Лабораторная работа №6

Модель эпидемии

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

# 1 Цель работы

Исследовать простейшую математическую модель эпидемии (SIR).

# 2 Задание

## 2.1 Вариант 38

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове () в момент начала эпидемии () число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) , А число здоровых людей с иммунитетом к болезни . Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени .

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп.

Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. если ;
2. если .

# 3 Теоретическое введение

## 3.1 Модель эпидемии SIR

Рассмотрим простейшую модель эпидемии. Предположим, что некая популяция, состоящая из особей, (считаем, что популяция изолирована) подразделяется на три группы. Первая группа - это восприимчивые к болезни, но пока здоровые особи, обозначим их через . Вторая группа – это число инфицированных особей, которые также при этом являются распространителями инфекции, обозначим их . А третья группа, обозначающаяся через – это здоровые особи с иммунитетом к болезни [1].

До того, как число заболевших не превышает критического значения , считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых. Когда , тогда инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.  
Таким образом, скорость изменения числа меняется по закону (1)

Поскольку каждая восприимчивая к болезни особь, которая, в конце концов, заболевает, сама становится инфекционной, то скорость изменения числа инфекционных особей представляет разность за единицу времени между заразившимися и теми, кто уже болеет и лечится (2)

А скорость изменения выздоравливающих особей (при этом приобретающие иммунитет к болезни) (3)

Постоянные пропорциональности и — это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно.

Для того, чтобы решения соответствующих уравнений определялось \* однозначно, необходимо задать начальные условия. Считаем, что на начало эпидемии в момент времени нет особей с иммунитетом к болезни , а число инфицированных и восприимчивых к болезни особей и соответственно. Для анализа картины протекания эпидемии необходимо рассмотреть два случая: и

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Реализация в Julia

Зададим начальные значения, время интегрирования и параметры модели:

using DifferentialEquations, Plots  
  
N = 12700  
I\_0 = 170  
R\_0 = 57  
S\_0 = N - I\_0 - R\_0  
u0 = [S\_0, I\_0, R\_0]  
p = [0.5, 0.1]  
tspan = (0.0, 50.0)

### 4.1.1 Случай

Рассмотрим случай, когда число заболевших не превышает критического значения , то есть считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых.

Зададим функцию для нашего случая по формулам, также зададим задачу Коши с помощью ODEProblem, с помощью solve решим ее. Используем plot для построения графика (рис. 1).

function sir\_2(u,p,t)  
 (S,I,R) = u  
 (b, c) = p  
 dS = 0  
 dI = -c\*I  
 dR = c\*I  
 return [dS, dI, dR]  
end  
prob\_2 = ODEProblem(sir\_2, u0, tspan, p)  
sol\_2 = solve(prob\_2, Tsit5(), saveat = 0.1)  
plot(sol\_2, label = ["S" "I" "R"])

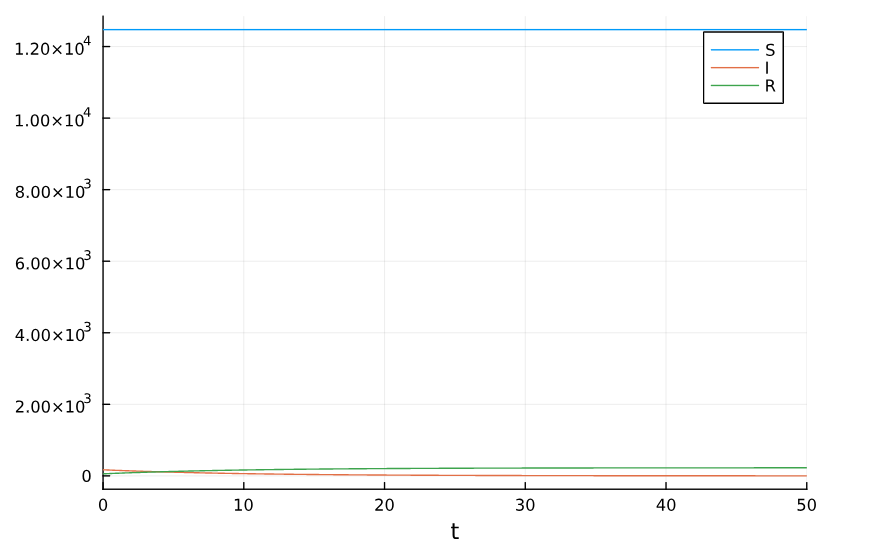


Рис. 1: График изменения числа особей для случая . Julia

Можно увидеть, что число здоровых уязвимых не изменяется, так как в этом случае все заражённые изолированы. При это заражённые выздоравливают и приобретают иммунитет.

