Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

# 1 Цель работы

Построить математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задаче о погоне.

# 2 Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 11,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки

# 3 Теоретическое введение

Кривая погони — кривая, представляющая собой решение задачи о «погоне», которая ставится следующим образом. Пусть точка A равномерно движется по некоторой заданной кривой. Требуется найти траекторию равномерного движения точки P такую, что касательная, проведённая к траектории в любой момент движения, проходила бы через соответствующее этому моменту положение точки A [1].

# 4 Выполнение лабораторной работы

Формула для выбора варианта: (1132226447%70)+1 = 38 вариант.

**Вариант 38**

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 19 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 5,1 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Далее будут приведены рассуждения как в лабораторной работе [2].

Запишем уравнение описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).

Принимем за , – место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки. = 19

Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров (), а полярная ось проходит через точку нахождения катера береговой охраны.

Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса , только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

Чтобы найти расстояние (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время катер и лодка окажутся на одном расстоянииx от полюса. За это время лодка пройдет , а катер (или , в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как или (во втором случае ). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояниеx можно найти из следующего уравнения:

Отсюда мы найдем два значения и , задачу будем решать для двух случаев.

После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки . Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: - радиальная скорость и - тангенциальная скорость. Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, . Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем .

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости на радиус , .

Получаем:

Из чего можно вывести:

Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

С начальными условиями для первого случая:

Или для второго:

Исключая из полученной системы производную по , можно перейти к следующему уравнению:

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Найдем точку пересечения траектории катера и лодки. Для этого найдем аналитическое решение дифференциального уравнения, задающего траекторию движения катера.

Решение Дифференциального уравнения и задачи Коши:

## 4.1 Построение модели

С помощью языка программирования Julia построим модель для приведенной выше системы дифференциальных уравнений.

using DifferentialEquations, Plots  
  
# расстояние от лодки до катера  
k = 19  
# вычисление x для двух случаев  
x1 = k/6.1  
x2 = k/4.1  
  
# начальные условия для 1 случая  
r0 = x1   
theta0 = (0.0, 2\*pi) #диапазон значений   
  
# Начальные условия для 2 случая  
r0\_2 = x2   
theta0\_2 = (-pi, pi)  
  
fi=pi/4 #угол под которым двигается лодка  
  
x(t) = tan(fi) \* t #движение лодки браконьеров  
  
f(r, p, t) = r/sqrt(25.01) #Функция, описывающая движение катера береговой охраны (ДУ)  
  
# Постановка ДУ с ЗК для 1 случая  
prob = ODEProblem(f, r0, theta0)   
sol = solve(prob, saveat=0.01) #шаг для красивой линии  
  
# Постановка ДУ с ЗК для 2 случая  
prob\_2 = ODEProblem(f, r0\_2, theta0\_2)  
sol\_2 = solve(prob\_2, saveat=0.01)  
  
#построим траекторию движения лодки   
ugol = [fi for i in range(0, 15)] #20 т.к. ограничение радиуса полярных координат 20   
x\_lims = [x(i) for i in range(0, 15)]

Построим траекторию движения катера и лодки в первом случае (рис. 1):

# Отрисовка траектории движения катера  
plot(sol.t, sol.u, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория движения катера (случай 1)") #передаем время и решение, t - угол  
#u - радиус  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 10), label="Траектория движения лодки")

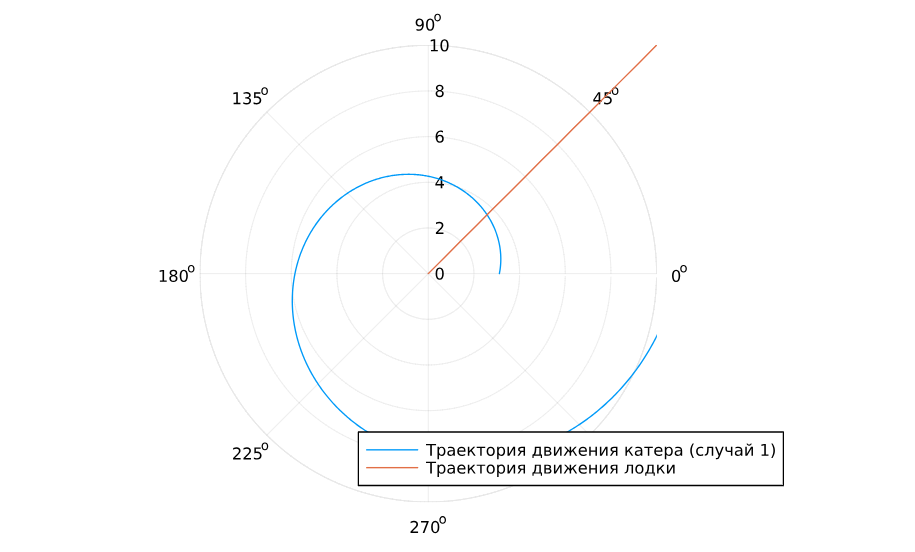


Рис. 1: Траектория движения катера в 1 случае

Теперь найдем точную точку пересечения двух графиков с помощью найденного аналитического решения дифференциального уравнения в первом случае.

# Точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны  
y(x) = (19 \* exp(x/sqrt(25.01))) / 6.1  
  
# Подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
y\_result = y(fi)  
  
# Точка пересечения лодки и катера для 1 случая  
println("Точка пересечения лодки и катера для 1 случая: ", y\_result)

Получим следующий результат (рис. 2):

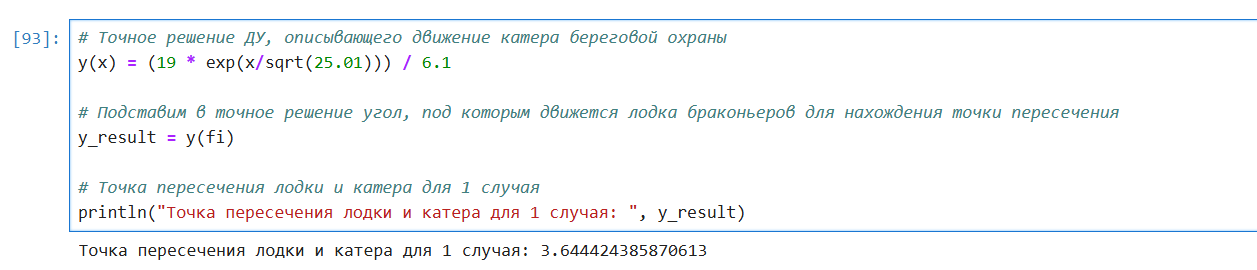


Рис. 2: Нахождение точки пересечения графиков в 1 случае

Построим траекторию движения катера и лодки во втором случае (рис. 3):

plot(sol\_2.t, sol\_2.u, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория движения катера (случай 2)")  
  
plot!(ugol, x\_lims, proj=:polar, lims=(0, 15), label="Траектория движения лодки")

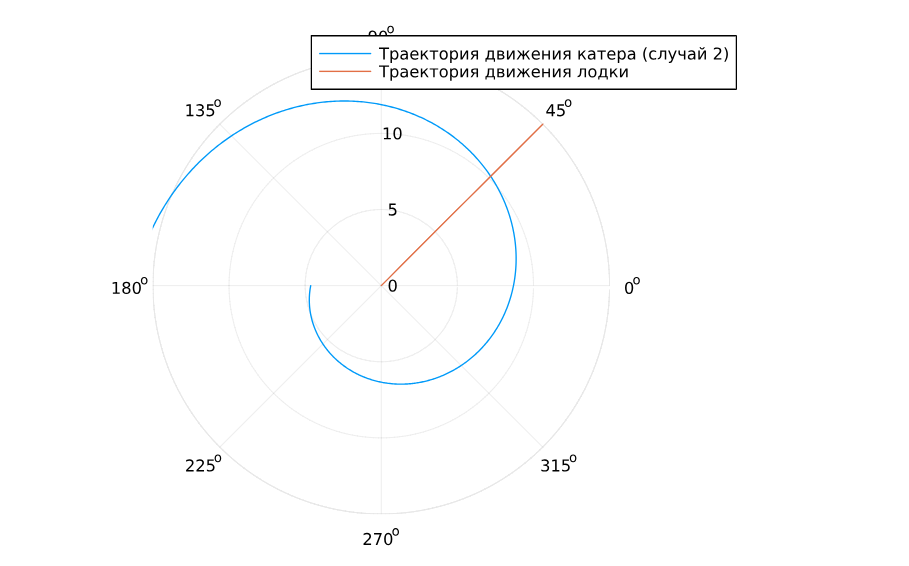


Рис. 3: Траектория движения катера в 2 случае

Теперь найдем точную точку пересечения двух графиков с помощью найденного аналитического решения дифференциального уравнения во втором случае.

# Точное решение ДУ, описывающего движение катера береговой охраны для 2 случая  
y2(x) = (19 \* exp((x+pi) / sqrt(25.01)))/ 4.1  
  
# Подставим в точное решение угол, под которым движется лодка браконьеров для нахождения точки пересечения  
y2\_result = y2(fi)  
  
# Точка пересечения лодки и катера для 2 случая  
println("Точка пересечения лодки и катера для 2 случая: ", y2\_result)

Получим следующее значение (рис. 4):

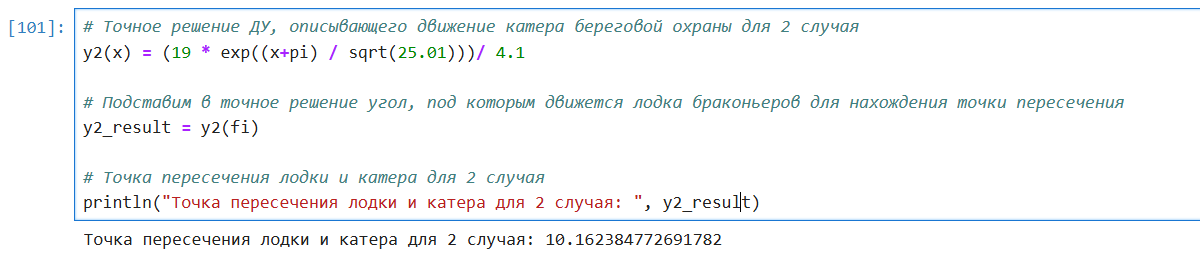


Рис. 4: Нахождение точки пересечения графиков в 2 случае

## 4.2 Реализация в scilab

К сожалению, OpenModelica не поддерживает полярыне координаты, поэтому построила модель в scilab.

