Лабораторная работа №4

Модель гармонических колебаний

Дворкина Е. В.

17 март 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Докладчик

- Дворкина Ева Владимировна
- студентка
- группа НФИбд-01-22
- Российский университет дружбы народов
- 1132226447@rudn.ru
- https://github.com/evdvorkina

Цель работы

Исследовать математическую модель гармонического осциллятора.

Постройте фазовый портрет гармонического осциллятора и решение уравнения гармонического осциллятора для следующих случаев

1. Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы $\ddot{x} + 21x = 0$
2. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы $\ddot{x} + 2.2\dot{x} + 2.3x = 0$
3. Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы $\ddot{x} + 2.4\dot{x} + 2.5x = 0.2\sin(2.6t)$

На интервале $t \in [0; 72]$ (шаг 0.05) с начальными условиями $x_0 = 1.2,\ y_0 = -1.2$

Выполнение лабораторной работы

Реализация в Julia

```julia
using DifferentialEquations, Plots

tspan = (0, 72)

p1 = [0, 21] # первый элемент - гамма
p2 = [2.2, 2.3] # второй - омега в квадрате
p3 = [2.4, 2.5] #омега уже дана в квадрате!!

du0 = [-1.2] #y - первая производная от x
u0 = [1.2]
```

Реализация в Julia

```julia
#без действий внешний силы
function harm_osc(ddu, du, u, p, t)
 g, w = p
 ddu .= -g.*du.-w .*u
end
```

```
#внешняя сила
f(t) = 0.2*sin(2.6*t)

#с действием в нешней силы
function forced_harm_osc(ddu, du, u, p, t)
 g, w = p
 ddu .= -g.*du.-w .*u .+ f(t)
end
```

```julia
prob1 = SecondOrderODEProblem(harm_osc, du0, u0, tspan, p1)
sol1 = solve(prob1, DPRKN6(), saveat=0.0005)

prob2 = SecondOrderODEProblem(harm_osc, du0, u0, tspan, p2)
sol2 = solve(prob2, DPRKN6(), saveat=0.0005)

prob3 = SecondOrderODEProblem(forced_harm_osc, du0, u0, tspan, p3)
sol3 = solve(prob3, Tsit5(), saveat=0.0005)
```

```julia
# Функция для построения графиков колебаний
function plot_oscillations(sol, title)
    plot(sol, vars=(0, 1), label="y", xlabel="Время t", ylabel="", title=titl
    plot!(sol, vars=(0, 2), label="x", xlabel="Время t", ylabel="", title=tit
end
```

```julia
# Построение графиков для sol1
plot_oscillations(sol1, "Колебания без затухания и внешней силы")

plot(sol1, vars=(2, 1), label="y от x", xlabel="x", ylabel="y",
    title="Фазовый портрет без внешней силы и затухания")
```

Реализация в OpenModelica. Модель для колебания без затухания и без действия внешних сил:

```
Real x(start=1.2);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w=21;
parameter Real g=0;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*x-g*y;
```

Реализация в OpenModelica. Модель для колебания с затуханием и без действия внешних сил:

```
Real x(start=1.2);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w=2.3;
parameter Real g=2.2;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*x-g*y;
```

