Scientia et Technica Año XVIII, No xx, Mes07 de Año2019. Universidad Tecnológica de Pereira. ISSN 0122-1701

Combinaciones, permutaciones y conteo

Combinations, permutations and counting

Evelyn Tabares Valencia
Ingeniería de sistemas, Universidad tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
evelyn.tabares@utp.edu.com

***Resumen*— Las técnicas de conteo son una serie de métodos de probabilidad para contar el número posible de arreglos dentro de un conjunto o varios conjuntos de objetos. Estas se usan cuando realizar las cuentas de forma manual se convierte en algo complicado debido a la gran cantidad de objetos y/o variables haciendo posible que se puedan cometer errores.**

***Palabras clave*— Técnicas de conteo, métodos de probabilidad, conjunto,**

***Abstract*— Counting techniques are a series of probability methods for the possible number of arrangements within a set or several sets of objects. These are the ones that are used when the accounts are made in the manual way becomes complicated due to the large number of objects and / or variables, making it possible to make mistakes.**

***Key Word* — Counting techniques, probability methods, set.**

I.INTRODUCCIÓN

También conocida como análisis combinatorio; permite determinar el número posible de resultados lógicos que cabe esperar al realizar algún experimento o evento sin necesidad de enumerarlos todos.
El análisis combinatorio contempla varios casos: [1]

Imagen sacada de: http://probabilidadestadisticaivangamboa.blogspot.com/2017/03/tecnicas-de-conteo.html

Fecha de Recepción: 09/07/2019
Fecha de Aceptación:

Principio fundamental del Conteo. Aunque algunos autores consideran que el Principio Fundamental del Conteo se compone únicamente de la Regla del Producto, es un hecho que dicha regla, junto con la Regla de la Suma conforman los elementos fundamentales que permites definir a cualquiera de los casos que conforman a la Teoría del Conteo. [1]

Ejemplo. Se dispone de una urna que contiene esferas grabadas con alguna letra de acuerdo a lo siguiente:
$A = \{a, b, c, d, e\}$ $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ [1]

II.CONTENIDO

Principio multiplicativo

El principio multiplicativo, junto con el aditivo, son básicos para entender el funcionamiento de las técnicas de conteo. En el caso del multiplicativo, consiste en lo siguiente: [2]

Imaginemos una actividad que conlleva un número concreto de pasos (el total lo marcamos como “r”), donde el primer paso puede hacerse de N1 formas, el segundo paso de N2, y el paso “r” de Nr formas. En este caso, la actividad podría realizarse del número de formas resultante de esta operación: N1 x N2 x……….x Nr formas [2]

Es por ello que este principio se llama multiplicativo, e implica que todos y cada uno de los pasos que se necesitan para llevar a cabo la actividad deben de realizarse uno tras otro. [2]

Ejemplo
Vamos a imaginar a una persona que quiere construir un colegio. Para ello, considera que la base del edificio puede construirse de dos maneras distintas, cemento o concreto. En cuanto a las paredes, pueden ser de adobe, cemento o ladrillo. [2]

En cuanto al techo, este puede construirse de cemento o lámina galvanizada. Finalmente, la pintura final sólo puede realizarse de una forma. La pregunta que se plantea es la siguiente: ¿Cuántas formas tiene de construir el colegio? [2]

En primer lugar, consideramos el número de pasos, que serían la base, las paredes, el tejado y la pintura. En total, 4 pasos, por lo que r=4. [2]

Lo siguiente sería enumerar las N:

N1= formas de construir la base=2

N2= formas de construir las paredes=3

N3= formas de hacer el tejado = 2

N4= formas de realizar pintura = 1

Por lo tanto, el número de formas posibles se calcularía mediante la fórmula antes descrita:

N1 x N2 x N3 x N4 = 2 x 3 x 2 x 1 = 12 formas de realizar el colegio.

