Лабораторная работа № 5

Модель эпидемии (SIR)

Дворкина Ева Владимировна

Содержание

# 1 Цель работы

Исследование модели эпидемии (SIR) с помощью xcos и OpenModelica.

# 2 Задание

* Реализовать классическую модель SIR с помощью xcos(в том числе с помощью блока Modelica) и OpenModelica.
* Реализовать модель SIR с учетом демографических признаков с помощью xcos(в том числе с помощью блока Modelica) и OpenModelica.
* Исследовать модель SIR с учетом демографических признаков, изменяя параметры.

# 3 Теоретическое введение

Модель SIR предложена в 1927 г. (W. O. Kermack, A. G. McKendrick).

где – численность восприимчивой популяции, – численность инфицированных, – численность удаленной популяции (в результате смерти или выздоровления), и – это сумма этих трёх, а и - это коэффициенты заболеваемости и выздоровления соответственно [1].

# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Реализация модели в xcos

Зафиксируем начальные параметры в меню Моделирование, Задать переменные окружения, а затем построим модель при помощи блоков моделирования (рис. 1).

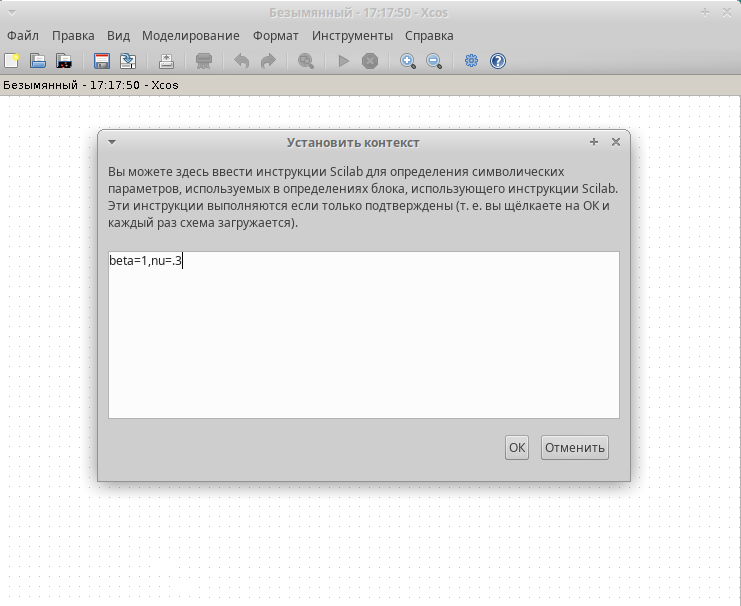


Рис. 1: Задать контекст в xcos

Для реализации модели потребовались следующие блоки xcos [2] :

* CLOCK\_c – запуск часов модельного времени;
* CSCOPE – регистрирующее устройство для построения графика;
* TEXT\_f – задаёт текст примечаний;
* MUX – мультиплексер, позволяющий в данном случае вывести на графике сразу несколько кривых;
* INTEGRAL\_m – блок интегрирования;
* GAINBLK\_f – в данном случае позволяет задать значения коэффициентов и ;
* SUMMATION – блок суммирования;
* PROD\_f – поэлементное произведение двух векторов на входе блока.

Настраиваю количество входов в блок мультиплексер (рис. 2).

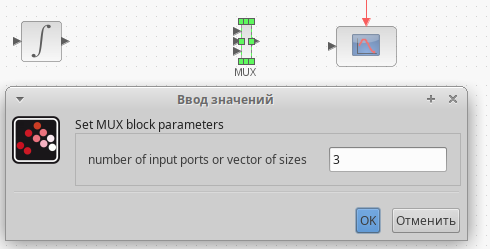


Рис. 2: Задать количество входов в мультиплексор

Настраиваю параметры блока суммирования, чтобы оба слагаемых в сумме на входе в интегратор были со знаком минус (рис. 3).

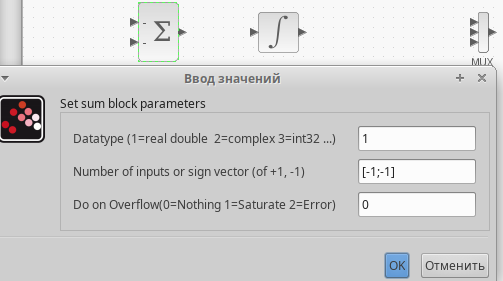


Рис. 3: Ввод параметров блока суммирования

Первое уравнение модели задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения и блоком задания коэффициента . Блок произведения соединен с выходами верхнего и среднего блоков интегрирования и блоком коэффициента , что реализует математическую конструкцию . Третье уравнение модели задано нижним блоком интегрирования и блоком задания коэффициента . Для реализации математической конструкции соединяем выход среднего блока интегрирования и вход блока задания коэффициента , а результат передаём на вход нижнего блока интегрирования.

Средний блок интегрирования и блок суммирования определяют второе уравнение модели, которое по сути является суммой правых частей первого и третьего уравнений. Для реализации соединяем входы верхнего и нижнего блоков интегрирования с входами блока суммирования, меняя при этом в его параметрах оба знака на минус. Выход блока суммирования соединяем с входом среднего блока интегрирования (рис. 4).

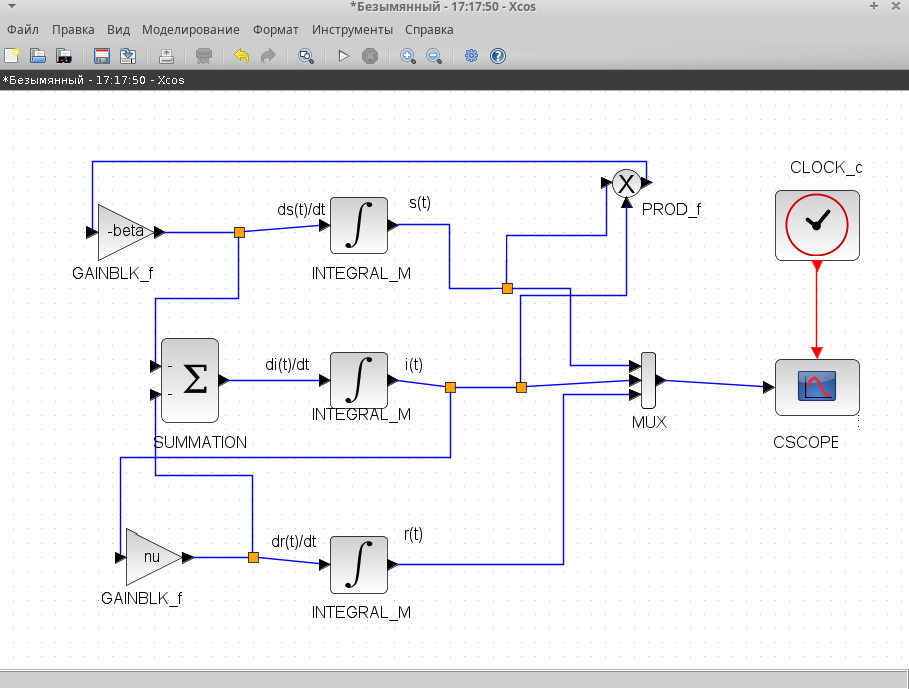


Рис. 4: Модель SIR в xcos

Зафиксируем начальные значения в блоках интегрирования (рис. 5, 6).