### 4.1.2 Случай

Рассмотрим случай, когда число заболевших превышает критическое значения , то есть считаем, что инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей.

Аналогично предыдущему случаю, зададим по формулам для случая функцию, в которой опишем систему дифференциальных уравнений. Также зададим задачу Коши с помощью ODEProblem, с помощью solve решим ее. Используем plot для построения графика (рис. 2).

function sir(u,p,t)  
 (S,I,R) = u  
 (b, c) = p  
 dS = -(b\*S)  
 dI = (b\*S) - c\*I  
 dR = c\*I  
 return [dS, dI, dR]  
end  
prob = ODEProblem(sir, u0, tspan, p)  
sol = solve(prob, Tsit5(), saveat = 0.1)  
plot(sol, label = ["S" "I" "R"])

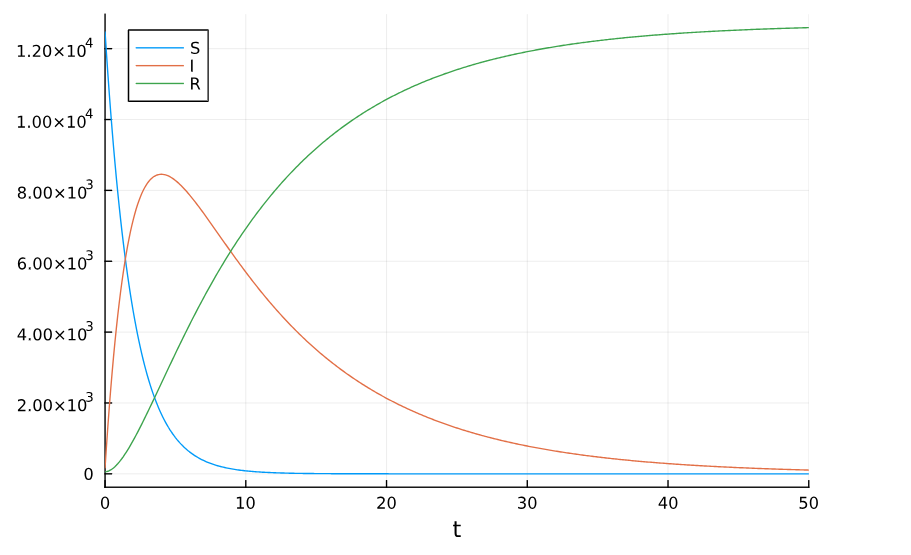


Рис. 2: График изменения числа особей для случая . Julia

Можно увидеть, что сначала количество зараженных увеличивается, как и количество приобретающих иммунитет, при этом уменьшается количество здоровых без иммунитета. Затем количество зараженных начинает уменьшаться, а другие две категории изменяются так же, как раньше, но медленнее. Максимальное значение заболевших показывает время прохождения порога эпидемии.

## 4.2 Реализация в OpenModelica

Зададим те же модели в OpenModelica

### 4.2.1 Случай

Рассмотрим случай, когда число заболевших не превышает критического значения , то есть считаем, что все больные изолированы и не заражают здоровых (рис. 3).

model lab6\_1  
 parameter Real I\_0 = 170;  
 parameter Real R\_0 = 57;  
 parameter Real N = 12700;  
 parameter Real S\_0 = N-I\_0-R\_0;  
 parameter Real b = 0.5;  
 parameter Real c = 0.1;  
   