Principio aditivo

Este principio es muy simple, y consiste en que, en el caso de existir varias alternativas de realizar una misma actividad, las formas posibles consisten en la suma de las distintas formas posibles de realizar todas las alternativas. [2]

Dicho de otra forma, si queremos realizar una actividad con tres alternativas, donde la primera alternativa puede realizarse de M formas, la segunda de N formas y la última de W formas, la actividad puede realizarse de: M + N +………+ W formas. [2]

Ejemplo
Imaginemos esta vez a una persona que quiere comprar una raqueta de tenis. Para ello, tiene tres marcas a elegir: Wilson, Babolat o Head. [2]

Cuando va a la tienda ve que la raqueta Wilson puede comprarse con el mango de dos tamaños distintos, L2 o L3 en cuatro modelos distintos y puede ser encordada o sin encordar. [2]

La raqueta Babolat, en cambio, tiene tres mangos (L1, L2 y L3), hay dos modelos diferentes y puede también ser encordada o sin encordar. [2]

La raqueta Head, por su parte, sólo está con un mango, el L2, en dos modelos diferentes y sólo sin encordar. La pregunta es: ¿Cuántas formas tiene esta persona de comprar su raqueta? [2]

M = Número de formas de seleccionar una raqueta Wilson

N = Número de formas de seleccionar una raqueta Babolat

W = Número de formas de seleccionar una raqueta Head

Realizamos el principio multiplicador:

M = 2 x 4 x 2 = 16 formas

N = 3 x 2 x 2 = 12 formas

W = 1 x 2 x 1 = 2 formas

M + N + W = 16 + 12 + 2 = 30 formas de elegir una raqueta.

Para saber en qué momento hay que utilizar el principio multiplicativo y el aditivo, únicamente hay que fijarse en si la actividad tiene una serie de pasos para realizarse, y si existen varias alternativas, el aditivo. [2]

Permutaciones

Para comprender qué es una permutación, es importante explicar qué es una combinación para poder diferenciarlas y saber cuándo utilizarlas. [2]

Una combinación sería un arreglo de elementos en los cuales no nos interesa la posición que ocupa cada uno de ellos. [2]

Una permutación, en cambio, sería un arreglo de elementos en los cuales sí nos interesa la posición que ocupa cada uno de ellos.

Vamos a poner un ejemplo para entender mejor la diferencia. [2]

Ejemplo
Imaginemos una clase con 35 alumnos, y con las siguientes situaciones:

El profesor quiere que tres de sus alumnos le ayuden a mantener la clase limpia o entregar materiales a los otros alumnos cuando lo necesite. [2]
El profesor quiere nombrar a los delegados de clase (un presidente, un asistente y un financiero).

La solución sería la siguiente:

Imaginemos que por votación se elige a Juan, María y Lucía para limpiar la clase o entregar los materiales. Obviamente, podrían haberse formado otros grupos de tres personas, entre los 35 alumnos posibles.
Debemos preguntarnos lo siguiente: ¿es importante el orden o la posición que ocupa cada uno de los alumnos a la hora de seleccionarlos?. [2]

Si lo pensamos, vemos que realmente no es importante, ya que el grupo va a encargarse de las dos labores por igual. En este caso, se trata de una combinación, ya que no nos interesa la posición de los elementos. [2]

Ahora imaginemos que se eligen a Juan como presidente, a María como asistente y a Lucía como financiera.
En este caso, ¿importaría el orden? La respuesta es sí, ya que, si cambiamos los elementos, cambia el resultado. Es decir, si en vez de poner a Juan como presidente, le ponemos como asistente, y a María como presidente, el resultado final cambiaría. En este caso se trata de una permutación. [2]

Una vez comprendida la diferencia, vamos a obtener las fórmulas de las permutaciones y de las combinaciones. Sin embargo, antes hay que definir el término “n!” (n factorial), ya que se utilizará en las distintas fórmulas. [2]

n!= al producto desde 1 hasta n.

n!= 1 x 2 x 3 x 4 x………..x n

Utilizándolo con números reales:
10!=1 x 2 x 3 x 4 x………x 10=3,628,800

5!= 1 x 2 x 3 x 4 x………x 5=120

La fórmula de las permutaciones sería la siguiente:

nPr=n!/(n-r)!