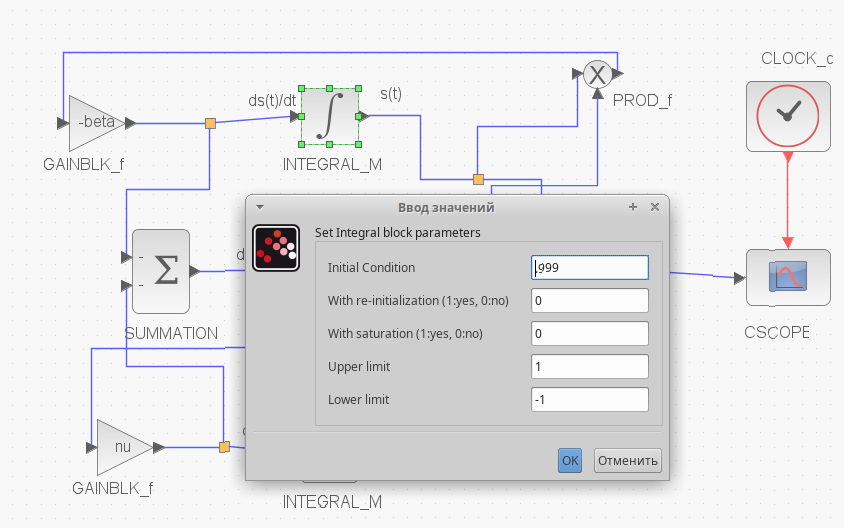


Рис. 5: Задать начальное значение в блоке интегрирования

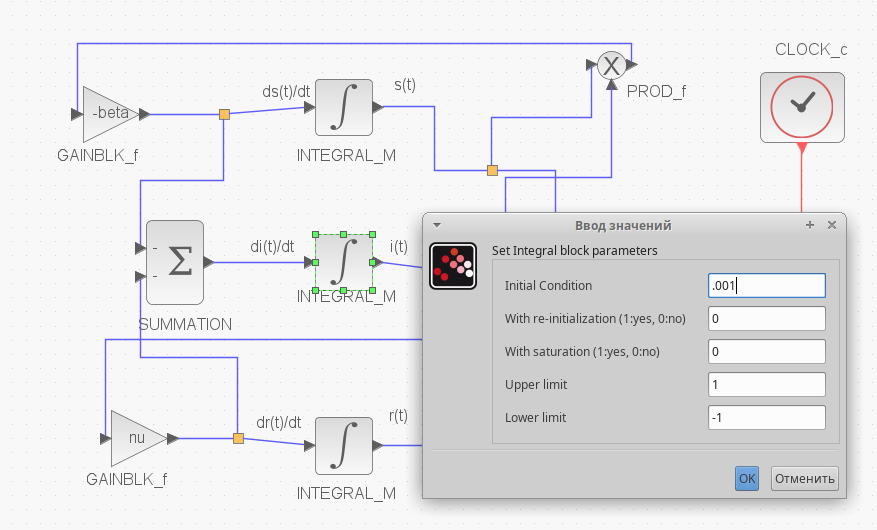


Рис. 6: Задать начальное значение в блоке интегрирования

Также зададим время интегрирования равное 30 единиц модельного времени (рис. 7).

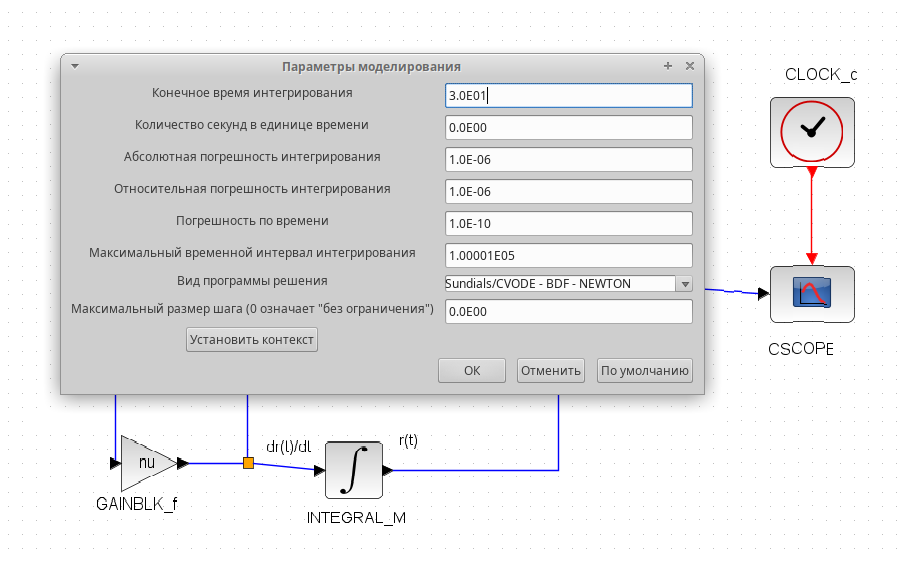


Рис. 7: Задать конечное время интегрирования в xcos

Настроим параметры регистрирующего устройства для отображения графика (рис. 8).

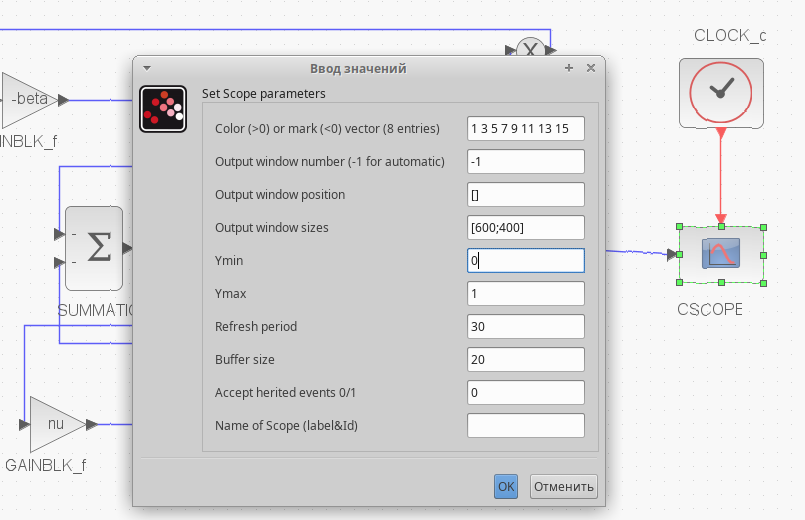


Рис. 8: Задать значения отображения графиков в регистрирующем устройстве

Решение модели SIR выглядит следующим образом (рис. 9).

