Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

Список иллюстраций

1 Цель работы

Исследовать математическую модель хищник-жертва.

2 Задание

2.1 Вариант 38

Для модели «хищник-жертва» (2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0.7x(t) + 0.06x(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = 0.6y(t) - 0.07x(t)y(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 8$, $y_0 = 15$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Теоретическое введение

3.1 Модель хищник-жертва

Модель “Хищник-жертва” основывается на следующих предположениях [1] :

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)

2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса (экспоненциальный рост с постоянным темпом), при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными

4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t) \end{cases} \tag{3.1}$$

В этой модели (3.1) x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c -

естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников. Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Найдём стационарное состояние системы (3.1). Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} ax(t) - bx(t)y(t) = 0 \\ -cy(t) + dx(t)y(t) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Из полученной системы (3.2) получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = c/d$, $y_0 = a/b$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Поиск стационарного состояния системы

Найдём стационарное состояние системы (2.1). Для этого приравняем её правые части к нулю.

$$\begin{cases} -0.7x(t) + 0.06x(t)y(t) = 0 \\ 0.6y(t) - 0.07x(t)y(t) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\begin{cases} -0.7 + 0.06y(t) = 0 \\ 0.6 - 0.07x(t) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Из полученной системы получаем, что стационарное состояние системы будет в точке $x_0 = 0.6/0.07 = 60/7 = 8,571428$, $y_0 = 0.7/0.06 = 35/3 = 11,(6)$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки.

4.2 Реализация в Julia

Зададим начальные значения функций и параметры, а также интервал интегрирования.

```
using DifferentialEquations, Plots
# Начальные условия
u0 = [8, 15]
p = [-0.7, -0.06, -0.6, -0.07]
tspan = (0.0, 50.0)
```

Зададим функцию для решения модели хищник-жертва. Для задания проблемы используется функция `ODEProblem`, а для решения – численный метод `Tsit5()`:

```
# система ДУ, описывающей модель Лотки-Вольтерры
function LV(u, p, t)
    x, y = u
    a, b, c, d = p
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end

prob = ODEProblem(LV, u0, tspan, p)
sol = solve(prob, Tsit5())
```

С помощью `plot` строим графики решения модели, а также фазовый портрет (рис. 4.1, 4.2).

```
plot(sol, title = "Модель Лотки-Вольтерры",
    xaxis = "Время", yaxis = "Численность популяции",
    label = ["жертвы" "хищники"])

plot(sol, vars=(1, 2), label="y от x",
    xlabel="x, жертвы", ylabel="y, хищники",
    title="Фазовый портрет")
```

