Лабораторная работа №6

Модель эпидемии

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать простейшую математическую модель эпидемии (SIR).

2 Задание

2.1 Вариант 38

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове ($N = 12700$) в момент начала эпидемии ($t = 0$) число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) $I(0) = 170$, А число здоровых людей с иммунитетом к болезни $R(0) = 57$. Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени $S(0) = N - I(0) - R(0)$.

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если $I(0) \leq I^*$;
2. если $I(0) > I^*$.

3 Теоретическое введение

3.1 Модель эпидемии SIR

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из N особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через $S(t)$. Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их $I(t)$. А третья группа, обозначающаяся через $R(t)$ – это здоровые особи с иммунитетом к болезни [1].

До того, как число заболевших не превышает критического значения I^*, считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда $I(t) > I^*$, тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.
Таким образом, скорость изменения числа $S(t)$ меняется по закону (3.1)

$$\frac{dS}{dt} = \begin{cases} -\alpha S, & \text{если } I(t) > I^* \\ 0, & \text{если } I(t) \le I^* \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится (3.2)

$$\frac{dI}{dt} = \begin{cases} \alpha S - \beta I, & \text{если } I(t) > I^* \\ -\beta I, & \text{если } I(t) \le I^* \end{cases} \tag{3.2}$$

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни) (3.3)

$$\frac{dR}{dt} = \beta I \tag{3.3}$$

Постоянные пропорциональности α и β — это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось * однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени $t = 0$ нет особей с иммунитетом к болезни $R(0) = 0$, а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей $I(0)$ и $S(0)$ соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: $I(0) \le I^*$ и $I(0) > I^*$

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Реализация в Julia

Зададим начальные значения, время интегрирования и параметры модели:

```
using DifferentialEquations, Plots


N = 12700
I_0 = 170
R_0 = 57
S_0 = N - I_0 - R_0
u0 = [S_0, I_0, R_0]
p = [0.5, 0.1]
tspan = (0.0, 50.0)
```

4.1.1 Случай $I(0) \leq I^*$

Рассмотрим случай, когда число заболевших не превышает критического значения I^*, то есть считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых.

Зададим функцию для нашего случая по формулам, также зададим задачу Коши с помощью `ODEProblem`, с помощью `solve` решим ее. Используем `plot` для построения графика (рис. 4.1).

```
function sir_2(u,p,t)
    (S,I,R) = u
```

```
    (b, c) = p
    dS = 0
    dI = -c*I
    dR = c*I
    return [dS, dI, dR]
end
prob_2 = ODEProblem(sir_2, u0, tspan, p)
sol_2 = solve(prob_2, Tsit5(), saveat = 0.1)
plot(sol_2, label = ["S" "I" "R"])
```

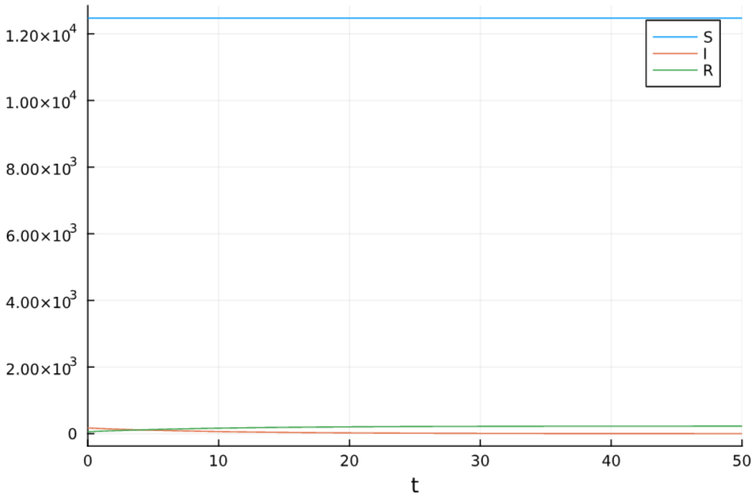

Рис. 4.1: График изменения числа особей для случая $I(0) \leq I^*$. Julia

Можно увидеть, что число здоровых уязвимых не изменяется, так как в этом случае все заражённые изолированы. При это заражённые выздоравливают и приобретают иммунитет.

4.1.2 Случай $I(0) > I^*$

Рассмотрим случай, когда число заболевших превышает критическое значения I^*, то есть считаем, что инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Аналогично предыдущему случаю, зададим по формулам для случая функцию, в которой опишем систему дифференциальных уравнений. Также зададим задачу Коши с помощью `ODEProblem`, с помощью `solve` решим ее. Используем `plot` для построения графика (рис. 4.2).

```
function sir(u,p,t)
    (S,I,R) = u
    (b, c) = p
    dS = -(b*S)
    dI = (b*S) - c*I
    dR = c*I
    return [dS, dI, dR]
end
prob = ODEProblem(sir, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.1)
plot(sol, label = ["S" "I" "R"])
```