Con ella podremos averiguar los arreglos donde el orden es importante, y donde los n elementos son distintos.

Permutaciones con repetición

Son las más fáciles de calcular. Si tienes ***n*** cosas para elegir y eliges ***r*** de ellas, las permutaciones posibles son: [3]

n × n × ... (r veces) = n^r

(Porque hay **n** posibilidades para la primera elección, DESPUÉS hay **n** posibilidades para la segunda elección, y así.) [3]

Por ejemplo en la cerradura de arriba, hay 10 números para elegir (0,1,...,9) y eliges 3 de ellos: [3]

10 × 10 × ... (3 veces) = 10^3 = 1000 permutaciones

Así que la fórmula es simplemente:

n^r
donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas (Se puede repetir, el orden importa)

Imagen sacada de: https://www.monografias.com/trabajos93/tecnicas-conteo/tecnicas-conteo.shtml

Combinaciones

Como ya se mencionó anteriormente, una combinación, es un arreglo de elementos en donde no nos interesa el lugar o posición que ocupan los mismos dentro del arreglo. En una combinación nos interesa formar grupos y el contenido de los mismos. [4]

La fórmula para determinar el número de combinaciones es:

La expresión anterior nos explica como las combinaciones de *r* objetos tomados de entre *n* objetos pueden ser obtenidas a partir de las permutaciones de *r* objetos tomados de entre *n* objetos, esto se debe a que como en las combinaciones no nos importa el orden de los objetos, entonces si tenemos las permutaciones de esos objetos al dividirlas entre r!, les estamos quitando el orden y por tanto transformándolas en combinaciones, de otra forma, también si deseamos calcular permutaciones y tenemos las combinaciones, simplemente con multiplicar estas por el r! obtendremos las permutaciones requeridas. [4]

$$nPr = nCr\ r!$$

Y si deseamos r = n entonces;

$$nCn = n! / (n - n)!n! = n! / 0!n! = 1$$

¿Qué nos indica lo anterior?

Que cuando se desea formar grupos con la misma cantidad de elementos con que se cuenta solo es posible formar un grupo.

Ejemplos:

1)a. Si se cuenta con 14 alumnos que desean colaborar en una campaña pro limpieza del Tec, cuantos grupos de limpieza podrán formarse si se desea que consten de 5 alumnos cada uno de ellos, b.si entre los 14 alumnos hay 8 mujeres, ¿cuántos de los grupos de limpieza tendrán a 3 mujeres?, c.¿cuántos de los grupos de limpieza contarán con 4 hombres por lo menos? [4]

Solución:

2) n = 14, r = 5 14C5 = 14! / (14 – 5)!5! = 14! / 9!5!

= 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x

= 2002 grupos [4]

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$_{n}C_{r}$ = Combinaciones de *r* objetos tomados de entre *n* objetos
Donde se observa que,

$$_{n}C_{r} = \frac{_{n}P_{r}}{r!}$$

Imagen sacada de: https://www.monografias.com/trabajos93/tecnicas-conteo/tecnicas-conteo.shtml

Entre los 2002 grupos de limpieza hay grupos que contienen solo hombres, grupos que contienen solo mujeres y grupos mixtos, con hombres y mujeres.

b. n = 14 (8 mujeres y 6 hombres), r = 5

En este caso nos interesan aquellos grupos que contengan 3 mujeres y 2 hombres [4]

8C3*6C2 = (8! / (8 -3)!3!)*(6! / (6 – 2)!2!)

= (8! / 5!3!)*(6! / 4!2!)

= 8 x7 x 6 x 5 /2!

