкина Е.В., Чемоданова А.А., Серёгина И.А., Волгин И.А., Александрова У.В., Голощапов Я.В.

26 марта 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

## Информация

---

Студенты группы НФИбд-01-22:

- Дворкина Е. В.
- Чемоданова А. А.
- Серёгина И. А.
- Волгин И. А.
- Александрова У. В.
- Голощапов Я. В.

- Александрова Ульяна Вадимовна
- студент учебной группы НФИбд-01-22
- Российский университет дружбы народов
- <https://github.com/AleksandrovaUV>



## Вводная часть

---

- Ключевая роль в металлургии и литейном производстве.
- теоретическое понимание процессов кристаллизации,
- улучшение технологий производства материалов.



Рис. 1: Дендритная кристаллизация



- Дендриты
- Кристаллические дендриты

Рис. 2: Двумерные дендритные структуры на основе меди

### Цели:

- Исследовать модель роста дендритов

### Задачи:

- Рассмотреть комбинированную модель роста дендритов.
- Рассмотреть алгоритм построения модели роста дендритов.
- Построить модель роста дендритов.
- Исследовать зависимость от времени числа частиц в агрегате и его среднеквадратичного радиуса в разных режимах.



## Теоретические сведения о модели

---

- плотность  $\rho$ ,
- удельная теплота плавления на единицу массы  $L$ ,
- теплоемкость при постоянном давлении  $c_p$  (также на единицу массы),
- коэффициент теплопроводности  $\kappa$  (для простоты будем считать теплопроводность и плотность не зависящими от температуры и одинаковыми для твердой и жидкой фаз – так называемая симметричная модель),
- температура плавления  $T_m$ .

Безразмерное переохлаждение:

$$S = c_p \frac{(T_m - T_\infty)}{L} \quad (1)$$

При  $S \geq 1$  — полное затвердевание, при  $S < 1$  — частичное.

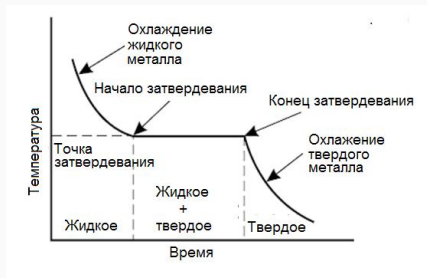
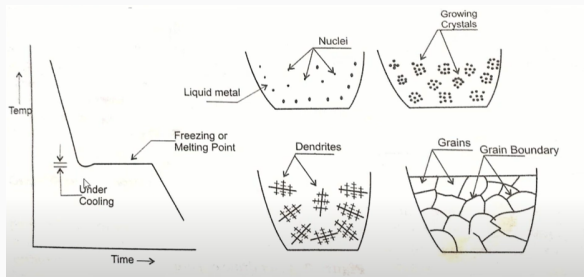


Рис. 3: Взаимосвязь кривизны поверхности и температуры плавления

Для описания изменения температуры со временем в двумерном случае используется уравнение теплопроводности:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \equiv \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

# Скорость роста границы кристаллизации



**Рис. 4:** Стадии затвердевания кристаллических материалов

Скорость движения границы  $V$  связана с градиентом температуры.

**Условие Стефана:**

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \frac{\kappa}{\rho L} (\mathbf{n} \cdot \nabla T|_s - \mathbf{n} \cdot \nabla T|_l) \quad (3)$$

Градиенты температуры в твердой и жидкой фазах определяют поток тепла.

Условие Гибса-Томсона:

Температура границы снижается для компенсации поверхностного натяжения:

$$T_b = T_m \left( 1 - \frac{\gamma T_m}{\rho L^2 R} \right). \quad (4)$$

Кинетическое замедление роста:

$$\Delta T_b = -T_m / \beta V. \quad (5)$$

Здесь  $\beta$  — кинетический коэффициент.

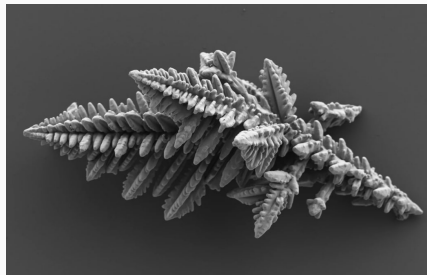


Рис. 5: Демонстрация роста выступов дендрита

Вводится безразмерная температура  $\tilde{T} = c_p(T - T_\infty)/L$ , где  $T_\infty$  — начальная температура расплава. Уравнение теплопроводности для  $\tilde{T}$  имеет вид

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = \chi \nabla^2 \tilde{T}, \quad (6)$$

где  $\chi = \kappa/\rho c_p$  — коэффициент температуропроводности.

Точное выражение для  $\nabla^2 T$  в узле  $(i, j)$

$$\nabla^2 T \approx \frac{\langle T_{(i,j)} \rangle - T_{i,j}}{(4 + 4w)(1 + 2w)h^2}, \quad (7)$$

где  $\langle T_{(i,j)} \rangle$  — среднее значение температуры в соседних узлах,  $w$  — коэффициент, учитывающий влияние диагональных соседей (обычно  $w = 1/2$ ).



$$\hat{T}_{i,j} = T_{i,j} + \frac{\chi \Delta t \nabla^2 T}{m}. \quad (8)$$

$m$  - количество подшагов

## Условие перехода в твердую фазу

Узел переходит из жидкого в твердое состояние, если:

$$T \leq \tilde{T}_m(1 + \eta_{i,j}\delta) + \lambda s_{i,j}, \quad (9)$$

где:

- $\tilde{T}_m$  — безразмерное начальное переохлаждение,
- $\eta_{i,j}$  — случайное число в интервале  $[-1, 1]$ ,
- $\delta$  — величина случайного отклонения температуры (теплового шума),
- $\lambda$  — величина, связанная с капиллярным радиусом,
- $s_{i,j}$  — параметр, учитывающий кривизну границы.

Во время выполнения первого этапа группового проекта мы:

- сделали теоретическое описание модели роста дендритов
- определили задачи дальнейшего исследования