

概率

- Frequentist (频率派)
 - 事件的概率是当我们无限次重复试验时，事件发生次数的比值。
 - 掷骰子、投掷硬币、纸牌游戏等。

概率

- Frequentist (频率派)
 - 事件的概率是当我们无限次重复试验时，事件发生次数的比值。
 - 掷骰子、投掷硬币、纸牌游戏等。
- 概率视为一种主观置信度
 - 明天下雨的概率是50%
 - 你愿意押1赔3（赢+1元，输-3元），在你的观念中，明天下雨的概率是多少？

概率

- $P(A,B)=P(A)P(B)$?
 - A : 第一枚硬币正面朝上; B : 第二枚硬币正面朝上
 - A : 第一天下雨; B : 第二天下雨

概率

- $P(A,B)=P(A)P(B)$?

- A : 第一枚硬币正面朝上; B : 第二枚硬币正面朝上 ✓
- A : 第一天下雨; B : 第二天下雨 ✗

概率

- 乘法法则:

$$P(A,B)=P(A)P(B|A)=P(B,A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A,B_1,B_2,B_3)=P(A)P(B_1|A)P(B_2|A,B_1)P(B_3|A,B_1,B_2)$$

$$P(\text{Grade} = A \mid \text{Student} = \text{Smart}) = 0.6$$

$$P(\text{Grade} = A) = 0.2$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart}) = 0.3$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart} \mid \text{Grade} = A) = ?$$

概率

- 乘法法则:

$$P(A,B)=P(A)P(B|A)=P(B,A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A,B_1,B_2,B_3)=P(A)P(B_1|A)P(B_2|A,B_1)P(B_3|A,B_1,B_2)$$

$$P(\text{Grade} = A \mid \text{Student} = \text{Smart}) = 0.6$$

$$P(\text{Grade} = A) = 0.2$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart}) = 0.3$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart} \mid \text{Grade} = A) = 0.9$$

If $P(\text{Grade} = A) = 0.4$, then

$$P(\text{Student} = \text{Smart} \mid \text{Grade} = A) = ?$$

概率

- 乘法法则:

$$P(A,B)=P(A)P(B|A)=P(B,A)=P(B)P(A|B)$$

$$P(A,B_1,B_2,B_3)=P(A)P(B_1|A)P(B_2|A,B_1)P(B_3|A,B_1,B_2)$$

$$P(\text{Grade} = A \mid \text{Student} = \text{Smart}) = 0.6$$

$$P(\text{Grade} = A) = 0.2$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart}) = 0.3$$

$$P(\text{Student} = \text{Smart} \mid \text{Grade} = A) = 0.9$$

If $P(\text{Grade} = A) = 0.4$, then

$$P(\text{Student} = \text{Smart} \mid \text{Grade} = A) = 0.45$$

概率

- 乘法法则:

$$P(A, B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

$$P(A, B_1, B_2, B_3) = P(A)P(B_1 | A)P(B_2 | A, B_1)P(B_3 | A, B_1, B_2)$$

$P(\text{两只大眼睛, 四条腿, 白肚皮, 绿衣服})$

鸭妈妈说: 两只大眼睛 -> 大金鱼

大金鱼说: 四条腿 -> 大乌龟

大乌龟说: 白肚皮 -> 大白鹅

大白鹅说: 绿衣服 -> 青蛙

概率

- 乘法法则:

$$P(A, B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

$$P(A, B_1, B_2, B_3) = P(A)P(B_1 | A)P(B_2 | A, B_1)P(B_3 | A, B_1, B_2)$$

$P(\text{两只大眼睛, 四条腿, 白肚皮, 绿衣服})$

鸭妈妈说: 两只大眼睛 \rightarrow 大金鱼

大金鱼说: 白肚皮 \rightarrow 大白鹅

大白鹅说: 四条腿 \rightarrow 大乌龟

大乌龟说: 绿衣服 \rightarrow 青蛙

概率

- 乘法法则:

$$P(A, B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

$$P(A, B_1, B_2, B_3) = P(A)P(B_1 | A)P(B_2 | A, B_1)P(B_3 | A, B_1, B_2)$$

- 加法法则: $P(A) = P(A, B) + P(A, B^c)$

$$P(A) = \sum_B P(A, B) = \sum_{i=1}^n P(A, B_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(A | B_i)P(B_i)$$

概率

- What's the value of $\sum_G P(G | X=\text{boy})$
 - 1
 - $P(X=\text{boy})$
 - None of the above

概率

- What's the value of $\sum_G P(G | X=\text{boy})$
 - 1
 - $P(X=\text{boy})$
 - None of the above

概率

- Exercise: Suppose there are k types of fruits, and that each new one collected is, independent of previous ones, a type j fruit with probability p_j , $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Find the probability that the n -th fruit collected is a different type than any of the preceding $n-1$.

概率

- Exercise: Suppose there are k types of fruits, and that each new one collected is, independent of previous ones, a type j fruit with probability p_j , $\sum_{j=1}^k p_j = 1$. Find the probability that the n -th fruit collected is a different type than any of the preceding $n-1$.

$$P(N) = \sum_{j=1}^k P(N | T_j) P(T_j)$$

Solution:

$$= \sum_{j=1}^k (1 - p_j)^{n-1} p_j$$

概率

- 假设有一盒骰子，里面有4面的（点数为1、2、3、4），6面的、8面的、12面的、20面的均匀骰子各1个。如果我随机从盒子中选一个骰子，投掷它得到了点数5。那么我选中的骰子为4面、6面、8面、12面、20面的概率各是多少？

概率

- 假设有一盒骰子，里面有4面的（点数为1、2、3、4），6面的、8面的、12面的、20面的均匀骰子各1个。如果我随机从盒子中选一个骰子，投掷它得到了点数5。那么我选中的骰子为4面、6面、8面、12面、20面的概率各是多少？

答案: 0, 0.392, 0.294, 0.196, 0.118

概率

- 如果你参加“来做个交易”节目，其规则是这样的：
 - 主持人向你示意三个关闭的大门，然后告诉你每个门后都有一个奖品：一个奖品是一辆车，另外两个是像花生酱和面包这样不值钱的奖品。奖品随机配置，且主持人知道每个奖品在哪。
 - 游戏的目的是要猜哪个门后有车。如果你猜对了就可以拿走。
 - 你先挑选一扇门，我们姑且称之为A，其他两个称为B和C。
 - 在打开你选中的门A之前，为了增加悬念，主持人会打开B或C中一个没有车的门来增加悬念（如果汽车实际上就是在门A后面，那么主持人打开门B或门C都是安全的，此时他可以随意选择一个；如果汽车在门B后面，那么他会打开门C）。
 - 然后主持人给你一个选择：坚持最初的选择还是换到剩下的未打开的门上。两个选择能够拿走汽车的概率分别是多少？

概率

- 我们将假设用 H 来表示，数据用 D 来表示。如果数据 D 为：主持人打开了门B，而且没有汽车在后面，那么可得如下表格：

先验概率 $P(H)$		似然度 $P(D H)$	$P(H)P(D H)$	后验概率 $P(H D)$
假设1：汽车在门A后面	1/3	1/2	1/6	1/3
假设2：汽车在门B后面	1/3	0	0	0
假设3：汽车在门C后面	1/3	1	1/3	2/3

- 如果数据 D 为：主持人打开了门C，而且没有汽车在后面，同理可得，假设1、2、3的后验概率为1/3、2/3、0。因此，如果你坚持选择门A，中奖概率只有1/3；而如果你换到另外一个门，你的机会将是2/3。