 Real S(start=S\_0);  
 Real I(start=I\_0);  
 Real R(start=R\_0);  
   
equation  
 der(S) = 0;  
 der(I) = - c\*I;  
 der(R) = c\*I;  
  
end lab6\_1;

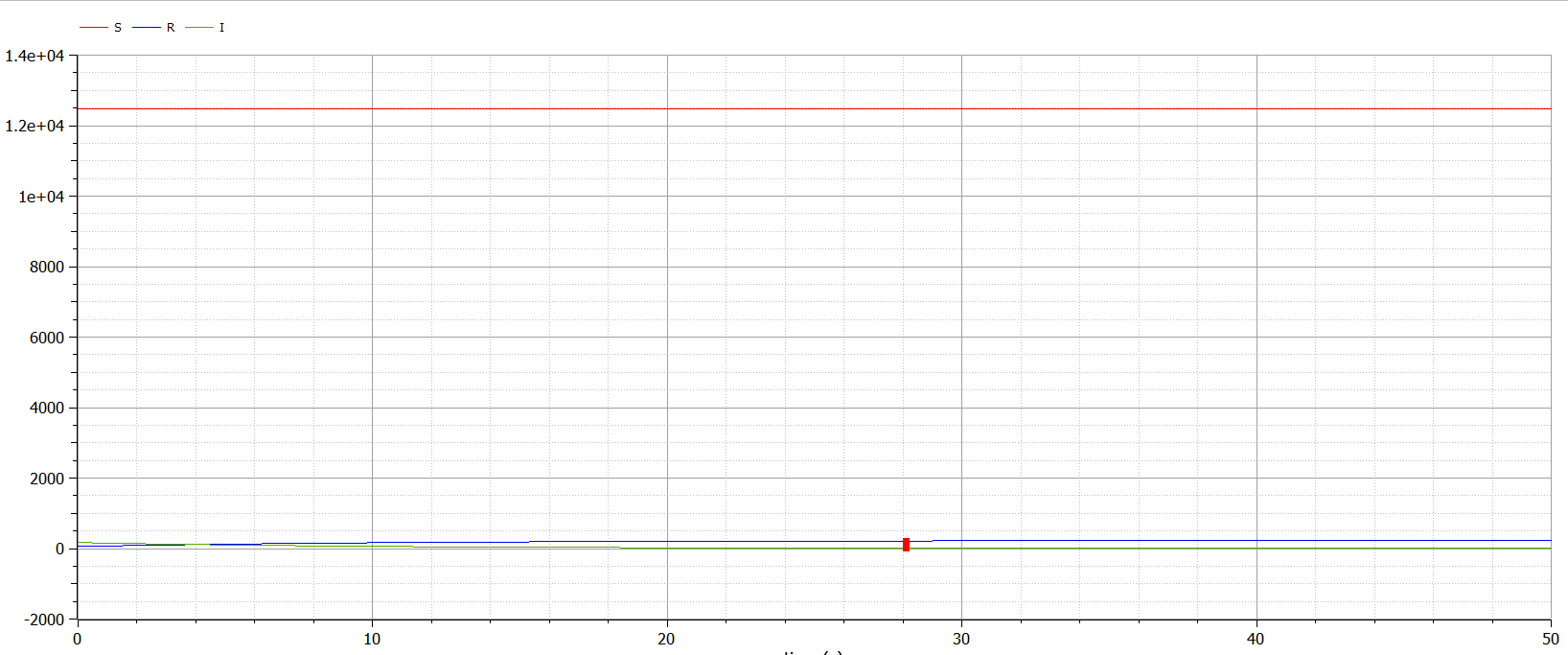


Рис. 3: График изменения числа особей для случая . OpenModelica

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

### 4.2.2 Случай

Рассмотрим случай, когда число заболевших превышает критическое значения , то есть считаем, что инфицирование способны заражать восприимчивых к болезни особей (рис. 4).

model lab6\_2  
 parameter Real I\_0 = 170;  
 parameter Real R\_0 = 57;  
 parameter Real N = 12700;  
 parameter Real S\_0 = N-I\_0-R\_0;  
 parameter Real b = 0.5;  
 parameter Real c = 0.1;  
   