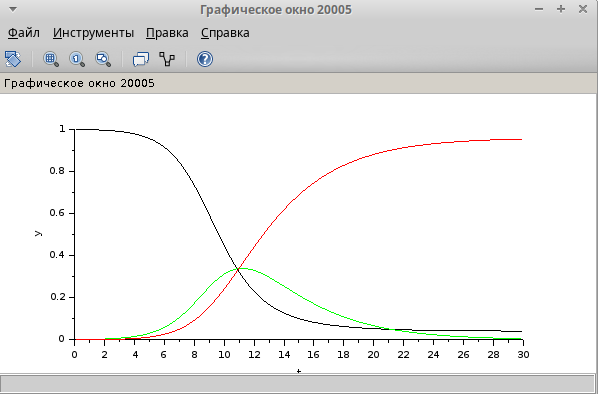


Рис. 9: График решения модели SIR при ,

Видим, что точка пересечения всех функций - порог эпидемии, после которого количество заболевших уменьшается. Также на конец моделирование у нас остается некоторое количество уязвимых, которые не успели переболеть и больше не смогут заразиться, а все заболевшие выздоровели.

## 4.2 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации модели с помощью языка Modelica помимо блоков CLOCK\_c, CSCOPE, TEXT\_f и MUX требуются блоки [2] :

* CONST\_m – задаёт константу;
* MBLOCK(Modelica generic) – блок реализации кода на языке Modelica.

Задаём значения переменных и . Параметры блока Modelica: переменные на входе (“beta”, “nu”) и выходе (“s”, “i”, “r”) блока заданы как внешние (“E”).Затем прописываем дифференциальное уравнение(рис. 10, 11).

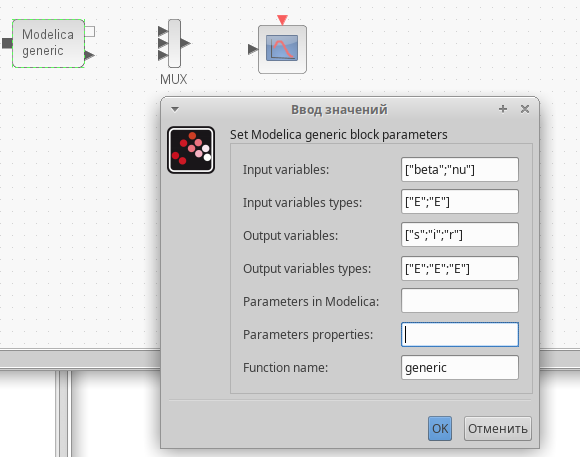


Рис. 10: Настройка параметров блока Modelica

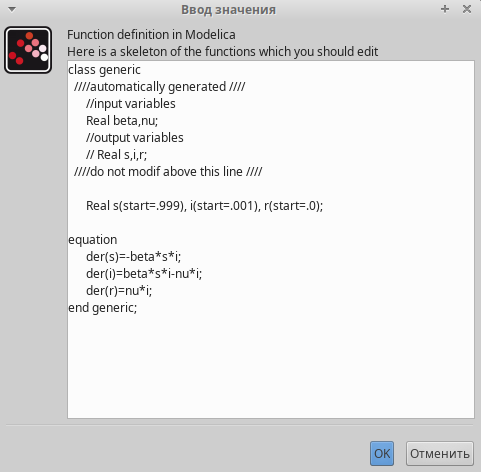


Рис. 11: Настройка параметров блока Modelica

Соединив блоки, получим следующую модель (рис. 12).

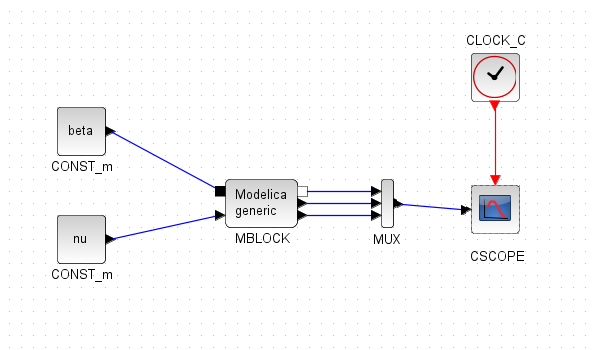


Рис. 12: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

В результате получим аналогичное предыдущему решение (рис. 13).

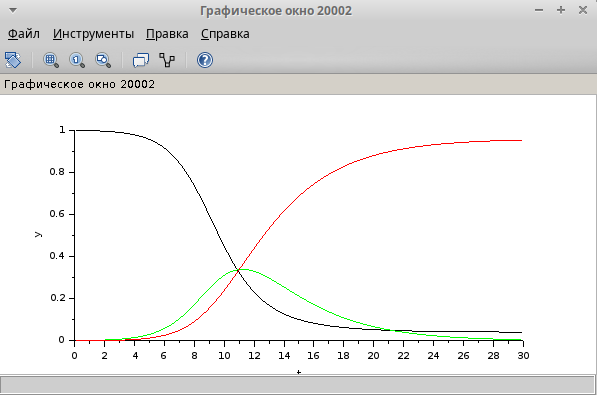


Рис. 13: График решения модели SIR при ,

## 4.3 Реализация модели в OpenModelica

Реализуем модель в OpenModelica. Для этого создадим файл модели, пропишем там параметры и начальные условие, а также дифференциальное уравнение (рис. 14).

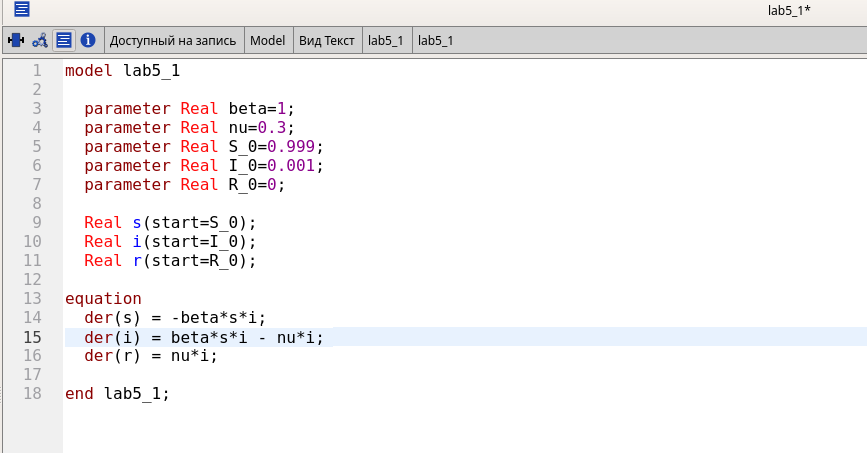


Рис. 14: Модель в OpenModelica

Затем укажем параметры моделирования, время так же поставим равным 30 единиц модельного времени

В результате получим график аналогичный графикам в xcos (рис. 15).

