Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.

3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [1].

4 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: `(1132226447%70)+1` = 38 вариант.

Вариант 38

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 19 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Далее будут приведены рассуждения как в лабораторной работе [2].

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения,$x_{k_0} = k$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки. k = 19

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров x_0 ($\theta = x_0 = 0$), а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса θ , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстояниих от полюса. За это время лодка пройдет x , а катер $k - x$ (или $k + x$, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как $\frac{x}{v}$ или $\frac{k-x}{5.1v}$ (во втором случае $\frac{k+x}{5.1v}$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниех можно найти из следующего уравнения:

$$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{5.1v} - \text{в первом случае}$$

$$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{5.1v} - \text{во втором}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{19}{6.1}$ и $x_2 = \frac{19}{4.1}$, задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r - радиальная скорость и -

v_τ тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{d\theta}{dt}$ на радиус r, $r\frac{d\theta}{dt}$.

Получаем:

$$v_\tau = \sqrt{5.1^2 v^2 - v^2} = \sqrt{26.01 v^2 - v^2} = \sqrt{25.01} v$$

Из чего можно вывести:

$$r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{25.01} v$$

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v \\ r\frac{d\theta}{dt} = \sqrt{25.01} v \end{cases}$$

С начальными условиями для первого случая:

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

Или для второго:

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases} \tag{2}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r}{\sqrt{25.01}}$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого найдем аналитическое решение дифференциального уравнения, задающего траекторию движения катера.

Решение Дифференциального уравнения и задачи Коши:

$$\ln r = \frac{\theta}{\sqrt{25.01}} + C$$

$$r = Ce^{\frac{\theta}{\sqrt{25.01}}}$$

$$r = \frac{19}{6.1}e^{\frac{\theta}{\sqrt{25.01}}} \text{ – для случая (1)}$$

$$r = \frac{19}{4.1}e^{\frac{\theta+\pi}{\sqrt{25.01}}} \text{ – для случая (2)}$$

4.1 Построение модели

С помощью языка программирования Julia построим модель для приведенной выше системы дифференциальных уравнений.

```
using DifferentialEquations, Plots


# расстояние от лодки до катера
k = 19
# вычисление x для двух случаев
x1 = k/6.1
```

```
x2 = k/4.1

# начальные условия для 1 случая
r0 = x1
theta0 = (0.0, 2*pi) #диапазон значений

# Начальные условия для 2 случая
r0_2 = x2
theta0_2 = (-pi, pi)

fi=pi/4 #угол под которым двигается лодка

x(t) = tan(fi) * t #движение лодки браконьеров

f(r, p, t) = r/sqrt(25.01) #Функция, описывающая движение катера береговой охраны (ДУ)

# Постановка ДУ с ЗК для 1 случая
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)
sol = solve(prob, saveat=0.01) #шаг для красивой линии

# Постановка ДУ с ЗК для 2 случая
prob_2 = ODEProblem(f, r0_2, theta0_2)
sol_2 = solve(prob_2, saveat=0.01)

#построим траекторию движения лодки
ugol = [fi for i in range(0, 15)] #20 т.к. ограничение радиуса полярных координат 20
x_lims = [x(i) for i in range(0, 15)]
```

Построим траекторию движения катера и лодки в первом случае (рис. 4.1):

```
# Отрисовка траектории движения катера
```

```
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория движения катера (случа
#u - радиус
plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория движения лодки")
```

Рис. 4.1: Траектория движения катера в 1 случае

Теперь найдем точную точку пересечения двух графиков с помощью найденного аналитического решения дифференциального уравнения в первом случае.

$$r = \frac{19}{6.1} e^{\frac{\theta}{\sqrt{25.01}}} \text{ – для случая (1)}$$

```
# Точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны
y(x) = (19 * exp(x/sqrt(25.01))) / 6.1

# Подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахожден
y_result = y(fi)

# Точка пересечения лодки и катера для 1 случая
println("Точка пересечения лодки и катера для 1 случая: ", y_result)
```

Получим следующий результат (рис. 4.2):

```
[93]: # Точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны
y(x) = (19 * exp(x/sqrt(25.01))) / 6.1

# Подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения
y_result = y(fi)

# Точка пересечения лодки и катера для 1 случая
println("Точка пересечения лодки и катера для 1 случая: ", y_result)
```

```
Точка пересечения лодки и катера для 1 случая: 3.644424385870613
```

Рис. 4.2: Нахождение точки пересечения графиков в 1 случае

Построим траекторию движения катера и лодки во втором случае (рис. 4.3):

```
plot(sol_2.t, sol_2.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория движения катера (с

plot!(ugol, x_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория движения лодки")
```

