Лабораторная работа №8

Модель конкуренции двух фирм

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать простейшую математическую модель конкуренции двух фирм.

2 Задание

2.1 Вариант 38

Случай 1.

Рассмотрим две фирмы, производящие взаимозаменяемые товары одинакового качества и находящиеся в одной рыночной нише. Считаем, что в рамках нашей модели конкурентная борьба ведётся только рыночными методами. То есть, конкуренты могут влиять на противника путем изменения параметров своего производства: себестоимость, время цикла, но не могут прямо вмешиваться в ситуацию на рынке («назначать» цену или влиять на потребителей каким-либо иным способом.) Будем считать, что постоянные издержки пренебрежимо малы, и в модели учитывать не будем. В этом случае динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M2 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2Nq},\ a_2 = \dfrac{p_{cr}}{\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq},\ b = \dfrac{p_{cr}}{\tau_1^2\tilde{p}_1^2\tau_2^2\tilde{p}_2^2Nq},\ c_1 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_1\tilde{p}_1},\ c_2 = \dfrac{p_{cr} - \tilde{p}_1}{\tau_2\tilde{p}_2}$

Также введена нормировка $t = c_1\theta$.

Случай 2.

Рассмотрим модель, когда, помимо экономического фактора влияния (изменение себестоимости, производственного цикла, использование кредита и т.п.), используются еще и социально-психологические факторы – формирование общественного предпочтения одного товара другому, не зависимо от их качества и цены. В этом случае взаимодействие двух фирм будет зависеть друг от друга, соответственно коэффициент перед M_1M_2 будет отличаться. Пусть в рамках рассматриваемой модели динамика изменения объемов продаж фирмы 1 и фирмы 2 описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{d\theta} = 01 \,:\, 10M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\ \\ \dfrac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M_2 - (\dfrac{b}{c_1} + 0.00083)M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2, \end{cases}$$

Для обоих случаев рассмотрим задачу со следующими начальными условиями и параметрами:

$$M(0)_1 = 3.9,\ M(0)_2 = 2.9,\ p_{cr} = 25,\ N = 39, q = 1, \tau_1 = 29,\ \tau_2 = 19, \tilde{p}_1 = 6.9,\ \tilde{p}_2 = 15.9$$

Обозначения:

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$– себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$- безразмерное время

1. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 1.

2. Построить графики изменения оборотных средств фирмы 1 и фирмы 2 без учета постоянных издержек и с веденной нормировкой для случая 2.
3. Найдите стационарное состояние системы для первого случая.

3 Теоретическое введение

Математическому моделированию процессов конкуренции и сотрудничества двух фирм на различных рынках посвящено довольно много научных работ, в основном использующих аппарат теории игр и статистических решений. В качестве примера можно привести работы таких исследователей, как Курно, Стакельберг, Бертран, Нэш, Парето [1].

Следует отметить, что динамические дифференциальные модели уже давно и успешно используются для математического моделирования самых разнообразных по своей природе процессов. Достаточно упомянуть широко использующуюся в экологии модель «хищник-жертва» Вольтерра, математическую теорию развития эпидемий, модели боевых действий

Задача решалась в следующей постановке [2].

На рынке однородного товара присутствуют две основные фирмы, разделяющие его между собой, т.е. имеет место классическая дуополия.

Безусловно, это является весьма сильным предположением, однако оно вполне оправдано в тех случаях, когда доля продаж остальных конкурентов на рассматриваемом сегменте рынке пренебрежимо мала. Хорошим примером может служить отечественный рынок микропроцессоров, который по существу разделили между собой две фирмы: Intel и AMD.

Изменение объемов продаж конкурирующих фирм с течением времени описывается системой дифференциальных уравнений (3.1)

$$
\begin{cases}
\frac{dM_1}{d\theta} = M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_1}{c_1}M_1^2, \\
\frac{dM_2}{d\theta} = \dfrac{c_2}{c_1}M_1 - \dfrac{b}{c_1}M_1M_2 - \dfrac{a_2}{c_1}M_2^2,
\end{cases}
\tag{3.1}
$$

где $a_1 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tilde{p}_1 Nq)}$, $a_2 = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_2^2 * \tilde{p}_2 Nq)}$, $b = \dfrac{p_{cr}}{(\tau_1^2 \tau_2^2 \tilde{p}_1{}^2 \tilde{p}_2{}^2 Nq)}$, $c_1 = \dfrac{(p_{cr} - p_1)}{(\tau_1 \tilde{p}_1)}$, $c_2 = \dfrac{(p_{cr} - p_2)}{(\tau_2 \tilde{p}_2)}$.