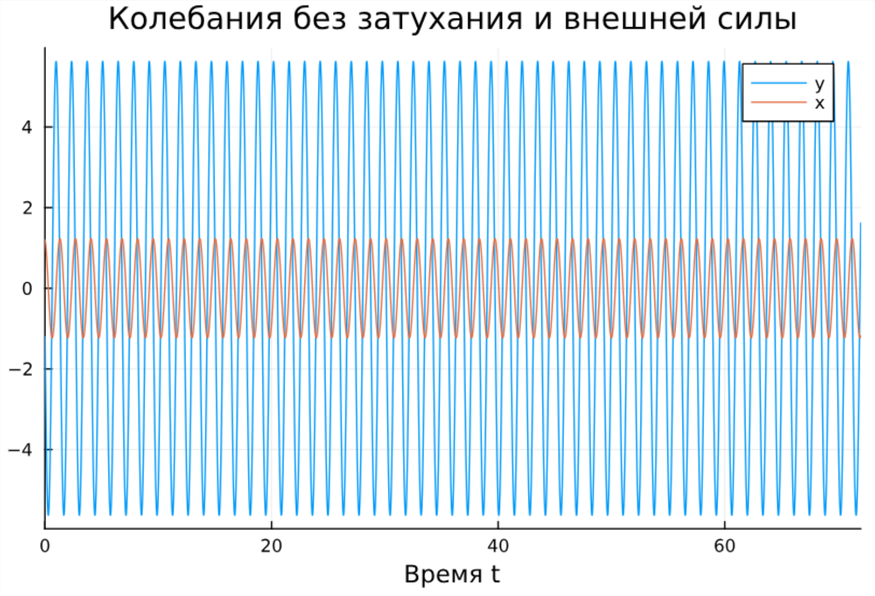
Реализация в OpenModelica. Модель для колебания с затуханием и действием внешних сил:

```
Real x(start=1.2);
Real y(start=-1.2);

parameter Real w=2.5;
parameter Real g=2.4;
Real p;

equation
der(x) = y;
der(y) = -w*x-g*y+p;
p = 0.2*sin(2.6*time);
```

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы



{#fig:002

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

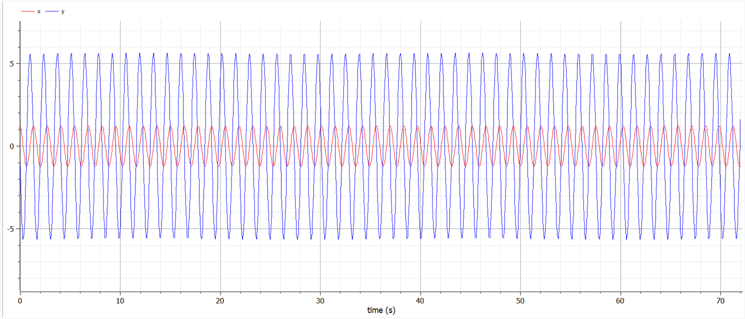


Рис. 1: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

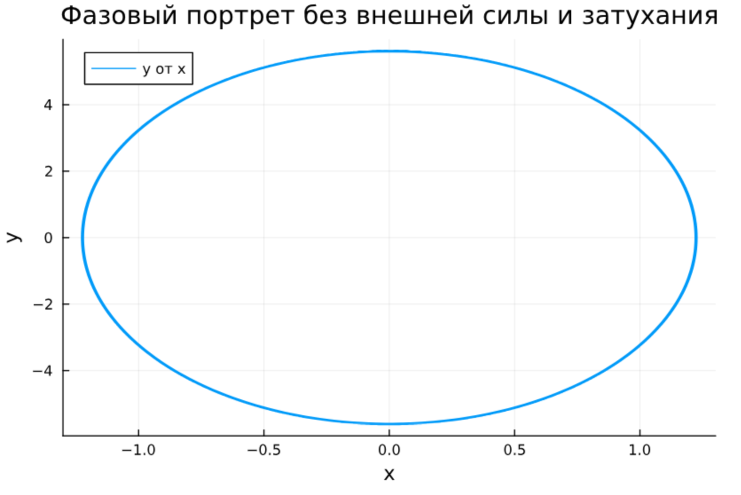


Рис. 2: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. Фазовый портрет. Julia

Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы

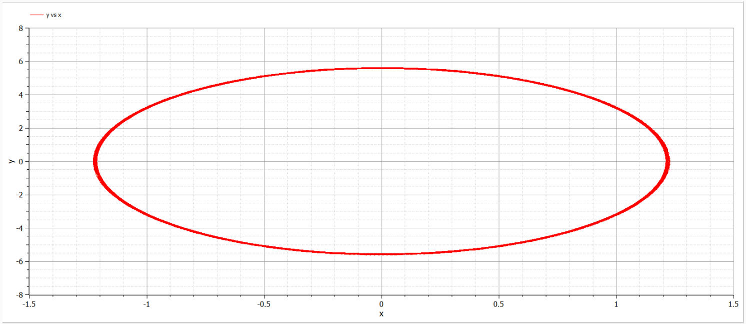


Рис. 3: Колебания гармонического осциллятора без затуханий и без действий внешней силы. Фазовый портрет. OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

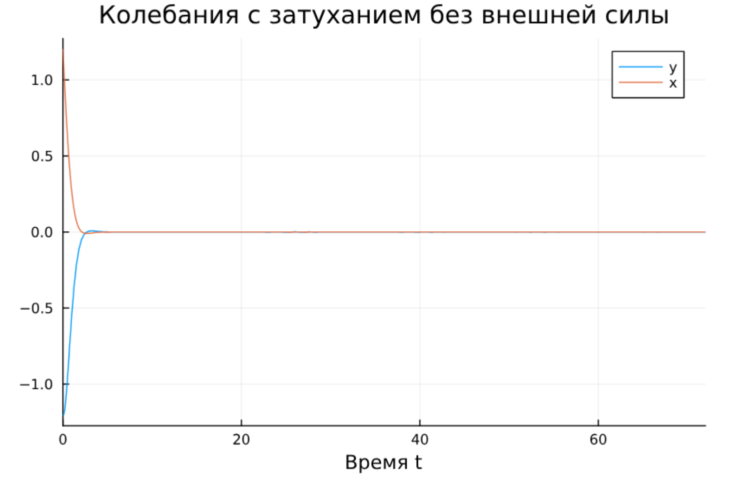


Рис. 4: Колебания гармонического осциллятора с затуханем и без действий внешней силы. Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

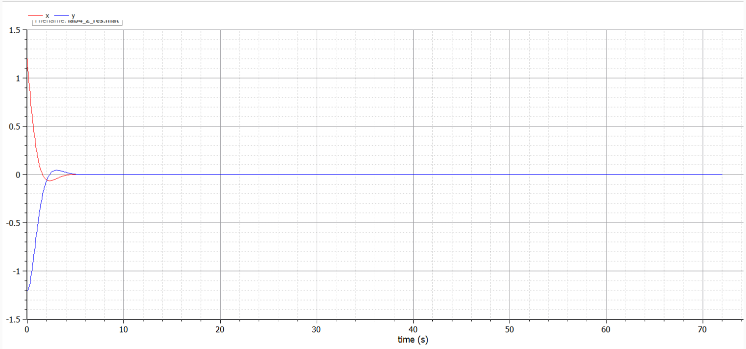


Рис. 5: Колебания гармонического осциллятора с затуханим и без действий внешней силы. OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

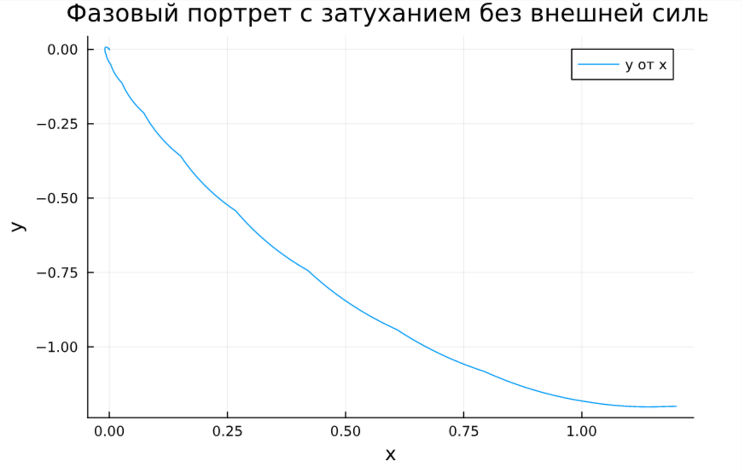


Рис. 6: Колебания гармонического осциллятора с затуханий и без действий внешней силы. Фазовый портрет. Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и без действий внешней силы