= 840 grupos con 3 mujeres y 2 hombres, puesto que cada grupo debe constar de 5 personas

c. En este caso nos interesan grupos en donde haya 4 hombres o más

Los grupos de interés son = grupos con 4 hombres + grupos con 5 hombres

= 6C4*8C1 + 6C5*8C0 = 15 x 8 + 6 x 1 = 120 + 6 = 126

2) Para contestar un examen un alumno debe contestar 9 de 12 preguntas,

a. ¿Cuántas maneras tiene el alumno de seleccionar las 9 preguntas?,

b. ¿Cuántas maneras tiene si forzosamente debe contestar las 2 primeras preguntas?,

c. ¿Cuántas maneras tiene si debe contestar una de las 3 primeras preguntas?,

d .¿Cuántas maneras tiene si debe contestar como máximo una de las 3 primeras preguntas?

Solución:

a. n = 12, r = 9

12C9 = 12! / (12 – 9)!9! = 12! / 3!9! = 12 x 11 x 10 / 3!

= 220 maneras de seleccionar las nueve preguntas o dicho de otra manera,

el alumno puede seleccionar cualquiera de 220 grupos de 9 preguntas para contestar el examen.

b. 2C2*10C7 = 1 x 120 = 120 maneras de seleccionar las 9 preguntas entre las que están las dos primeras preguntas

c. 3C1*9C8 = 3 x 9 = 27 maneras de seleccionar las 9 preguntas entre las que está una de las tres primeras preguntas

d. En este caso debe seleccionar 0 o 1 de las tres primeras preguntas

3C0*9C9 + 3C1*9C8 = (1 x 1) + (3 x 9) = 1 + 27 = 28 maneras de seleccionar las preguntas a contestar [4]

Combinaciones con repetición

Digamos que tenemos cinco sabores de helado: banana, chocolate, limón, fresa y vainilla. Puedes tomar 3 paladas. ¿Cuántas variaciones hay? [3]

Vamos a usar letras para los sabores: {b, c, l, f, v}. Algunos ejemplos son

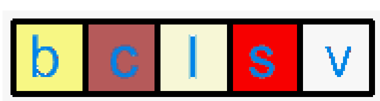
{c, c, c} (3 de chocolate)

{b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla)

{b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla)

(Y para dejarlo claro: hay **n=5** cosas para elegir, y eliges **r=3** de ellas.
El orden no importa, ¡y **sí** puedes repetir!)

Bien, no puedo decirte directamente cómo se calcula, pero te voy a enseñar una **técnica especial** para que lo averigües tú mismo. [3]



Imagina que el helado está en contenedores, podrías decir "sáltate el primero, después 3 paladas, después sáltate los 3 contenedores siguientes" ¡y acabarás con 3 paladas de chocolate! [3]

Entonces es como si ordenaras a un robot que te trajera helado, pero no cambia nada, tendrás lo que quieres. [3]

Ahora puedes escribirlo como →○○○→→→ (la flecha es saltar, el círculo es tomar) [3]

Imagen sacada de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html

Entonces los tres ejemplos de arriba se pueden escribir así:

{c, c, c} (3 de chocolate): →○○○→→→

{b, l, v} (uno de banana, uno de limón y uno de vainilla): ○→→○→→○

{b, v, v} (uno de banana, dos de vainilla): ○→→→→○○

Imagen sacada de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html

OK, entonces ya no nos tenemos que preocupar por diferentes sabores, ahora tenemos un problema ***más simple*** para resolver: “de cuántas maneras puedes ordenar flechas y círculos”. [3]

Fíjate en que siempre hay 3 círculos (3 paladas de helado) y 4 flechas (tenemos que movernos 4 veces para ir del contenedor 1º al 5º). [3]

Así que (en general) hay ***r* + *(n-1)*** posiciones, y queremos que ***r*** de ellas tengan círculos. [3]