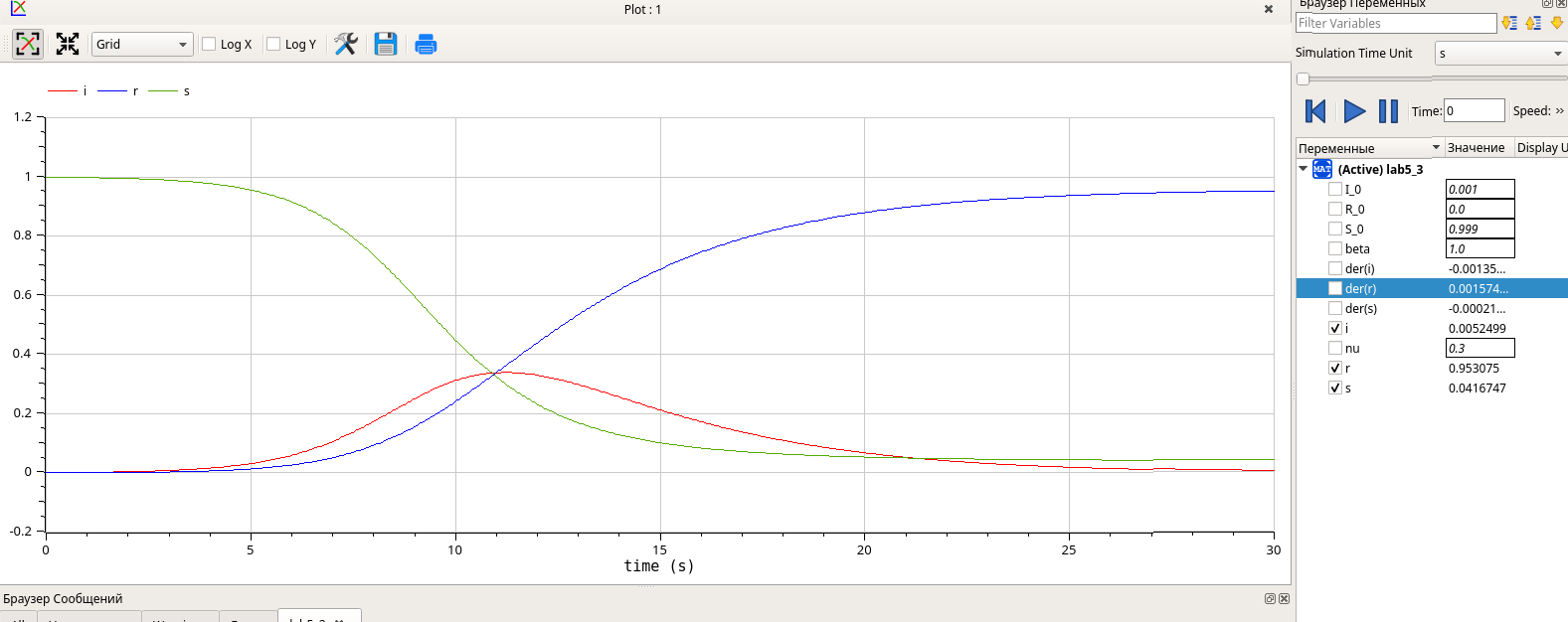


Рис. 15: График решения модели SIR при ,

# 5 Задание для самостоятельного выполнения

## 5.1 Модель SIR с учетом демографии

В дополнение к предположениям, которые были сделаны для модели SIR, предположим, что учитываются демографические процессы, в частности, что смертность в популяции полностью уравновешивает рождаемость, а все рожденные индивидуумы появляются на свет абсолютно здоровыми. Тогда получим следующую систему уравнений:

где – константа, которая равна коэффициенту смертности и рождаемости [1].

Требуется:

* реализовать модель SIR с учётом процесса рождения гибели особей в xcos (в том числе и с использованием блока Modelica), а также в OpenModelica;
* построить графики эпидемического порога при различных значениях параметров модели (в частности изменяя параметр );
* сделать анализ полученных графиков в зависимости от выбранных значений параметров модели

## 5.2 Реализация модели в xcos

Для реализации этой модели добавим в переменные окружения mu (рис. 16).

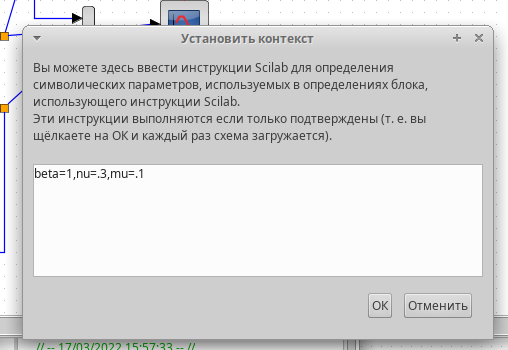


Рис. 16: Задать переменные окружения в xcos

Необходимые блоки такие же (рис. 17).

Первое уравнение модели задано верхним блоком интегрирования, блоком произведения, блоком задания коэффициента и сумматором. Блок произведения соединён с выходами верхнего и среднего блоков интегрирования и блоком коэффициента , что реализует математическую конструкцию , которая передается в блок суммирования. Ниже заданы математические конструкции и , которые со знаком плюс передаются в сумматор перед первым блоком интегрирования.

Третье уравнение модели задано нижним блоком интегрирования и блоком задания коэффициента . Для реализации математической конструкции соединяем выход среднего блока интегрирования и вход блока задания коэффициента . Перед блоком интегрирования размешаем сумматор, в которой передаем математические конструкции со знаком минус и . Результат суммирования передаём на вход нижнего блока интегрирования.