 Real S(start=S\_0);  
 Real I(start=I\_0);  
 Real R(start=R\_0);  
   
equation  
 der(S) = -b\*S;  
 der(I) = b\*S - c\*I;  
 der(R) = c\*I;  
end lab6\_2;

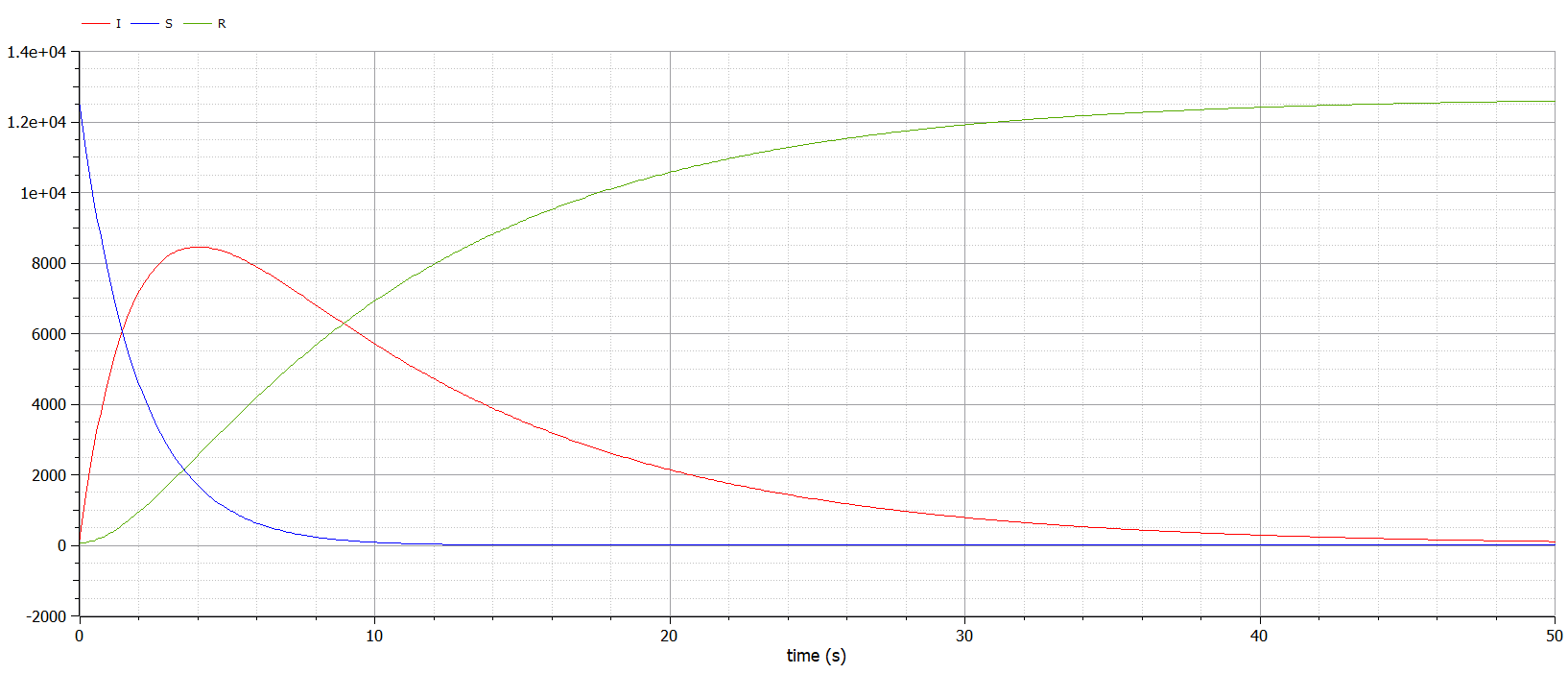


Рис. 4: График изменения числа особей для случая . OpenModelica

Графики решений, полученные с помощью OpenModelica и Julia идентичны.

# 5 Выводы

Построили математическую модель эпидемии.

# Список литературы

1. Кулябов Д.С. Лабораторная работа 6. Модель эпидемии SIR [Электронный ресурс].