Esto es como decir “tenemos ***r* + *(n-1)*** bolas de billar y queremos elegir ***r*** de ellas”. Es decir, es como el problema de elegir bolas de billar, pero con números un poco distintos. Lo podrías escribir así: [3]

$$\binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

donde ***n*** es el número de cosas que puedes elegir, y eliges ***r*** de ellas (Se puede repetir, el orden no importa)

Imagen sacada de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html

Es interesante pensar que podríamos habernos fijado en flechas en vez de círculos, y entonces habríamos dicho “tenemos ***r* + *(n-1)*** posiciones y queremos que ***(n-1)*** tengan flechas”, y la respuesta sería la misma… [3]

$$\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Imagen sacada de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html

¿Qué pasa con nuestro ejemplo, cuál es la respuesta?

$$\frac{(5+3-1)!}{3!(5-1)!} = \frac{7!}{3! \times 4!} = \frac{5040}{6 \times 24} = 35$$

Imagen sacada de: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html

Diagrama de Árbol.

Construir un diagrama de árbol es de algún modo dibujar un análisis de las posibles situaciones que pueden darse al intentar calcular la probabilidad de un suceso, especialmente cuando las posibilidades se multiplican unas a partir de otras. [5]

¿Te ha resultado un poco compleja ésta última afirmación? Quédate tranquilo, como siempre te explicaré con total claridad a partir de un ejemplo sencillo sobre el cuál iremos haciendo análisis y construyendo el diagrama de árbol a la vez. [5]

Imagina esta situación, de hecho, **un problema clásico**:
Tenemos una caja donde hay dos pelotas azules y dos rojas. La pregunta es ¿cuál es la probabilidad de obtener una pelota de color rojo? Es un problema ideal para representar a través de in diagrama de árbol que nos permitirá razonar. Éste podría ser el diagrama de árbol en cuestión: [5]

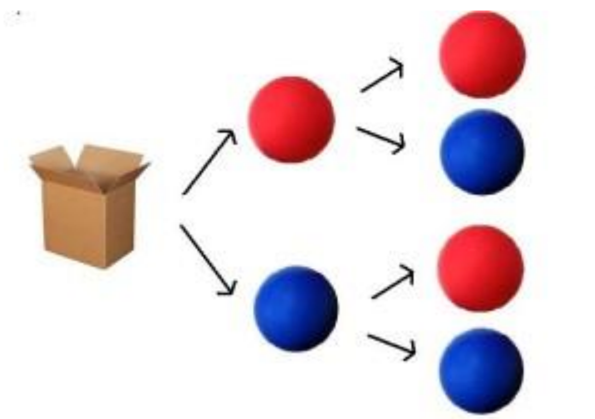


Imagen sacada de: https://matematicasmodernas.com/diagramas-de-arbol-en-probabilidad/

Es clara la conclusión a sacar: existen 3 casos favorables en un total de 4 posibles, por tanto, la probabilidad es ¾, es decir 0,75.

Otros casos pueden ser más complejos y en ellos, del mismo modo, un diagrama de árbol ayuda mucho. Por ejemplo, imagina que ha habido elecciones en el Consejo estudiantil de tu escuela y que cuatro son los finalistas del mismo; sus nombres son Rita, Luis, Paul y Nancy. Pero los cargos a los que aspiran son sólo tres, a saber: presidente, secretario y tesorero. [5]

La pregunta podría ser… ¿cuáles son las probabilidades de que Paul sea el presidente, Nancy la secretaria y Luis el tesorero? No es fácil de intuir sin la ayuda de un diagrama de árbol que podría ser el siguiente, disponiendo los cargos en tres columnas y escribiendo las diferentes posibilidades a partir de que cada uno de ellos fuera presidente. Observa: [5]