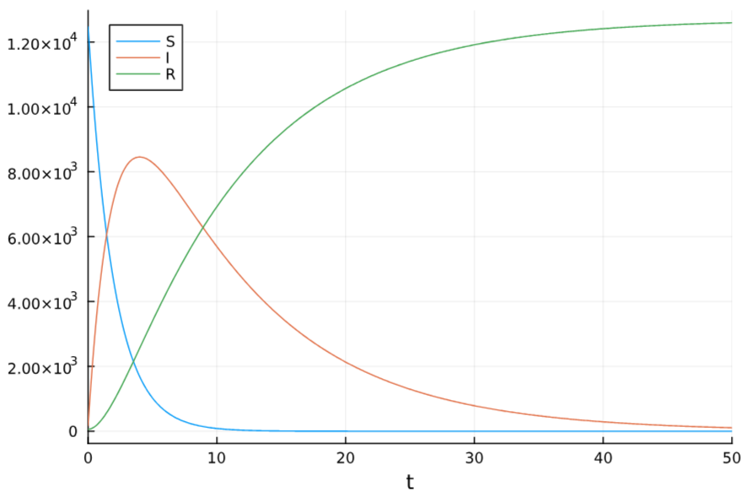

Рис. 4.2: График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. Julia

Можно увидеть, что сначала количество зараженных увеличивается, как и количество приобретающих иммунитет, при этом уменьшается количество здоровых без иммунитета. Затем количество зараженных начинает уменьшаться, а другие две категории изменяются так же, как раньше, но медленнее. Максимальное значение заболевших показывает время прохождения порога эпидемии.

4.2 Реализация в OpenModelica

Зададим те же модели в OpenModelica

4.2.1 Случай $I(0) \leq I^*$

Рассмотрим случай, когда число заболевших не превышает критического значения I^*, то есть считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых (рис. 4.3).

```
model lab6_1
  parameter Real I_0 = 170;
  parameter Real R_0 = 57;
  parameter Real N = 12700;
  parameter Real S_0 = N-I_0-R_0;
  parameter Real b = 0.5;
  parameter Real c = 0.1;

  Real S(start=S_0);
  Real I(start=I_0);
  Real R(start=R_0);

equation
  der(S) = 0;
  der(I) = - c*I;
  der(R) = c*I;
```

```
end lab6_1;
```

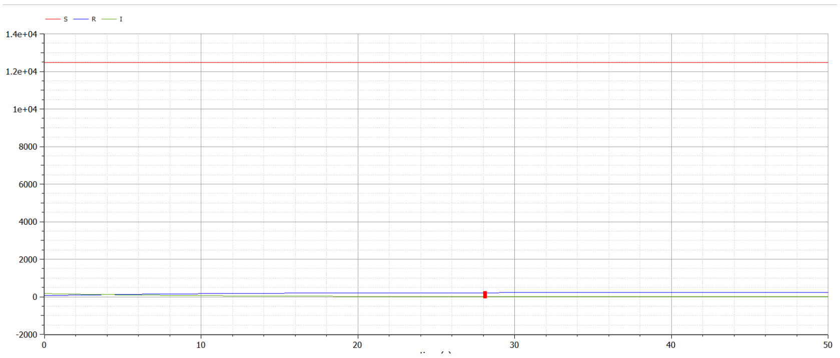

Рис. 4.3: График изменения числа особей для случая $I(0) \leq I^*$. OpenModelica

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

4.2.2 Случай $I(0) > I^*$

Рассмотрим случай, когда число заболевших превышает критическое значения I^*, то есть считаем, что инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей (рис. 4.4).

```
model lab6_2
  parameter Real I_0 = 170;
  parameter Real R_0 = 57;
  parameter Real N = 12700;
  parameter Real S_0 = N-I_0-R_0;
  parameter Real b = 0.5;
  parameter Real c = 0.1;

  Real S(start=S_0);
  Real I(start=I_0);
  Real R(start=R_0);
```

```
equation
  der(S) = -b*S;
  der(I) = b*S - c*I;
  der(R) = c*I;
end lab6_2;
```

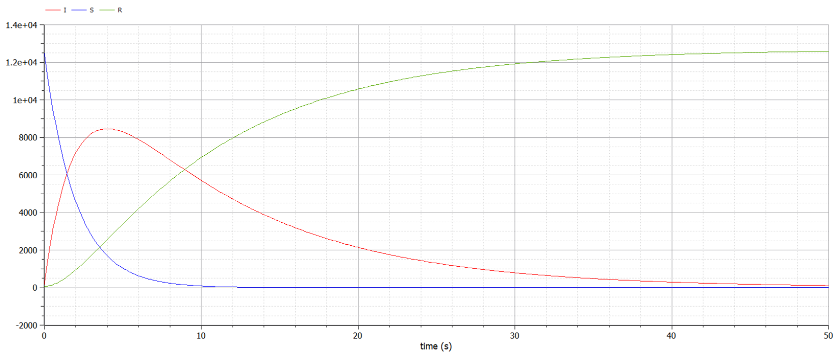

Рис. 4.4: График изменения числа особей для случая $I(0) > I^*$. OpenModelica

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

5 Выводы

Построили математическую модель эпидемии.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Лабораторная работа 6. Модель эпидемии SIR [Электронный ресурс].