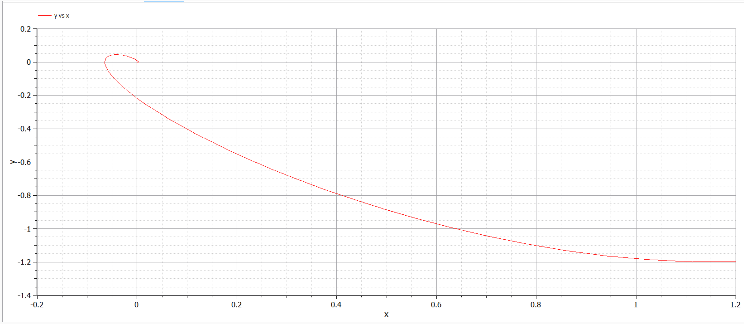


Рис. 7: Колебания гармонического осциллятора с затуханий и без действий внешней силы. Фазовый портрет. OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

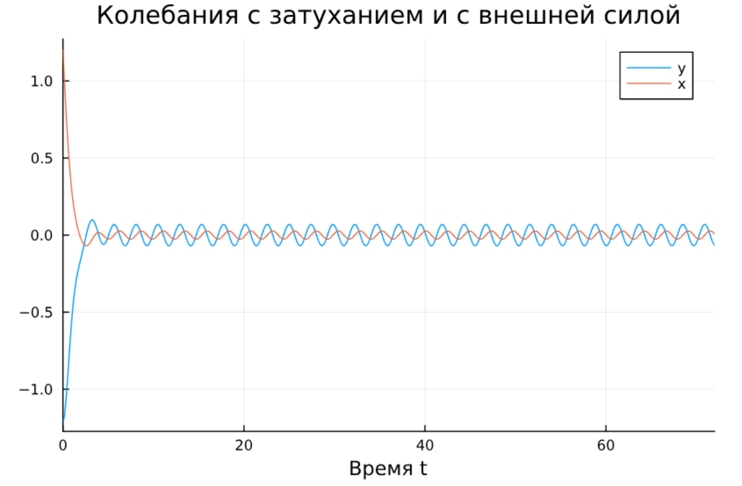


Рис. 8: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы. Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

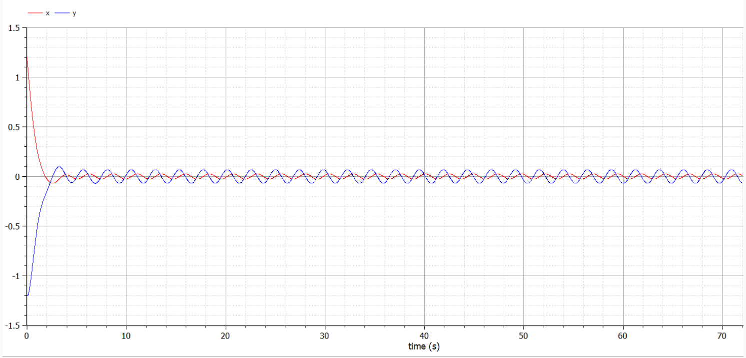


Рис. 9: Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действий внешней силы. OpenModelica