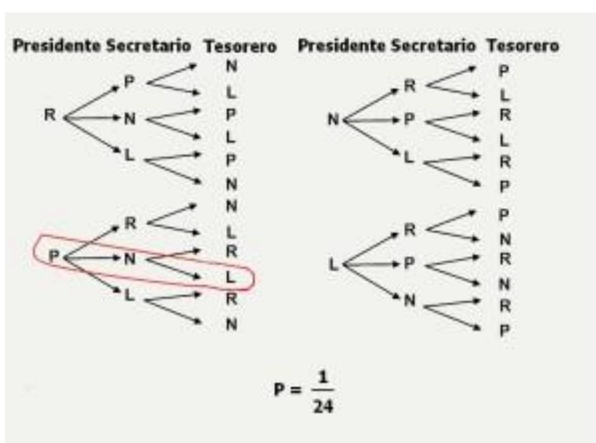


Imagen sacada de: https://matematicasmodernas.com/diagramas-de-arbol-en-probabilidad/

____

Allí queda señalada la posibilidad mencionada, y queda claro que es una sola en 24 posibles. Pero de aquí también podemos extraer una forma matemática de hacer el cálculo: observa que **4** son las posibilidades diferentes de presidente (porque son cuatro personas) y en cada una de ellas son **3** los posibles secretarios (los otros tres postulantes) y a su vez, para cada uno de ellos, **2** podrían ser los posibles tesoreros (los otros dos postulantes). Multipliquemos entre sí esos números y nos dará el **espacio muestral**: [5]

$$4 \text{ x } 3 \text{ x } 2 = 24$$

Como puedes ver, los diagramas de árbol son un instrumento muy útil a la hora de realizar cálculos de probabilidad. Te recomiendo hacerlos cada vez que tengas dudas, o que simplemente no recuerdes las fórmulas que aprenderemos en pocos días. [5]

III.CONCLUSIÓN

La estadística es el conjunto de técnicas que se emplean para la recolección, organización, análisis e interpretación de datos. Los datos pueden ser cuantitativos, con valores expresados numéricamente, o cualitativos, en cuyo caso se tabulan las características de las observaciones. Las estadísticas sirven en administración y economía para tomar mejores decisiones a partir de la comprensión de las fuentes de variación y de la detección de patrones y relaciones en datos económicos y administrativos. [6]

El problema de describir, resumir y analizar grandes cantidades de datos condujo a la creación de métodos y la utilización de diferentes técnicas de conteo que constituyen lo que ahora se denomina estadística. Existen diversas definiciones de estadística, sin embargo, nosotros describiremos la estadística como “el conjunto de procedimientos científicos que permite captar, clasificar, organizar, resumir y Analizar datos, así como para sacar conclusiones válidas y tomar decisiones razonables basado en tal análisis”. [6]

WEBGRAFIA

[1] «probabilidadestadisticaivangamboa.blogspot.com,» 03 2017. [En línea]. Available: http://probabilidadestadisticaivangamboa.blogspot.com/2017/03/tecnicas-de-conteo.html. [Último acceso: 09 07 2019].

[2] A. Jauregui, «www.lifeder.com,» [En línea]. Available: https://www.lifeder.com/tecnicas-de-conteo/. [Último acceso: 09 07 2019].

[3] «www.disfrutalasmatematicas.com,» [En línea]. Available: https://www.disfrutalasmatematicas.com/combinatoria/combinaciones-permutaciones.html. [Último acceso: 11 07 2019].

[4] Humberto, «www.monografias.com,» [En línea]. Available: https://www.monografias.com/trabajos93/tecnicas-conteo/tecnicas-conteo.shtml. [Último acceso: 11 07 2019].

[5] M. A. Morena, «matematicasmodernas.com,» 2014. [En línea]. Available: https://matematicasmodernas.com/diagramas-de-arbol-en-probabilidad/. [Último acceso: 11 07 2019].

[6] P. S. J. K. P. E. Ticona Bejarano Alex Daniel, «es.scribd.com,» 2013. [En línea]. Available: https://es.scribd.com/doc/154870808/Como-Ayudan-Las-Tecnicas-de-Conteo-a-Los-Ingenieros. [Último acceso: 9 07 2019].