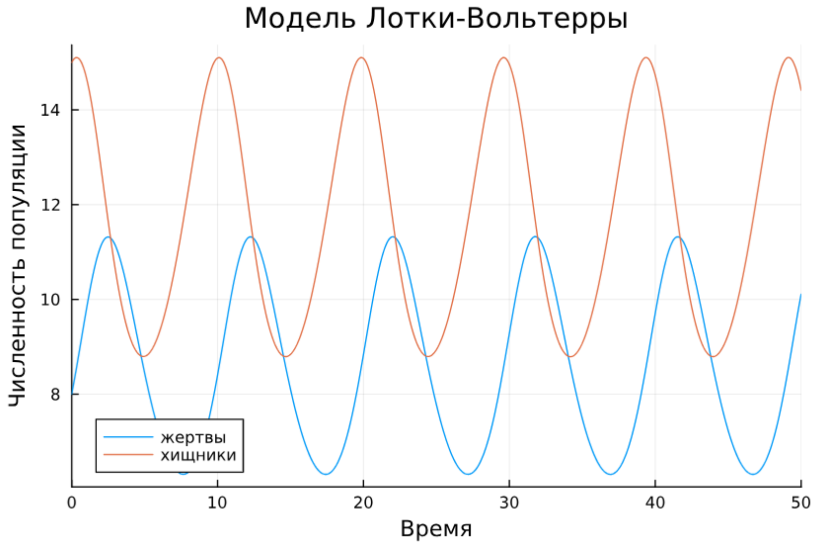

Рис. 4.1: Решение модели при $x_0 = 8,\ y_0 = 15$. Julia

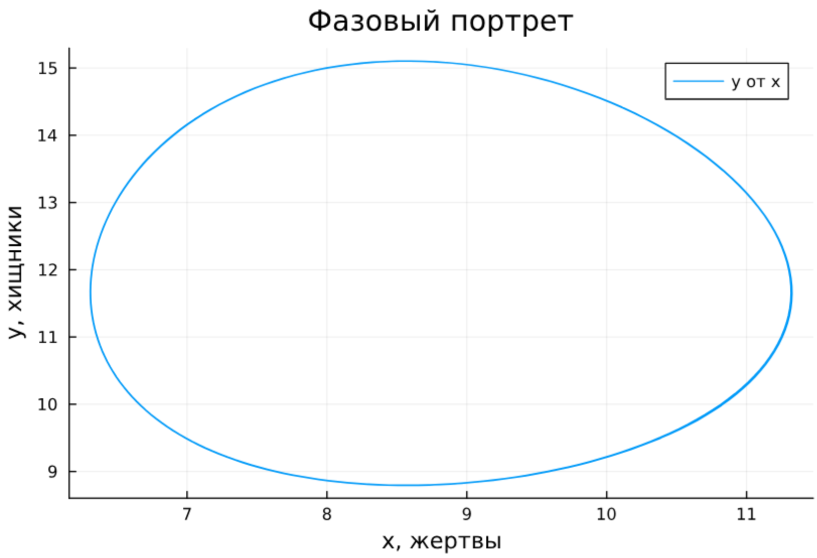

Рис. 4.2: Фазовый портрет модели при $x_0 = 8,\ y_0 = 15$. Julia

Проверим найденное стационарное состояние с помощью вычислений в программе, для этого используем деление соответствующих параметров и получим x_c, y_c. Если это стационарное состояние системы,то на графике решения мы не увидим изменения функций, а на фазовом портрете получим одну точку. Поэтому зададим проблему со стационарным состоянием в виде начального условия и решим ее:

```
# проверка стационарной точки
x_c = p[3]/p[4]
y_c = p[1]/p[2]
u0_c = [x_c, y_c]
prob2 = ODEProblem(LV, u0_c, tspan, p)
sol2 = solve(prob2, Tsit5())
```

С помощью plot построим графики решения и фазовый портрет (рис. 4.3, 4.4).

```
plot(sol2, xaxis = "Время",
    yaxis = "Численность популяции",
    label = ["Жертвы" "Хищники"])


plot(sol2, vars=(1, 2), label="y от x",
    xlabel="x, жертвы", ylabel="y, хищники",
    title="Фазовый портрет", xlimit = [0,15],
    ylimit=[0,15], lw=5)
```