Рис. 4.3: Траектория движения катера в 2 случае

Теперь найдем точную точку пересечения двух графиков с помощью найденного аналитического решения дифференциального уравнения во втором случае.

$$r = \frac{19}{4.1} e^{\frac{\theta + \pi}{\sqrt{25.01}}} \text{ – для случая (2)}$$

```
# Точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая
y2(x) = (19 * exp((x+pi) / sqrt(25.01)))/ 4.1
```

```
# Подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахожден
y2_result = y2(fi)

# Точка пересечения лодки и катера для 2 случая
println("Точка пересечения лодки и катера для 2 случая: ", y2_result)
```

Получим следующее значение (рис. 4.4):

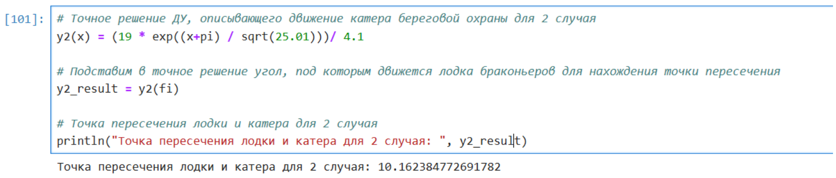

Рис. 4.4: Нахождение точки пересечения графиков в 2 случае

4.2 Реализация в scilab

К сожалению, OpenModelica не поддерживает полярыне координаты, поэтому построила модель в scilab.

```
// Исходные данные
s = 19; // начальное расстояние от лодки до катера
n = 5.1;  // отношение скоростей катера и лодки
fi = %pi / 4; // угол направления движения лодки

// Функция, описывающая движение катера береговой охраны
function dr = f(theta, r)
    dr = r / sqrt(n*n - 1);
endfunction

// Начальные условия для первого случая (катер ближе к полюсу)
r0_1 = s / (n + 1); // x1 = k / (n + 1)
```

```
theta0_1 = 0;

theta = 0:0.01:2*%pi;
r1 = ode(r0_1, theta0_1, theta, f);

// Начальные условия для второго случая (катер дальше от полюса)
r0_2 = s / (n - 1); // x2 = k / (n - 1)
theta0_2 = -%pi;
theta2 = -%pi:0.01:%pi;
r2 = ode(r0_2, theta0_2, theta2, f);

// Функция движения лодки браконьеров
function xt = f2(t)
    xt = tan(fi) * t;
endfunction

t = 0:1:15;

// Графики
clf;
subplot(1,2,1);
polarplot(theta, r1, style=color('green')); // катер (случай 1)
plot2d(t, f2(t), style=color('red')); // лодка

subplot(1,2,2);
polarplot(theta2, r2, style=color('blue')); // катер (случай 2)
plot2d(t, f2(t), style=color('red')); // лодка

// Отображение графиков
```

```
xtitle("Траектории движения катера и лодки (случай 1 - слева, случай 2 - справа", "□",
legend("Катер (случай 1)", "Лодка", "Катер (случай 2)");
```

Получим следующие графики (рис. 4.5).

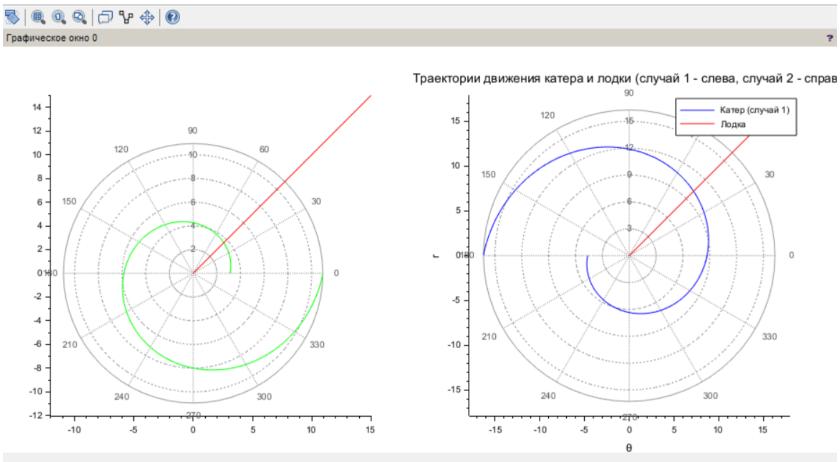

Рис. 4.5: Траектория движения катера на графиках в scilab

Графики, полученные в Scilab и Julia совпали, значит все сделано верно.

5 Выводы

При выполнении данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_погони.
2. С. К.Д. Лабораторная работа 2. Задача о погоне [Электронный ресурс].