- N – число потребителей производимого продукта.
- τ – длительность производственного цикла
- p – рыночная цена товара
- $\tilde{p}$ – себестоимость продукта, то есть переменные издержки на производство единицы продукции.
- q – максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
- $\theta = \dfrac{t}{c_1}$ – безразмерное время

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Реализация в julia

Зададим функцию для решения модели эффективности рекламы. Возьмем интервал $t \in [0; 50]$. Рассмотрим сначала реализацию в Julia. Зададим начальные условия, значения параметров

```
using DifferentialEquations, Plots
p_cr = 25 #критическая стоимость продукта
tau1 = 29 #длительность производственного цикла фирмы 1
p1 = 6.9 #себестоимость продукта у фирмы 1
tau2 = 19 #длительность производственного цикла фирмы 2
p2 = 15.9 #себестоимость продукта у фирмы 2
N = 39 #число потребителей производимого продукта
q = 1; #максимальная потребность одного человека в продукте в единицу времени
a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

u0 = [3.9, 2.9] #начальные значения M1 и M2
p = [a1, a2, b, c1, c2]
tspan = (0.0, 50.0) #временной интервал
```

Зададим функцию для первого случая. Сразу же найдем стационарное состояние системы, для этого воспользуемся библиотекой `LinearAlgebra`, зададим матрицу коэффициент системы линейных уравнений и вектор решений b_1 (добавили у переменной индекс, так как переменная с таким именем уже используется в качестве параметра модели).

```
function f(u, p, t)
    M1, M2 = u
    a1, a2, b, c1, c2 = p
    M1 = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2
    M2 = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2
    return [M1, M2]
end
```

```
using LinearAlgebra
A = [(a1/c1) (b/c1); (b/c1) (a2/c1)]
b1 = [1, (c2/c1)]
x = A \ b1
println("Решение: ", x)
Решение: [5649.976610483586, 4288.470491728287]
```

Получим значение: $M_{1c} = 5649.976610483586, M_{2c} = 4288.470491728287$. Эти значения соответствуют максимальным значениям полученного решения модели.

Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод Tsit5(), с помощью `plot` построим график решения для первого случая (рис. 4.1).

```
prob = ODEProblem(f, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"])
```

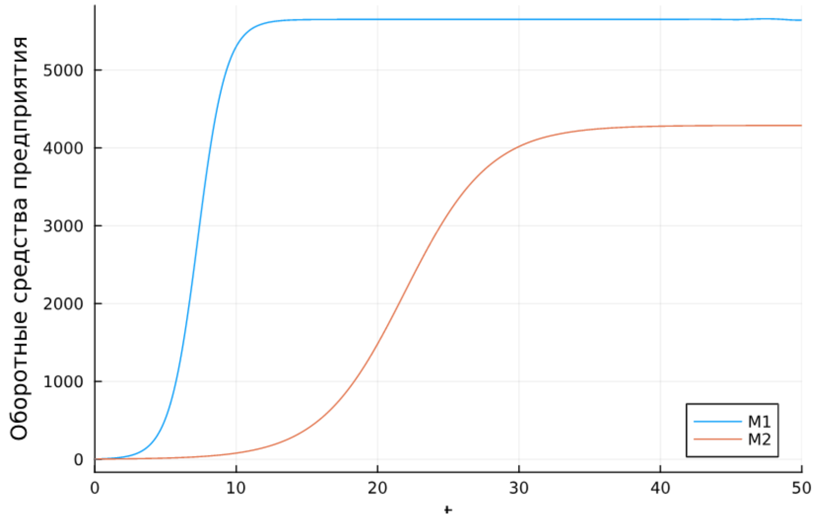

Рис. 4.1: График изменения оборотных средств для первого случая. julia

Зададим функцию для второго случая.

```
function f2(du,u,p,t)
 a1, a2, b, c1, c2 = p
 du[1] = u[1] - (a1/c1)*u[1]*u[1] - (b/c1)*u[1]*u[2]
 du[2] = (c2/c1)*u[2] - (a2/c1)*u[2]*u[2] - (b/c1+0.00083)*u[1]*u[2]
end
```

Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод Tsit5(), с помощью `plot` построим график решения для второго случая (рис. 4.2).

```
prob2 = ODEProblem(f2, u0, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5(), saveat = 0.01)
plot(sol2, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"])
```