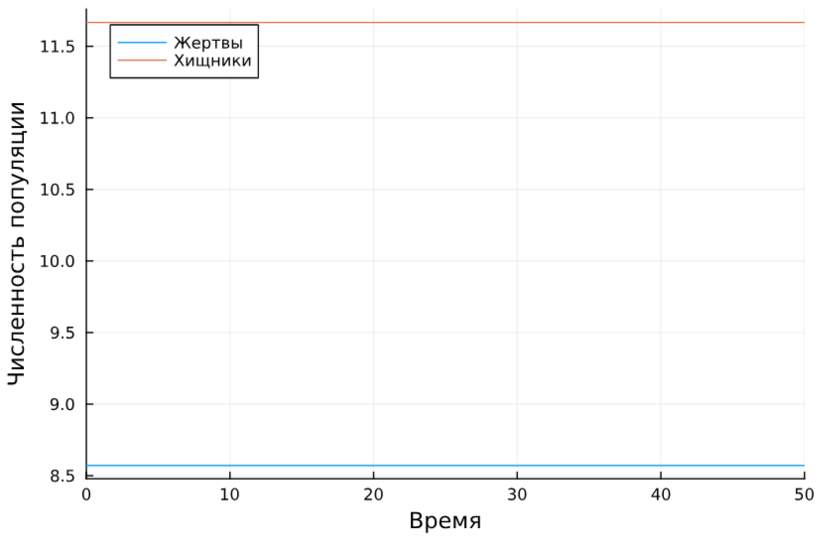

Рис. 4.3: Решение модели при $x_0 = x_c$, $y_0 = y_c$. Julia

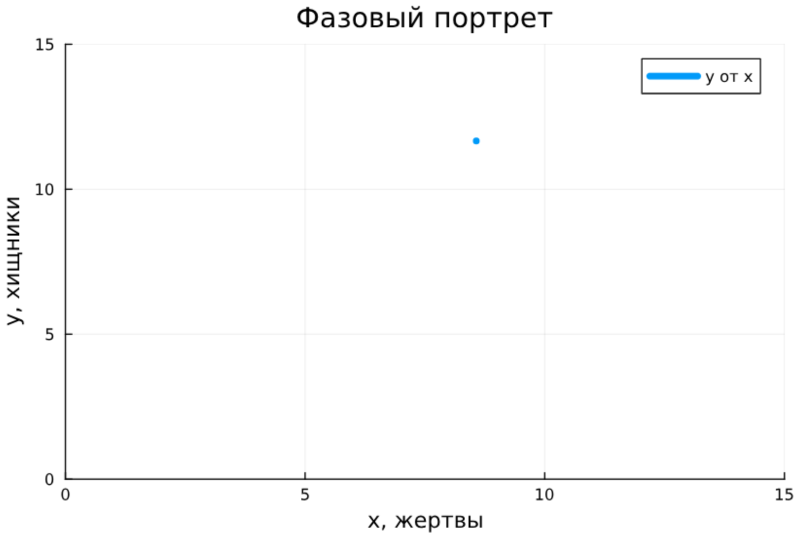

Рис. 4.4: Фазовый портрет модели при $x_0 = x_c$, $y_0 = y_c$. Julia

Видим, что значения решений остаются неизменными, значит, мы верно определили стационарное состояние системы.

4.3 Реализация в OpenModelica

Сначала зададим модель с данными в условиях варианта начальными значениями.

```
model lab5_1


parameter Real a=-0.7;
parameter Real b=-0.06;
parameter Real c=-0.6;
parameter Real d=-0.07;


parameter Real x0=8;
parameter Real y0=15;
```

```
Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation

der(x) = a*x - b*x*y;
der(y) = -c*y + d*x*y;

end lab5_1;
```

После установки симуляции получим следующие графики решения модели и фазового портрета (рис. 4.5, 4.6)