Средний блок интегрирования и блок суммирования определяют второе уравнение модели, которое по сути является суммой правых частей первого и третьего уравнений со знаком минус. Для реализации соединяем входы верхнего и нижнего блоков интегрирования с входами блока суммирования, меняя при этом в его параметрах оба знака на минус. Выход блока суммирования соединяем с входом среднего блока интегрирования

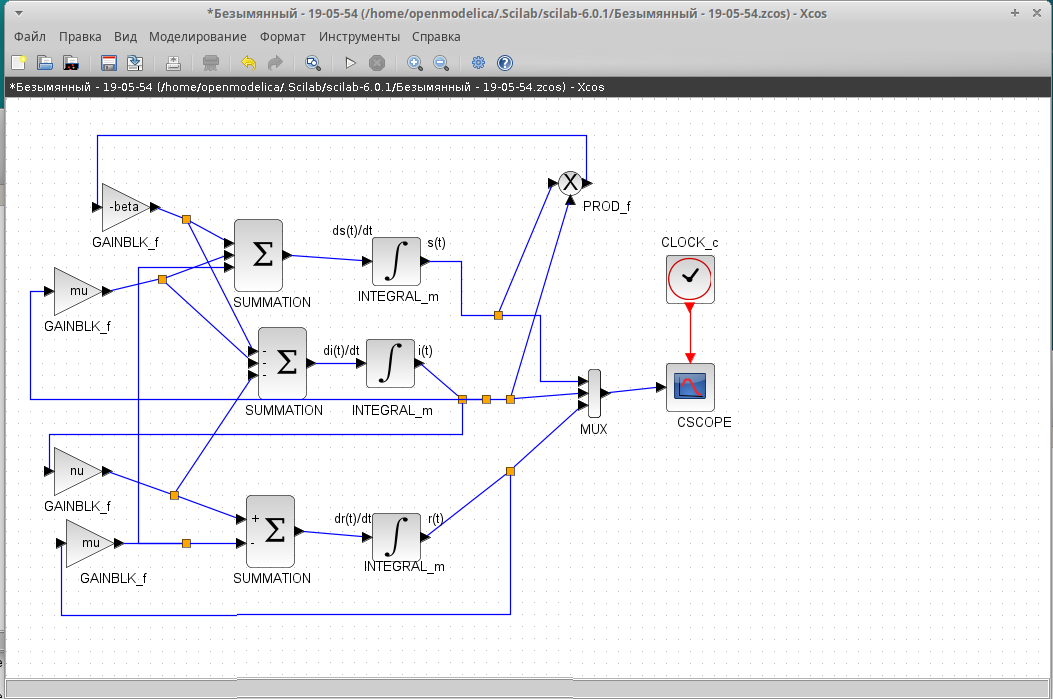


Рис. 17: Модель SIR с учетом демографии в xcos

В результате получим график решения (рис. 18).

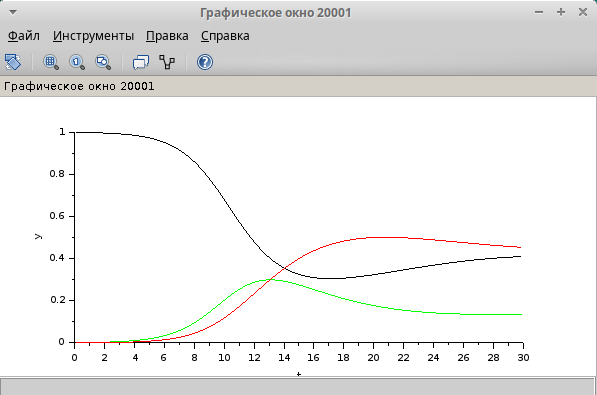


Рис. 18: График решения модели SIR с учетом демографии при , ,

Здесь так же происходит стабилизация всех функций после прохождения порога эпидемии, но, в отличие от предыдущего решения, количество заболевших стабилизируется не на уровне 0, а на уровне определенного значения, то есть из-за постоянного появления новых особей, появляются новые уязвимые, которые могут заболеть и заболевают.

## 5.3 Реализация модели с помощью блока Modelica в xcos

Для реализации с помощью блока Modelica добавим блок параметра .

Также изменим данные блока Modelica, добавив информацию о третьем параметре и изменив дифференциальное уравнение (рис. 19, 20).

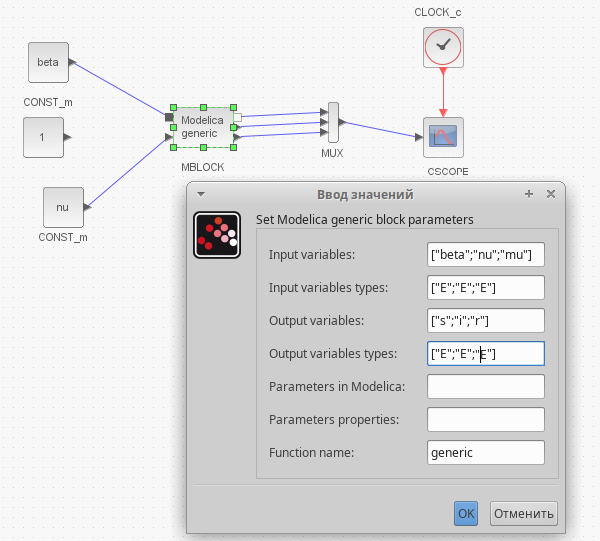


Рис. 19: Настройка параметров блока Modelica

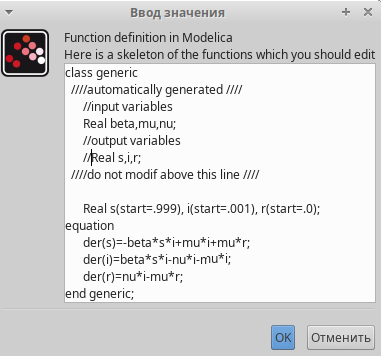


Рис. 20: Настройка параметров блока Modelica

Соединим блоки и получим следующую модель (рис. 21).

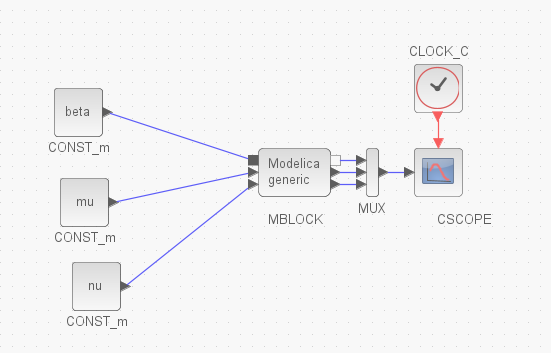


Рис. 21: Модель SIR в xcos с применением блока Modelica

В результате получим график решения(рис. 22).

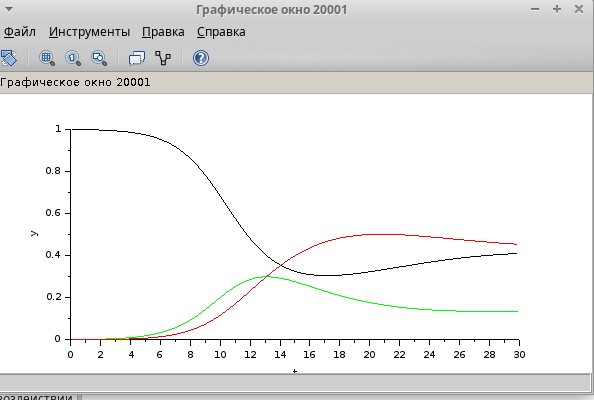


Рис. 22: График решения модели SIR с учетом демографии при , ,

## 5.4 Реализация модели в OpenModelica

Изменим данные программы в OpenModelica, добавив информацию о третьем параметре и изменив дифференциальное уравнение (рис. 23).

