Num CSE 8

21) c) z.z.: $F(a)\,F(b) < 0 \Rightarrow P$ hat eine einmalige Nullstelle.

$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma\ ;\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

wobei $P(a) = F(a)$,

$P(b) = F(b)$,

$P(c) = F(c)$

Beweis: $F(a)\,F(b) < 0 \Leftrightarrow (F(a) < 0 \wedge F(b) > 0) \vee (F(a) > 0 \wedge F(b) < 0)$

entweder $(a, F(a))$ oder $(b, F(b))$ liegt also unter der x-Achse und das andere über ihr.

Es gilt also $\min(F(a), F(b)) < y < \max(F(a), F(b))$ und nach dem Zwischenwertsatz liegt $y = 0$ in diesem Intervall. #

22) a) $z^3 = 1 \Leftrightarrow z_1 = 1$

$z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$

$z = x + iy$

$$z^3 = 1 \Rightarrow z^3 - 1 = 0 = (x+iy)^3 - 1 \stackrel{TR}{=} x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 - 1$$

$$0 = x^3 + i(3x^2y - y^3) - 3xy^2 - 1$$

$$\Rightarrow F(x,y) = \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Newtons Methode für mehrere Variabeln ist

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (DF(x^{(k)}))^{-1}\, F(x^{(k)})$$

wobei $DF = \begin{pmatrix} d/dx\, F_1 & d/dy\, F_1 \\ d/dx\, F_2 & d/dy\, F_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$.