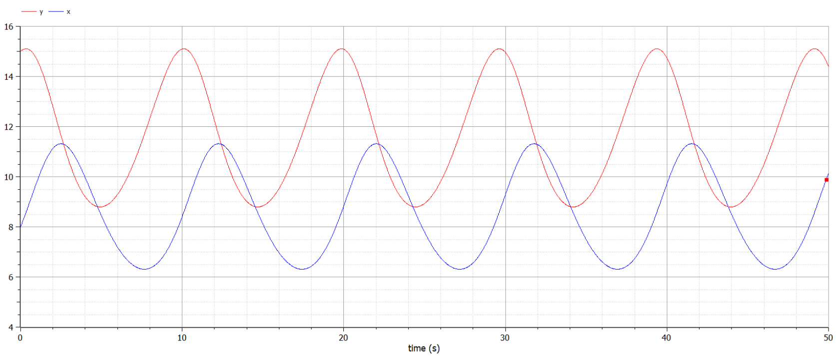

Рис. 4.5: Решение модели при $x_0 = 8,\ y_0 = 15$. OpenModelica

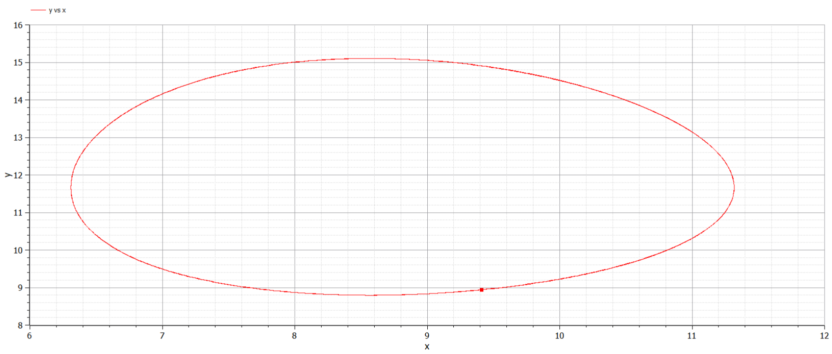

Рис. 4.6: Фазовый портрет модели при $x_0 = 8,\ y_0 = 15$. OpenModelica

Далее поменяем начальное значение на стационарное состояние системы:

```
model lab5_2
parameter Real a=-0.7;
parameter Real b=-0.06;
parameter Real c=-0.6;
parameter Real d=-0.07;

parameter Real x0=c/d;
parameter Real y0=a/b;

Real x(start=x0);
Real y(start=y0);

equation

der(x) = a*x - b*x*y;
der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5_2;
```

После установки симуляции получим следующие графики решения модели и фазового портрета (рис. 4.7, 4.8)

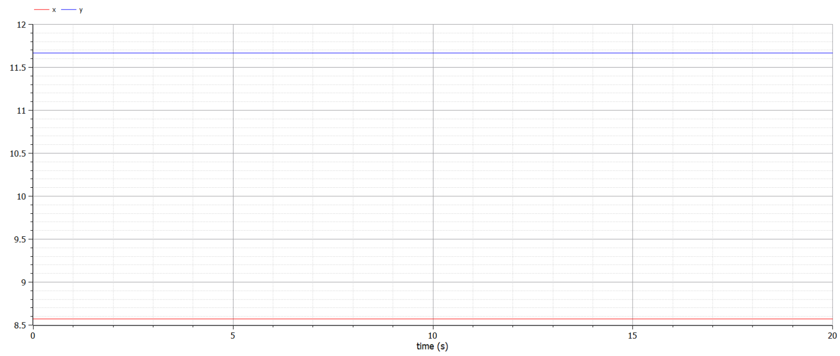

Рис. 4.7: Решение модели при $x_0 = x_c$, $y_0 = y_c$. OpenModelica

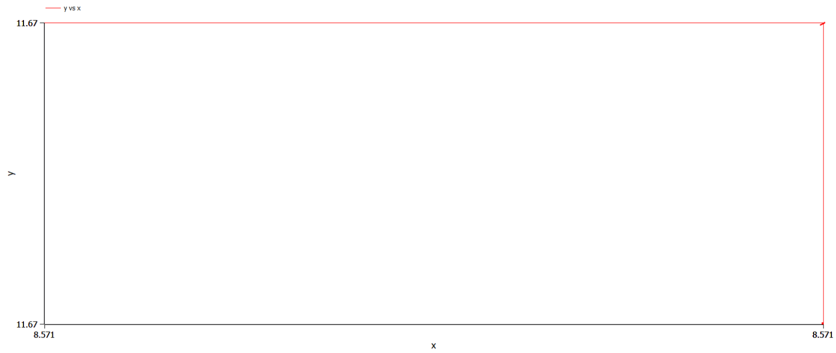

Рис. 4.8: Фазовый портрет модели при $x_0 = x_c$, $y_0 = y_c$. OpenModelica

Графики, полученнные в OpenModelica идентичны графикам в Julia.

5 Выводы

Построили математическую модель хищник жертва и провели анализ.

Список литературы

1. Кулябов Д.С. Лабораторная работа 5. Модель хищник-жертва [Электронный ресурс].