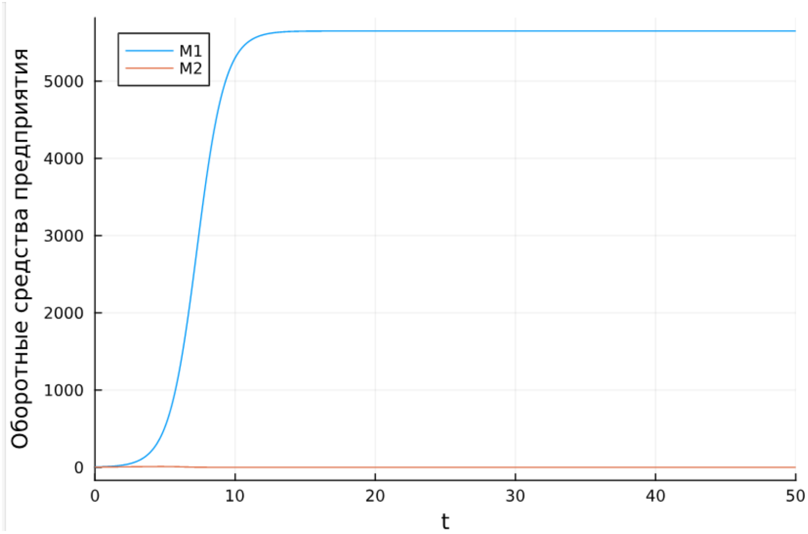

Рис. 4.2: График изменения оборотных средств для второго случая. julia

На графике плохо видно изменения оборотных средств второй фирмы, поэтому построим график с заданными ограничениями:

```
plot(sol2, yaxis = "Оборотные средства предприятия", label = ["M1" "M2"], ylimit=[0, 2
```

По графику видно, что вторая фирма, несмотря на начальный рост, достигнув своего максимального объема продаж (рис. 4.3), начинает нести убытки и, в итоге, терпит банкротство. Динамика роста объемов оборотных средств первой фирмы остается без изменения: достигнув максимального значения, остается на этом уровне.

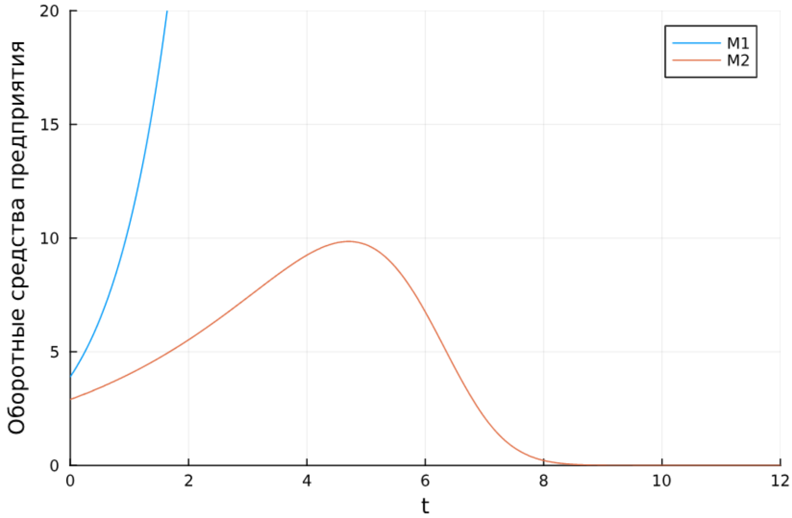

Рис. 4.3: Приближенный график изменения оборотных средств для второго случая. julia

4.2 Реализация в OpenModelica

```
model lab8_1
  parameter Real p_cr = 25;
  parameter Real tau1 = 29;
  parameter Real p1 = 6.9;
  parameter Real tau2 = 19;
  parameter Real p2 = 15.9;
  parameter Real N = 39;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=3.9);
```

```
  Real M2(start=2.9);

equation

  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1)*M1*M2;
end lab8_1;
```

После установки симуляции модели, получим график ее решения (рис. 4.4).