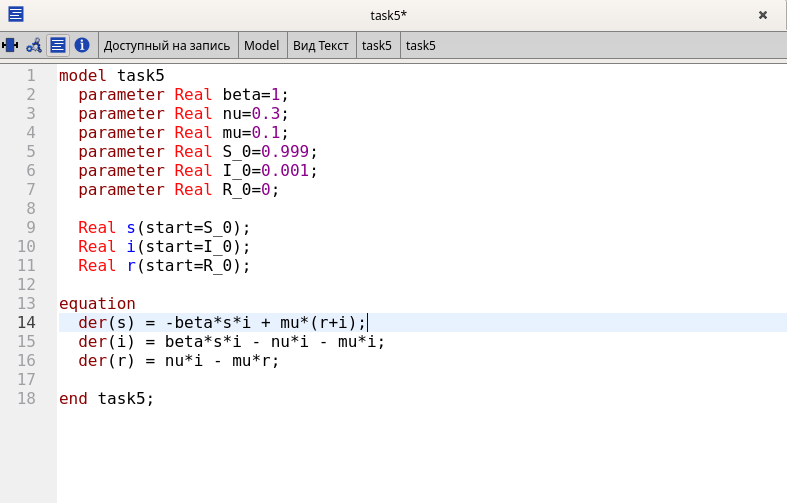


Рис. 23: Модель SIR с учетом демографии в OpenModelica

Затем укажем параметры моделирования, время так же поставим равным 30 единиц модельного времени (рис. 24).

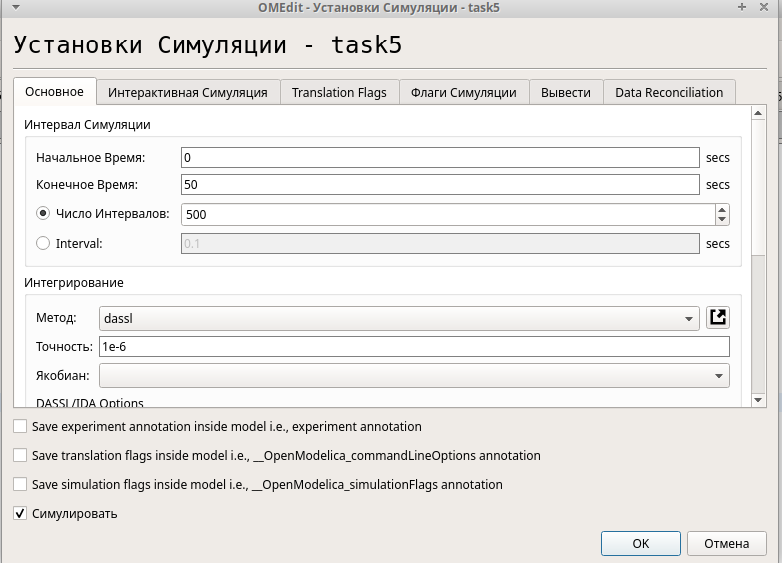


Рис. 24: Параметры моделирования в OpenModelica

В результате получим график аналогичный графикам в xcos (рис. 25).

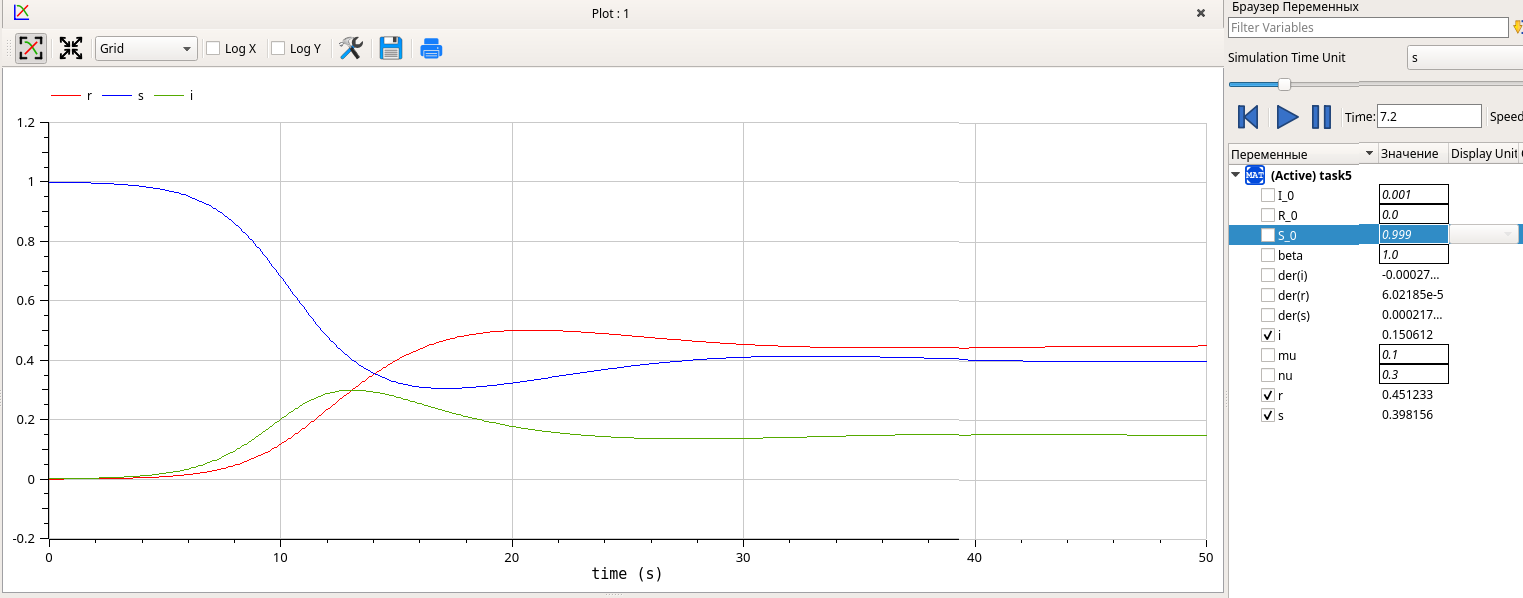


Рис. 25: График решения модели SIR с учетом демографии при , ,

## 5.5 Анализ графиков при разных параметрах модели

Можно увидеть, что чем больше значение любого параметра, тем быстрее система приходит в стационарное состояние(рис. 26 - 30).

Когда параметр достигает значения 0.5 (рис. 27) на графике очень слабо меняются траектории переменных. Это можно объяснить тем, что рождается и умирает почти столько же здоровых, сколько заражается. Можно сделать вывод, что чем выше показать , тем слабее эпидемия влияет на популяцию (тем слабее меняются траектории графиков)

Если = (рис. 26), то графики изменения выздоровевших/умерших и заболевших после стабилизации системы совпадут, значит рождается и заболевает столько же, сколько выздоравливает и умирает.