// Исходные данные  
s = 19; // начальное расстояние от лодки до катера  
n = 5.1; // отношение скоростей катера и лодки  
fi = %pi / 4; // угол направления движения лодки  
  
// Функция, описывающая движение катера береговой охраны  
function dr = f(theta, r)  
 dr = r / sqrt(n\*n - 1);   
endfunction  
  
// Начальные условия для первого случая (катер ближе к полюсу)  
r0\_1 = s / (n + 1); // x1 = k / (n + 1)  
theta0\_1 = 0;  
  
theta = 0:0.01:2\*%pi;  
r1 = ode(r0\_1, theta0\_1, theta, f);  
  
// Начальные условия для второго случая (катер дальше от полюса)  
r0\_2 = s / (n - 1); // x2 = k / (n - 1)  
theta0\_2 = -%pi;  
theta2 = -%pi:0.01:%pi;  
r2 = ode(r0\_2, theta0\_2, theta2, f);  
  
// Функция движения лодки браконьеров  
function xt = f2(t)  
 xt = tan(fi) \* t;  
endfunction  
  
t = 0:1:15;  
  
// Графики  
clf;  
subplot(1,2,1);  
polarplot(theta, r1, style=color('green')); // катер (случай 1)  
plot2d(t, f2(t), style=color('red')); // лодка  
  
subplot(1,2,2);  
polarplot(theta2, r2, style=color('blue')); // катер (случай 2)  
plot2d(t, f2(t), style=color('red')); // лодка  
  
// Отображение графиков  
xtitle("Траектории движения катера и лодки (случай 1 - слева, случай 2 - справа", "θ", "r");  
legend("Катер (случай 1)", "Лодка", "Катер (случай 2)");

Получим следующие графики (рис. 5).

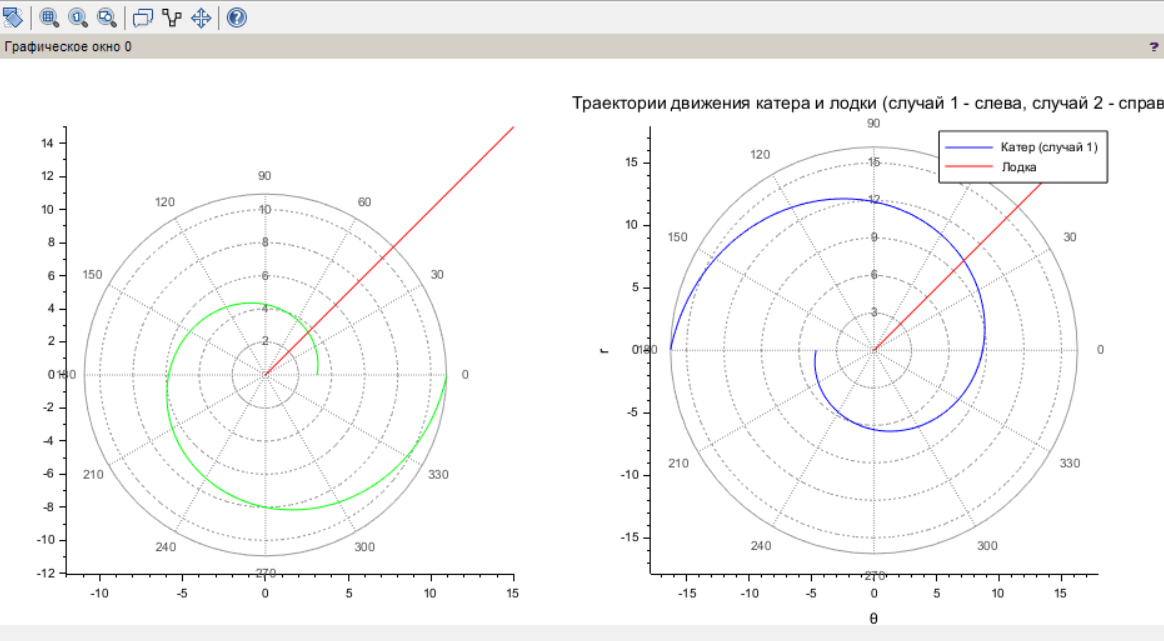


Рис. 5: Траектория движения катера на графиках в scilab

Графики, полученные в Scilab и Julia совпали, значит все сделано верно.

# 5 Выводы

При выполнении данной лабораторной работы я построила математическую модель для выбора правильной стратегии при решении примера задачи о погоне.

# Список литературы

1. Кривая погони [Электронный ресурс]. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/Кривая_погони>.

2. С. К.Д. Лабораторная работа 2. Задача о погоне [Электронный ресурс].