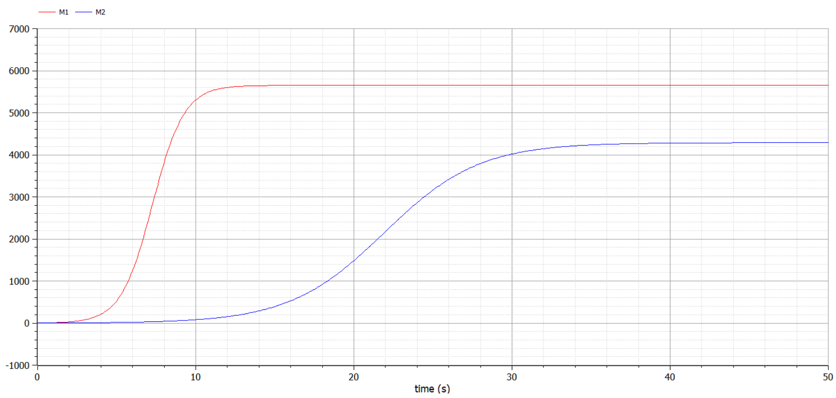

Рис. 4.4: График изменения оборотных средств для первого случая. OpenModelica

```
model lab8_2
  parameter Real p_cr = 25;
  parameter Real tau1 = 29;
  parameter Real p1 = 6.9;
  parameter Real tau2 = 19;
  parameter Real p2 = 15.9;
  parameter Real N = 39;
  parameter Real q = 1;
  parameter Real a1 = p_cr/(tau1^2*p1^2*N*q);
  parameter Real a2 = p_cr/(tau2^2*p2^2*N*q);
  parameter Real b = p_cr/(tau1^2*tau2^2*p1^2*p2^2*N*q);
  parameter Real c1 = (p_cr-p1)/(tau1*p1);
```

```
  parameter Real c2 = (p_cr-p2)/(tau2*p2);

  Real M1(start=3.9);
  Real M2(start=2.9);

equation

  der(M1) = M1 - (a1/c1)*M1^2 - (b/c1)*M1*M2;
  der(M2) = (c2/c1)*M2 - (a2/c1)*M2^2 - (b/c1+0.00083)*M1*M2;

end lab8_2;
```

После установки симуляции модели, получим график ее решения (рис. 4.5).

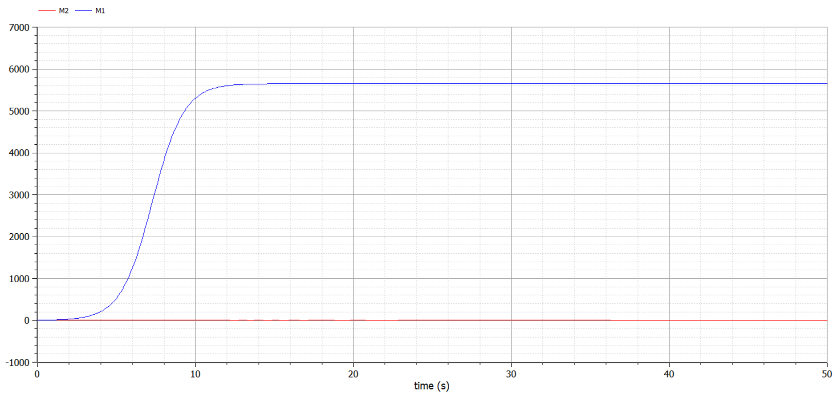

Рис. 4.5: График изменения оборотных средств для второго случая. OpenModelica

На графике плохо видно изменения оборотных средств второй фирмы, поэтому приблизим его (рис. 4.6).

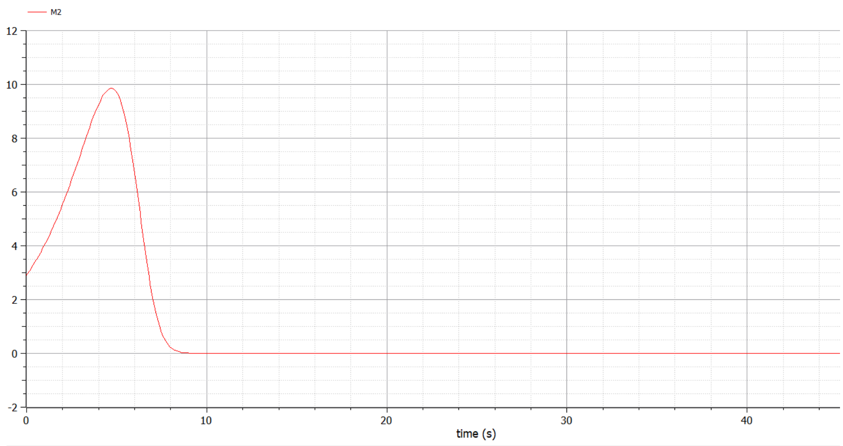

Рис. 4.6: Приближенный график изменения оборотных средств для второго случая. OpenModelica

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

5 Выводы

Построили математическую модель конкуренции двух фирм.

Список литературы

1. Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики. М., УРАО, 1998. 160 с.
2. Кулябов Д.С. Лабораторная работа 8. Модель конкуренции двух фирм [Электронный ресурс].