Чем меньше , тем меньше этот параметр влияет на систему и ее решение все больше походит на систему, где этот параметр не учитывается (рис. 28).

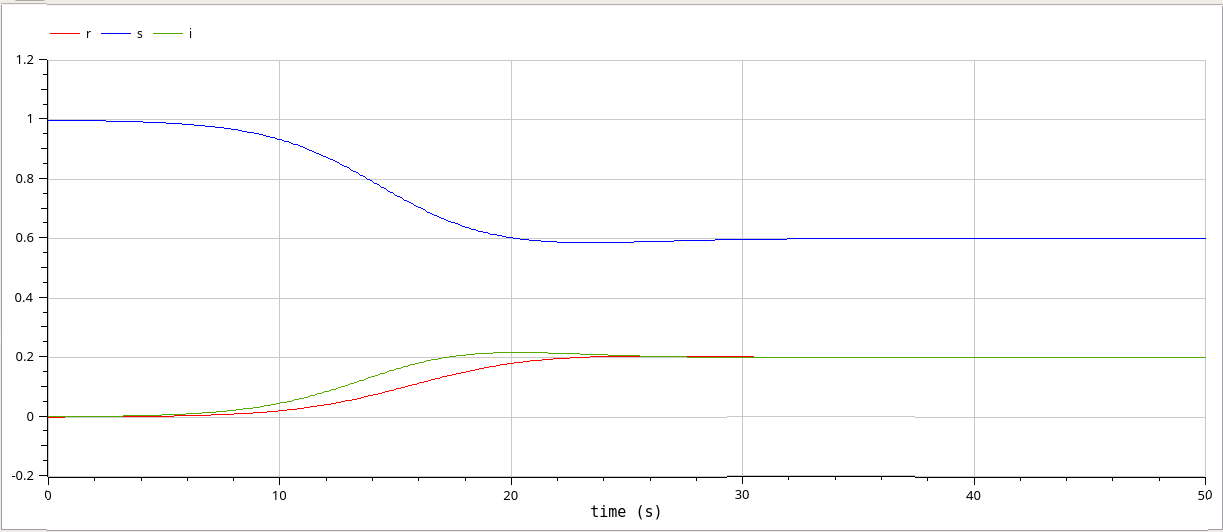


Рис. 26: График решения модели SIR с учетом демографии при , , . OpenModelica

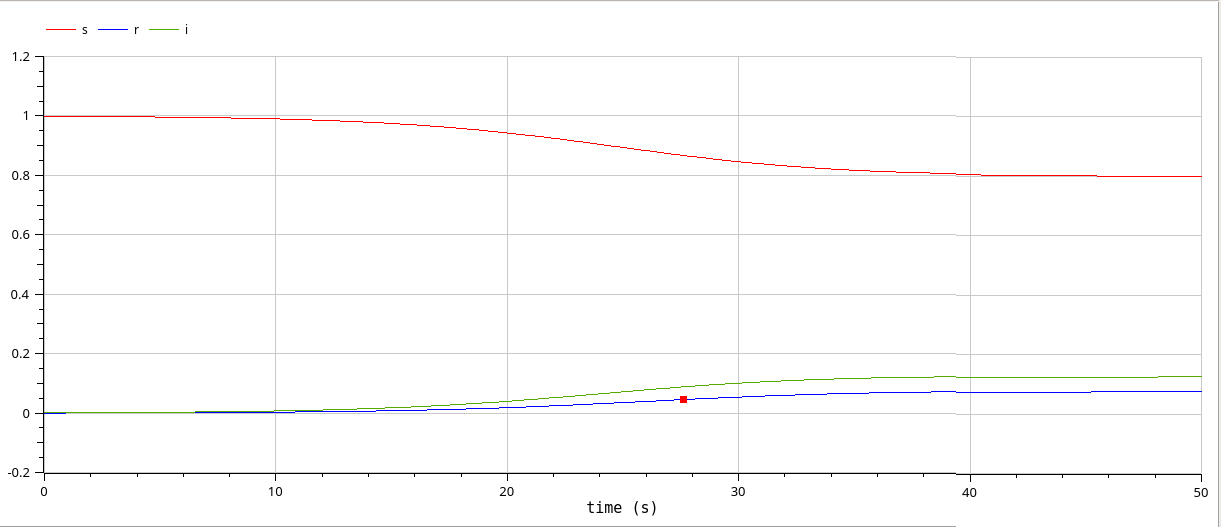


Рис. 27: График решения модели SIR с учетом демографии при , , . OpenModelica

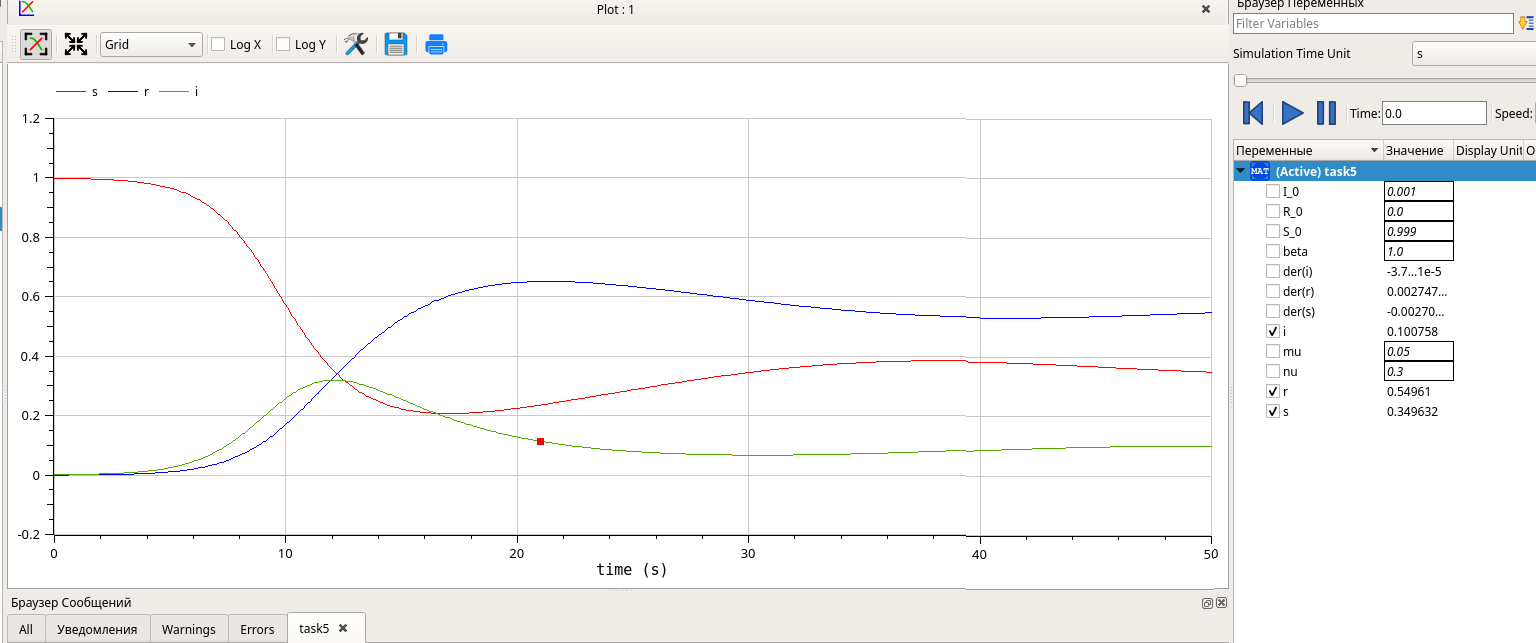


Рис. 28: График решения модели SIR с учетом демографии при , , . OpenModelica

При увеличении параметра на графике заметим, что количество уязвимых людей снижается до минимума быстрее, ведь мы увеличили скорость заражения (рис. 29).

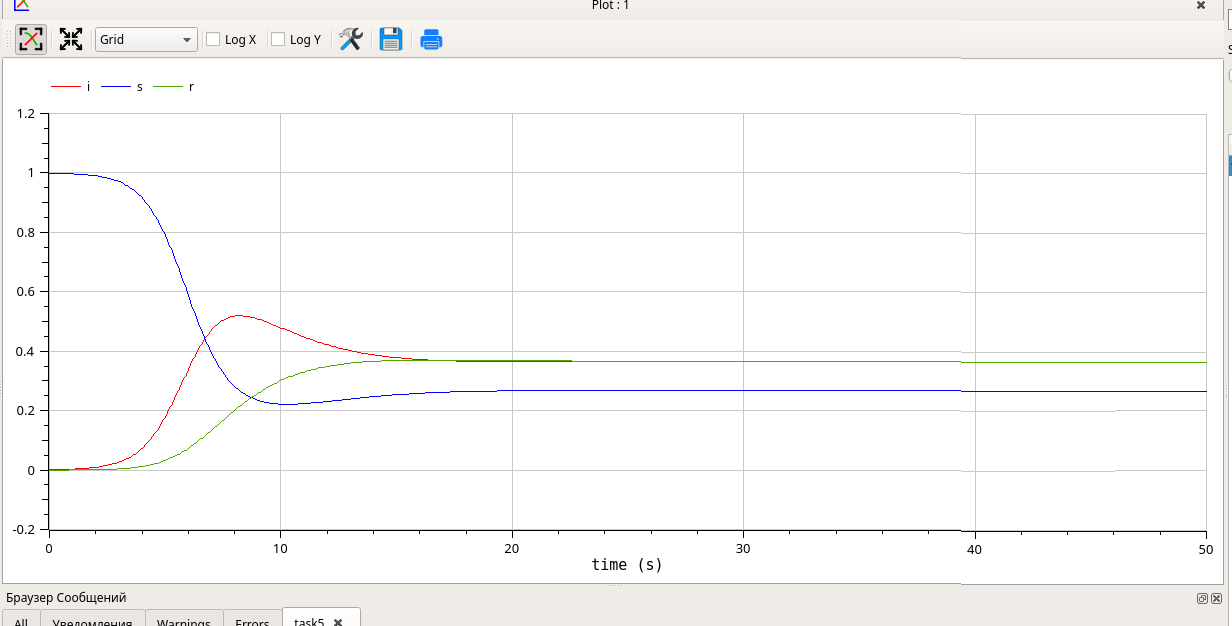