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

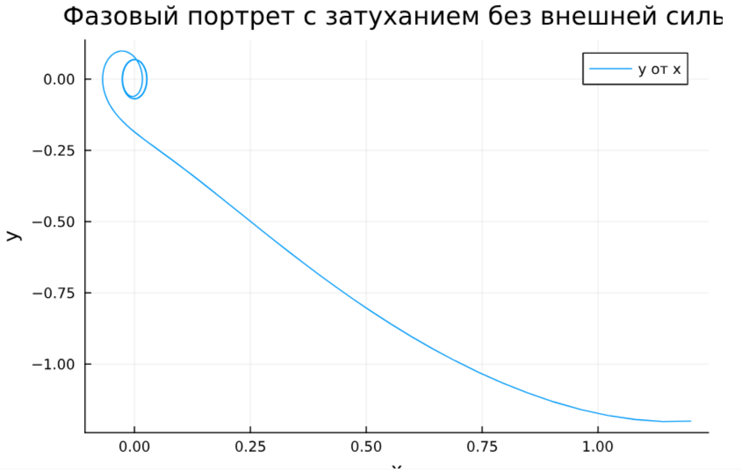


Рис. 10: Колебания гармонического осциллятора с затуханий и под действий внешней силы. Фазовый портрет. Julia

Колебания гармонического осциллятора с затуханием и под действием внешней силы

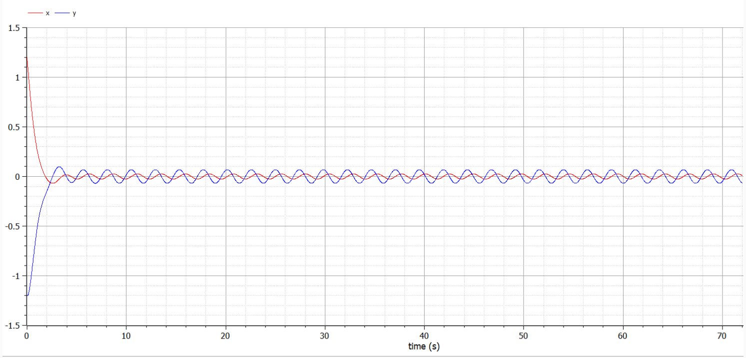


Рис. 11: Колебания гармонического осциллятора с затуханий и под действий внешней силы. Фазовый портрет. OpenModelica

Вопросы к лабораторной работе

Запишите простейшую модель гармонических колебаний

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где:

- x — переменная, описывающая состояние системы (например, смещение грузика),
- ω_0 — собственная частота колебаний,
- $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ — вторая производная по времени.

Дайте определение осциллятора

Осциллятор — это система, которая совершает колебания, то есть меняет своё состояние вблизи положения равновесия.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где:

- x — переменная состояния системы,
- γ — параметр, характеризующий потери энергии (например, трение или сопротивление),
- ω_0 — собственная частота колебаний,
- $\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial t}$ и $\ddot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ — первая и вторая производные по времени.

3. Запишите модель математического маятника

Модель математического маятника является частным случаем гармонического осциллятора. Для малых углов отклонения $(\theta \ll 1)$ уравнение движения математического маятника записывается как:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0,$$

где:

- θ — угловое смещение маятника от вертикали,
- g — ускорение свободного падения,
- l — длина подвеса маятника,
- $\ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ — вторая производная углового смещения по времени.

Это уравнение можно переписать в стандартной форме гармонического осциллятора:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ – собственная частота колебаний маятника.

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

- Введем новую переменную y, равную первой производной исходной переменной:

$$y = \dot{x}.$$

- Выразим вторую производную через новую переменную:

$$\ddot{x} = \dot{y}.$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

- Подставим эти выражения в исходное уравнение второго порядка. Например, для уравнения консервативного осциллятора:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

получаем:

$$\dot{y} + \omega_0^2 x = 0.$$

4. Запишите алгоритм перехода от дифференциального уравнения второго порядка к двум дифференциальным уравнениям первого порядка

- Запишем систему из двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\omega_0^2 x. \end{cases}$$

- **Фазовый портрет** — это графическое представление всех возможных состояний системы в фазовом пространстве (пространстве переменных состояния). Для осциллятора фазовое пространство обычно строится в координатах (x, y), где x — переменная состояния, а $y = \dot{x}$ — её скорость изменения.
- **Фазовая траектория** — это кривая в фазовом пространстве, описывающая изменение состояния системы во времени. Каждая точка на фазовой траектории соответствует определённому состоянию системы в заданный момент времени.

Выводы

Построили математическую модель гармонического осциллятора и провели анализ.