Рис. 29: График решения модели SIR с учетом демографии при , , . OpenModelica

При увеличении параметра , график тех, кто приобрел иммунитет находится выше графика заболевших, и быстрее возрастает, ведь мы увеличили скорость выздоровления (рис. 30).

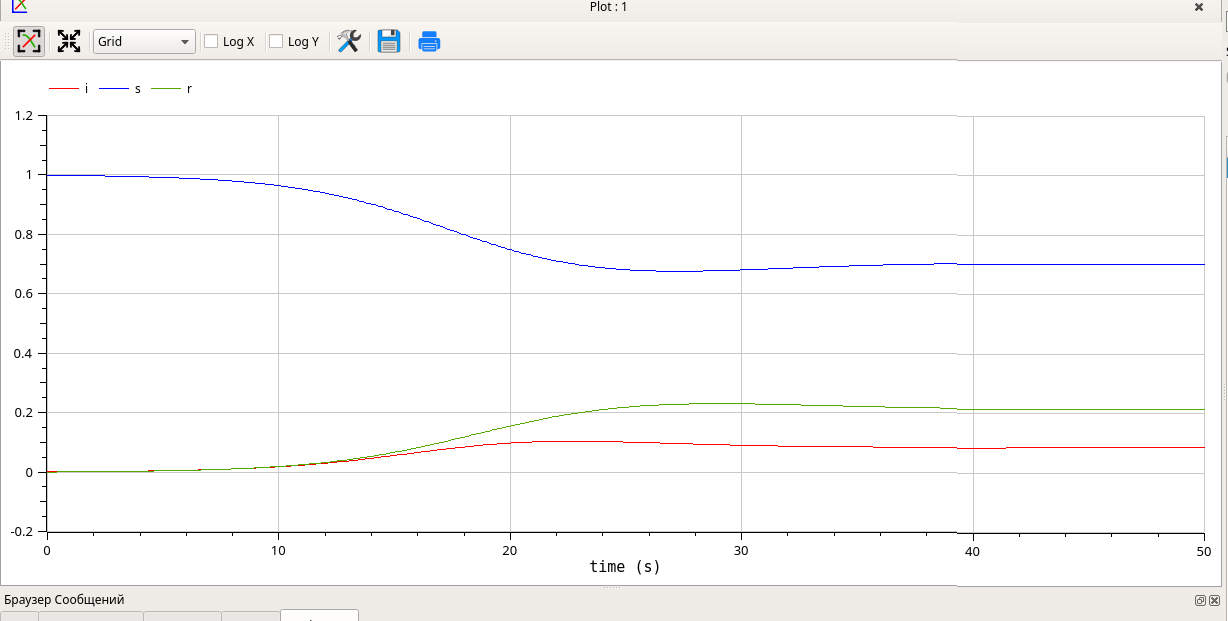


Рис. 30: График решения модели SIR с учетом демографии при , , . OpenModelica

# 6 Выводы

В результате выполнения работы была исследована модель SIR при помощи xcos и OpenModelica.

# Список литературы

1. Королькова А. В. К.Д.С. Лабораторная работа 5. Модель эпидемии (SIR) [Электронный ресурс].

2. Королькова А. В. К.Д.С. Компонентное моделирование. Scilab, подсистема xcos [Электронный ресурс].